A. STODOLA

DAMPF- UND GAS-TURBINEN



SECHSTE AUFLAGE

DAMPF- UND GAS-TURBINEN

MIT EINEM ANHANG ÜBER DIE AUSSICHTEN DER WÄRMEKRAFT-MASCHINEN

VON

A. STODOLA

DR. PHIL., Dr.-Ing., PROFESSOR AN DER EIDGENÖSSISCHEN TECHN. HOCHSCHULE IN ZÜRICH

SECHSTE AUFLAGE

UNVERÄNDERTER ABDRUCK DER V. AUFLAGE
MIT EINEM NACHTRAG NEBST ENTROPIE-TAFEL
FÜR HOHE DRÜCKE UND B¹T-TAFEL ZUR
ERMITTELUNG DES RAUMINHALTES

MIT 1138 TEXTABBILDUNGEN
UND 13 TAFELN



SPRINGER-VERLAG BERLIN HEIDELBERG GMBH
1924

Additional material to this book can be downloaded from http://extras.springer.com

ISBN 978-3-642-50544-7 ISBN 978-3-642-50854-7 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-642-50854-7

Ursprünglich erschienen bei A. Stodola-Zürich 1924
Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1924

Vorwort zur fünften Auflage.

Der Dampfturbinenbau hat seit dem Erscheinen der IV. Auflage dieses Buches, trotz der Unterbrechung der Entwickelung durch den Weltkrieg, abermals mächtige Fortschritte gemacht. Durch unablässige zähe Arbeit und zahlreiche Verbesserungen im kleinen und großen wurde die Zuverlässigkeit und Betriebssicherheit wie auch die Wirtschaftlichkeit der Dampfturbine im Brennstoff- und Ölverbrauch auf eine Stufe der Vollkommenheit gehoben, daß die beherrschende Stellung, die sie im Gebiete der Großkrafterzeugung einnimmt, in absehbarer Zukunft kaum bestritten werden dürfte.

Diesem Fortschritt will durch Zusammenfassung des Erreichten und durch neue Beiträge auch die neue Auflage dieses Buches dienen. Sie wendet sich in erster Linie an die wissenschaftlich arbeiten wollenden Ingenieure und Studierenden, obschon auch der verantwortliche Betriebsleiter Wissenswertes und vielleicht Neues in dem Buche antreffen wird. Die wesentliche Absicht jedoch besteht im Nachweis, daß nur die wissenschaftliche Behandlung aller Fragen dauernd, d. h. für lange Zeiträume gerechnet, das höchste Maß des Fortschrittes und die höchste Wirtschaftlichkeit zu verbürgen vermag. Gewiß, man kann viel auf dem Wege reiner Empirie erreichen; ein von Haus aus hochbegabter „Praktiker“ wird fruchtbarer wirken können als ein unpraktischer „Theoretiker“. Aber man vergesse nicht, welch schweres Lehrgeld schon bei einseitig auf die „Erfahrung“ gegründeter Arbeitsweise hat gezahlt werden müssen. Eingeweihte wissen genau, wie manche Anstalt auf ein totes Geleise geriet und abgewirtschaftet hat, die sich zulange sträubte die Konsequenzen der neuzeitlichen Entwickelung zu ziehen. Nicht zuletzt, weil der eingefleischte Empiriker seine Verlegenheit unter einer Mißachtung alles Wissenschaftlichen und seiner Vertreter zu verbergen pflegt. Auf der andern Seite werden wir uns hüten in der „Theorie“ das alleinige Heil des Maschinenbauers zu erblicken. Die Wirklichkeit ist zu verwickelt, als daß die Verästelung der zahllosen wirkenden Ursachen in voller Allgemeinheit erfaßt und wissenschaftlich bewältigt werden könnte. Wir können das „Großexperiment“, sei es als erste Fragestellung an die Natur, sei es als Kontrolle der wissenschaftlichen Voruntersuchung nie entbehren. Dazu tritt eine psychologisch-pädagogische Erwägung. Die wissenschaftliche Erkenntnis durchläuft zwei Stadien; das erste besteht, dem erfinderischen Denken verwandt, in der intuitiven Erfassung der Zusammenhänge im großen Ganzen, das zweite bezweckt die exakte Feststellung der Verhältnisse nach Maß und Zahl. Der nur verwaltend Leitende darf sich mit dem für die bloß rezeptive Aufnahme weitaus bequemeren ersten zufriedengeben; der verantwortliche Konstrukteur, der das „Werk“ (und die „Werkzeichnung“) zu schaffen hat, muß in das mühevolle zweite eindringen. Mühevoll, weil die Feststellung nach Maß und Zahl fast notwendigerweise die Einkleidung in mathematisches Gewand bedingt, mit den fatalen Möglichkeiten endlos gesteigerter Feinheit und logischer Schärfe, die uns unversehens bei den Wirrnissen der schwierigsten Aufgaben der mathematischen Physik landen lassen. Hier beginnt eine Gefahr, auf die hinzuweisen Pflicht des Lehrers ist. Auch dieses Buch macht von mathematischen Hilfsmitteln einfacher und verwickelterer Art Gebrauch. Möge der Studierende, wie schon das Vorwort zur IV. Auflage empfahl, nur so viel davon aufnehmen, als er aus eigener Kraft nicht bloß zu verstehen, sondern zu handhaben, d. h. zu beherrschen vermag. Es gilt die dort gemachte Aussage: „Belasten wir uns mit zu viel Feinheiten der Funktionentheorie, so verdeckt diese wie eine dunkle Wolke den freien Blick: Die geistige Frische und die Freiheit des Gedankenspieles, die ebenso zu schöpferischen Taten, wie zur Wahrnehmung kleinerer Vorteile erforderlich sind, gehen verloren. ... Es kommt zum tragischen Konflikt der (logischen) Gewissenhaftigkeit mit dem Ziele der Ingenieurtätigkeit; die an sich lobenswerte vertiefte Erforschung des Vorhandenen wird zur Hauptsache — der technische Fortschritt verschwindet aus dem Gesichtsfelde. Wir bleiben an den Fußangeln einer unlös-

baren Differentialgleichung hängen, während draußen reiches Leben flutet und neue Erfindungskeime sprossen.“ Ebenso groß ist übrigens die Gefahr, daß ob der Pflege der zweiten Erkenntnisart die erste verkümmert, da es eine verderbliche, aber unbestreitbare Eigenschaft der mathematischen Symbole ist, daß man sich ihrer bedienen, mit ihnen arbeiten kann, ohne sich „etwas dabei denken“ zu müssen. Dieser pädagogischen Gefahr entgegenzuarbeiten ist eine Hauptaufgabe der Hochschul- und der Selbsterziehung.

Der weite Inhalt des Buches bedingt ein Lesen mit Auswahl, eine Übung, die dem Studierenden lebhaft empfohlen zu werden verdient. Die Gliederung ist denn so folgerichtig als möglich angelegt. Für die Kenner der IV. Auflage fügen wir hier eine Übersicht der wichtigsten Neuheiten bei.

Die **neue Entropietafel I für Wasserdampf** ist mit Hilfe der Eichelbergschen Formeln für die Zustandsgrößen des Wasserdampfes, wohl der derzeit genauesten und handlichsten, entworfen worden. Wie aus Abschnitt 10 hervorgeht, darf man der Extrapolation der bekannten Versuchswerte bis gegen 80 at hin Vertrauen entgegenbringen.

Die **J. S. Tafel II** ist für Rechnungen bei teilweiser oder völliger **Unterkühlung des Dampfes** bestimmt. Die erheblich verwickeltere Natur der thermodynamischen Beziehungen, die hierbei auftreten, hat mich veranlaßt, die Erörterung der Unterkühlung unter die Sonderaufgaben Abschn. 178—180 einzureihen und für gewöhnliche Rechnungen vorerst nach Abschn. 41 ein einfaches empirisches Vorgehen zu empfehlen.

Die Entropietafel I für Gase setzt die spezifische Wärme in der Form $\mathfrak{C}_v = a_v + bT$ mit für alle Gase gleichem a_v voraus und benutzt schiefwinklige Koordinaten. **Die Gastafel II** enthält die mit den wirklichen spezifischen Wärmen gerechneten genaueren Entropiewerte und ist auf ein rechtwinkeliges Koordinatenkreuz bezogen.

Neue Abschnitte sind: die Turbulenz, die Prandtlschen Grenzschichten, die Ablösung bei Verdichtungsstößen, Überbrückung von Spaltverlusten, Ausdehnung im Schrägabschnitt einer Düse. **Der Wirkungsgrad der Ausdehnung in Düsen** mit Rücksicht auf die Versuche von Christlein, Flügel, neue Versuche des Verfassers und Brown, Boveri & Cie. Die Topographie des Druckverlaufes in Schaufeln; der Einfluß der Sekundärströmung in Krümmern. Über die **Schaufelreibung** bieten Versuche von Brown, Boveri & Cie. einen wichtigen Beitrag. Neue Wirkungsgradlinien bringen Abschn. 58, 60, wobei letztere sich auf festbleibende Auslaßwinkel beziehen, und einmal u/c_1, das andere Mal u/c, wo $Ac^2/2g$ das reine adiabatische Stufengefälle bedeutet, als Abszissen dienen. Die Summe der Umfangsgeschwindigkeits-Quadrate wird als Kennzahl nach Gebühr hervorgehoben. Daneben wurde mit Rücksicht auf ihre Verbreitung in der Praxis auch die Parsonssche Kennzahl, die im wesentlichen $(u/c)^2$ ist mitaufgenommen. Abschn. 61 enthält einen Versuch, den **Einfluß der Beiwerte** φ und ψ mit und ohne Spaltexpansion auf den **Wirkungsgrad der mehrstufigen Gleichdruckturbine** festzustellen. Der ausschlaggebende Einfluß des letzten Rades auf die Leistung einer Turbine kommt in Abbildung 238 zum Ausdruck. Die Schaufelwirkungsgrade der Überdruckturbine sind durch ausführlichere Schaubilder und analytische Formeln wiedergegeben. Die Theorie der Radialturbine wird mit Rücksicht auf die Ljungström-Turbine eingehender behandelt. Für die **Berichtigungsziffern des Dampf- und Wärmeverbrauches** bei Abweichungen der Dampfverhältnisse gegenüber der Gewährleistung sind in Abschn. 66 die in England als Norm anerkannten **Baumannschen Zahlen** aufgenommen. Wir verweisen auf die seither von Baumann[1]) vorgenommenen Änderungen, die auch wir für empfehlenswert halten. Der Einfluß der Luftleere auf den Dampfverbrauch ist einer eingehenderen Betrachtung unterworfen.

Im praktischen Teil ist zu verweisen auf die Konstruktion der Leit- und Laufschaufeln; die Erörterungen über Verschleiß und Rost; das Verfahren von Holzer, das Differenzrechnen und das Verfahren von Donath zur Berechnung der Scheibenräder; die Maschinen für Massenausgleich von Lawaczek, Heymann, Akimoff. Bei der kritischen Drehzahl sind der Einfluß der Bewegungswiderstände, die Kreiselwirkung der schiefgestellten Scheiben, die höheren kritischen Drehzahlen, die Welle auf drei Stützen, die Verfahren von Raleigh, Blaeß und Krause berücksichtigt. Angesichts der neuen Entwicklung der Lagerkonstruktion mußte auf die Theorie der Schmiermittelreibung eingegangen werden. Auch die neuesten und wertvollen Versuche, über die Lasche in seinem Buche: Konstruktion und Material, berichtet, sowie diejenigen von Brown, Boveri & Cie. sind ausführlich besprochen. Über die Festigkeit der halbierten Zwischenböden sind auf Grund neuer eigener Versuche und über die Wärmedehnung von Welle und Gehäuse nach Frahm Angaben mitgeteilt. Der Abschnitt über die **Reglerkraftgetriebe** enthält die neuesten Ausgestaltungen dieser wichtigen Mechanismen, zugleich mit den Zubehören, wie Sicherheitsregler, Ölpumpen, Ölkühler und Ölleitungsplänen.

Die **Turbinenbauarten** wurden nach dem Vorgehen der früheren Auflage von ein- zu mehrstufigen Ausführungen systematisch fortschreitend unter Nennung der ausführenden Anstalten besprochen. Es schien uns, daß diesen Anstalten eine gewisse Berechtigung zusteht, ihr im Laufe vieler Jahre durch unablässige Arbeit geschaffenes Werk in seiner Gänze dem Leser vorgeführt zu sehen. Da das Zeichnungsmaterial zum großen Teil noch während des Krieges beschafft werden mußte, enthält das Buch begreif-

[1]) Journal of the Instit. of Electr. Eng. Vol. 59, Nr. 302; Juni 1921.

licherweise **manche Lücke, die man entschuldigen wird.** Der Abschnitt über die **Schiffsturbine** wurde der Wichtigkeit des Gegenstandes gemäß vollständig umgearbeitet. So ist insbesondere die **Zahnradübersetzung** in Abschn. 134 ausführlich besprochen: Dabei schien uns nicht bloß in historischem Interesse, sondern zu dauerndem Festhalten höchst schwieriger konstruktiver Lösungen und gewaltiger Ausführungen geboten, auch die Turbine mit unmittelbarem Schraubenantriebe angemessen zu berücksichtigen. So finden sich denn unter den Ausführungsbeispielen auch einige der größten Vertreter dieser Bauart sowie moderne Turbinen mit Zahnradantrieb. Unter den Turbinen für Sonderzwecke erfuhr die **Frisch- und Abdampfturbine** wie auch die **Entnahme-** und **Gegendruckturbine** eingehende Berücksichtigung. Die anziehende Lösung der **Turbinenlokomotive** von Zoelly konnte noch aufgenommen werden. Neuere **Kleinturbinen** sind in Abschn. 147a besprochen. Die **Oberflächenkondensation**, ist nach modernen Gesichtspunkten umgearbeitet. Kreisel- und Dampfstrahlluftpumpen sind ausführlicher besprochen. Es schien uns angemessen, **Betriebsfragen** einen besonderen Hauptteil zu widmen, wo insbesondere die **Anfressungen in Oberflächenkondensatoren** zur Sprache kommen. Unter den Sonderproblemen wurden die hydronamischen Grundgleichungen besser ausgearbeitet; die Turbinentheorie ist durch Aufnahme des neuen **Begriffes der Zirkulation** auf ein breiteres Fundament gestellt worden. Neu sind, insbesondere die Abschnitte über Verdichtungsstoß und Verdünnungswelle; das dynamische Ähnlichkeitsgesetz; die Turbulenz; die genauere Form der Durchflußgleichung; die Schmiermittelreibung, zweidimensional in graphischer Vereinfachung. Die Abschnitte 178 bis 180 enthalten, wie erwähnt, das, was wir über Unterkühlung kennen, mit einer ausführlichen Theorie und Anwendung davon auf Turbinenaufgaben. Eine bemerkenswerte zeichnerische Integration nach Meißner ist in Abschn. 182 aufgenommen; ferner die Beanspruchung der Scheibenräder über die Streckgrenze; die wichtigen **Biegungsschwingungen der Laufscheiben**; die kritischen Drehzahlen höherer Ordnung (allgemeiner behandelt); die Wellenschwingung unter dem Einfluß der Kreiselkräfte und der Schwere; die kritischen Störungen 2. Ordnung, hervorgerufen durch Eigengewicht, ungleiche Elastizität, ungleichmäßigen Antrieb; Schaufelschwingungen unter dem Einfluß der Fliehkraft; die Festigkeit der Kugel-, der Kegel- und der Ringflächenschale; die **Ausbreitung der Temperatur beim Anwärmen der Dampfturbine; der Kreiselverdichter.**

Zum Schluß ist der Gasturbine eine eingehendere Behandlung gewidmet. Durch die verdienstvollen Arbeiten von Holzwarth-Thyssen sind wir um wichtige Erkenntnisse und Erfahrungen bereichert. Bekanntlich sind anderweitige Versuche großen Stiles, von starken Kräften unterstützt, im Gange und der Vollendung nahe. Ob die Gasturbine wirtschaftlich mit der Dampfturbine in Wettbewerb zu treten vermag ist zweifelhaft, — hängt übrigens von so verwickelten volkswirtschaftlichen Fragen, wie Vergasungszentralen, Gewinnung und Preis der Nebenerzeugnisse ab, daß eine bestimmte Voraussage unmöglich ist. Auf alle Fälle werden der Industrie in Bälde betriebsfähige Gasturbinen zur Verfügung stehen und sicher passende Sonderverwendungsgebiete ausfindig zu machen vermögen. Daher wird jedem Turbinenkonstrukteur eine Beschäftigung mit der Theorie der Gasturbine nahegelegt.

Die „Aussichten der Wärmekraftmaschine“ sind durch Aufnahme der Nernstschen Forschungen von einem thermodynamisch festen Boden aus beurteilbar; wir wissen heute genau, woran wir sind. Um so mehr Veranlassung hat der wissenschaftlich arbeitende Ingenieur, mit den Grenzen des Erreichbaren vertraut zu werden, um an der großen Aufgabe, die Wirtschaftlichkeit der Wärmekraftmaschine zu steigern, erfolgreich mitarbeiten zu können.

Zum Schluß danke ich meinen Assistenten und Herrn Ing. O. Keller, der die zweiten Korrekturen las, für ihre freundliche Mithilfe, wie auch der Verlagsanstalt für wirksame Förderung während der Drucklegung.

Zürich, Ende September 1921.

Vorwort zur VI. Auflage.

Angesichts des kurzen Zeitraumes, der seit dem Erscheinen der V. Auflage verflossen ist, durfte deren Inhalt, nach Berichtigung der Druckfehler, für die VI. Auflage unverändert beibehalten werden. Die seither aufgetauchten wichtigsten Neuerungen und neue theoretische Beiträge sind in einem „Nachtrag“ vereinigt, dessen Hauptteil die mit Rücksicht auf die modernen Bestrebungen des Dampfturbinenbaues entworfene neue Entropietafel für hohe Drücke bildet. Um den Besitzern der V. Auflage die Möglichkeit einer Ergänzung auf den Stand der VI. Auflage zu bieten, wurde der Nachtrag auch als Sonderabdruck in den Buchhandel gebracht.

Zürich, Ende Januar 1924. **A. Stodola.**

Inhaltsübersicht.

Seite

D. Verhalten der Dampfturbine unter veränderten Betriebsverhältnissen.

V. Konstruktion der wichtigsten Turbinenelemente.

VI. Die Dampfturbinenbauarten.

VII. Die Schiffsturbine.

A. Schiffsturbine mit unmittelbarem Schraubenantrieb.

B. Turbinen mit mittelbarem Schraubenantrieb.

Seite

C. Ausführungsbeispiel von Schiffsturbinen.

VIII. Turbinen für Sonderzwecke.

IX. Die Kondensation.

IXa. Betriebserfahrungen.

X. Einige Sonderprobleme der Dampfturbinen-Theorie und -Konstruktion.

XI. Die Gasturbine.

Anhang.

XII. Die Aussichten der Wärmekraftmaschine.

Nachtrag.

Häufiger gebrauchte Bezeichnungen

in (lateinischer) alphabetischer Reihenfolge.

Es ließ sich nicht vermeiden, gewisse Buchstaben in zwei verschiedenen Bedeutungen zu verwenden; doch wurden dafür Gebiete gewählt, die möglichst selten zusammentreffen. Die Einheiten für Festigkeitsrechnungen sind cmkgsek. Für alles übrige bis auf wenige Ausnahmen mkgsek, daher auch die Pressungen in der Regel in kg/qm auszudrücken sind.

/ d. h. schiefer Bruchstrich, Zeichen der Division, nach neuerer Gepflogenheit verwendet, um die Formeln zusammenzudrängen. Beispiel: $a^2/2g = a^2 : 2g$
$A = {}^1/_{427}$ Wärmewert der Arbeitseinheit.
c absolute Dampfgeschwindigkeit m/sek.
d, ∂ Zeichen für Differentiation.
E Elastizitätsziffer.
e Exzentrizität, oder
" Basis der natürlichen Logarithmen.
F, f Querschnitte.
G_{st} stündliches Dampfgewicht (insgesamt).
G_{sek} sekundliches Dampfgewicht.
G_i Dampfverbrauch in kg für die innere PS-st.
G_e Dampfverbrauch in kg für die effektive PS-st.
g Beschleunigung der Schwere (beispielsweise $= 981$ in kgcmsek^{-2} Einheiten).
H, h „Wärmegefälle" in kcal.
i „Wärmeinhalt".
J Flächen-Trägheitsmoment.
kcal die Kilokalorie (an Stelle der früheren „WE").
L, l Länge.
$L_i L_e$ innere (früher „indizierte") bzw. effektive Arbeit für 1 kg Dampf in mkg-Einheiten.
lgn der natürliche Logarithmus.
M, m Masse ($= G/g$).
" Kraftmoment.
N Leistung in PS.
n Umlaufzahl i. d. Minute.
P Kraft.
PS Pferdestärken.
p absoluter Druck, stets in kg/qm wenn nichts anderes bemerkt.
Q Wärmemenge in kcal.
q Flüssigkeitswärme in kcal für 1 kg.
" Belastung für die Längeneinheit.
r äußere Verdampfungswärme für 1 kg.
" Halbmesser.
S Entropie in kcal/T (insgesamt).
s Entropie für 1 kg.
st die Stunde.
sk oder sek die Sekunde.
t die Zeit in Sekunden.
" Temperatur in Celsiusgraden bei Wärmerechnungen.
T absolute Temperatur $= 273 + t$.
U innere Energie (Arbeitsfähigkeit) in kcal (insgesamt).
u innere Energie für 1 kg.
" Umfangsgeschwindigkeit m/sek.
V Rauminhalt in cbm (insgesamt).
v spezifischer Rauminhalt in cbm für 1 kg.
$\mathfrak{V}$ Rauminhalt für 1 kg-Molekül.
$\mathfrak{W}$ Wärmemenge in kcal für 1 kg-Molekül.
w relative Strömungsgeschwindigkeit m/sek.
x spezifische Dampfmenge.
x, y, z Koordinaten.
Z Verlust an kinetischer Energie in mkg.

α_0, α_1, α_2 Neigungswinkel der absoluten Dampfgeschwindigkeit gegen die Umfangsgeschwindigkeit am Ein- und Austritt in der Leitschaufel und am Austritt in der Leitschaufel.
β_1, β_2 Neigungswinkel der relativen Dampfgeschwindigkeit beim Ein- und Austritt in der Laufschaufel.
γ spezifisches Gewicht oder „Raumgewicht" kg/cbm.
Θ Massenträgheitsmoment.
φ, ψ Geschwindigkeitszahlen.
μ spezifische Masse $= \gamma/g$.
ν reziproker Wert des Verhältnisses der elastischen Quereinschnürung zur Längenausdehnung, für dehnbare Metalle $= 0{,}3$.
ω Winkelgeschwindigkeit.
ω_k kritische Winkelgeschwindigkeit.
ϱ innere Verdampfungswärme.
" Halbmesser.
σ_r, σ_t radiale, bzw. tangentiale Spannungen in kg/qcm.
τ Schubspannung in kg/qcm.
ξ radiale Ausdehnung einer umlaufenden Scheibe.
η Wirkungsgrad in Teilen der Einheit.
ζ Widerstandszahlen.

Zu berichtigende Druckfehler.

Seite	Zeile	Formel	
92	—	—	in Abb. 82 lies $w = w_m$ statt $w = w_n$.
167	5 u. 6 v. unten	—	lies für 1 kg Dampf statt eff. PS.
310	—	6	z' weglassen.
336	27 v. oben	—	mit $\sigma_{r_1} = 0$ statt mit gleichem σ_{r_1} wie vorhin.
337	—	15	lies im Nenner $1 - k_1$ statt $1 + k_1$.
337	—	16	lies im Nenner $1 - k_1$ statt $1 + k_1$.
339	—	25	lies im Nenner x^2 statt x_2.
339	—	26	lies $D' = D\left(\frac{x}{x'}\right)^2$ statt $D' = D\left(\frac{x'}{x}\right)^2$.
407	10 v. oben	—	einschieben Gleichheitszeichen nach $\mu \bar{p} u =$.
908	3 v. unten	—	lies Φ_z statt Φ_2.
909	1 v. unten	—	lies 271 statt 172.
997	—	—	in Abb. 1057a lies $\mathfrak{Q}'_{p3}$ statt $\mathfrak{Q}_{p3}$.
1043	9 v. unten	—	lies für den Rand statt der Rand.
1043	2 v. unten	—	lies Gitter statt Filter.
1046	7 v. oben		lies anzusehen statt anzusetzen.
1047	—	12	lies $\frac{F_{3r} c_{3r}}{v_3}$ statt $\frac{F_{3r} c_{3r}}{v_r}$.
1049	9 v. unten		lies dimensionslose statt dimensionale.
1052	—	—	Abb. 1094 und 1095 sind miteinander zu vertauschen.
1070	20 v. unten		lies $T_h = \mathfrak{H}_{p_2} T_2 / n' \mathfrak{C}_p'$.
1077	—	—	in Abb. 1098 lies Q_t statt Q_2.

Druckfehlerberichtigung.

Nachtrag S. 16 Gl. (4) erhält je links das Vorzeichen —
„ „ „ „ (5) soll lauten r_e/r_a statt r_a/r_e.

I. Einleitung.

Die Spannkraft des Dampfes und sein Arbeitsvermögen waren schon im grauen Altertum bekannt. Der „Erzdonnerer" von Archimedes soll ein Geschütz gewesen sein, aus dessen Lauf hochgespannter Dampf die Kugel trieb. Heron d. Ä. berichtet im Jahre 120 v. Chr. über eine von altägyptischen Priestern verwendete Vorrichtung[1]), bei der nach Abb. 1 gespannter Wasersdampf durch einen hohlen Schenkel in eine drehbare Kugel geleitet wird und durch zurückgebogene Röhrchen ausströmend die Kugel vermöge seines Rückdruckes in Drehung versetzt. Ebenfalls uralt waren die „Äolipilen", bronzene Hohlgefäße, in welchen Wasser, zum Sieden gebracht, hochgespannten Dampf bildete, der durch enge Mündungen mit großer Geschwindigkeit entwich. Indessen vergingen fast zwei Jahrtausende, bevor an eine wirkliche Ausbeute der Dampfkraft gedacht wurde. Der italienische Gelehrte Giovanni de Branca hat als Erster i. J. 1629 den Vorschlag gemacht, ein Schaufelrad durch den aus einer Äolipile tretenden Dampfstrahl in Bewegung zu setzen (Abb. 2) und die Drehung nutzbar zu verwerten, wenn auch zunächst bloß zum Drehen von Bratspießen. Sein Dampfrad mußte bei dem mangelhaften, in den Kinderschuhen der Entwicklung stehenden Zustand des Maschinenbaues spurlos verschwinden, und dies Los teilten eine große Anzahl späterer Vorschläge, von welchen keiner eine auch nur vorübergehende Ausführung erlebt hat. Wo sollte auch die außerordentliche Genauigkeit der Herstellung für das raschlaufende Dampfrad herkommen, da noch Watt[2]) frohlockt, daß einer seiner größeren Dampfzylinder „nur noch um $^3/_8$ Zoll engl." im Durchmesser oval war!

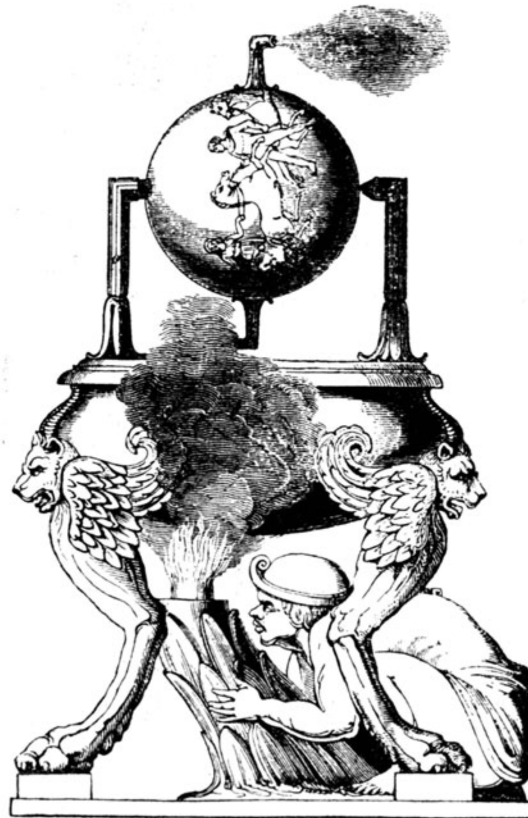


Abb. 1. Herons Drehkugel v. J. 120 v. Chr.

So war es denn der allerneuesten Zeit, dem Ende des vorigen Jahrhunderts, vorbehalten, das Ideal der nur drehende Bewegung ausführenden Dampfmaschine zu verwirklichen. Die Tatkraft zweier Männer hat den Umschwung vollzogen. Der schwedische Ingenieur de Laval konstruierte im Jahre 1883 die erste Kraft abgebende Dampfturbine und trat kurze Zeit darauf in die Fußstapfen de Brancas, indem er einen oder mehrere freie Dampfstrahlen auf die Schaufeln eines Turbinenrades wirken ließ, wie wir in Abb. 3 dargestellt sehen. Welchen Höhepunkt die Maschinenbaukunst mit dieser Ausführung erreichte, kann ermessen werden, wenn man bedenkt, daß die kleineren Räder der Lavalschen Turbinen bis zu 26000 Umdrehungen in

1) Matschoß, Die Entwickelung der Dampfmaschine. I. S. 282.

2) R. H. Thurston, Die Dampfmaschine. Leipzig 1880. S. 108.

der Minute machen, und daß bei größeren Rädern die Umfangsgeschwindigkeit 400 m/sk überschreitet, also der Geschwindigkeit von Geschossen nahe kommt. De Laval hatte die schwierige Aufgabe zu lösen, wie Räder zu bauen sind, damit ihre Beanspruchung so ungeheuer gesteigerten Fliehkräften gegenüber in zulässigen Grenzen bleibe. Hierzu trat die

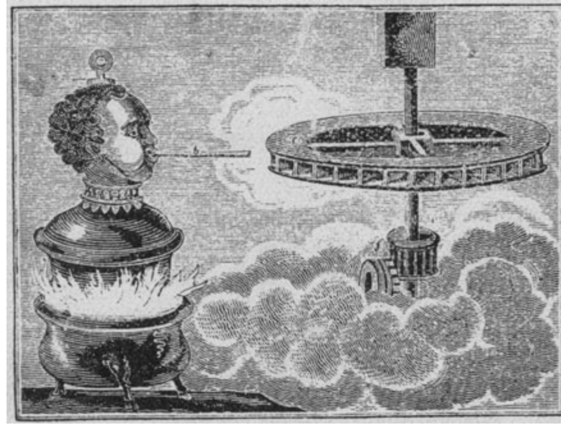


Abb. 2. Giovanni de Brancas Turbine v. J. 1629.

nicht minder schwierige Aufgabe, die Erschütterungsfreiheit zu wahren, die bei so raschlaufender Maschine eine unerläßliche Bedingung der Betriebssicherheit bildet. De Laval erkannte die Erscheinungen der „kritischen" Geschwindigkeit und überwand sie durch Anwendung seiner „biegsamen Welle".

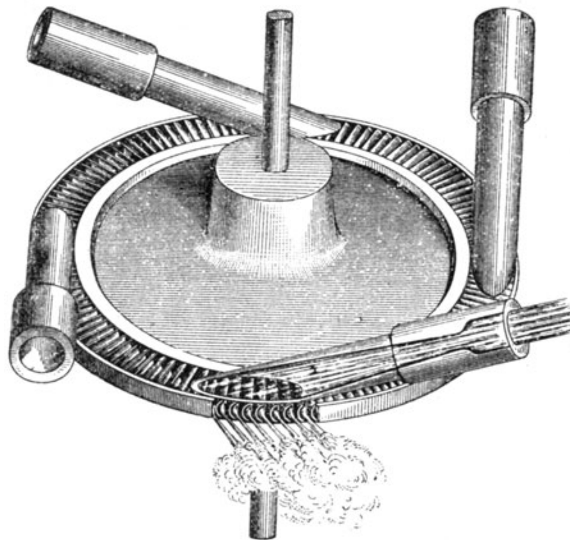


Abb. 3. Turbine von de Laval v. J. 1884

Von einem grundsätzlich verschiedenen Standpunkt ging Ch. A. Parsons aus. Seine in Abb. 4 dargestellte erste Ausführung[1]), die im Jahre 1884 vor die Öffentlichkeit gebracht wurde, besteht aus zwei Gruppen von je 15 hintereinandergeschalteter Turbinen, in einem gemeinsamen Gehäuse so angeordnet, daß der Dampf in der Mitte eintritt und nach beiden Seiten die Turbinengruppen durchströmt. Der Zweck der Anordnung war, das gesamte Druckgefälle in mehrere Teile zu teilen, um mit geringerer Umlaufzahl auszukommen. Die 10 pferdige Versuchsturbine mußte allerdings wegen der Kleinheit ihres bloß 74 mm betragen-

[1]) Aus Matschoß, Die Entwickelung der Dampfmaschine. II. S. 611.

den mittleren Raddurchmessers mit 17000 Umläufen in der Minute betrieben werden, doch bald gelang es Parsons, die Umlaufzahl insbesondere für große Einheiten auf ein praktisch wohl brauchbares Maß herabzusetzen.

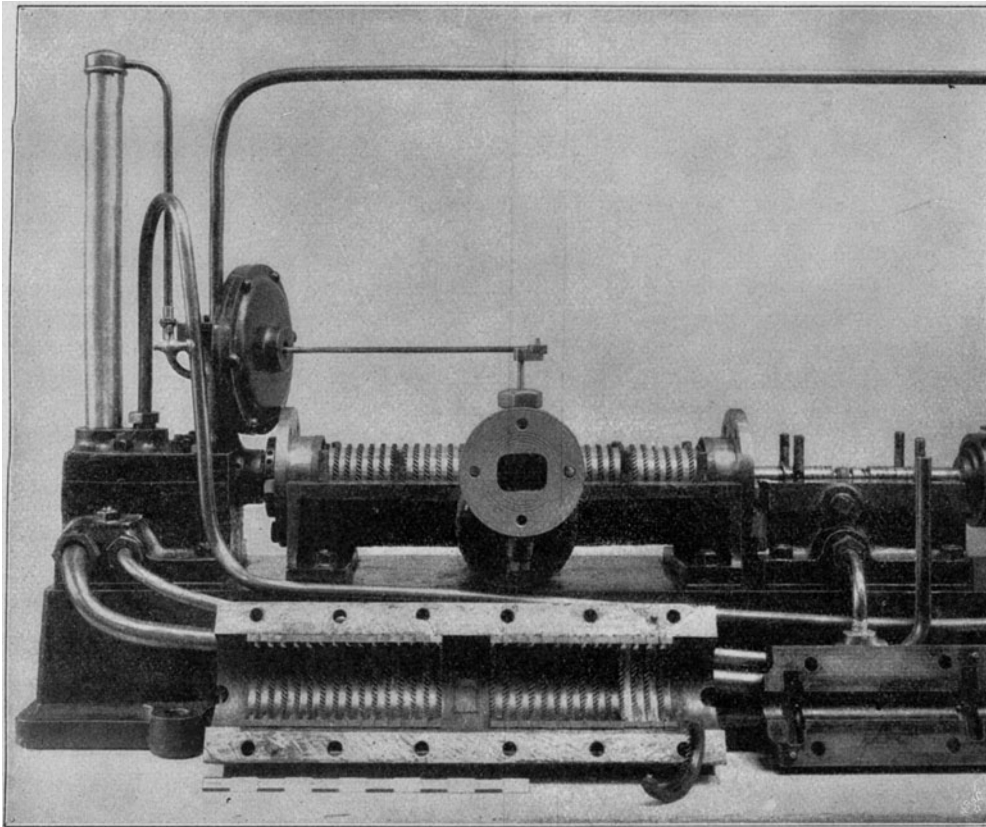


Abb. 4. Turbine von Parsons v. J. 1884.

Auch Parsons mußte in zäher Arbeit die zahlreichen Schwierigkeiten überwinden, die der neuen Bauart anhafteten, und es dauerte mehr als 15 Jahre, bis seine Bestrebungen allgemeine Anerkennung fanden. Dann allerdings eroberte sich seine Turbine in förmlichem Siegeslauf weite Anwendungsgebiete, da sie sich vortrefflich für die Abgabe der allergrößten Leistungen eignete, während de Laval wegen der unvermeidlichen Zahnradübersetzung bei verhältnismäßig kleinen Kräften stehen blieb.

Seit der Pariser Weltausstellung vom Jahre 1900 traten eine Anzahl anderer Wettbewerber auf den Plan, deren Bauarten uns weiter unten ausführlich beschäftigen werden.

II. Die Hauptsätze der Wärmelehre.

1. Das Perpetuum mobile erster Art.

Eine Maschine, die aus nichts Arbeit schafft oder mehr Arbeit liefert als ihr in irgendeiner (z. B. latenten) Form zugeführt wurde, ist unmöglich. Die Unmöglichkeit dieses sogenannten Perpetuum mobile (und zwar der „ersten Art" zum Unterschiede von dem weiter unten zu besprechenden der „zweiten Art") wurde von der Wissenschaft vor mehr als einem Jahrhundert vorausgeahnt, erhielt aber ihre endgültige Begründung erst durch das von Mayer (1842), Joule (1843) und Helmholtz (1847) aufgestellte Prinzip von der Erhaltung der Energie. Dies Prinzip bildet heute die unerschütterte Grundlage der gesamten Naturwissenschaft, also auch des Maschinenbaues.

Auf die Lehre von der Wärme angewendet, wird obiges Prinzip als sogenannter erster Hauptsatz wie folgt ausgesprochen:

Wärme und Arbeit sind äquivalent,

d. h. so oft Wärme als solche verschwindet, muß eine ihr äquivalente Energiemenge anderer Art, z. B. mechanischer Arbeit bei den Wärmekraftmaschinen, chemischer (gebundener) Energie bei durch Wärme bewirkten Zersetzungen, elektrischer Energie in den sogenannten Thermoketten usw. auftreten. Durch vielfache Messungen wurde bewiesen, daß einer technischen Wärmeeinheit (Kilogramm-Kalorie) die mechanische Arbeit von 427 Meter-Kilogrammen entspricht. Umgekehrt ist

$$A = \frac{1}{427}$$

der „Wärmewert" (das „Äquivalent") der Arbeitseinheit.

Energie wird vielfach mit Arbeitsfähigkeit, Arbeitsvermögen übersetzt, was für die Wärmekraftmaschine einen anschaulichen Sinn besitzt, der die Energie stets durch vermittelnde Körper, die „Träger" der Energie, die in die Maschine eintreten, zugeführt wird.

Diese Fähigkeit darf man nicht einseitig nur einem der beteiligten Stoffe zuschreiben, also z. B. nicht der Kohle allein, sondern der Kohle und der zu ihrer Verbrennung erforderlichen Sauerstoffmenge zusammengenommen.

Bekannt ist die Unterscheidung in kinetische, d. h. Bewegungsenergie, und in potentielle, d. h. gebundene Energie, die durch geeignete Lagenänderungen der Körper oder ihrer kleinsten Teilchen ausgelöst wird.

Wichtig ist ferner die Trennung in äußere und innere Energie. Erstere ist identisch mit der kinetischen Energie, die der „sichtbaren" Bewegung der Körpermasse entspricht. Die innere Energie wird gebildet durch die lebendige Kraft der vermuteten unsichtbaren Bewegung der kleinsten Teilchen und durch ihre potentielle Energie.

Die eigentliche Art und Beschaffenheit der inneren Energie ist uns im allgemeinen noch vollständiges Rätsel. Nur für die Wärme, wenigstens bei gasförmigen Stoffen, hat die „kinetische Gastheorie" mehr ins Einzelne gehende Vorstellungen ausgearbeitet. Hiernach besteht die Wärmeenergie bei „vollkommenen" Gasen ganz aus der kinetischen Energie der fortschreitenden und drehenden Bewegung der Moleküle. Der Druck ist die Folge der unzählbaren, unmeßbar rasch hintereinander erfolgenden Stöße der Moleküle gegen die Gefäßwand. Bei Dämpfen kommt in merklichem Maße die potentielle Energie der molekularen Anziehung ins Spiel.

2. Das Perpetuum mobile zweiter Art und der zweite Hauptsatz der Thermodynamik.

Wo immer eine Umwandlung von Wärme in Arbeit oder umgekehrt stattfindet, trifft das Energiegesetz unbedingt zu. Allein während Arbeit in Wärme (z. B. durch Reibung) stets

überführbar ist, können wir Wärme in Arbeit weder unbeschränkt, noch nach unserer Willkür umwandeln. Diese Umwandlung ist vielmehr an das Vorhandensein eines Temperatrugefälles und eine Wärmeabgabe an das tiefere Temperaturniveau gebunden. Der Wärmeinhalt des Meeres, der Atmosphäre und des ganzen Erdballs stellt einen ungeheuren Vorrat an Energie dar, und zahlreiche Erfinder haben sich mit dem Problem beschäftigt, diese Wärme, die dem Menschen kostenlos zur Verfügung steht, ohne Zuhilfenahme eines tieferen Temperaturniveaus, dessen Beschaffung eben praktisch unmöglich ist in Arbeit umzuwandeln. Eine Maschine, die die Umwandlung der aus einem einzigen Wärmebehälter geschöpften Wärme in Arbeit ohne jede anderweitige Änderung der Umgebung zu vollbringen vermöchte, wird nach Ostwald Perpetuum mobile zweiter Art genannt.

Wenn auch die bezeichneten Wärmevorräte streng genommen nicht unendlich groß sind, wie es die ewige Bewegung erheischen würde, so wird doch durch die stets auftretende Reibung und sonstige Verlustquellen immer wieder mechanische Arbeit in Wärme zurückverwandelt, und die von Ostwald gewählte Bezeichnung erscheint berechtigt.

Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik sagt nun aus, daß auch das Perpetuum mobile zweiter Art selbst bei Verwendung idealer, d. h. reibungsfreier, wärmedichter Maschinen unmöglich ist.

Die Umwandlung der Wärme der Umgebung in mechanische Arbeit ist selbstverständlich nicht an sich unmöglich, kann aber im Sinne des zweiten Hauptsatzes nur in Begleitung einer anderen, und zwar in der Regel dem Betrage nach weit größeren Energieumwandlung auftreten. Es gibt beispielsweise galvanische Ketten, die mehr elektrische Energie liefern, als der Wärmeentwicklung der sich chemisch bindenden Stoffmengen entspricht, wobei der Überschuß der Wärme der Umgebung entnommen wird. Solange wir über einen Vorrat für solche galvanische Ketten geeigneter Stoffe verfügen, wird also die Wärme der Umgebung „unentgeltlich" in Arbeit umgewandelt. Sollten dieselben aber auf künstlichem Wege aus anderen Urstoffen chemisch erzeugt werden, dann müßten wir so viel mechanische Arbeit nebenher in Wärme verwandeln, daß der frühere Gewinn mehr als aufgehoben würde. Diese Prozesse sind übrigens praktisch bedeutungslos, da der Betrag der umgewandelten Wärme für die Gewichtseinheit der verbrauchten Stoffe meist ein ungemein kleiner zu sein pflegt.

Ein noch einfacheres und selbstverständliches Beispiel bietet ein verdichtetes Gas, das wir bei atmosphärischer Temperatur isothermisch expandieren lassen. Hierbei wird ein der geleisteten Arbeit genau äquivalentes Wärmequantum in Arbeit verwandelt. Falls wir also einen Vorrat an komprimierten Gasen in der Natur vorfinden, wird solche Arbeitserzeugung möglich. Sobald das Gas künstlich verdichtet werden muß, hört jede Ökonomie des Prozesses auf. Über weitere chemisch-thermische Prozesse ähnlicher Art wird später berichtet und nachgewiesen, daß sie praktisch ebenfalls keine Bedeutung haben.

Wir wiederholen daher, daß das Perpetuum mobile zweiter Art in der Umwandlung der Wärme einer einzigen Wärmequelle, also ohne Vorhandensein eines Temperaturgefälles bestehen würde, wobei die gewonnene Arbeit zum Heben eines Gewichtes verwendet oder in anderer Weise, jedoch so aufgespeichert würde, **daß irgendwelche Zustandsänderungen in anderen Körpern mit Ausnahme des Behälters selbst ausgeschlossen wären.** Und nur in diesem Sinne ist dasselbe als Unmöglichkeit anzusehen.

Clausius, der den zweiten Wärmesatz begründete, gab ihm die etwas weniger allgemeine Fassung, daß Wärme von selbst, d. h. so, daß in der Umgebung keine anderweitigen Änderungen vor sich gingen, von einem kälteren zu einem wärmeren Behälter nicht übergehen kann.

Für den Ingenieur ist die Ostwaldsche, seinem Vorstellungskreise entnommene Fassung viel anschaulicher; sie bildet die Brücke zum Theorem von der Entropie, das weite Ausblicke eröffnet und die Grundlage für die zahlenmäßige Bewertung der Vorgänge in unseren Maschinen liefert.

Ist der zweite Hauptsatz „bewiesen"?

Kein Lehrsatz der modernen Naturwissenschaft ist wohl mehr angezweifelt und angegriffen worden als der zweite Wärmesatz. Angriffe, die von wissenschaftlichem Geiste getragen worden sind, wie die Hirns, haben indessen nur zu seiner Klärung und Befestigung beigetragen, und in wissenschaftlichen Kreisen steigt daher das Vertrauen in seine Allgemeingültigkeit immer mehr und mehr. Viele technische Erfinder hingegen hegen einen Optimismus, der furchtlos über alle Tatsachen hinwegschreitet und dem wir hier entschieden entgegentreten müssen.

Ihre Hoffnungsfreudigkeit, den zweiten Wärmesatz aus seinen Angeln heben zu können, beruht nur auf einer falschen Auffassung von der Art, worin der Beweis eines Naturgesetzes bestehe. Auch das Energieprinzip ist nur induktiv „erwiesen", d. h. wir können nur behaupten, daß es sich bis jetzt bei allen bekannten Vorgängen der Natur als richtig bewährt hat, und daß man vermocht hat, ihm alle neuen Erscheinungen einzuordnen. Genau so verhält es sich mit dem zweiten Hauptsatz. — Ursprünglich von Clausius und W. Thompson für bloße Wärmeumwandlungen aufgestellt, wurde er viel später von Gibbs, Helm-

holtz, Van't Hoff und anderen auf die Erscheinungen des chemischen Gleichgewichts, des galvanischen Stromes, der Theorie der Lösungen übertragen, wobei er zu den glanzvollsten wissenschaftlichen Entdeckungen geführt hat, und in allen aus ihm gezogenen Folgerungen durch die Wirklichkeit unzählige Male bestätigt worden ist. So stellt sich der zweite Hauptsatz nunmehr als ein die Gesamtheit der Naturerscheinungen beherrschendes Prinzip dar, dem, naturwissenschaftlich gesprochen, derselbe Grad von Gewißheit zukommt wie dem Satze von der Erhaltung der Energie. Es darf daher die dringliche Mahnung an die Erfinder gerichtet werden, von ihrem zwecklosen Kampfe abzulassen, und keine Mittel an die Durchführung von Ideen zu wagen, die mit dem zweiten Hauptsatze im Widerspruche stehen.

Auch der vorurteilsfreie Denker wird sich des Eindruckes nicht erwehren, daß der zweite Wärmesatz etwas wie ein tragisches Verbot für das Menschengeschlecht bedeutet. Wie herrlich wäre es, wenn man aus Wasserlauf und Windströmung überall unerschöpfliche Arbeitsmengen ziehen könnte. Entspricht doch bei Wasser einer Temperaturerniedrigung von 10° C eine Ausbeute gleich der Arbeit des Falles von 4270 m Höhe. Und es mag manchem vorkommen, daß zwar der zweite Hauptsatz die Summe unserer heutigen Erfahrung von der Natur darstellt, daß es aber unphilosophisch wäre, ihn als für alle Ewigkeit unüberwindlich hinzustellen. Es werden ja fortwährend neue Erscheinungen aufgedeckt, wie z. B. die Strahlungsvorgänge, von welchen im Anfang behauptet wurde, daß sie dem Prinzip von der Erhaltung der Energie nicht gehorchen. Wäre es nicht möglich, daß an solchen Erscheinungen der zweite Haup satz einmal doch versagt?

Es ist richtig, daß die allermodernste Strahlungstheorie den vollständigen Umsturz aller bisher gültigen Fundamentalvorstellungen bedeutet. Die epochemachende „Relativität" von Einstein[1]) geht so weit, sogar den Zeitbegriff umzugestalten, indem die Zeit abhängig gemacht wird vom Bewegungszustand des Systems, auf das sie sich bezieht. Man lese die anschauliche Zusammenstellung, die Planck in den Annalen für Physik, Bd. 26, 1908, Nr. 6, S. 1. von den Ergebnissen der neuen Anschauungen gab: Ein „fester Körper" verändert seine Dimensionen und seine Masse je nach der Geschwindigkeit, die er besitzt. Das Parallelogramm der Kräfte und Geschwindigkeiten gilt nicht mehr; die Temperatur des Körpers verändert sich mit seiner Geschwindigkeit und ähnliches. Dies alles sind ungeheuerliche Vorstellungen für den, der in den alten Anschauungen aufgewachsen ist — und was bleibt bei dieser katastrophenartigen Neuerung unverändert, die beiden Hauptsätze der Wärmelehre! Zum Glück sind wir in der praktischen Technik nicht gezwungen, uns der neuen Begriffe zu bedienen, denn all diese Einflüsse werden erst merklich, wenn das Quadrat der Körpergeschwindigkeit vergleichbar ist mit dem Quadrat der Lichtgeschwindigkeit! Die Temperatur des Körpers sinkt wohl auf die „absolute" Null — allein erst bei rd. 300000 km Geschwindigkeit in der Sekunde. Wir auf unserem Erdball sind aber mit allem, was den Maschinenbau interessieren kann, von solchen Bewegungszuständen so himmelweit entfernt, daß man ruhig mit den Lehren der alten Mechanik weiter arbeiten darf, obwohl sie nur noch als „Annäherungen" an die wahren Naturgesetze bestehen bleiben.

Ähnliches gilt von der schon älteren, aber in neuerer Zeit an Wichtigkeit zunehmenden Anschauung, den zweiten Hauptsatz als bloßes Wahrscheinlichkeitsgesetz darzustellen. Hiernach wäre, was wir als „Notwendigkeit" anzusehen gewohnt waren, nur eine Art „statistischer" Durchschnitt einer großen Zahl weit auseinander liegenden Möglichkeiten. Da oberflächliche Erfinder, denen die zur Erfassung dieses Satzes nötige physikalische Bildung abgeht, bereits mit Lärm aus der neuen Formulierung Kapital zu schlagen begonnen haben, kommen wir auf diese Frage in ausführlicherer Weise im Anhang zurück.

3. Umkehrbare und nicht umkehrbare Zustandsänderungen.

Um die weittragenden Folgerungen zu verstehen, die aus dem zweiten Hauptsatz abgeleitet werden, muß man in erster Linie mit dem Begriff der umkehrbaren und nicht umkehrbaren Zustandsänderung vertraut sein.

Umkehrbar ist eine Zustandsänderung, wenn sie, wie der Wortsinn andeutet, auch in „umgekehrter" Richtung verlaufen kann, was man sich am besten an Beispielen klar macht.

Eine Gasmasse in wärmedichtem Zylinder sei durch einen reibungsfrei beweglichen Kolben abgeschlossen, der durch eine dem Gasdrucke gleiche Kraft P im Gleichgewichte erhalten wird. Erteilen wir dem Kolben eine unendlich kleine Geschwindigkeit nach vorwärts und verändern wir während der eintretenden Bewegung P so, daß es in jeder Lage dem Gasdrucke gerade gleich ist, so durchläuft der Gasinhalt eine Reihe von Gleichgewichtszuständen. Wenn man in der Endlage, nachdem die vernachlässigbare unendlich kleine lebendige Kraft der Bewegung abgenommen wurde, dem Kolben einen Impuls nach rückwärts erteilt, und ähnlich verfährt wie oben, so wird der Gasinhalt genau dieselben Zustände wie vorhin, aber in entgegengesetzter Reihenfolge, durchlaufen; wir haben eine im strengen Sinne umkehrbare Zustandsänderung vor uns. Im Falle eines Wärmeaustausches dürfte die Temperatur des abgebenden Behälters nur um unendlich wenig über der jeweiligen Temperatur des Arbeitskörpers liegen.

In einer Dampfmaschine ist die Kolbengeschwindigkeit endlich, die entsprechende lebendige Kraft des Dampfinhaltes muß durch Abnahme der Eigenenergie geliefert werden, daher hier die Zustände auf dem

[1]) Einstein, Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie. Gemeinverständlich. Braunschweig 1917.

Hin- und Rückweg nicht gleich wären. Bei den üblichen Kolbengeschwindigkeiten kann indes der Unterschied vernachlässigt werden.

Auch bei endlicher, großer Geschwindigkeit kann Umkehrbarkeit vorhanden sein, wenn nur die Ausdehnungsgeschwindigkeit jedes (unendlich) kleinen Elementes in bezug auf seinen Schwerpunkt genügend klein ist. Die Dampfströmung durch eine ideale (reibungsfreie) Düse müßte rückläufig vor sich gehen, wenn wir imstande sind, einen Zustand herzustellen, bei dem jedes Dampfteilchen die gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Geschwindigkeit besitzt wie vorhin.

Nicht umkehrbar nennt man im strengeren Sinn der Wärmelehre eine Zustandsänderung, wenn es nicht nur unmöglich ist, sie in der beschriebenen Weise unmittelbar zum entgegengesetzten Verlauf zu bringen, sondern wenn obendrein überhaupt kein Mittel vorhanden ist, um den ursprünglichen Zustand so wiederherzustellen, daß im Zustande anderer Körper keine Änderungen zurückblieben.

Typische Beispiele sind: Umwandlung von mechanischer Arbeit in Wärme durch Reibung, Überströmen der Wärme von Behältern mit höherer Temperatur auf solche mit niederer; Drosselung von elastischen Flüssigkeiten beim Strömen, d. h. arbeitsloser Abfluß derselben von Räumen mit hohem Druck in solche mit niederem.

Wir erkennen sogleich, daß diese nicht umkehrbaren Prozesse gerade die verlustbringenden Begleiterscheinungen der Energieumwandlung in der Kraftmaschine ausmachen; daher erhebt sich die Frage, wie groß im Einzelfalle, wenn man ihn schon nicht ganz vermeiden kann, der verursachte Arbeitsausfall ist? Die Antwort erhält man entweder durch mühsame langwierige Vergleichsrechnungen der Zustandsveränderungen oder rasch und einfach durch Vermittelung des Begriffes der Entropie, die für die sichere Beurteilung dieser Verhältnisse geradezu unentbehrlich ist.

4. Der Carnotsche Kreisprozeß.

Um auf den Begriff der Entropie geführt zu werden, gibt es für den Ingenieur kaum ein anschaulicheres Mittel als den Carnotschen Kreisprozeß. Denn der geniale, im Jahre 1832, bloß 36 Jahre alt, dahingeraffte Nik. Leonh. Sadi Carnot arbeitet[1]) mit der uns wohl vertrauten Vorstellung desjenigen Prozesses, der sich fast genau so in der zeitgenössischen Dampfmaschine abspielte. Carnot denkt sich in einer idealen Maschine folgenden aus nur umkehrbaren Umwandlungen zusammengesetzten Vorgang durchgeführt:

1. eine Ausdehnung des Energieträgers unter Wärmezufuhr bei unveränderter Temperatur t_1^0 C (d. h. die Verdampfung in der Dampfmaschine),
2. eine „adiabatische" Ausdehnung, d. h. eine solche ohne Wärmeaustausch (angenähert die Expansion der Dampfmaschine) bis auf die Temperatur t_2^0 C,
3. eine isothermische, d. h. bei unveränderter Temperatur t_2 erfolgenden Verdichtung (Niederschlagen des Dampfes im Kondensator), die so bemessen wird, daß die hierauf folgende
4. adiabatische Verdichtung von der Temperatur t_2 auf t_1 den Arbeitskörper in den Anfangszustand zurückführt (in diesem Teile weicht die Dampfmaschine ab, da auch bei Oberflächenkondensation der Niederschlag zuerst auf Kesseldruck verdichtet und dann unter diesem konstanten Druck durch Wärmezufuhr auf die Verdampfungstemperatur gebracht wird).

Es liegt also ein Kreisprozeß vor, d. h. der Arbeitskörper gelangt in seinen Anfangszustand zurück. Es bezeichne nun

Q_1 die vom Behälter mit der Temperatur t_1 aufgenommene,
Q_2 die an den Behälter mit der Temperatur t_2 abgegebene Wärmemenge,
AL der in Wärmemaß ausgedrückte Wert der während eines Umlaufes gewonnenen Arbeit.

---

[1]) In seinen „Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à développer cette puissance". Paris 1824 (Neudruck 1878). Carnot hält noch an der Vorstellung fest, daß die Wärme ein Stoff sei, allein aus seinen nachgelassenen Notizen geht hervor, daß er alsbald darauf die Äquivalenz von Wärme und Arbeit erkannt und sogar das mechanische Wärmeäquivalent angenähert richtig berechnet hat. Um wieviel weiter wäre die Wärmelehre, wenn Carnot länger gelebt und seinen Ideen zum Durchbruch verholfen hätte?

Da keine anderen Änderungen eingetreten sind, als daß die Wärme Q_1 verschwand, während die Arbeit AL und die Wärme Q_2 auftauchten, so muß nach dem Energiesatz

$$Q_1 = AI + Q_2 \quad \text{oder} \quad AL = Q_1 - Q_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

sein.

Ein zweiter Körper von beliebiger Beschaffenheit möge denselben Prozeß zwischen denselben Temperaturgrenzen in umgekehrter Richtung durchlaufen, d. h. in einem idealen Kompressor verdichtet werden. Sein Gewicht sei so bemessen, daß hierbei die nunmehr zu leistende Arbeit wieder geich AL sei, während dem kälteren Wärmebehälter in diesem Fall die Wärme Q_2 entzogen und dem wärmeren die Wärme Q_1' mitgeteilt wird. Es gilt wieder

$$AL = Q_1' - Q_2',$$

somit

$$Q_1 - Q_2 = Q_1' - Q_2' \quad \text{oder} \quad Q_1' - Q_1 = Q_2' - Q_2 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Da die während des ersten Prozesses gewonnene äußere Arbeit durch den zweiten Prozeß gerade aufgezehrt wurde und beide Körper nach je einem Umlauf sich im Anfangszustande befinden, besteht die Wirkung des ganzen Vorganges darin, daß eine gewisse Wärmemenge aus dem einen Behälter in den andern geschafft worden ist. Wäre $Q_1' > Q_1$, so würde der Unterschied $Q_1' - Q_1$ dem kälteren Behälter entnommen und in den wärmeren überführt worden sein. Dieser Überschuß würde in einer dritten Maschine Arbeit leisten können, und durch Wiederholung des Vorganges könnte man ununterbrochen Arbeit auf Kosten des kälteren Behälters allein, ohne daß anderweitige Änderungen aufträten, gewinnen. Dies aber ist ein Perpetuum mobile zweiter Art, also unmöglich. Dasselbe ergibt sich, wenn man $Q_1' < Q_1$ voraussetzt, wie man beweist, indem man die Richtung der Prozesse 1 und 2 vertauscht. Es bleibt also nur die Möglichkeit

$$Q_1 = Q_1', \quad \text{mithin auch} \quad Q_2 = Q_2'$$

übrig[1]). Durch Division folgt

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{Q_1'}{Q_2'}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

d. h. dieses Verhältnis ist von der Natur des verwendeten Körpers unabhängig, wenn nur dieselben Temperaturgrenzen t_1, t_2 eingehalten werden. Da über den Druck, das Volumen, den Aggregatzustand und die chemische Beschaffenheit der Körper nichts vorausgesetzt wurde, kann das genannte Verhältnis nur von den Temperaturen abhängen, d. h. es muß

$$\frac{Q_1}{Q_2} = f(t_1, t_2), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

wo f eine noch unbekannte, für alle Körperarten gültige Funktion bedeutet. Die Gestalt derselben bestimmen wir mit Poincaré, indem wir Carnotsche Prozesse zwischen den Temperaturen t_0, t_1, t_2 und zwischen denselben Adiabaten, und zwar in folgender Zusammenstellung voraussetzen: 1) zwischen t_1, t_2 mit den Wärmemengen Q_1, Q_2, 2) zwischen t_1, t_0 mit Q_1, Q_0, 3) zwischen t_2, t_0 mit Q_2, Q_0, so daß die drei Gleichungen

$$\frac{Q_1}{Q_2} = f(t_1, t_2), \qquad \frac{Q_1}{Q_0} = f(t_1, t_0), \qquad \frac{Q_2}{Q_0} = f(t_2, t_0)$$

bestehen. Daß die Wärmemengen Q_0 bei (2) und (3) gleichgroß sind, folgt aus der Voraussetzung, daß die Prozesse sich zwischen denselben Adiabaten abspielen. Es kann eben, wie wieder aus dem Perpet. Mob. II Art erwiesen wird, durch einen Zustandspunkt $p_1 v_1$ nur eine Adiabate hindurchgehen, da andernfalls ein aus den beiden Adiabaten und einer Isotherme bestehendes „Dreieck" von Prozessen zusammengesetzt werden könnte mit dauernder Umwandlung der Wärme einer Quelle in Arbeit. Bilden wir also das Verhältnis Q_1 und Q_2 aus der 2. und 3. Gleichung und setzen wir es dem in der 1. Gleichung gleich, so folgt

$$\frac{f(t_1, t_0)}{f(t_2, t_0)} = f(t_1, t_2)$$

[1]) Man könnte freilich einwenden, daß es reibungslose Maschinen nicht gibt und der Beweis nicht streng genug geführt sei, allein einerseits bauen wir nachweisbar Dampfmaschinen, deren Reibungsarbeit, die Luftpumpenarbeit einbegriffen, bloß 5 v. H. der normalen Leistung ausmacht, anderseits ist die Voraussetzung idealer Maschinen für den Beweis nicht zu umgehen und darum auch deutlich ausgesprochen worden.

als eine Identität, die nur bestehen kann, falls $f(t_1, t_2)$ die Form

$$f(t_1, t_2) = \frac{\varphi(t_1)}{\varphi(t_2)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

besitzt, wo nur die Form der Funktion φ noch unbekannt ist. Zu ihrer Bestimmung genügt es, an einem einzigen Körper durch den Versuch das Verhältnis $Q_1 : Q_2$ zu ermitteln. Als solcher Körper eignet sich irgendein „ideales" Gas, das die Zustandsgleichung

$$pv = RT$$

besitzt, wo $T = 273 + t$ und R ein Festwert ist; dessen spezifische Wärmen c_p für konstanten Druck und c_v für konstantes Volumen unveränderlich sind und das Verhältnis $k = c_p : c_v$ bilden. Indem man die Abschnitte des Kreisprozesses im einzelnen durchgeht, findet man durch eine leicht zu erledigende Rechnung

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

wenn mit $T_1 = 273 + t_1$ und $T_2 = 273 + t_2$ die obere und untere „absolute" Temperatur der Carnotschen Isothermen bezeichnet wird. Die Carnotsche Temperaturfunktion $\varphi(t) = \varphi(T - 273)$ reduziert sich mithin allgemein auf die absolute Temperatur selbst,

$$\varphi(t) = T \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

wenn wir den noch willkürlichen konstanten Faktor = 1 setzen.

Die in „Nutzarbeit" umgesetzte Wärmemenge ist, wie schon angegeben, der Unterschied der Wärmemengen Q_1 und Q_2, d. h.

$$AL = Q_1 - Q_2.$$

Der „Wirkungsgrad" η ist das Verhältnis der nutzbar gewonnenen Energie AL zum Gesamtaufwand an Wärme, d. h. zu Q_1, da Q_2 die Temperatur der Umgebung annahm, mithin wirtschaftlich wertlos geworden ist. Man findet

$$\eta = \frac{AL}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}.$$ Da aber gemäß Gl. (6) $Q_2 = Q_1 \frac{T_2}{T_1}$, so folgt

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

und wir haben den Satz:

Der thermische Wirkungsgrad eines Carnotprozesses hängt lediglich von der Temperatur der Isothermen ab, zwischen welchen der Prozeß verläuft, und ist unabhängig von der Natur des arbeitenden Körpers. Die Wärmeausnutzung ist um so besser, bei je höherer Temperatur wir die Wärme zuführen und bei je tieferer wir sie entziehen.

5. Kreisprozeß mit umkehrbarer Wärme-Zu- und -Abfuhr bei beliebigen Temperaturen und das Integral von Clausius.

Der Carnotsche Prozeß ermöglicht uns, die Vorgänge bei einem beliebigen Kreisprozeß zu beurteilen. Es sei ein beliebiger Körper einer beliebigen physikalischen oder chemischen Zustandsänderung unterworfen, bei der nur umkehrbare Vorgänge auftreten, und der Verlauf der Druck- und Volumenänderung durch das sogenannte pv-Schaubild (Abb. 5) dargestellt wird. Wir teilen die pv-Ebene durch eine Schar von Adiabaten in unendlich schmale Streifen, und bezeichnen die Wärmemengen, die während der wahren Zustandsänderung zwischen zwei Adiabaten zu- bzw. abgeleitet werden, wie in die Abbildung eingetragen ist, mit

$$dQ_1,\ dQ_1',\ dQ_1'' \ \ldots\ dQ_2,\ dQ_2',\ dQ_2'', \ldots$$

Die Wärmemengen dQ_1, dQ_2 können wir als einem „elementaren" Kreisprozeß angehörend denken, der durch einen Hilfskörper zwischen den Adiabaten a, a' und den von ihnen eingefaßten unendlich kleinen Stücken der Zustandskurve ausgeführt wird. An Stelle hiervon ist es aber zulässig einen Carnotschen Prozeß zu setzen, bei dem die Abschnitte der wahren Zustandskurve durch die, den mittleren Temperaturen T_1, T_2 entsprechenden, unendlich kurzen Isothermen J_1, J_2 ersetzt sind, denn die auf J_1, J_2 zu- bzw. abzuleitenden Wärmen unter-

scheiden sich von dQ_1, dQ_2 nur um unendlich kleine höherer Ordnung. Nach Gl. (6) ist nun

$$\frac{dQ_1}{dQ_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Abb. 5. Aufteilung eines Kreisprozesses durch Adiabaten.

Die nutzbare Arbeit dL, die dem Elementarprozesse entspricht und durch das von den Kurven a, a', J_1, J_2 des pv-Diagrammes eingeschlossene Flächenstück gemessen wird, ist in Wärmemaß $A\,dL = dQ_1 - dQ_2$, der thermodynamische Wirkungsgrad, wie oben

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Der vorhin ausgesprochene Satz gilt für jeden Elementarprozeß, und man darf mithin, alles zusammenfassend, den Satz aussprechen:

Die Wärmeausnützung bei einem beliebig geführten Kreisprozeß mit nur umkehrbaren Änderungen ist um so besser, bei je höheren Temperaturen die Wärme zugeführt, bei je tieferen sie abgeleitet wird.

Dieser Satz, der anscheinend allgemeine und ausnahmslose Gültigkeit besitzt, könnte wesentlich modifiziert werden durch die Anwendung eines sog. Regenerators, falls es gelänge, dem Ideal einigermaßen nahekommende Wärmeaustauschapparate zu konstruieren. Da ein Verständnis derselben nur unter Benutzung des Entropiebegriffes möglich ist, verschieben wir die Erörterung dieser Einrichtung auf später.

Stellen wir Gl. (9) in die Form

$$\frac{dQ_1}{T_1} = \frac{dQ_2}{T_2} \quad \text{oder} \quad \frac{dQ_1}{T_1} - \frac{dQ_2}{T_2} = 0$$

um und schreiben wir die gleichartig gebildeten Beziehungen

$$\frac{dQ_1'}{T_1'} - \frac{dQ_2'}{T_2'} = 0, \quad \frac{dQ_1''}{T_1''} - \frac{dQ_2''}{T_2''} = 0 \text{ usw.}$$

an, so ergibt sich durch Summation

$$\sum \frac{dQ_1}{T_1} - \sum \frac{dQ_2}{T_2} = 0.$$

Wenn wir aber alle Wärmemengen algebraisch auffassen, d. h. die zu entziehenden Mengen dQ_2 usw. als negative Größen einführen (während hier dQ_2 den Absolutwert bedeutete), so darf man einfach

$$\sum \frac{dQ}{T} = 0$$

schreiben, die Summe auf alle Wärmeelemente ausgedehnt. Ersetzen wird die Summe durch das Integralzeichen, so entsteht

$$\left(\int\right) \frac{dQ}{T} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

wobei durch die Klammern die Integration über den geschlossenen Kreisprozeß angedeutet ist. Das Verschwinden dieses Clausiusschen Integrals für jeden geschlossenen umkehrbaren Prozeß ist von allergrößter Wichtigkeit und bildet etwas wie den Mittelpunkt der Wärmelehre.

6. Die Entropie.

Man lasse nun von einem als „normal" definierten Zustand A (Abb. 6) durch umkehrbare Vorgänge 1 kg unseres Stoffes gemäß Kurve C in den Zustand B überführen; auf dem Wege

C kehre er nach A zurück, so daß ein Kreisprozeß entsteht. Wir zerlegen das Clausiussche Integral (10) in die Teilbeträge von A über C nach B, von B über C' nach A, und schreiben

$$\int_A^A \frac{dQ}{T} = \int_{A \atop \text{über } C}^B \frac{dQ}{T} + \int_{B \atop \text{über } C'}^A \frac{dQ}{T} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

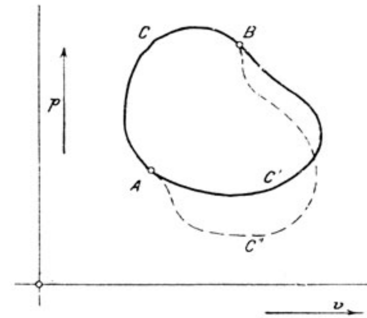


Abb. 6. Gleichwertige Prozesse.

Geht die Änderung von A nach B über C', so kehren alle Elementar-Wärmemengen, die ins Spiel kommen, ihr Vorzeichen um, und es wird

$$\int_{A \atop \text{über } C}^B \frac{dQ}{T} = -\int_{B \atop \text{über } C'}^A \frac{dQ}{T},$$

somit liefert Gl. (11)

$$\int_{A \atop \text{über } C}^B \frac{dQ}{T} = \int_{A \atop \text{über } C'}^B \frac{dQ}{T} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Das Integral der Elemente $dQ:T$ ist mithin unabhängig von der Art, in der wir einen Körper aus dem gegebenen Anfangszustand in einen gegebenen Endzustand überführen, wenn der Weg nur überall umkehrbar war. Man bezeichnet dies Integral als den Zuwachs der Entropie des Körpers zwischen den Zuständen A und B und schreibt

$$\int_A^B \frac{dQ}{T} = S - S_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Der Wert der Entropie in A bleibt unbestimmt, es ist mithin auch S nur bis auf eine willkürliche additive Konstante bestimmbar. Bezeichnet man den Zustand in A als „Normalzustand" und setzt man $S_0 = 0$, so wird die Entropie eine zu jedem Zustand des Körpers gehörende bestimmte Zahl und kann von vornherein ausgerechnet werden, sofern der Zustand durch bloß umkehrbare Änderungen erreichbar ist[1]).

Aus der Definition der Entropie folgt:

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

und

$$dQ = T\,dS \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14a)$$

welche wichtige Gleichung besagt, daß die (umkehrbar) zugeführte Wärmemenge dQ erhalten wird als Produkt der absoluten Temperatur und der elementaren Entropiezunahme, die während der betrachteten unendlich kleinen Zustandsänderung eintritt. Dieser Satz gibt uns die Möglichkeit, die zugeführte Wärme graphisch als Flächeninhalt darzustellen, wenn wir ein Koordinatensystem mit S als Abszissen- und T als Ordinatenachse entwerfen. Da durch die „Zustandsparameter", etwa p und v, auch die Entropie S und die Temperatur bestimmt sind, entspricht jedem Punkte der pv-Ebene ein Punkt der TS-Ebene, und man kann eine Zustandskurve (z. B. Expansionslinie) aus der ersten in die zweite übertragen oder „abbilden". Auf diese Weise entsteht das „Entropiediagramm" (Abb. 7). In diesem ist das Flächenelement $B'\,B''\,B_1''\,B_1' = T\,dS = dQ$, und die Fläche B_1BCC_1 stellt im Wärmemaß die ganze während der umkehrbaren Zustandsänderung von B nach C auf-

[1]) Es ist wichtig, darauf hinzudeuten, daß über die Natur des arbeitenden Körpers keine Voraussetzungen gemacht worden sind, daß also obige Definition der Entropie insbesondere auch für chemisch aufeinander einwirkende Gemenge gilt, wenn nur ihr Zustand durch gewisse Angaben bestimmbar, also ein Zustand des Gleichgewichtes der chemischen Kräfte ist. Das Vorhandensein äußeren Gleichgewichtes ist nicht notwendig, da auch in bewegten Massen ein unendlich kleines Element als im relativen Gleichgewicht gegen seinen Schwerpunkt angesehen werden kann. Bei Gasgemischen kann man auch die Bedingung des Gleichgewichtes der chemischen Kräfte fallen lassen, falls das Gemisch überall gleichartig ist, denn die Entropie des einen Bestandteiles wird durch die Anwesenheit des andern nicht beeinflußt.

genommenen Wärme dar. Erfolgte die Änderung im Sinne von C nach B, müßte der Flächeninhalt negativ gerechnet werden, d. h. die Wärme würde nicht zu- sondern abgeleitet.

In dieser Möglichkeit, die Wärmemengen als Flächeninhalte im Entropieschaubild darstellen zu können, wobei schon das Augenmaß die Größenverhältnisse der zu- und abgeleiteten Wärmen, demnach auch den Wirkungsgrad, abzuschätzen vermag, liegt ein Teil der fundamentalen Bedeutung des Entropiebegriffes für die praktische Technik.

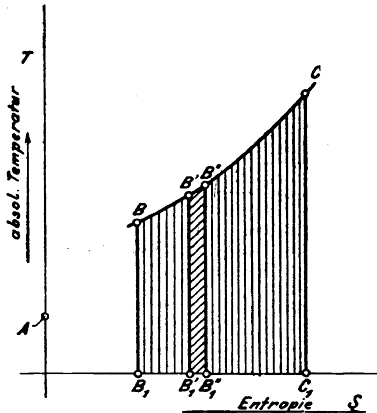


Abb. 7. Entropieschaubild.

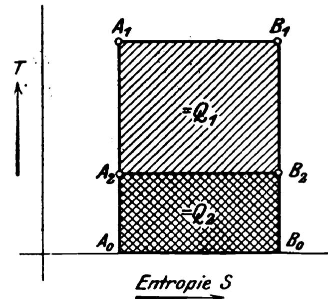


Abb. 8. Carnotscher Prozeß im Entropieschaubild.

Hat eine Zustandsänderung ohne Wärmeaustausch stattgefunden, so ist für jedes Element derselben $dQ = 0$, daher auch $dS = 0$, d. h. die Entropie ändert sich nicht, und wir haben den Satz:

Die adiabatische Zustandsänderung wird im Entropieschaubild durch eine zur Ordinatenachse parallele Gerade (bei rechtwinkligem Achsenkreuz eine Senkrechte) dargestellt.

An sich selbstverständlich ist der weitere Satz:

Der isothermischen Zustandsänderung entspricht im Entropiediagramm eine Wagerechte.

Hiernach ist es klar, wie einfach ein Carnotscher Prozeß beliebiger Art im Entropiediagramm dargestellt wird. Indem wir bis auf weiteres (bis zur Behandlung der Gasturbine) ein rechtwinkliges Achsenkreuz voraussetzen, wird dieser Prozeß durch ein Rechteck $A_1 B_1 B_2 A_2$ (Abb. 8) abgebildet. Hierbei ist

Fläche $A_1 B_1 B_0 A_0 =$ der zugeführten Wärme Q_1,
„ $A_2 B_2 B_0 A_0 =$ der abgeleiteten Wärme Q_2,
daher „ $A_1 B_1 B_2 A_2 =$ der geleisteten Arbeit $Q_1 - Q_2 = AL$.

Weitere Beispiele folgen später.

Erfahrungsgemäß bietet die geistige Verarbeitung, das vermeintliche „Verstehen" des so fremdartig klingenden Begriffes „Entropie", dem Anfänger große Schwierigkeiten. Wolle derselbe sich vergegenwärtigen, daß im wissenschaftlichen Aufbau einer Disziplin eine höhere Stufe in der Regel erklommen wird, indem man eine ganze Gedankengruppe durch eine Wortbezeichnung in eine Einheit zusammenfaßt. Man darf nicht verlangen, daß das Wort uns den Begriff erkläre; das Gegenteil ist vielmehr der Fall: wir müssen uns den betreffenden Gedankenkomplex so fest einprägen, daß das Wort nur sein stellvertretendes Signal bildet, welches ihn im Bedarfsfall sofort zur Stelle schafft. Entropie „begreifen" bedeutet daher nur so viel, sich sofort bewußt zu werden: $\int dQ:T$ hängt für umkehrbare Prozesse nicht von dem Wege zwischen Aus- gangs- und Endzustand ab, ist daher, wenn wir den ersteren festgelegt haben, eine aus Tabellen oder Tafeln zu entnehmende, dem Endzustand eigentümliche Zahl. Sind wir dann mit den weiteren vortrefflichen Eigenschaften des neuen Begriffes vertraut, so rechnen wir mit der ihn vertretenden Zahl etwa wie mit dem Logarithmus, ohne unser Denken jederzeit von neuem mit seiner logischen Begründung zu belasten.

Obwohl also das Abstrakte genommen werden muß wie es ist, empfiehlt es sich doch sehr, nach Veranschaulichungen zu suchen, auch wenn sie nur künstliche Hilfsmittel wären, die Ideenassoziation zu beleben. So hat Helmholtz gelegentlich auf folgendes hingewiesen: Bei Wärmezufuhr unter unveränderlichem Druck kann die Zunahme der Temperatur als Wärmemaßstab dienen. Bei unveränderlicher Temperatur z. B. dem Schmelzprozeß, gilt die Formel $Q = TS$, d. h. die einem Körper zugeführte Wärme bewirkt eine ihr proportionale Vergrößerung der Entropie, es ist daher naheliegend, Entropie als Wärmemaßstab für unveränderliche Temperatur aufzufassen. Doch wäre eine solche Definition bei der universellen Bedeutung der Entropie zu eng.

7. Innere Energie und Wärmeinhalt.

Erwärmen wir 1 kg eines Stoffes bei unveränderlichem Rauminhalt, so wird infolge Abwesenheit einer äußeren Leistung die ganze Wärme als „innere Energie" aufgespeichert, die wir mit u für 1 kg des Stoffes bezeichnen. Bezeichnet c_v die spezifische Wärme bei unveränderlichem Volumen, so ist

$$u = \int c_v dT + \text{konst.} \quad \ldots \quad (1)$$

Denken wir uns 1 kg unseres Stoffes von einem Anfangszustand, in dem $p\,v_1\,u_1$ die Werte von Druck, Volumen und innerer Energie sind, die Wärme dq zugeführt, so gilt für einen elementaren Vorgang die Energiegleichung

$$dq = du + A p dv \quad \ldots \quad (2)$$

Bei unveränderlichem Druck erhält man durch Integration bis zum Endzustand p, v_2, u_2

$$q = (u_2 + A p v_2) - (u_1 + A p v_1) \quad \ldots \quad (3)$$

Unter **Wärmeinhalt** versteht man den Ausdruck

$$i = u + A p v + \text{konst.} \quad \ldots \quad (4)$$

dessen Zunahme mithin nach (3) **die bei unveränderlichem Drucke zugeführte Wärmemenge darstellt.** Im übrigen ist er, ebenso wie die Energie (von der additiven Konstante abgesehen), eine zu jedem Zustande des Stoffes eindeutig zugeordnete bestimmte Zahl, die wir unseren Dampftabellen entnehmen können.

8. Berechnung der Entropie für Gase.

Die „Zustandsgleichung", d. h. die Beziehung zwischen Drück, spezifischem Volumen und absoluter Temperatur lautet

$$p v = R T \quad \ldots \quad (1)$$

wo R ein Festwert. Für Luft ist $R = 29{,}27$, wenn p in kg/qm, v in cbm/kg gerechnet werden. Zu beachten ist die Beziehung $v\gamma = 1$, wo γ das spezifische Gewicht in kg/cbm bedeutet.

Die spezifischen Wärmen bei konstantem Druck c_p und konstantem Volumen c_v (d. h. die Wärmemengen, die bei unveränderlichem Druck bzw. Volumen erforderlich sind, um die Temperatur von 1 kg Gas um 1° zu erhöhen) sind bei Gasen Funktionen der Temperatur, so zwar, daß

$$c_p = \alpha_p + \beta_1 T + \beta_2 T^2 + \cdots$$
$$c_v = \alpha_v + \beta_1 T + \beta_2 T^2 + \cdots \quad \ldots \quad (2)$$

gesetzt werden kann. Solange die Zustandsgleichung (1) streng gilt, muß die bekannte Beziehung

$$c_p - c_v = A R \quad \ldots \quad (2a)$$

gewahrt bleiben. Zahlenangaben folgen im Anhang.

Bei Luft ist c_p, c_v sehr wenig veränderlich und man kann daher den Wert der inneren Energie angenähert

$$u = \int c_v dT = c_v T + \text{konst.} \quad \ldots \quad (3)$$

oder wenn die in diesem Falle unveränderliche Verhältniszahl $k = c_p/c_v$ und Gl. (2a) benutzt werden

$$u = c_v \frac{A p v}{A R} + \text{konst.} = \frac{A p v}{k - 1} + \text{konst.} \quad \ldots \quad (3a)$$

setzen.

Für den Wärmeinhalt schreiben wir

$$i = \int c_p dT + \text{konst.} \simeq c_p T + \text{konst.} = \frac{k}{k-1} A p v + \text{konst.} \quad \ldots \quad (4)$$

Die „Wärmegleichung" lautet

$$dq = du + A p dv,$$

also ist die Entropiezunahme zwischen zwei beliebigen Zuständen bei bloß umkehrbaren Prozessen

$$s - s_0 = \int \frac{du + A p dv}{T} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Da das Integral vom Zwischenwege unabhängig ist, muß es eine bloße Funktion der „Zustandsparameter" sein und sich z. B. in der Form

$$s - s_0 = F(T, v) - F(T_0, v_0)$$

allgemein darstellen lassen, wenn wir u und p als Funktionen von T und v einsetzen. Die unter dem Integral stehende Funktion ist mit anderen Worten ein vollständiges Differential.

Setzen wir in Gl. (5) die Werte

$$du = c_v dT = (\alpha_v + \beta_1 T + \beta_2 T^2 + \ldots) dT \quad \text{und} \quad p = \frac{RT}{v}$$

ein so erhalten wir

$$ds = \left(\frac{\alpha_v}{T} + \beta_1 + \beta_2 T + \ldots\right) dT + A R \frac{dv}{v},$$

welcher Ausdruck in der Tat ein vollständiges Differential ist und integriert

$$s - s_0 = \alpha_v \lg n \frac{T}{T_0} + \beta_1 (T - T_0) + \frac{\beta_2}{2}(T^2 - T_0^2) + \ldots + A R \lg n \frac{v}{v_0} \quad . \; . \quad (6)$$

liefert. Wünschen wir eine Darstellung durch T und p, so wird $v = RT/p$, $v_0 = RT_0/p_0$ eingesetzt und Beziehung $\alpha_v + AR = \alpha_p$ benützt. So entsteht

$$s - s_0 = \alpha_p \lg n \frac{T}{T_0} + \beta_1 (T - T_0) + \frac{\beta_2}{2}(T^2 - T_0^2) + \ldots - A R \lg n \frac{p}{p_0} \quad . \; . \quad (7)$$

Endlich könnte T entfernt und durch p, v ausgedrückt werden.

Die so gerechnete Entropietafel für Gase wird im Anhang besprochen.

9. Die Zustandsgrößen des Wasserdampfes.

Ein Dampf ist naß, falls ein Gemisch von Dampf und tropfbarer Flüssigkeit vorliegt; trocken gesättigt oder überhitzt, falls die Wärmezufuhr bis zum Verdampfen des letzten Flüssigkeitsrestes getrieben wurde, oder darüber hinaus. Im nassen bis zum trocken gesättigten Zustande ist der Druck durch die Temperatur („Siedetemperatur") bestimmt, und vom Volumen unabhängig. Da diese Beziehung durch eine hinreichend einfache Formel nicht dargestellt werden kann, entnimmt man zueinander gehörende Werte aus den Dampftabellen.

Das Gewichtsverhältnis x des dampfförmigen Teiles zum Gesamtgewicht (des nassen Wasserdampfgemisches) nennt man spezifische Dampfmenge.

Es sei

v' der Rauminhalt im flüssigen Zustande, cbm/kg,
v'' „ „ „ trocken gesättigten Zustande, cbm/kg.

Dann ist der Rauminhalt im nassen Zustande

$$v_x = v' + x(v'' - v'),$$

worin v' fast immer gegen v'' vernachlässigt werden kann.

Im überhitzten Zustande gilt die Zustandsgleichung von Linde[1]), der für praktische Rechnungen als genügend genau die vereinfachte Form

$$pv = BT - Cp \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

mit $B = 47{,}10$; $C = 0{,}016$ empfiehlt, wobei der maximale Fehler für v nur 0,8 v. H.

[1]) R. Linde, Über die thermischen Eigenschaften des gesättigten und überhitzten Wasserdampfes zwischen 100° und 180° C. Berlin 1904.

ausmacht. In gröbster Annäherung wird man schließlich auch das Glied Cp vernachlässigen können. Umgekehrt ist man mit Hilfe der von Jakob[1]) gegebenen graphischen Darstellung in der Lage, die genauen Zustandsgrößen mit wenig Rechnung wie folgt anzugeben. Jakob schreibt die Zustandsgleichung des Dampfes in der Form

$$v = \frac{BT}{p} - F \ . \quad (2)$$

wobei $B = 47{,}06$ und F das „Restglied" bedeutet, das von Druck und Temperatur abhängt. Durch Vermehrung mit p/T folgt

$$\frac{pv}{T} = B - \frac{Fp}{T} = B - B' \ (3)$$

und die Berichtigung B', die an B anzubringen ist, wird durch die Schaulinien Abb. 9 u. 10 als Abhängige von p und t dargestellt.

Ist also p und T gegeben, so kann sofort B' und damit aus 3 der spezifische Rauminhalt v berechnet werden. Ist hingegen v und p oder v und T vorgeschrieben, so wird man die fehlende Größe zunächst aus (3) mit $B' = 0$ rechnen, und aus dem nun angenäherten p und T einen ersten Wert von B' dem Diagramm entnehmen, mit welchem zuerst die Unbekannte, dann B' und wieder die Unbekannte berichtigt werden. Bei der zweiten Wiederholung dürfte genügende Übereinstimmung herrschen.

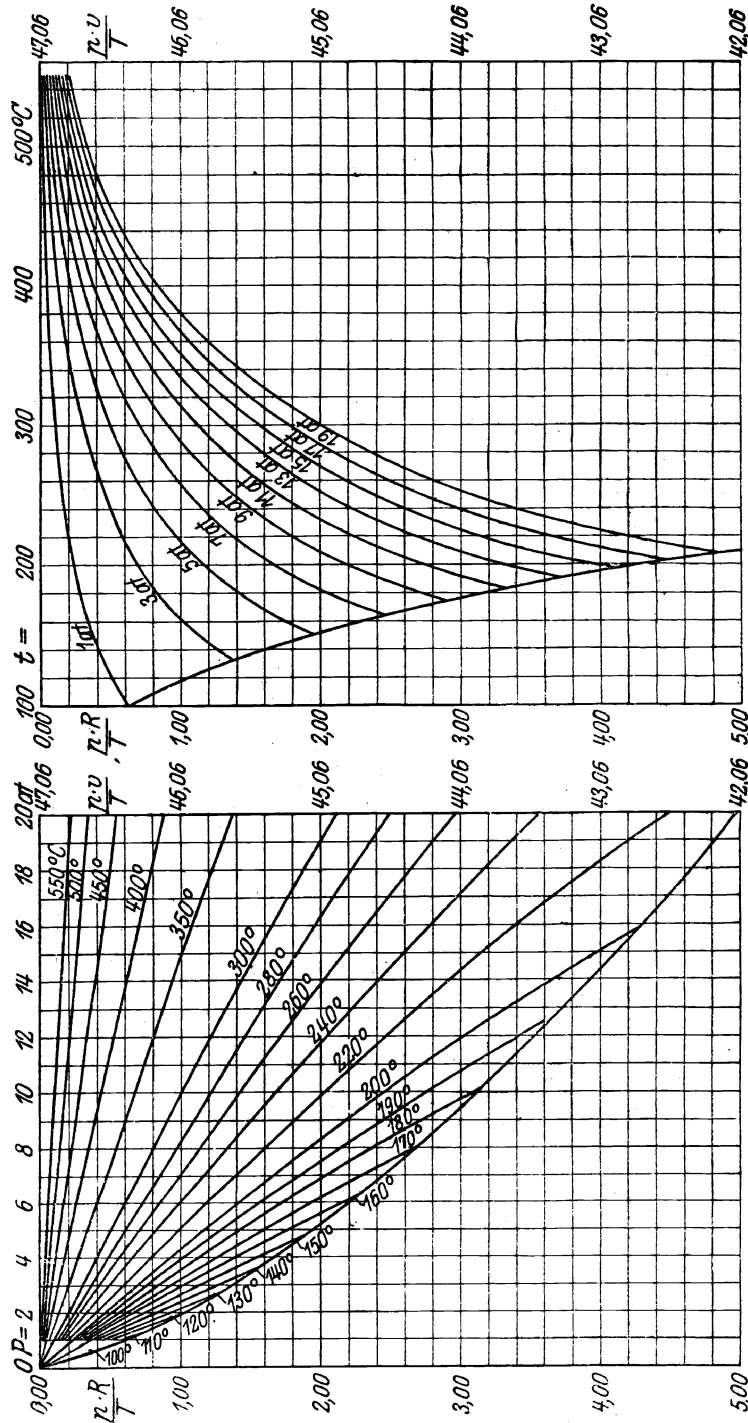


Abb. 9 u. 10. Zustandsgrößen für Wasserdampf nach Jakob.

Von Wichtigkeit ist ferner die Zustandsgleichung von Callendar[2]), die mit einigen Veränderungen von Mollier[3]) zur Berechnung der bekannten und allgemein benutzten Dampftabellen in der „Hütte" verwendet worden ist. Sie lautet

$$v = 47\frac{T}{p} + 0{,}001 - \mathfrak{B} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{B} = 0{,}075\left(\frac{273}{T}\right)^{\frac{10}{3}} \quad \dots\dots\dots \quad (4)$$

Die hieraus folgenden Ausdrücke für s und i geben wir in Abschn. 10 wieder.

[1]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1912. S. 1980.

[2]) Callendar gab neuerdings in englischem und metrischem Maß gerechnete Tabellen aus.

[3]) Neue Tabellen u. Diagr. f. Wasserdampf. Berlin 1906.

Die einfachste angenäherte Form des Zusammenhanges zwischen Druck und Temperatur an der Sättigungsgrenze ist durch die Formel von Dieterici[1])

$$p_s = p_k e^{7,4\left(1-\frac{T_k}{T}\right)} \qquad (5)$$

gegeben, wobei $p_k = 200,5 \cdot 10^4$ kg/qm angenähert der kritische Druck, $T_k = 683$ angenähert die kritische Temperatur sind. Die spezifische Wärme des Wassers in flüssigem Zustand längs der Grenzkurve zwischen 40°—300° C ist angenähert nach Dieterici

$$c = 0,9983 - 0,0001037\,t + 0,000002073\,t^2.$$

Hieraus erhält man die „Flüssigkeitswärme", d. h. den **Wärmeinhalt des flüssigen Wassers**

$$i' = \int_0^t c\,dt \qquad (6)$$

Die „Verdampfungswärme" bedeutet die Wärme, die 1 kg Wasser von Siedetemperatur

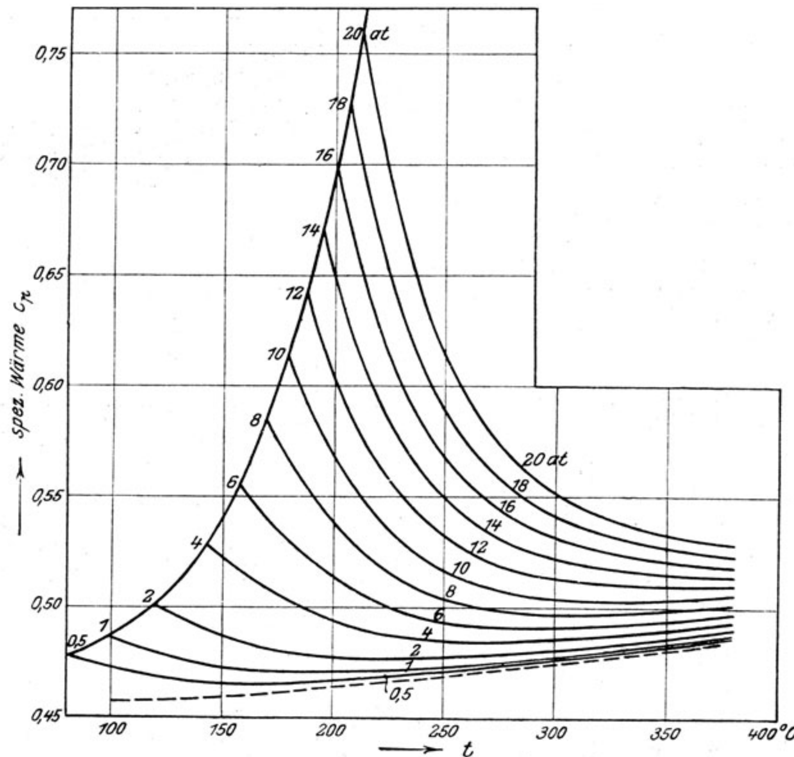


Abb. 11. Wahre spezifische Wärme nach Versuchen von Knoblauch und seiner Mitarbeiter.

zugeführt werden muß, um es bei unveränderlichem Druck in gesättigten Dampf zu verwandeln. In erster Näherung ist nach Schüle, zwischen 100 und 200° C in kcal

$$r = 610,2 - 0,712\,t \qquad (7)$$

Für Extrapolation in die Nähe des kritischen Punktes ist nach Thiesen

$$r = 83,95\,(T_k - T_s)^{\frac{1}{3}} \qquad (8)$$

wofür man die noch besseren Anschluß gewährende Formel von Davis

$$r = 92,93\,(T_k - T_s)^{0,315} \qquad (8a)$$

wählen kann, worin $T_k = 273 + 365$ den früheren Wert der kritischen Temperatur, T_s die

[1]) Dieterici, Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1905, S. 365.

Sättigungstemperatur bedeuten. Den genauesten Wert liefert der Versuch und die graphische Ermittelung mittels der Formel von Clapeyron

$$r = A(v'' - v')\, T \frac{dp}{dT} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

Wird 1 kg Wasser von 0° C bei unveränderlichem Druck auf die Siedetemperatur erwärmt und der Anteil x in Dampf verwandelt, so erhalten wir als **Wärmeinhalt des nassen Dampfes:**

$$i_x = i' + xr \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

an der „Grenzkurve" ist $x = 1$, also

$$i'' = i' + r \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

wofür nach Schüle zwischen 100 und 200° C angenähert die Formel $i'' = 608 + 0{,}311\, t$ benutzt werden darf.

Der Wärmeinhalt im Überhitzungsgebiet ist der Definition gemäß

$$i_u = i'' + \int_{T_s}^{T} c_p\, dt \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

Die innere Energie des Dampfes in irgendeinem Zustand erhält man, wenn man vom Wärmeinhalt die geleistete Druckarbeit $A p\,(v - v')$ in kcal abzieht.

Über die spezifische Wärme c_p bei konstantem Druck liegen experimentelle Untersuchungen von L. Holborn und F. Henning[1]), und insbesondere von Knoblauch[2]) Jakob, H. Mollier und Winkhaus vor. Die Zusammenfassung der ein monumentales Werk darstellenden Ergebnisse des Münchener Laboratoriums für technische Physik ist in Abb. 11 veranschaulicht. Die in Abschn. 10 mitgeteilte Formel von Eichelberg liefert Werte, die von den Knoblauchschen bei 20 at (Sättig.) von höchstens 0,8 v. H. und im ganzen Mittel um höchstens 0,23 v. H. abweichen.

10. Die Zustandsgleichungen des Wasserdampfes.

Auf dem Wege thermodynamischer Rechnungen können aus der Zustandsgleichung die Zustandsgrößen ermittelt werden. Man bringt zu diesem Zwecke die Energiegleichung $dq = du + A p dv$ durch Einführung des Wärmeinhaltes $i = u + A pv$, woraus $du = di - A d\,(pv)$, auf die Form

$$dq = di - A v dp \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Wählen wir p, T als die den Zustand bestimmenden Größen, so wird

$$di = \left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_T dp \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

wobei die Fußzeichen p und T andeuten, daß bei der Bildung der Ableitungen die betreffenden Größen als unveränderlich anzusehen sind. (2) in (1) eingeschoben, liefert

$$dq = \left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_p dT + \left[\left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_T - A v\right] dp \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Der zweite Wärmesatz ermöglicht hier eine klassisch gewordene Umformung durch Hinzuziehung des Begriffes der Entropie.

Das Element der Entropie $ds = dq/T$ ergibt durch Integration von einem beliebigen Anfangszustand $p_1 T_1$ bis zu einem Endzustand $p_2 T_2$ die Zunahme der Entropie, die unabhängig ist von den Zwischenzuständen, die dabei durchlaufen werden, wenn sie nur umkehrbar waren. Daher muß, wie schon früher benutzt

$$s_2 - s_1 = F\,(T_2 p_2) - F\,(T_1 p_1)$$

oder ds das vollständige Differential der Funktion $F\,(Tp)$, d. h. $ds = \frac{\partial F}{\partial T} dT + \frac{\partial F}{\partial p} dp$ sein.

---

[1]) Annalen der Physik. 4. Folge. Bd. 18. 1905. S. 739.

[2]) Mitt. üb. Forsch.-Arbeit., herausg. v. Ver. deutsch. Ing. Heft 35 u. 36, S. 109. Berlin 1906. Heft 108 u. 190, S. 79. J. 1911. Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1915. S. 376.

Der Vergleich mit (3) ergibt, daß $\frac{\partial F}{\partial T} = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_p$ und $\frac{\partial F}{\partial p} = \left[\left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_T - A v\right]\frac{1}{T}$ ist. Dann aber liefert die Ableitung des ersten Ausdruckes nach p und die des zweiten nach T die Identität

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right) = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial T} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

oder ausgeführt:

$$\frac{1}{T}\frac{\partial^2 i}{\partial p \partial T} = \left(\frac{\partial^2 i}{\partial p \partial T} - A\frac{\partial v}{\partial T}\right)\frac{1}{T} - \left(\frac{\partial i}{\partial p} - A v\right)\frac{1}{T^2},$$

woraus

$$\left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_T = A\left[v - T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p\right] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4\text{a})$$

folgt. Dies in Gl. (3) eingesetzt, liefert, wenn man noch bemerkt, daß bei unveränderlichem Druck die zuzuführende Wärme $= c_p dT$ zugleich nach (2) $= \left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_p dT$ ist;

$$dq = c_p dT - A T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \partial p \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Damit ist die gewollte Darstellung in p und T erreicht. Schieben wir anderseits (4a) in (2) ein, so folgt

$$di = c_p dT + A\left[v - T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p\right]\partial p \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Auch di ist ein „vollständiges Differential“, also muß, ähnlich wie unter (4):

$$\frac{\partial}{\partial p}(c_p) = \frac{\partial}{\partial T}\left\{A\left[v - T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p\right]\right\}$$

sein, was auf

$$\left(\frac{\partial c_p}{\partial p}\right)_T = -A T\left(\frac{\partial^2 v}{\partial T^2}\right)_p \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

führt. **Diese Gleichung dient zur Bestimmung von c_p aus der Zustandsgleichung oder umgekehrt.**

In ähnlicher Weise erhält man in den Variablen v, T mit

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v dT + \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T dv$$

die Energiegleichung:

$$dq = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v dT + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T + A p\right] dv;$$

aus dieser $ds = dq/T$ und ähnlich wie Gl. (4a)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T = A\left[T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v - p\right] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4\text{b})$$

somit

$$dq = c_v dT + A T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v dv \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5\text{a})$$

$$du = c_v dT + A\left[T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v - p\right] dv \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6\text{a})$$

und aus letzterer die Schwestergleichung zu (7):

$$\left(\frac{\partial c_v}{\partial v}\right)_T = A T\left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_v \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7\text{a})$$

Schließlich kann man in (5) und (5a) dT ersetzen durch

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v dp + \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p dv$$

und erhält einmal

$$dq = c_p \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p dv + \left[c_p \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v - AT \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p\right] dp,$$

das andere Mal

$$dq = \left[c_v \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p + AT \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v\right] dv + c_v \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v dp,$$

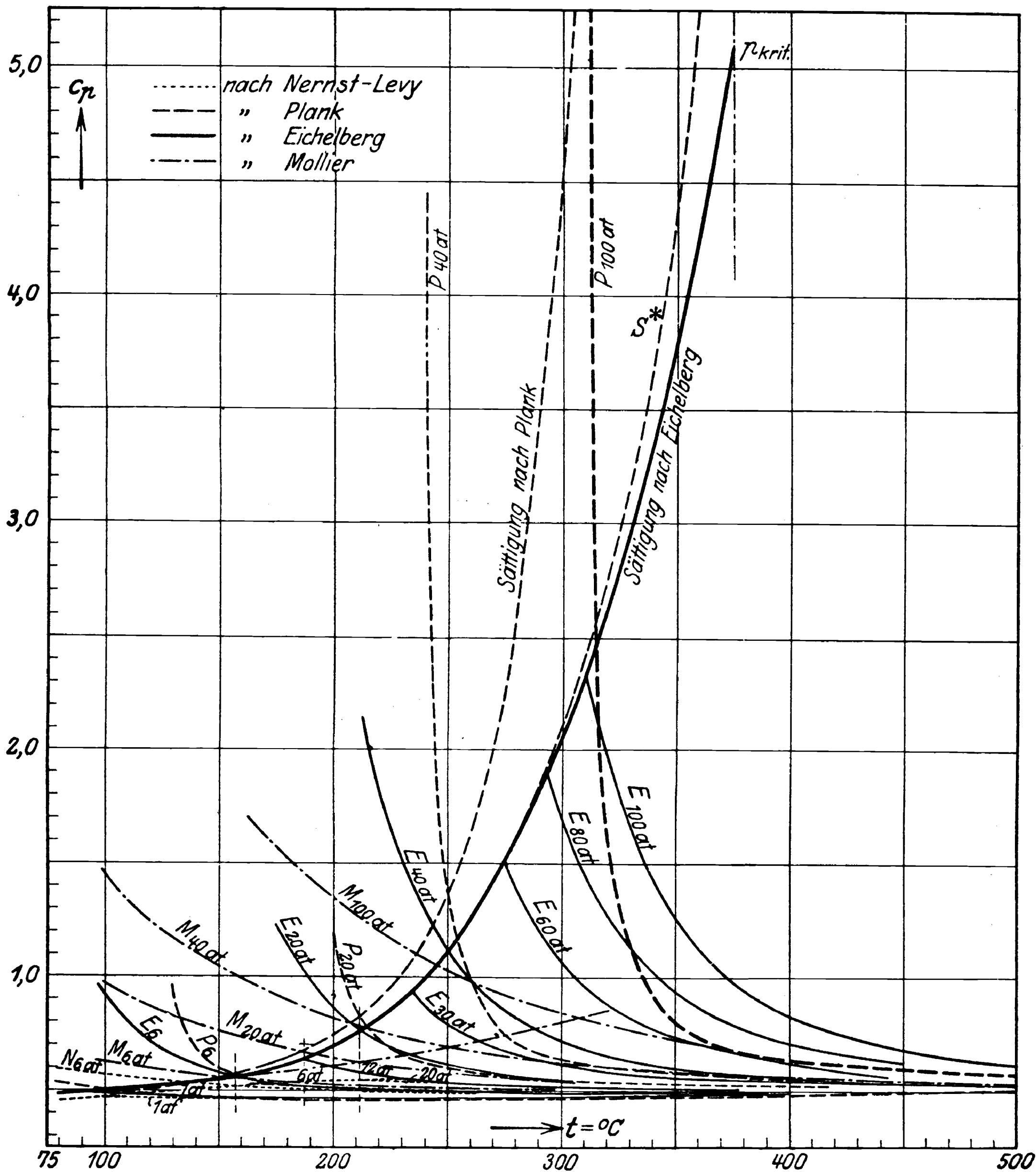


Abb. 12. Vergleich der spezifischen Wärmen für höhere Drücke.

welche Ausdrücke identisch gleich sein müssen. Man kann also in dem ersten den Faktor von dp ersetzen durch den Faktor der dp im zweiten entspricht, woraus sich

$$dq = c_v \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v dp + c_p \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p dv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5\text{b})$$

als Ausdruckform von dq in den Veränderlichen p und v ergibt.

Als Ausdruck der Entropie erhält man mit Gl. (5):

$$ds = \frac{dq}{T} = c_p \frac{dT}{T} - A\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p dp \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

Liegt eine Zustandsgleichung vor, aus der man durch Auflösung $v = f(T p)$ darstellen kann, so dienen Gl. (6), (7), (8) um i, c_p und s zu bestimmen. Die erste auch für heute gültige

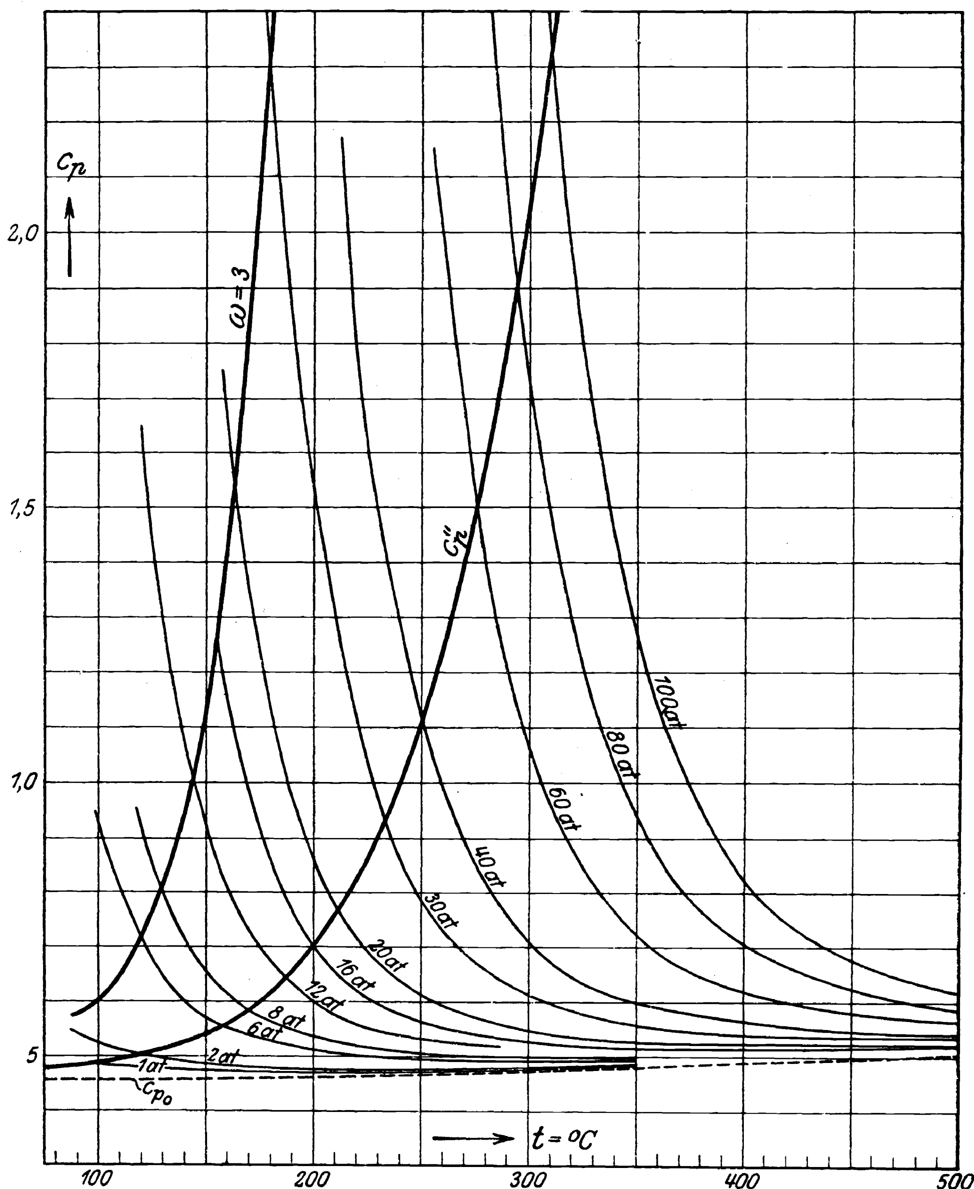


Abb. 12a. Die Eichelbergschen Werte von c_p.

Darstellung der Zustandsgrößen für Wasserdampf stammt von Callendar[1]). Im Anschluß an dessen Arbeiten fand Mollier mit der Zustandsgleichung (4) Abschn. 9

$$i = 594{,}7 + 0{,}477\, t - \mathfrak{J} p = 464{,}7 + \frac{13}{3} A p (v'' - v') + A p v' \quad \ldots \quad (9)$$

$$s = 0{,}477 \lg n\, T - 0{,}11 \lg n\left(p \cdot 10^{-4}\right) - \mathfrak{S} p - 1{,}0544 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

---

[1]) Neuerdings zusammengefaßt in Callendar, The properties of steam, London 1920.

worin

$$\mathfrak{Z} = A\left(\frac{13}{3}\mathfrak{B} - 0{,}001\right);\quad \mathfrak{S} = A\frac{10}{3}\frac{\mathfrak{B}}{T};\quad \mathfrak{B} = 0{,}075\left(\frac{273}{T}\right)^{\frac{10}{3}} \quad \ldots\ldots (11)$$

bedeuten und p (im Gegensatz zur „Hütte") in kg/qm einzusetzen ist.

In Abb. 12 sind die spezifischen Wärmen c_v insbesondere für höhere Drucke nach den von verschiedenen Forschern gegebenen Formeln eingetragen. Die Aufgabe, eine den Werten von Knoblauch möglichst genau entsprechende Zustandsgleichung aufzustellen, hat Eichelberg[1]) in vorzüglicher Weise gelöst. Seine Ausdrücke für v, i, s sind:

$$v = \frac{RT}{p} - \frac{C_1}{12\,A T^3} - \frac{3{,}2\,C_2\left(p + 2\cdot 10^4\right)^{2,2}}{14\cdot 15\,A T^{14}} \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

$$i = 513{,}2 + \left(\alpha T + \frac{\beta}{2}T^2 - \frac{\gamma}{T}\right) - \frac{C_1 p}{3T^3} - \frac{C_2\left(p + 2\cdot 10^4\right)^{3,2} - C_3}{14\,T^{14}} \quad \ldots\ldots\ldots (13)$$

$$s = 0{,}6841 + \left(\alpha \lg n\, T + \beta T - \frac{\gamma}{2T^2}\right) - AR \lg n\, p - \frac{C_1 p}{4T^4} - \frac{C_2\left(p + 2\cdot 10^4\right)^{3,2} - C_3}{15\cdot T^{15}} \quad . \quad (14)$$

Die Festwerte haben folgende Zahlenbeträge

$$\alpha = 0{,}345;\quad \beta = 0{,}000197;\quad \gamma = 5500;\quad C_1 = 3{,}2\cdot 10^4;\quad C_2 = 2{,}83\cdot 10^{22};$$
$$C_3 = 1{,}64\cdot 10^{36};\quad R = 47{,}06 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

Die Einheiten sind kg, m, sk, also v in m³/kg; p in kg/m²; i in k cal. **Die Abweichung von den Versuchswerten für v ist kleiner als 3 v. T.; für c_p etwa 2,3 v. T.** Die eigentliche Verdampfungswärme ist einerseits durch $r = i'' - i'$, andererseits $r = T_s(s'' - s')$ gegeben. Daraus folgt

$$s'' - \frac{i''}{T_s} = s' - \frac{i'}{T_s} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

worin T_s die Sättigungstemperatur bedeutet. Drückt man alle Größen durch T und p aus, so dient diese Gleichung zur theoretischen Kontrolle der Beziehung zwischen Sättigungsdruck und Temperatur, die nach Eichelberg von tiefster Luftleere bis zu 70 at nur 0,5 v. H. und bis auf 80 at nur 1 v. H. Abweichung von den Beobachtungen ergibt. Von Eichelbergs Gleichungen wird man bei Rechnungen, die große Genauigkeit erheischen und bei Extrapolation auf höhere Drücke mit Vorteil Gebrauch machen.

Ebenfalls auf den Knoblauchschen Werten der spezifischen Wärme ist die Zustandsgleichung von R. Plank[2]) in thermodynamisch einwandfreier Weise aufgebaut, jedoch für den Gebrauch umständlicher als die von Eichelberg. Die Plankschen Werte von c_p sind in Abb. 12 gestrichelt, die von Mollier strichpunktiert, endlich die von Nernst und Levy punktiert eingetragen. Die Eichelbergschen Werte in das Unterkühlungsgebiet verlängert, sind in Abb. 12a in größerem Maßstabe dargestellt. c_p'' ist die Sättigungsgrenze, $\omega = 3$ dreifache Übersättigung (vergl. Abschn. 178 u. f.).

11. Die Entropietafel für Wasserdampf.

Die umständliche Zahlenrechnung nach den Formeln der letzten Abschnitte kann umgangen werden, wenn man zur graphischen Integration Zuflucht nimmt. Der einzuschlagende Weg ist der folgende. Vom Normalzustand 0° C und 1 at abs ausgehend wird 1 kg Wasser zunächst durch eine adiabatische Verdichtung auf den gewünschten Druck gebracht, wobei die Entropie unverändert bleibt und die Temperatur nur unmerklich erhöht wird; dann wird in umkehrbarer Weise Wärme unter gleichbleibendem Druck zugeführt, bis der Siedepunkt erreicht ist. Dies liefert

$$s' - s_0 = \int_0 \frac{c\,dT}{T} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

---

[1]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1917, S. 750 u. Forsch.-Arb. 1920, Heft 220.

[2]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1915, S. 187.

Der Wert von s' findet sich in der „Hütte“ unter der Bezeichnung σ für die Annahme $s_0 = 0$ fertig ausgerechnet vor. Hierauf verdampfen wir bei unverändertem Druck, also auch gleichbleibender Temperatur, bis zur spezifischen Dampfmenge x und erhalten den Zuwachs

$$dq = r\,dx \quad \text{also} \quad s_x - s' = \int_0^x \frac{r\,dx}{T} = \frac{r\,x}{T} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

An der „Grenzkurve“ ist

$$s'' - s' = \frac{r}{T} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Im Überhitzungsgebiet ist der Zuwachs

$$s_u - s'' = \int_{T_s}^{T} \frac{c_p\,dT}{T} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

welchen Wert man durch graphische Integration für verschiedene Drucke ermittelt.

Tragen wir die Werte der schrittweisen Integration als Funktion der zugehörigen Temperatur im rechtwinkligen Achsenkreuz auf, so entsteht Abb. 13. Hier bedeutet die angenähert logarithmische Linie A_0B_1 die Entropiezunahme während des Vorwärmens. In B_1 ist der Siedepunkt erreicht und die Entropie wächst bei unveränderter Temperatur T_1 und unverändertem Druck p_1 wie die gerade Strecke B_1C_1. In C_1 herrscht Sättigung und wir geraten auf ebenfalls ungefähr logarithmischer Linie ins Überhitzungsgebiet zum Punkte D_1. Die Projektion OD_1' ist also die Gesamtentropie s. Wählen wir einen andern Druck p_2 mit der Sättigungstemperatur T_2, so entsteht in gleicher Weise der Linienzug $A_0B_2C_2D_2$, der Endwert der Entropie ist OD_2'. Die Gesamtheit der Punkte $B_1B_2\ldots$ scheidet den flüssigen Zustand vom dampfförmigen, die Kurve C_1C_2 scheidet den Zustand nassen Dampfes von der Überhitzung; wir nennen die beiden daher „Grenzlinien“. Die gezeichneten Linienzüge selbst stellen die Kurven unveränderlichen Druckes dar.

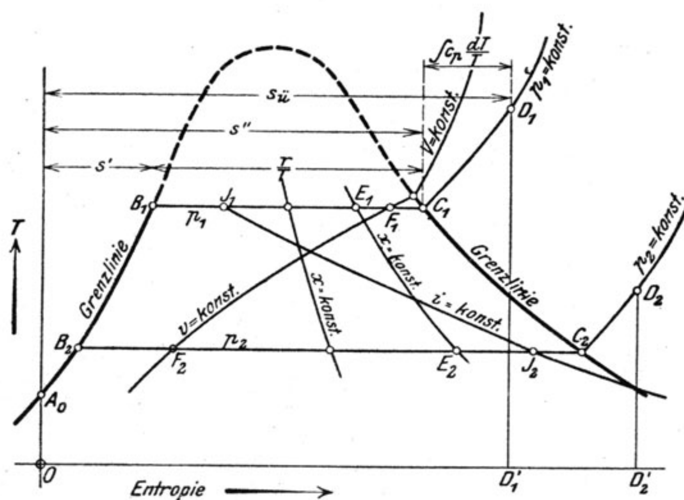


Abb. 13. Temperatur-Entropietafel.

Wird die Verdampfung nur bis zur spezifischen Dampfmenge x fortgesetzt, so ist z. B. beim Drucke p_1 die Entropie als Summe der Anteile des flüssigen und des dampfförmigen Teiles

$$s = (1 - x)\,s' + x\,s''$$

und führt zu einem Punkte E_1. Rechnen wir die Entropie beim Drucke p_2 für dasselbe x aus, so gelangen wir zu einem Punkt E_2, der $\overline{B_2C_2}$ im gleichen Verhältnis teilt wie E_1 die Strecke $\overline{B_1C_1}$. Die verbindende Kurve all dieser Punkte bildet die Linie unveränderlicher Dampfmenge. Im weiteren berechnen wir zu einem gegebenen Rauminhalt $v = v' + x_1(v'' - v')$ die spezifische Dampfmenge x für einen bestimmten Druck, z. B. p_1, indem wir v'' den Dampftabellen entnehmen, v' als unveränderlich ansehen. Durch Abtragen des x_1 erhalten wir Punkt F_1 auf der Drucklinie p_1 und wiederholen dies mit dem gleichen v für verschiedene Drucke p_2, $p_3\ldots$; die Verbindung der so gewonnenen Punkte F_1, $F_2\ldots$ liefert uns die Linie unveränderlichen Volumens. Diese können wir in das Überhitzungsgebiet leicht fortsetzen, indem wir mittels der Zustandsgleichung für verschiedene Drucke und das gegebene Volumen die zugehörigen Temperaturen ermitteln. Die Linien $v =$ konst. verlaufen hier sehr steil, im gesättigten Gebiet sehr flach.

Endlich sind wir in der Lage, die Linien unveränderlichen Wärmeinhaltes zu entwerfen. Es sei z. B. i_1 gegeben; dann ist im gesättigten Gebiet:

$$i_1 = i' + xr.$$

Wir werden nun zu je einem willkürlich gewählten Druck die Werte von i' und r den Dampftabellen entnehmen und aus obiger Formel das x berechnen. Die Verbindung der so gewonnenen Punkte liefert uns die Kurve $i_1 =$ konst. Ähnlich verfahren wir für andere Werte von i.

Im Überhitzungsgebiet muß man in einer Hilfsfigur graphisch die Werte von i, die z. B.

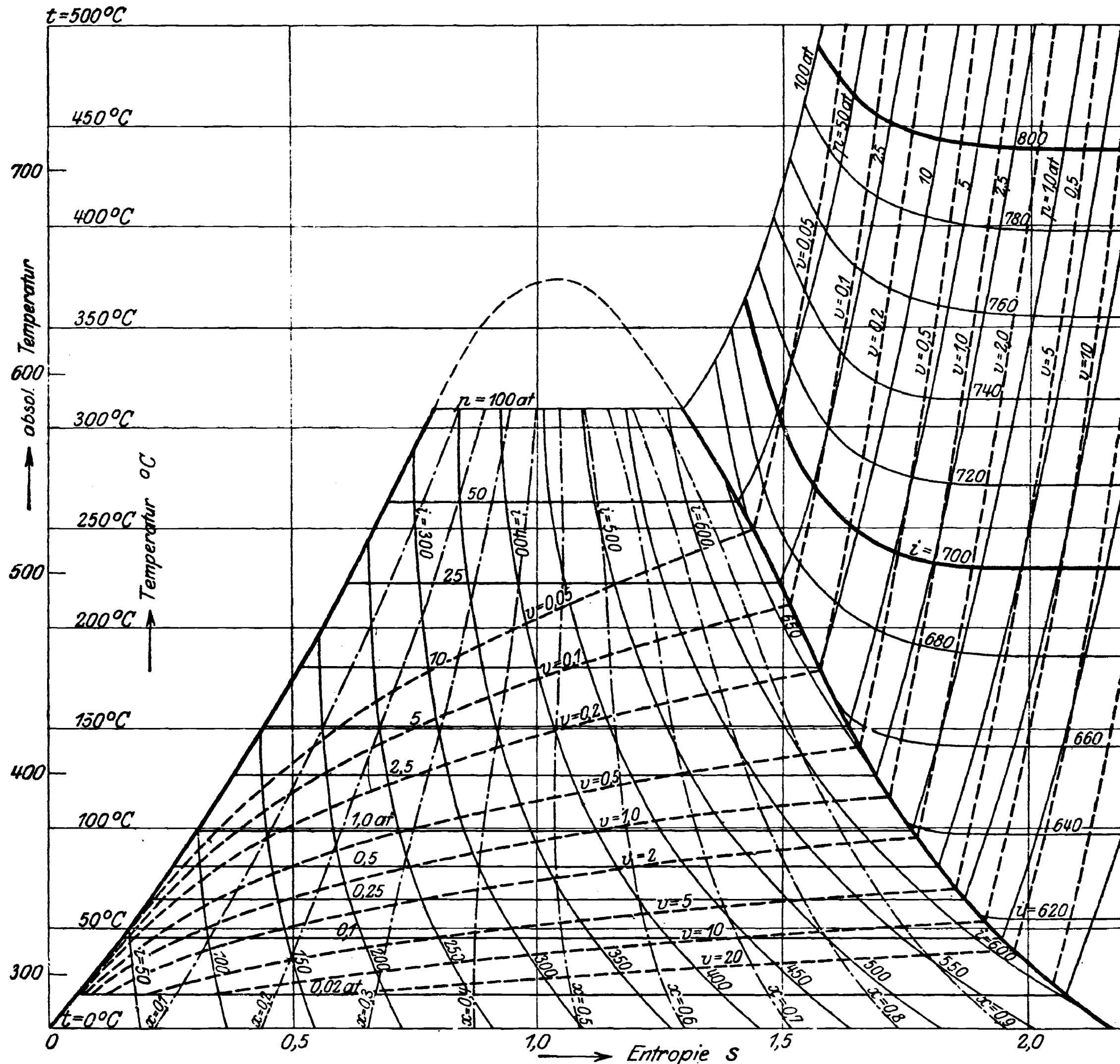


Abb. 14. Temperatur-Entropietafel für Wasserdampf.

$p_1 =$ konst. entsprechen, als Funktion wachsender Temperatur auftragen, und nun die Temperaturen anmerken, die zu bestimmten Werten $i_1, i_2 \ldots$ gehören. Diese Punkte können im Entropiediagramm auf der Linie p_1 angezeichnet werden. Verfährt man mit anderen Linien $p =$ konst. ähnlich, so erhält man schließlich die Linien $i_1 =$ konst., $i_2 =$ konst. . . . durch Verbinden der gleichbezeichneten Punkte.

Die Entropietafel, Abb. 14, die mit den Eichelbergschen Werten von c_p entworfen worden ist, bildet mithin nichts anderes als eine graphische Dampftabelle, in der die wichtigsten Zustandsgrößen rasch aufgefunden werden können. Zu irgendeinem Zustand, für den beispielsweise im Sättigungsgebiet p und x vorgeschrieben sind, brauchen wir nur den Schnitt von $p =$ konst., $x =$ konst. zu suchen, um an den durch ihn gehenden Kurven

$v =$ konst., $i =$ konst. die Werte dieser Größen abzulesen, während T und s als Koordinaten unmittelbar gegeben sind. Ähnlich einfach ist die Ermittelung für irgend zwei andere Bestimmungsstücke der Veränderlichen T, s, p, v, x, i.

Die Formeln von Eichelberg sind für die Entropie — wie auch für die in Abschn. 12 beschriebene Molliertafel gewählt worden, weil sie bei verhältnismäßiger Einfachheit größte Genauigkeit aufweisen. Allerdings müßten sie von etwa 80 at an berichtigt werden, um der Forderung, daß im kritischen Zustand $c_p = \infty$ sei, zu genügen. In Abb. 12 ist die Sättigungsgrenze nach Eichelberg und nach Plank eingetragen: erstere steigt augenscheinlich zu langsam, bei letzterer ist das Wachstum der spezifischen Wärme in der Nähe der Grenzkurve ein unwahrscheinlich starkes. Wie die mit s^* bezeichnete, nach Schätzung eingezeichnete Schaulinie erkennen läßt, genügt eine ganz geringe Abänderung der Eichelbergschen Kurve, um c_p im kritischen Punkte unendlich zu machen. Die Entscheidung kann nur durch weitere Versuche erbracht werden.

12. Die Tafel von Mollier[1]).

Mollier trägt in einem rechtwinkligen Achsensystem die Wärmeinhalte i als Ordinaten, die Entropie s als Abszissen auf (Abb. 15). Beispielsweise ist für den Druck p mit der Siedetemperatur t die Entropie der Flüssigkeit $s' = OA'$ der Wärmeinhalt $\int_0^t c\,dt = A'A$. Innerhalb des Sättigungsgebietes ist der Verlauf der Linien $p =$ konst. ein sehr einfacher. Es ist nämlich die bei unveränderlichem Druck zuzuführende Wärme dQ nichts anderes als die Zunahme des Wärmeinhaltes

$$(d\,Q)_{p\ \text{konst.}} = di$$

anderseits $ds = dQ/T$, daher allgemein

$$\left(\frac{di}{d\,s}\right)_{p\,=\,\text{konst.}} = T.$$

Im gesättigten Gebiet ist bei $T =$ konst. auch $p =$ konst., also sind die Linien gleichen Druckes Gerade.

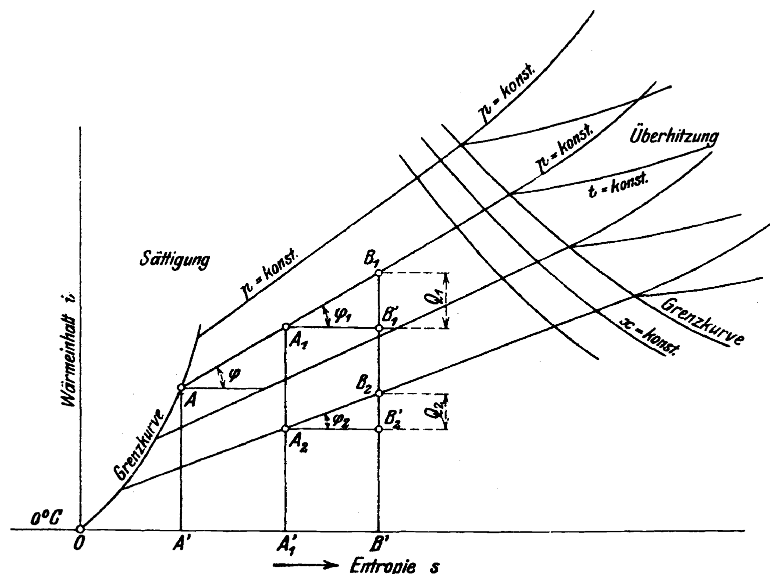


Abb. 15. Tafel von Mollier.

Auch in der Mollierschen Tafel stellt irgendein Punkt den Zustand des Dampfes eindeutig dar, denn zu einem Wertepaar i, s gehört ein bestimmtes Wertepaar p und x oder p und v,

1) Man vergleiche auch die Tafeln von Schüle, Techn. Thermodynamik. 3. Aufl. Berlin 1917, in der die bis 1911 vorgelegenen Münchener Ergebnisse verwertet sind. Ferner Wagner, Die Wirkungsgrade der Dampfturbinenschaufelungen. Berlin 1913.

das an der Tafel abgelesen werden kann. Man kann daher jede im System pv gegebene Zustandskurve in der is-Tafel abbilden, aber dieser Abbildung kommen ganz andere Eigenschaften zu als im ST-Diagramm. Die Adiabaten sind nach wie vor senkrechte Gerade und die Abweichung davon nach rechts (Zunahme der Entropie) bedeutet Wärmezufuhr, falls der Prozeß umkehrbar ist; allein der Flächeninhalt einer geschlossenen Figur ist keine Wärmemenge mehr. Statt dessen besitzt die Tafel den praktisch sehr hoch anzuschlagenden Vorteil, daß die Wärmemengen als Strecken mit dem Zirkel abgegriffen werden können.

Beispielsweise wird ein Carnot-Prozeß im gesättigten Gebiet (Abb. 15) durch die Adiabaten A_2A_1 und B_1B_2, und die Isothermen A_1B_1, B_2A_2 dargestellt. Die zugeführte Wärme ist $Q_1 = B_1B_1'$, die abgeleitete ist $Q_2 = B_2B_2'$, die als Strecken ausgemessen den Wirkungsgrad $(B_1B_1' - B_2B_2'):(B_1B_1')$ ergeben.

Die dem Buche beigegebene Tafel (Nr. I) der Wärmeinhalte ist mit den Eichelbergschen Werten der spezifischen Wärme c_p von Ingenieur Wettstein entworfen worden. Die Unterkühlungstafel Nr. II wird in Abschn. 179a erläutert[1]).

Die nachfolgenden Darlegungen werden sich nebeneinander der Entropie-Temperatur (ST)-Tafel und der Mollierschen Wärmeinhalt-Entropie (JS)-Tafel bedienen. Die Erläuterung des praktischen Gebrauches folgt weiter unten.

13. Tafeln von Proell, Thomson und Bánki.

Die Rechentafel von Proell[2]) beruht auf der Möglichkeit, gewisse Funktionen zweier Veränderlichen, durch drei geradlinige „Maßstäbe" in einer Ebene so darzustellen, daß der eine Maßstab die Funktionswerte, die beiden anderen die Werte der Variablen als Punktreihen tragen, und irgendeine Gerade zusammengehörende Werte der Funktion und der Unabhängigen auf den Maßstäben herausschneidet[3]).

Beispielsweise ist durch p und v der Dampfzustand, also auch sein Wärmeinhalt (von Proell nach der früheren Bezeichnung von Mollier „Erzeugungswärme" genannt) bestimmt. Es ist also i eine Funktion von p und v, die mit Hilfe der Abb. 16 folgendermaßen dargestellt wird. Der obere Maßstab trägt eine gleichmäßige Teilung für i in kcal, der untere eine solche für v in cbm/kg. Diese beiden sind parallel; der dritte für p ist schief und erhält eine derartige Teilung und Lage, daß die beliebige Gerade I drei zusammengehörende Werte in i, p, v herausschneidet. Diese sind in der Figur

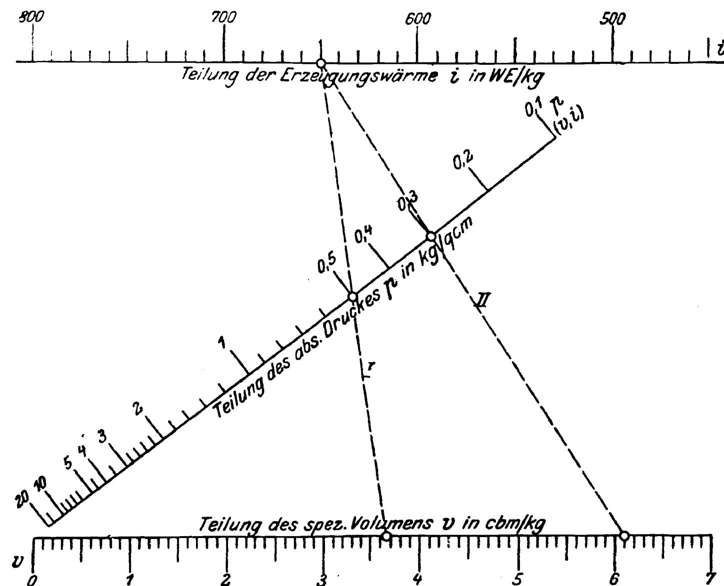


Abb. 16. Tafel von Proell.

$$i = 650 \text{ kcal}, \qquad p = 0{,}5 \text{ kg/qcm}, \qquad v = 3{,}67 \text{ cbm/kg}.$$

Wird der Dampf auf einen kleineren Druck, z. B. 0,3 at abgedrosselt, so bleibt, wie wir später nachweisen, i konstant, und die Verbindungslinie II der entsprechenden Punkte liefert das zugehörige Volumen $v = 6{,}1$ cbm/kg. Hiermit ist zugleich ein Beispiel für die Verwendung derartiger Rechentafeln gegeben.

Die Tafel von Proell[4]) enthält alle für Dampfturbinenrechnungen nötigen Größen p, t, v, i, s, x usw. Für das Weitere verweisen wir auf die zitierte Abhandlung in der Z. d. Ver. deutsch. Ing.

---

[1]) Für die sorgfältige Ausführung beider Tafeln bin ich Herrn Dipl.-Ing. Wettstein zu Dank verpflichtet.

[2]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1904, S. 1418.

[3]) Die Theorie dieses Verfahrens wird beschrieben in d'Ocagne, Nomographie. Paris 1899.

[4]) Zu beziehen durch Dr. R. Proell, Dresden-A., oder den Verlag von Julius Springer in Berlin.

Die Tafel von D. H. Thomson[1]) beruht auf ähnlichen Grundsätzen, und wurde mit den Werten der Dampftabellen von Callendar entworfen. M. Jakob übertrug die Maßstäbe[2]) in metrisches Maß.

Bánki veröffentlichte eine Tafel der Wärmeinhalte[3]) mit dem Logarithmus des Druckes als Abszisse an Stelle der Entropie, in der die Werte der spezifischen Wärme nach Knoblauch unverändert, wie sie 1906 vorlagen, verwendet werden.

14. Nicht umkehrbare Vorgänge und das Gesetz von der Zunahme der Entropie.

Wenn ein Körper umkehrbare Zustandsänderungen ausführt, muß seine Temperatur, wie oben erläutert, stets bis auf unendlich kleine Unterschiede der Temperatur des Wärmebehälters, von welchem er jeweilig Wärme empfängt, gleich sein. Setzen wir auch im Behälter nur umkehrbare Vorgänge voraus, so wird für jedes Element der Zustandsänderung die Entropieänderung $dS = dQ/T$ der Arbeitskörper gleich groß, aber entgegengesetzt wie diejenige des Behälters, da T gleich, dQ für beide auch gleich, aber entgegengesetzt ist. Die Entropieänderung beider Körper zusammengenommen ist Null, und zwar auch für endliche Zustandsänderungen. Wir haben somit den Satz:

Bei einem rein umkehrbaren Vorgange bleibt die Entropiesumme aller an dem Vorgang irgendwie beteiligten Körper unverändert.

Treten hingegen nicht umkehrbare Zustandsänderungen auf, so erfährt der Satz folgende von Gibbs und Planck zuerst ausgesprochene Erweiterung:

Die Summe der Entropien **aller an irgendeinem Vorgange beteiligten Körper** ist zu **Ende der Zustandsänderung größer als am Anfang;** nur im Grenzfalle einer in allen Teilen umkehrbaren Änderung bleibt die Entropiesumme unverändert.

Der Beweis ist für geschlossene, d. h. Kreisprozesse mit nicht umkehrbaren thermischen Umwandlungen, schon von Clausius auf seinen Grundsatz, daß Wärme nicht von selbst von einem kälteren zu einem wärmeren Körper übergehen könne, zurückgeführt worden.

Um dem Anfänger keine Schwierigkeiten zu bereiten, verschieben wir den etwas abstrakteren Beweis in den Anhang. Dort wird auch die technisch wichtige Folgerung abgeleitet werden, wie aus der stattgehabten Entropievermehrung auf den Arbeitsverlust geschlossen werden kann. Es genüge an dieser Stelle mitzuteilen, daß dieser Verlust durch das Produkt aus dem Zahlenbetrage, um den die Entropie zugenommen hat, und aus der Temperatur der tiefsten vorhandenen Wärmequelle (Kühlwassertemperatur) gemessen wird.

15. Nicht umkehrbare Vorgänge im Entropiediagramm.

Da wir die Entropie nur mit Hilfe umkehrbarer Zustandsänderungen erklärt haben, entsteht die Frage, ob und wie sie bei der Darstellung nichtumkehrbarer Vorgänge verwendet werden kann. Volle Klarheit hierüber erhält man durch Studium des Anhanges. Für die praktischen Turbinenentwürfe genügt es zunächst, sich die Verhältnisse durch die nachfolgenden Beispiele zu veranschaulichen.

a) Überströmen ins Vakuum.

Im Gefäß A (Abb. 17) befinde sich Gas oder Dampf beliebiger Art eingeschlossen; im vorerst geschlossenen Gefäß B herrsche vollkommenes Vakuum. Indem man Öffnung f freigibt, strömt das Gas aus A nach B, die Strömungsgeschwindigkeit wird durch Reibung vernichtet und nach einiger Zeit gleichen sich in beiden Räumen Druck und Temperatur aus. Welches ist der Endzustand?

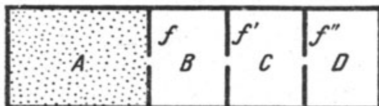


Abb. 17. Arbeitsloses Überströmen ins Vakuum.

Da nach außen keine Arbeit und (wie wir voraussetzen wollen) keine Wärme abgegeben wurde, ist die innere Energie im Anfangs- und Endzustand gleich groß. War der Inhalt ein vollkommenes Gas, so ist mithin die Temperatur nach dem Ausgleich

[1]) A steam alignement Diagramm, Engineering 1920, Bd. 109, S. 301.
[2]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1921, S. 70.
[3]) Zeitschr. f. d. ges. Turbinenwesen 1908. S. 53.

ebenso groß wie am Anfang. Stellt man die Verbindung mit einem dritten ebenfalls luftleeren Raum C her, so wird die Temperatur nach dem Ausgleich abermals unverändert bleiben: Die Endzustände liegen auf einer Isotherme. Setzt man die Räume $B, C, D \ldots$ unendlich klein voraus, so liegen die Zustandspunkte unendlich nahe beieinander, und man erhält im pv-Diagramm eine scheinbar kontinuierliche Isotherme, im Entropiediagramm ein Stück der Wagerechten; allein diese Darstellungen sind mit einer ganz besonderen Eigentümlichkeit behaftet. Der Expansionsfläche im pv-Diagramm entspricht keine Arbeitsleistung und der Wärmefläche im Ts-Diagramm keine zu- oder abgeleitete Wärmemenge. Man muß sich also hüten, die für umkehrbare Prozesse abgeleiteten Eigenschaften der Entropiedarstellung auf nichtumkehrbare zu übertragen! Die Abbildung im Entropiediagramm stellt bei letzteren nur noch die aufeinander folgenden Zustände des Arbeitsstoffes dar.

b) Die Drosselung.

Kolben A_1 in Abb. 18 drängt eine Dampfmasse, deren Gewicht wir $= 1$ kg setzen wollen, durch eine enge Öffnung vor sich hin, wobei der Dampf vom Drucke p_1 auf den Druck p_2 sinkt und den auf Kolben B_1 lastenden Druck überwindet. Die Wirbelung am Ausfluß soll

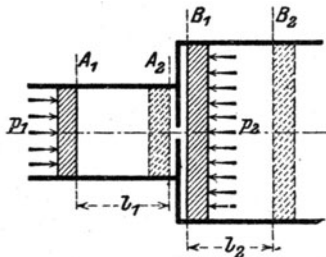


Abb. 18. Drosselung.

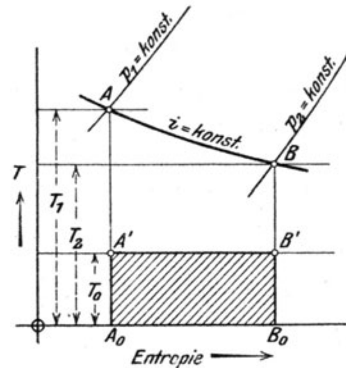


Abb. 19. Drosselung im Entropieschaubild.

durch Reibung sogleich vernichtet und in Wärme verwandelt werden. Der Vorgang spiele sich so langsam ab, daß stets Gleichgewicht zwischen Dampfdruck und Kolbenkraft vorhanden ist. Nach vollständiger Verdrängung in der Lage A_2B_2 des Kolbens wurde auf die Dampfmasse die Arbeit

$$F_1 l_1 p_1 - F_2 l_2 p_2 = p_1 v_1 - p_2 v_2$$

übertragen, die die innere Energie von u_1 auf u_2 erhöht, falls man die kinetische Energie am Anfang und am Ende vernachlässigen darf. Wir haben also:

$$u_2 = u_1 + A\,(p_1 v_1 - p_2 v_2)$$

oder

$$u_2 + A p_2 v_2 = u_1 + A p_1 v_1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Allein diese Ausdrücke sind nichts anderes als die Wärmeinhalte, und wir erhalten den Satz:

Bei der Drosselung einer beliebigen Flüssigkeit bleibt der Wärmeinhalt unverändert.

Dann ist aber die Auffindung des Endzustandes in der Entropietafel sehr einfach. Wir ziehen vom Anfangszustand $p_1 T_1$ in Abb. 19 die Linie $i =$ konst. bis auf den Druck p_2, auf den gedrosselt wird, und erhalten den neuen Zustand $p_2 T_2$. Im Mollier-Diagramm liegen die beiden Zustandspunkte auf einer Wagerechten. Wir wollen an diesem Beispiel auch klarmachen, wie der Arbeitsverlust zu berechnen ist. Die Entropievermehrung ΔS ist durch die Strecke $A_0 B_0$ gemessen, daher ist der Arbeitsverlust nach dem oben angeführten Lehrsatz in Wärmemaß:

$$Z = \Delta S \cdot T_0 = \text{Fläche } A'B'B_0A_0.$$

Und zwar bedeutet dieser Verlust folgendes: **Wie wir es auch anstellen mögen, der auf den Zustand B gedrosselte Dampf wird, selbst in einer vollkommenen Maschine, um mindestens Z Wärmeeinheiten weniger Arbeit liefern als vom Zustande A ausgehend gewonnen werden könnte.** Dieses Beispiel beweist, daß auch die Darstellung nichtumkehrbarer Vorgänge im Entropiediagramm große praktische Wichtigkeit besitzen kann.

Liegt für eine Dampfart keine Entropietafel vor, ist statt dessen die Zustandsgleichung bekannt, so kann die Wirkung der Drosselung auf Grund der Gl. (6) in Abschn. 10 beurteilt werden. Die Vorschrift $di = o$ führt auf die Beziehung

$$dT = \frac{A}{c_p}\left[T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p - v\right] dp \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

liefert also insbesondere die **Temperatursenkung dT die einer Drucksenkung dp zukommt.**

c) Die Reibung.

Die Wirkung jeder Reibung besteht, abgesehen von der Abnützung der reibenden Teile, die nur beim Gleiten fester Körper aufeinander Bedeutung erlangt, darin, daß äußere Arbeit oder kinetische Energie verschwindet, und an ihrer Stelle Wärme entsteht, d. h. daß die reibenden Teile erhitzt werden. Ist, in Wärmemaß gemessen, die äußere Abreit $\varDelta Q$ verschwunden, und war die Temperatur der reibenden Körperflächen T, so ist die Entropiezunahme der Körper $\varDelta Q : T$.

Darin, daß diese **Vermehrung so berechnet wird, als ob die Wärme den Körpern umkehrbar zugeführt worden wäre,** liegt eine gewisse logische Schwierigkeit. Man zerlegt eben den Reibungsvorgang in zwei Teile: 1. Verrichtung von Arbeit und Erzeugung von Wärme. 2. Mitteilung der Wärme an die beteiligten Körper. Da nur bei 2. Entropieänderung vorkommt, und die Mitteilung umkehrbar erfolgt, so geht der 1. Teil leer aus, während doch dieser das eigentlich Nichtumkehrbare ist. Die Schwierigkeit liegt im Unzulässigen der obigen Zerlegung; die Wärme wird nicht „erzeugt", um zunächst im leeren Raume zu schweben, sondern sie entsteht im reibenden materiellen Teil des Körpers selbst, ähnlich wie die chemische Verbrennungswärme, die wir auch nicht von außen zuführen. Der ganze Vorgang ist untrennbar und nicht umkehrbar; dennoch dürfen wir die Größe der umgewandelten Reibungsarbeit im Entropiediagramm als Fläche wie bei umkehrbaren Änderungen messen, denn die verschwundene mechanische Arbeit bewirkt, wie man letzten Endes durch den Versuch nachweisen kann, genau dieselbe **Zustandsänderung** der beteiligten Körper, als ob sie als Außenwärme zugeführt worden wäre. Zu dieser Zustandsänderung gehört dann die nach Formel $dS = dQ/T$ zu rechnende Entropievermehrung.

d) Wärmeleitung.

Wenn aus einem Behälter A von der Temperatur T durch eine leitende Scheidewand die Wärme $\varDelta Q$ zum Behälter B mit der Temperatur T_2 überströmt, so hat die Entropie von A um $\varDelta Q/T_1$ ab-, diejenige von B um $\varDelta Q/T_2$ zugenommen. Die ganze Entropievermehrung ist also

$$\varDelta S = \varDelta Q\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right) = \varDelta Q\,\frac{T_1 - T_2}{T_1 T_2}$$

oder es ist $T_2 \varDelta S = \varDelta Q \frac{T_1 - T_2}{T_1}$ und dieser Betrag ist gerade die Arbeitsmenge (in kcal), die aus der Wärmemenge $\varDelta Q$ durch einen Carnotschen Prozess zwischen den Temperaturen T_1, T_2 genommen werden könnte, so daß das Produkt aus Entropievermehrung und tiefster Temperatur wieder den Arbeitsverlust, den die nicht umkehrbare Änderung verursacht, darstellt.

Bleiben $T_1 T_2$ unveränderlich und ist die Änderung im Behälter A und B auch sonst umkehrbar, so spielt sich die Nichtumkehrbarkeit oder die **„Degradation" der Wärme ganz in der wärmeleitenden Wand ab,** was insofern eigentümlich berührt, als der Zustand der Wand selbst im Beharrungszustand gar keine Veränderung erleidet.

III. Die strömende Bewegung elastischer Flüssigkeiten.

A. Kanäle mit geradliniger Achse.

16. Die Energie-Gleichungen.

Die Energie-Gleichungen sind der zahlenmäßige, in Gleichungen gefaßte Ausdruck für den Satz von der Erhaltung der Energie, welchen wir auf ein im geradlinigen Kanal Abb. 20 sich bewegendes durch zwei bis an die festen Wände reichende Schnitte A_1B_1 begrenztes Element anwenden. Die Beobachtung zeigt, daß bei Gasen und Dämpfen die Geschwindigkeit über den größten Teil der Querschnitte gleichmäßig verteilt ist und nur am Rande rasch abnimmt. Daher dürfen wir näherungsweise voraussetzen, daß nach Verlauf der unendlich kleinen Zeit dt die in dem Element enthaltenen Massenteilchen den Raum zwischen den Ebenen A_2B_2 ausfüllen, wobei die Querschnitte eben bleiben. Der auf die Gesamtenergie des Elementes bezogene Energiesatz kann in folgender Form ausgesprochen werden: **die Zunahme der inneren und der äußeren Energie ist gleich der aufgenommenen Arbeit und der aufgenommenen Wärme.** Im allgemeinen ist über diese Größen folgendes auszusagen: Die Zunahme der inneren Energie dU ist durch das Gewicht dG des Elementes und durch seinen Zustand bedingt. Bezeichnet u die innere Energie für die Gewichtseinheit, so ist

$$dU = dG \cdot du$$

Als äußere Energie haben wir nur die kinetische Energie zu betrachten, welche wir im allgemeinen in die kinetische Energie der Schwerpunktsbewegung dK und in diejenige der Relativbewegung zum Schwerpunkt zerlegen. Letztere ist bei stetiger Verteilung der Geschwindigkeiten unendlich klein höherer Ordnung, und kann nur dann eine Bedeutung erlangen, wenn die Störung mit Wirbeln verbunden, oder wie man sagt, wenn Turbulenz vorhanden ist, welchen Fall wir in Abschn. 28 für sich erörtern. Eine (äußere) potentielle Energie führen wir nicht ein, sondern rechnen mit der Arbeit der sie bedingenden Kräfte.

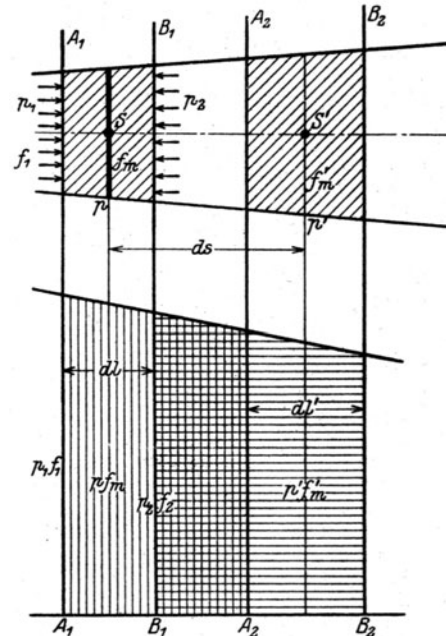


Abb. 20. Oberflächenarbeit während der Strömung.

Diese Arbeit der äußeren Kräfte rührt erstens her von den „Massen-Beschleunigungskräften", wie die Schwere, die Zentrifugalkraft und werde für die ganze Verschiebung mit dB bezeichnet; ferner von den Normalpressungen und Reibungen, die an den Begrenzungsflächen des Elementes wirken. Der Normaldruck der Wand leistet eine Arbeit $= 0$, weil seine Richtung zur Bewegungsrichtung der angrenzenden Massenteile senkrecht steht. Die Arbeit der Normaldrücke auf den Querschnitt A_1 ist in Abb. 20 durch den senkrecht schraffierten Flächenstreifen, dessen Ordinaten die Produkte pf aus dem jeweiligen Druck und der Querschnittsfläche bedeuten, dargestellt; desgleichen die Arbeit der Normaldrücke auf den Querschnitt B_1 auf seinem Wege nach B_2 durch die wagrecht schraffierte Fläche. Im ganzen erhalten

wir also als Oberflächenarbeit

$$dO = pf dl - p' f' dl',$$

nun ist $f dl = V$, wo V den anfänglichen Rauminhalt des Elementes bedeutet; ebenso ist $f' dl' = V'$ der Rauminhalt des Elementes in der Endlage. Somit wird

$$dO = pV - p'V' = -d(pV).$$

Endlich sind zu berücksichtigen die äußeren Reibungskräfte. Die äußeren Reibungen sind durch die Relativbewegung gegen die Kanalwand bedingt. Wir bezeichnen die Arbeit derselben mit dA_r. Daneben kommen innere Reibungen vor, verursacht durch die Relativverschiebung der Flüssigkeitsteilchen gegeneinander. Die Arbeit derselben kommt als Arbeit innerer Kräfte, die sofort in Wärme übergeht, also den ganzen Energieinhalt unverändert läßt, für die Änderung der Gesamtenergie nicht in Betracht.

Die im ganzen zugeführte Wärmemenge sei mit dQ bezeichnet. Die Gleichung der Gesamtenergie lautet dann

$$dU + dK = -d(pV) + dB - dA_r + dQ \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Nun besteht die Wirkung der Reibungsarbeit darin, daß kinetische Energie in Wärme umgewandelt und der Umgebung am Orte der Entstehung mitgeteilt wird. Wir setzen voraus, daß sie im allgemeinen ganz dem Dampfe zufließt, und daß von außen noch ein weiterer Betrag dQ_a durch Leitung hinzukommt. Dann wird die Gesamtwärme

$$dQ = dQ_a + dQ_r \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1a)$$

wobei dQ_r mit dem Absolutwert von dA_r identisch ist. Findet eine Wärmeableitung nach außen statt, so daß das Element den Absolutbetrag dQ' verliert, so muß man $dQ = -dQ'$ also da dQ_r stets positiv ist, $dQ_a = -dQ' - dQ_r$ setzen. Die Umgebung gewinnt in diesem Falle den Betrag $dQ' + dQ_r$.

Die zweite Hauptgleichung wird gewonnen, indem wir den Energiesatz auf die **Bewegung des Schwerpunktes** des Elementes anwenden. Diese erfolgt nach dem Grundsatz von Newton so, als ob die Masse des Elementes im Schwerpunkt vereinigt, und alle Kräfte, parallel verschoben, an ihm angreifen würden. Für die unendlich kleine Verschiebung ds ist die Zunahme der kinetischen Energie gleich der Arbeit der so übertragenen Kräfte. Bei den Oberflächenkräften muß diesmal die Achsenkomponente des Wanddruckes mit einbezogen werden, und so ergibt sich nach Abb. 20 bei Vernachlässigung von kleinen Größen zweiter Ordnung ein Gesamtüberdruck $f_m (p_1 - p_2)$, wo f_m der mittlere Querschnitt des Elementes ist. Die auf dieses übertragene Arbeit ist $dO_1 = f_m (p_1 - p_2)\, ds$. Da der Druck innerhalb des Gebietes ds linear verläuft, kann man statt $p_1 - p_2$ den Druckunterschied $p - p'$ durch die Umformung

$$dO_1 = f_m \left(\frac{p_1 - p_2}{dl}\right) dl\, ds = f_m \left(\frac{p - p'}{ds}\right) dl\, ds$$

einführen. Mit $f_m dl = V =$ Rauminhalt des Elementes und wenn $p' - p = dp$ die algebr. Zunahme des Druckes zwischen den Schwerpunktslagen S und S' bedeutet, wird

$$dO_1 = -V dp.$$

Die Reibungsarbeit an der Wandfläche ist gleich groß wie vorhin, ebenso dB; wir erhalten mithin

$$dK = dB - V dp - dA_r \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Die dritte Hauptgleichung entsteht durch die Anwendung des Energiesatzes auf die **Bewegung relativ zum Schwerpunkt des Elementes.** Sofern keine Wirbelungen vorkommen, ist die kinetische Energie dieser Bewegung wie schon erwähnt (bei stetig verteilten Geschwindigkeiten), ein unendlich kleines höherer Ordnung und darf weggelassen werden. Die „aufgenommene“ Arbeit, die von den Oberflächendrücken auf das Element übertragen wird, ist $dO_2 = -p\,dV$ (wird bei positivem dV als Ausdehnungsarbeit vom Element abgegeben, daher das negative Vorzeichen). Die Arbeit der Wandreibung und der Massenkräfte ist = Null, da der Schwerpunkt ruht. Wir erhalten mithin

$$dU = -p\,dV + dQ$$

welche Gleichung nach dQ aufgelöst

$$dQ = dU + p\,dV \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

auch die **Wärmegleichung** genannt wird.

Die drei Gleichungen (1) bis (3) sind voneinander nicht unabhängig; vielmehr entsteht (1) durch Summation von (2) und (3) oder (3) als Unterschied von (1) und (2).

Die in der technischen Literatur benutzten Formeln leiden an dem Übelstand, daß gleichzeitig zwei Maßsysteme benutzt werden: die lebendige Kraft und die Arbeit mißt man in mechanischem Maß (Meter, Kilogramm-Sekunde); Wärme und innere Energie im Wärmemaß (Kilogramm-Kalorie als Wärmeeinheit). Diese Gepflogenheit ist zu tief eingebürgert, als daß man vorderhand dagegen ankämpfen könnte. Dabei ist es zweckmäßig, alle mechanischen Größen auf Wärmeeinheiten umzurechnen durch Vermehrung mit dem Wärmeäquivalent der Arbeitseinheit, d. h. $A = {}^1/_{427}$. Ferner sollen, wie üblich, alle Größen auf 1 kg der durchströmenden Menge bezogen werden. Wir müssen daher die Hauptgleichungen durch das Gewicht dG der im Elemente enthaltenen Flüssigkeitsmenge teilen. Die kinetische Energie der Schwerpunktsbewegung erhält dabei den Ausdruck

$$\frac{w^2}{2g},$$

wenn w die Geschwindigkeit des Schwerpunktes bedeutet (als Produkt aus dem halben Geschwindigkeitsquadrat $w^2/2$ und der Masse $1/g$); für die übrigen bezeichne

u	die innere Energie für	1 kg in kg-Cal
q, q_a	die im ganzen bzw. die von außen zugeführte Wärme für . .	1 ,, ,, ,, ,,
q_r	die von der Wandreibung erzeugte Wärme für	1 ,, ,, ,, ,,
b	die Arbeit der Massenkräfte für	1 kg in m/kg
a_r	die Arbeit der Wandreibung für	1 ,, ,, ,, ,,
v	den Rauminhalt für	1 kg in cbm

Die Gleichung der **Gesamtenergie** lautet:

$$du + A d\frac{w^2}{2g} = dq + Adb - Ad(pv) - Ada_r \quad \text{. . . . . . . (1a)}$$

die Gleichung der **kinetischen Schwerpunktsenergie**

$$d\frac{w^2}{2g} = db - vdp - da_r \quad \text{. . . . . (2a)}$$

die **Wärmegleichung**

$$dq = dq_a + dq_r = du + Apdv \quad \text{. . . . . (3a)}$$

Endlich führt man mit Vorteil den Wärmeinhalt

$$i = u + Apv$$

in die Gleichungen ein.

Um mit diesem Begriff eine bestimmte Vorstellung zu verbinden, betrachten wir die Verdampfung von 1 kg Wasser von 0° ausgehend, indem wir zuerst den Druck adiabatisch auf p kg/qm erhöhen, was einen verschwindend kleinen Arbeitsaufwand erheischt und die Temperatur unmerklich erhöht. Dann führen wir bei unveränderlichem Druck Wärme zu, bis das vorgeschriebene Volumen erreicht ist, wobei eine äußere Arbeit $= p(v - v')$ geleistet wurde. Die Vermehrung der inneren Energie ist $u - u_0$, wo u_0 die Energie von 1 kg bei 0° Temperatur ist und als willkürlicher Anfangswert dem Übereinkommen nach $= 0$ gesetzt wird. Nach der Wärmegleichung ist die Wärmemenge, die erforderlich war, um, wie beschrieben, umkehrbar 1 kg Dampf vom Zustande p, v zu erzeugen, gleich $u - u_0 + Ap(v - v')$. Dies ist, da man v' fast immer gegen v vernachlässigen darf, identisch mit i; und wir haben den Satz:

Der zum Zustand p, v (T) gehörende Wärmeinhalt ist fast genau die Wärmemenge, die man einem Kilogramm Wasser von 0° C Anfangstemperatur beim Drucke p zuführen muß, um den vorgeschriebenen Endzustand zu erreichen.

Muß man, wie das bei besonderen Aufgaben vorkommt, auf einige Dezimalen genau rechnen, so muß der vollständige Ausdruck genommen werden. In der „Hütte" (Abschnitt: Wärme) stellt Mollier Tabellen auf, für die bei $t = 0^0$ C; $p_0 = 1$ at sowohl $i_0' = 0$ als auch $u_0' = 0$ ist. Dies bedingt, daß allgemein $i = u + Apv - Ap_0v_0'$ sei, im Gegensatz zu der allgemein angenommenen Deutung $i = u + Apv$. Bei Wasserdampf ist der hierdurch eingeführte Unterschied so klein, daß auch die letzten Dezimalen der Tabellenwerte nicht beeinflußt werden.

Schieben wir das Differential $di = du + Ad(pv)$ in die Gl. (1a) und (3a) ein, und beachten wir, daß wir oben erklärt $dq_r = Ada_r$ ist, so lautet die Gleichung der **Gesamtenergie**

$$A\frac{dw^2}{2g} = -di + dq_a + Adb \quad \text{. . . . . (1b)}$$

die Gleichung der **kinetischen Energie**

$$\frac{dw^2}{2g} = db - v\,dp - da_r \quad \text{(2b)}$$

und die **Wärmegleichung**

$$d\,q_a + dq_r = di - Avdp \quad \text{(3b)}$$

Ab und zu pflegen wir die Reibungsarbeit für 1 kg der Kürze halber auch mit dR zu bezeichnen.

Zum besseren Verständnis der Grundgleichungen ist es zweckmäßig, diejenige der Schwerpunktsbewegung noch aus dem Grundsatz vom Antrieb herzuleiten, damit es klar wird, daß man eigentlich von der Bewegungsgröße ausgeht, und daß sie daher eine Folge der „Impulsgleichung" (wie die Physiker sich ausdrücken) ist.

Die bewegende Kraft, die auf die in Abb. 20 links dargestellte Anfangslage des Elementes einwirkt, ist, von der Reibung und Massenkraft abgesehen, wie schon benützt $= f_m(p_1 - p_2)$; somit ist die Bewegungsgleichung $dm\frac{dw}{dt} = f_m(p_1 - p_2)$; durch Vermehrung mit dt erhalten wir die Zunahme der Bewegungsgröße, d. h.

$$f_m(p_1 - p_2)\,dt = dm \cdot dw \quad \text{(4)}$$

Indem man $dm = f_m dl\gamma/g$ und die Zunahme dw als $(dw/ds)ds$ ansetzt (Beharrungszustand vorausgesetzt), entsteht nach Division mit $dl \cdot dt$

$$\frac{p_1 - p_2}{dl} = \frac{\gamma}{g}\frac{dw}{ds}\frac{ds}{dt}$$

oder, wenn man wieder $(p_1 - p_2):dl = (p - p'):ds$, $\gamma = 1/v$ benützt und unter den Differentialen dp, dw die Zunahmen versteht, die p und w bei der Verschiebung um ds erfahren,

$$-v\,dp = \frac{w\,dw}{g} \quad \text{(5)}$$

So entsteht mit $db = 0$; $da_r = 0$ wieder die Gleichung der kinetischen Energie, aus deren Herleitung erhellt, daß es sich unabhängig vom sonstigen Bewegungszustand nur um die Beschleunigung der axialen Geschwindigkeit handelt. Nehmen wir beispielsweise an, alle Flüssigkeitsteilchen würden neben w noch eine mittlere Umfangsgeschwindigkeit w_u besitzen, dann müßte die Gleichung der Gesamtenergie in der Form

$$A\frac{dw^2}{2g} + A\frac{dw_u^2}{2g} = -di + dq_a \quad \text{(6)}$$

angesetzt werden, während unter den gemachten Voraussetzungen Gl. (5) unverändert bliebe. Als „Wärmegleichung" erhielte man (6) — (5), d. h.

$$dq_a = di + A\frac{dw_u^2}{2g} - Avdp \quad \text{(7)}$$

Allein einerseits ist p längs des Querschnittes veränderlich, anderseits ist eine Bestimmung von w_u bloß möglich, wenn man das Kräftespiel, durch das w_u beeinflußt wird, mit in Rechnung stellt. Dies erheischt die Benützung des Satzes vom „Drall" (oder Impulsmoment), der das Gegenstück zum axialen „Impuls" abgibt. Die Anwendung davon wird uns an einigen Orten begegnen, ist jedoch im allgemeinen nur in Verbindung mit den hydrodynamischen Bewegungsgleichungen durchführbar. Vergl. Abschn. 172.

Energiefluß und Reibungswärme.

Bei ungleichmäßiger Geschwindigkeitsverteilung über den Querschnitt, wie sie insbesondere bei den Strahlvorrichtungen vorkommt, muß man mit dem über den Querschnitt genommenen Integral der Zustandsgrößen rechnen. Es sei AB der Abstand zweier um eine endliche Strecke voneinander entfernten Querschnitte F_1, F_2 einer Leitung. Im Zeitteil dt geht durch das Element df des ersten das Gewicht $df w\gamma dt = dG$ hindurch und führt die Energie $(u + Aw^2/2g)\,dG$ mit. Zwischen A und B werde dem Strom die Wärme $Q_a dt$ von außen, $Q_{ra} dt$ durch **Wandreibung** mitgeteilt. Der Oberflächendruck in F_1 liefert die Arbeit $df p_1 w dt$, ferner werde die Arbeit $A_b dt$ von Massenkräften übertragen. Dann muß, wenn $A_r dt$ die Arbeit der Oberflächenreibung bedeutet, die nach Teilung durch dt entstehende Gleichung

$$\int_0^{F_1}\left(i + A\frac{w^2}{2g}\right)w\gamma\,df + Q_a + A_b + Q_{ra} = \int_0^{F_2}\left(i + A\frac{w^2}{2g}\right)w\gamma\,df + A_r \quad \text{(8)}$$

gelten. Darin ist (in Wärmemaß) $Q_{ra} = A_r$, und diese Glieder heben sich weg. Es bedeute nun dq_{ir} die durch **innere Reibung** in einem Raumteil entstehende dq_l die durch Leitung von Nachbarelementen empfangene Wärme, dann kann man im Sinne des Abschn. 172 auf 1 kg bezogen die Wärmegleichung

$$dq_l + dq_{ri} = di - Avdp \quad \text{(8a)}$$

heranziehen, **vorausgesetzt, daß man „Stromfäden“ unterscheiden kann,** so daß ein Teilchen dG unvermischt mit andern bei F_2 wieder austritt. Für einen Stromfaden gilt

$$\int_1^2 (dq_l + dq_{ri})\, dG = dG\,(i_2 - i_1) - dG \int_1^2 A v\, dp\,,$$

man zerlegt von einem willkürlichen Anfangszustand 0 ausgehend

$$\int_1^2 v\,dp = \int_0^2 v\,dp - \int_0^1 v\,dp$$

und erhält für die Gesamtmaße durch Integration nach dG, wenn man bedenkt, daß Q_l als die gesamte durch Leitung eindringende Wärme $= Q_a + Q_{ra}$ ist, und wenn man die **gesamte Reibungswärme** $Q_r = Q_{ra} + Q_{ri}$ setzt:

$$(Q_a + Q_r)\, dt = \int_0^{F_2} dG\, i_2 - \int_0^{F_1} dG\, i_1 - \int_0^{F_2} dG \int_0^2 v\,dp + \int_0^{F_1} dG \int_0^1 v\,dp\,.$$

Das Einschieben in Gl. (8) ergibt, wenn man die Massenkräfte vernachlässigt,

$$Q_r = \left\{ \int_0^{F_1} \left[\frac{w^2}{2g} + \int_0^{p_1} v\,dp\right] \frac{dG}{dt} - \int_0^{F_2} \left[\frac{w^2}{2g} + \int_0^{p_2} v\,dp\right] \frac{dG}{dt} \right\} \quad \text{mit} \quad \frac{dG}{dt} = w\gamma\, df\,. \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Man nennt

$$E = \int^{F} \left[\frac{w^2}{2g} + \int v\,dp\right] w\gamma\, df \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

den **Energiefluß in der Zeiteinheit durch den Querschnitt** F. Die Energie im thermodynamischen Sinn für das Element dG ist aber

$$dG\left(u + A\frac{w^2}{2g}\right).$$

Man wird daher gut tun, E hiervon zu unterscheiden, z. B. es als Fluß der „Srömungsenergie“ bezeichnen. Bei reibungsfrei adiabatischer Strömung ist $di = v\,dp$ also, von einem Festwert abgesehen,

$$\int v\,dp = i = u + Apv\,,$$

und dann wird bei gleichmäßiger Strömung

$$AE = (i + Aw^2/2g)\, G_{sek} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

In diesem Fall bedeutet also E die Menge der in der Zeiteinheit wirklich durchfließenden Energie zuzüglich die „Verdrängungsarbeit“ $Ap\,(Gv)$. Da nun Energie: Zeit $=$ Leistung, so kann Gl. (9) auch wie folgt ausgesprochen werden:

Die Reibungsarbeit (zwischen zwei Querschnitten) ist der Abnahme der durchfließenden Strömungsleistung gleich.

17. Stetigkeitsbedingung. Die Integrationsaufgabe.

Die Stetigkeitsbedingung oder die **Durchflußgleichung,** wie wir sie auch nennen wollen, ist der Ausdruck für die Erhaltung der Masse. Das im Element AB des Stromes Abb. 21 enthaltene Gewicht ist

$$G = f\,dz\,\gamma,$$

wo dz die Länge, γ das spezifische Gewicht bedeuten. Im Zeitelemente dt tritt durch Querschnitt f das Gewicht $dG = f w\,dt\,\gamma$ ein, und durch f' das Gewicht $dG' = f'w'dt\gamma'$ aus; die Zunahme des Inhaltes ist daher

$$(-f'w'\gamma' + fw\gamma)\,dt,$$

wofür man

$$-\frac{d(fw\gamma)}{dz}\,dz\,dt$$

schreiben kann, und diese Zunahme muß der zeitlichen Änderung des Inhaltes G, d. h. $dG/dt \cdot dt$ oder

$$\frac{d f\gamma dz}{dt}\,dt$$

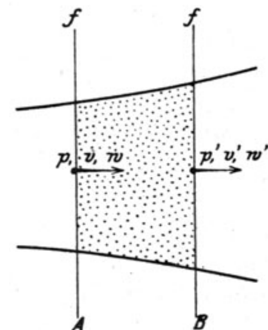


Abb. 21.
Zur Stetigkeitsbedingung.

gleich sein. Daraus folgt die Beziehung

$$-\frac{d(fw\gamma)}{dz}=\frac{d(f\gamma)}{dt} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Haben wir es mit dem **Beharrungszustande** zu tun, so ist das durch einen beliebigen Querschnitt in der Sekunde strömende Gewicht unveränderlich und an die Stelle von (1) tritt die Gleichung

$$G_{sk}=fw\gamma=\frac{fw}{v}=\text{konst.} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Ist die Geschwindigkeit längs des Querschnittes veränderlich, und bezeichnet w die axiale Komponente, γ das zugehörige Raumgewicht in einem Element δf des Querschnittes, so kann G durch Integration bestimmt werden.

$$G=\int df w\gamma \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2a)$$

Oder wenn $\bar{w}$ und $\bar{\gamma}$ geeignete Mittelwerte bedeuten

$$G=f\bar{w}\bar{\gamma} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2b)$$

Wir werden in Abschn. 175 auf diese Form genauer eingehen.

Die **allgemeine Zustandsgleichung** stellt den Zusammenhang zwischen pvT dar, der unabhängig von der besonderen Zustandsänderung besteht. Als solche gilt für Gase die Gleichung $pv=RT$; für Dämpfe die Beziehung zwischen Druck und Temperatur im gesättigten Zustand und der Ausdruck des spezifischen Volumens durch die spezifische Dampfmenge. Es genügt also die Angabe von zwei Zustandsgrößen, um die dritte zu bestimmen. Bei Gasen darf man p, v, T zu zweit beliebig wählen; bei nassen Dämpfen genügt die Angabe p, T nicht, man muß p, v oder p, x oder T, v oder T, x angeben.

Die allgemeine Integrationsaufgabe besteht in der Darstellung der Zustandsgrößen p, v, T, w als Abhängige des Ortes und der Zeit in der als gegeben anzusehenden Leitung.

Beschränken wir uns auf Beharrungsströmungen, so scheidet die Zeit aus, und es stehen uns zur Verfügung drei Beziehungen; nämlich zwei Energiegleichungen (die nach Belieben aus Gl. 1b, 2b, 3b des vorigen Abschnittes ausgewählt werden) und die Durchflußgleichung. Bekannt müssen sein drei unabhängige Größen, z. B. bei Gasen p_0, v_0, w_0 in einem bestimmten, z. B. dem Anfangsquerschnitte f_0. Daraus folgt sogleich das sekundliche Gewicht, und die Energiegleichungen erlauben, drei Unbekannte, z. B. p, v, w für einen beliebigen anderen, insbesondere den Endquerschnitt zu berechnen. Sind diese durch algebraische Ausdrücke als Abhängige von G ermittelt, so kann umgekehrt beispielsweise der Enddruck vorgeschrieben und daraus G berechnet werden.

Infolge rechnerischer Schwierigkeiten kann dieses Verfahren nur für die einfachsten Sonderfälle durchgeführt werden, von welchen die nachfolgenden die wichtigsten sind.

18. Das Druckgefälle bei reibungsfreier Strömung.

Wir setzen Abwesenheit von Wirbelung und Reibung voraus, hingegen kann Wärmeaustausch bestehen. Als bekannt muß die Art der Wärmezufuhr angenommen werden, so daß sich durch Integration der Wärmegleichung die Beziehung

$$p=f(v) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

ergibt, die wir „Expansionsgleichung“ nennen wollen.

Als zweite unabhängige Beziehung benützen wir die Gleichung der kinetischen Energie, mit der weiteren Beschränkung, daß die Massenkräfte, insbesondere die Schwere, vernachlässigt werden dürfen, was die Form

$$\frac{w\,dw}{g}=-v\,dp \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

ergibt. Summieren wir die aufeinander folgenden Änderungen zwischen zwei Lagen mit dem Anfangsdruck p_1 und dem Enddruck p_2, so entsteht

$$\frac{w_2^2-w_1^2}{2g}=-\int_{p_1}^{p_2} v\,dp \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

welche Gleichung die Formel von de Saint-Vénant und Wantzl (1839) genannt wird.

Im besonderen Fall, daß der Ausfluß aus einem sehr großen Gefäß stattfindet, in welchem $w_1 = 0$ gesetzt werden kann, erhalten wir

$$\frac{w_2}{2g} = -\int_{p_1}^{p_2} v\,dp \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (6)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung wird durch die in Abb. 22 mit L bezeichnete Fläche dargestellt und ist wesentlich positiv wenn $p_1 > p_2$, indem bei der angegebenen Reihenfolge der Integrationsgrenzen dp negativ eingeführt werden muß. Man kann die Grenzen umkehren und erhält

$$L = +\int_{p_2}^{p_1} v\,dp \quad \ldots \ldots (7)$$

welche Größe wir das „Druckgefälle" für 1 kg Flüssigkeit nennen wollen. Hieraus folgt die der hydraulischen Ausflußformel ähnliche Gleichung

$$w = \sqrt{2gL} \quad \ldots \ldots (8)$$

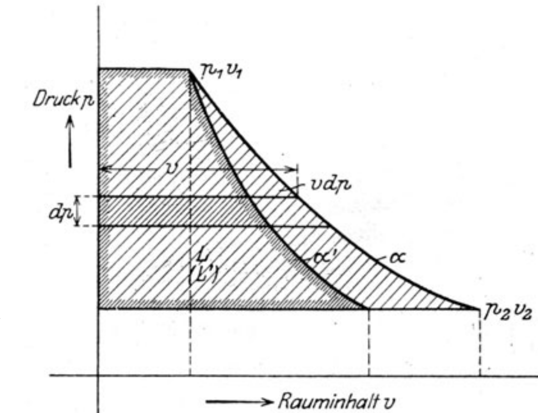


Abb. 22. Adiabatische und mit Wärmezufuhr verbundene Ausdehnung.

Ist kein Wärmeaustausch und keine Reibung vorhanden, so haben wir es mit der rein adiabatischen Ausdehnung zu tun, deren Gleichung allgemein die Form

$$p v^k = \text{konst.}$$

besitzt, wobei

$$k = 1{,}40 \text{ für zweiatomige Gase,}$$
$$= 1{,}035 + 0{,}1\,x \text{ für nassen Dampf}$$
$$= 1{,}30 \text{ für überhitzten Dampf.}$$

Diese Expansionslinie ist als Kurve α' in Abb. 22 eingetragen und umschließt zwischen denselben Druckgrenzen $p_1 p_2$ eine Arbeitsfläche L', die kleiner ist als L, falls die Expansion nach α mit Wärmemitteilung verbunden war. Man erkennt aus der Abbildung, **daß die mitgeteilte Wärme nicht unmittelbar in Strömungsenergie umgewandelt wird, sondern nur nach Maßgabe der durch sie bewirkten Raumvergrößerung in der Ausdehnungsfläche zur Geltung kommt.**

Über die mit Reibung verbundenen Strömungen vergleiche man Abschn. 22.

Mit Hilfe der Gl. (5) und der Stetigkeitsbedingung wird die Geschwindigkeit und das sekundliche Durchflußgewicht bestimmt, wenn die Pressung bekannt ist, die in einem bestimmten Querschnitt herrscht. Wie dies im einzelnen durchgeführt wird, erläutern wir am Beispiel der Düse von Laval.

19. Die de Lavalsche Düse bei rein adiabatischer Strömung[1].

Die Lavalsche Düse hat den Zweck, den Dampf vom gegebenen Drucke p_1 auf den vorgeschriebenen Druck p_2 zu entspannen. Es wird sich zeigen, daß von einem bestimmten Pressungsverhältnis an eine einfache Mündung nicht genügt, daß vielmehr der Querschnitt zuerst auf einen kleinsten Wert eingeschnürt werden und dann wieder erweitert werden muß, so daß eine (kegelförmig oder in anderer Art) erweiterte „Düse" entsteht (Abb. 23).

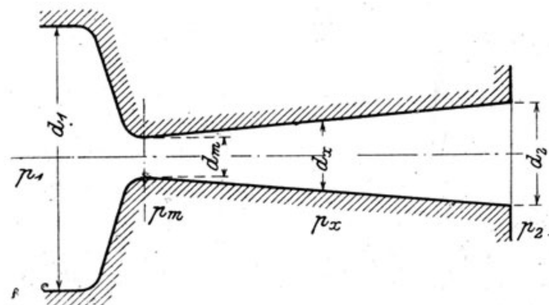


Abb. 23. de Lavalsche Düse.

Schreiben wir die Gleichung der adiabatischen Ausdehnung in der Form

$$p^{\frac{1}{k}} v = p_1^{\frac{1}{k}} v_1 = C$$

[1] Graphische Ausmittelung s. Abschn. 30.

und setzen wir den Wert von v in die Formel von L ein. Dann ist das Integral zwischen den Drücken p_1 und p

$$L = -\int_{p_1}^{p} v\,dp = +\int_{p}^{p_1} C p^{-\frac{1}{k}} dp = \frac{C k}{k-1}\left[p_1^{\frac{k-1}{k}} - p^{\frac{k-1}{k}}\right],$$

woraus nach Hineinmultiplizieren von C und Ersatz desselben einmal durch $p_1^{\frac{1}{k}} v_1$ dann durch $p^{\frac{1}{k}} v$ und leichter Umrechnung, sofern $w_1 = 0$ ist:

$$w = \sqrt{2g \frac{k}{k-1} p_1 v_1 \left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

folgt. In die Stetigkeitsbedingung $G_{sk} = \frac{fw}{v}$ schieben wir

$$v = v_1 \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{1}{k}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

ein und erhalten

$$G_{sk} = f \sqrt{\frac{2gk}{k-1} \frac{p_1}{v_1} \left[\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{k+1}{k}}\right]} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11)^{1)}$$

Diese Gleichung kann abkürzend in der Form

$$G_{sk} = f \cdot \varphi(p) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

geschrieben werden, in der, wie man sich durch Ausrechnen überzeugt, die Funktion $\varphi(p)$ mit der Verkleinerung des Druckes zunächst wächst, einen Höchstwert erreicht und wieder abnimmt. Dieser Umstand ist von größter Wichtigkeit. Da das Produkt $f \cdot \varphi(p)$ im Beharrungszustand unveränderlich sein muß, so folgt nämlich, daß derjenige Wert von p, der $\varphi(p)$ zum Maximum macht, nur an der Stelle auftreten kann, an der f **den kleinsten Wert** f_m besitzt, wie sonst auch der Längenschnitt der Düse beschaffen sei.

Bestimmt man diesen sog. **„kritischen Wert"** p_m, indem man

$$\frac{d\varphi(p)}{dp} = 0$$

setzt und nach p auflöst, so erhält man mit Zeuner[2])

$$p_m = p_1 \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

und hiermit hinwieder die Geschwindigkeit w_m an der engsten Stelle durch Einschieben von p_m in Gl. (9)

$$w_m = \sqrt{2g \frac{k}{k+1} p_1 v_1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

Ferner die sekundliche Durchflußmenge

$$G_{sk} = f_m \sqrt{2g \frac{k}{k+1} \left(\frac{p_m}{p_1}\right)^{\frac{2}{k}} \frac{p_1}{v_1}} = f_m \sqrt{g k \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}} \frac{p_1}{v_1}} \quad \ldots \ldots \quad (15)$$

Es ist in hohem Maße bemerkenswert, daß diese Werte, vor allem G_{sk}, nur vom Anfangszustande des Dampfes und f_m abhängen. Weiter unten wird nachgewiesen, daß w_m identisch ist mit der Geschwindigkeit, mit der sich der **Schall in Dampf von dem Zustand, der im engsten Querschnitt herrscht, ausbreitet.**

---

1) Gleichungen (9) und (11) sind zuerst von De Saint-Venant und Wantzel i. J. 1839 angegeben worden.

2) Zeuner, Theorie der Turbinen. Leipzig 1899, S. 268f.

Daß diese Eigenschaft jeder reibungsfreien Strömung zukommt, wurde zuerst von Hugoniot[1]) erkannt und kann wie folgt erwiesen werden. Die Logarithmus der Kontinuitätsgleichung $\log G + \log v = \log f + \log w$ liefert durch Differentiation

$$\frac{dv}{v} = \frac{df}{f} + \frac{dw}{w},$$

wobei man sich alle Größen als Funktionen einer und derselben Unabhängigen, z. B. der Achsenlänge, dargestellt denkt. An der engsten Stelle ist $df = 0$, also

$$\frac{dv}{v} = \frac{dw}{w}. \quad \text{Nun ist aber} \quad \frac{w\,dw}{g} = -v\,dp, \quad \text{somit} \quad \frac{dv}{v} = -\frac{g}{w^2} v\,dp, \quad \text{oder:}$$

$$w^2 = -g v^2 \frac{dp}{dv} = -\frac{dp}{d\left(\frac{1}{gv}\right)} = \frac{dp}{d\varrho},$$

wo ϱ die spezifische Masse der Flüssigkeit bedeutet. Diese Formel stellt aber, wie wir später nachweisen werden, nichts anderes als die Schallgeschwindigkeit der Flüssigkeit dar.

Den Endquerschnitt f_2 erhält man aus der Gleichung

$$G_{sk} = \frac{f_2 w_2}{v_2}; \qquad f_2 = \frac{G_{sk} v_2}{w_2}$$

oder aus dem Verhältnis zu $f_m = \frac{G_{sk} v_m}{w_m}$

$$\frac{f_2}{f_m} = \frac{v_2}{v_m} \cdot \frac{w_m}{w_2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

nachdem w_2 und v_2 aus Gl. (9) und (10) ermittelt worden sind.

Schreiben wir

$$w_m = \alpha_m \sqrt{p_1 v_1}; \; p_m = \beta p_1; \; G = \chi f_m \sqrt{\frac{p_1}{v_1}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

so können die Beiwerte folgender Tabelle entnommen werden:

Einheiten m, qm, kg, sk	$\varkappa$	β	α_m	χ
Gesättigter Dampf	1,135	0,5774	3,23	1,990
Überhitzter Dampf	1,30	0,5457	3,33	2,090
Luft	1,40	0,5283	3,38	2,145

Für Luft kann $p_1 v_1 = RT_1$ und $p_1/v_1 = p_1^2/RT_1$ gesetzt werden, daher wird mit $R = 29{,}27$ auch noch

$$w_m = 18{,}30\sqrt{T_1}; \; G_{sk} = 0{,}3964 f_m \frac{p_1}{\sqrt{T_1}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17\text{a})$$

In der Nähe des engsten Querschnittes kann das Verhältnis $(f_m/f)^2$ als Abhängige von $p/p_1 = \xi$; $p_m/p_1 = \xi_m$ durch eine parabolische Funktion dargestellt werden, indem man aus (11) $(1/f)^2 = \psi(\xi)$ nach dem Lehrsatz von Mac Laurin als

$$\frac{1}{f^2} = \psi(\xi_m) + (\xi - \xi_m)\psi'(\xi_m) + \frac{(\xi - \xi_m)^2}{2}\psi''(\xi_m)$$

entwickelt. Da $\psi'(\xi_m) = 0$ ist, entsteht nach Vermehrung mit f_m^2

$$\left(\frac{f_m}{f}\right)^2 = 1 - \frac{(k+1)^3}{4k^2} \frac{(\xi - \xi_m)^2}{\xi_m^{\frac{2}{k}}} = 1 - c(\xi - \xi_m)^2 \quad \ldots \ldots \quad (17\text{b})$$

Man findet für	$k = 1{,}135$	1,30	1,40
den Beiwert	$c = 4{,}97$	4,57	4,39.

Diese Entwicklung ist indessen nur in der nächsten Nähe von ξ_m, etwa bis $\xi = 0{,}33$ brauchbar. Darüber hinaus entnimmt man die Werte von $f_x : f_m$ der nachfolgenden Zahlentafel oder den graphischen Schaulinien in Abb. 24. Diese enthalten auch die Geschwindigkeitsvorzahl α_x, die vermöge der Beziehung

$$w_x = \alpha_x \sqrt{p_1 v_1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

[1]) S. Prandtl, Enzyklopädie der math. Wissensch. Thermodynamik, S. 294.

zum Druckverhältnis $p_1 : p_x$ die Geschwindigkeit zu rechnen erlaubt. Die Abbildung stellt $f_x : f_m$ in zwei Maßstäben dar: rechts Schaulinien I für $p_1 : p_x < 10$, links Schaulinien II für

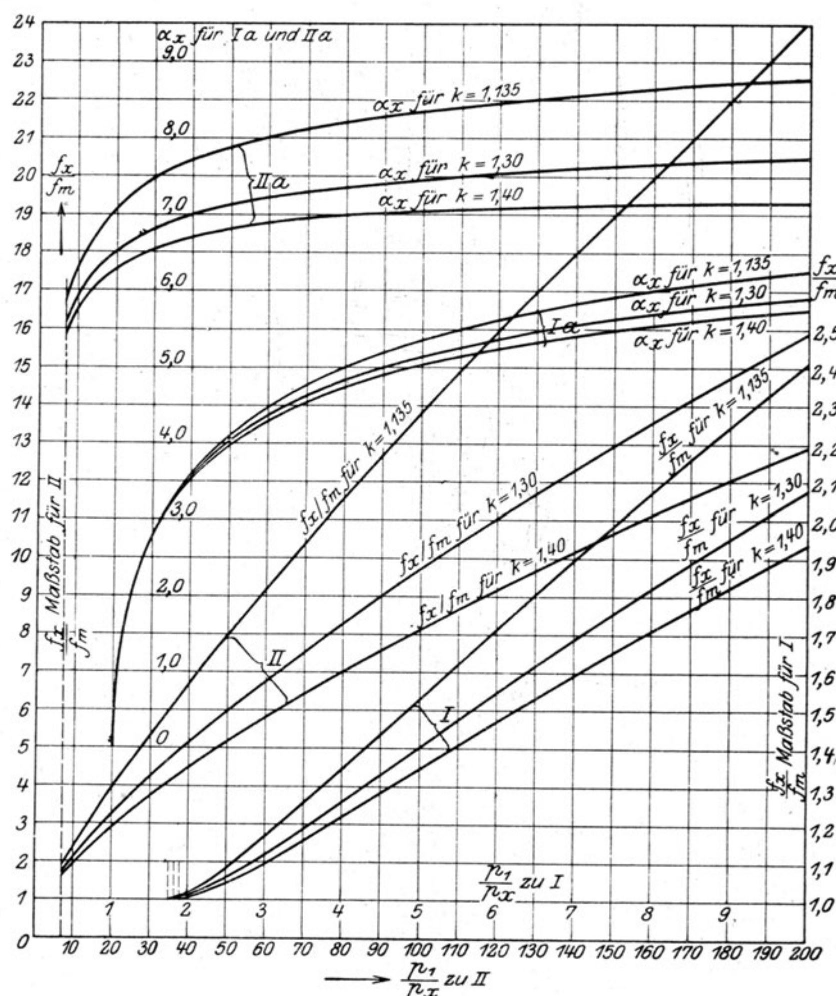


Abb. 24. Querschnittsverhältnisse und Geschwindigkeits-Vorzahlen.

$p_1 : p_x > 10$. Ähnlich beziehen sich die Schaulinien Iα von α_x auf $p_1 : p_x < 10$ und ist α_x über dem Abszissenwert mit der großen Teilung abzulesen, während IIα auf die kleine Teilung bezogen sind. Der (Ordinaten-)Maßstab für die α_x ist gleich.

Druckverhältnis $\frac{p_1}{p_x}$	Querschnittsverhältnis $\frac{f_x}{f_m}$			Geschwindigkeitsvorzahl α_x		
	für $k = 1,135$	$= 1,30$	$= 1,40$	$= 1,135$	$= 1,130$	$= 1,40$
3	1,1658	1,1151	1,0932	4,4952	4,36	4,30
5	1,5331	1,4035	1,3457	5,36	5,14	5,03
7,142	1,9189	1,7028	1,6077	5,86	5,57	5,43
8,33	2,1330	1,8610	1,7457	6,07	5,73	5,58
10	2,4079	2,0751	1,9306	6,29	5,92	5,75
25	4,6515	3,7230	3,3259	7,30	6,67	6,42
50	7,9532	5,9586	5,1584	7,86	7,10	6,80
75	10,963	7,9025	6,7150	8,15	7,32	3,97
100	13,803	9,6781	8,1164	8,33	7,45	7,09
125	16,504	11,343	9,4127	8,47	7,56	7,17
150	19,000	12,921	10,632	8,61	7,63	7,23
200	24,133	15,890	12,898	8,78	7,74	7,32

Mit den Bezeichnungen

$$x = \frac{p_1}{p_x};\ y = \frac{f_x}{f_m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18a)$$

kann man die Schaulinien I und II durch folgende empirische Formel darstellen:

$$x = -a + by + cy^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18c)$$

deren Beiwerte nachfolgend zusammengestellt sind.

	$\varkappa$	a	b	c
Naßdampf	1,135	5,005	6,1238	0,10707
Heißdampf	1,30	7,026	7,7595	0,33164
Luft	1,40	8,115	8,5410	0,58875

Die Formel ist brauchbar für $x > 7{,}5$ und liefert etwa $\pm$ 2 v. H. Genauigkeit. Durch Auflösung stellt man y als Abhängige von x dar.

Die Geschwindigkeit an der engsten Stelle, w_m, zeigt sich mit dem Anfangsdruck nur wenig veränderlich, z. B. für Naßdampf

bei $p_1 = 5$ at abs $\quad w_m = 442{,}4$ m/sk
bei $p_1 = 12$ at abs $\quad w_m = 454{,}3$ m/sk

Den Geschwindigkeitsverlauf übersieht man gut, wenn man w als Abhängige von $\xi = p_x/p_1$ aufträgt. Im Punkte $\xi = \beta = p_m/p_1$ besitzt w eine Wendetangente, die man nach Wewerka[1]) aus dem Abstand ihres Schnittpunktes mit der ξ-Achse vom Punkte $\xi = \beta$, d. h. der Subtangente

$$ST = k\beta$$

bequem konstruiert. Die Verlängerung dieser Tangente schneidet auf der Ordinatenachse eine Geschwindigkeit $w = \sqrt{2g(k+1)p_1 v_1/k}$ aus.

Je mehr sich p_2 dem Werte p_m nähert, um so kleiner ist der Unterschied zwischen f_2 und f_m. Im Grenzfalle, daß $p_2 = p_m$ wird, erhält man auch $f_2 = f_m$, d. h. die Düse ist nicht mehr zu erweitern.

Ist aber der Gegendruck größer als der kritische Druck, d. h.

$$p_2 - p_m,$$

so erreicht die Expansion den Wert p_m nicht mehr, und man rechnet mit Umgehung der Formeln (17) zunächst w_2 aus Gl. (9), hierauf v_2 nach Gl. (10) und erhält

$$f_2 = \frac{G v_2}{w_2}.$$

Die Düse wird in diesem Fall mit beliebiger Form ausgeführt, verengt sich stetig oder wird höchstens im Endquerschnitt zylindrisch.

20. Wiederholte Einschnürung. Höchstwert von G.

Die verwickelten Erscheinungen, die sich in einer für das gegebene Druckverhältnis zu kurzen oder zu langen Düse abspielen, werden später besprochen werden. Hingegen gelten die entwickelten Formeln bei reibungsfreier adiabatischer Strömung auch für mehrfach eingeschnürte Leitungen, wie beispielsweise Abb. 24a. Nur ist es wichtig zu bemerken, daß der kritische Druck p_m nicht in jedem Minimum des Querschnittes auftritt. Dies findet vielmehr nur für das kleinste Minimum statt, da dort wegen $G = f\varphi(p)$ der Wert $\varphi(p)$ den größten Betrag erlangen muß, der möglich ist. In der doppelt eingeschnürten Düse (Abb. 24a), für die wir $f_m' > f_m$ voraussetzen, wird die Funktion $\varphi(p)$ von A ausgehend gegen f_m' zunehmen,

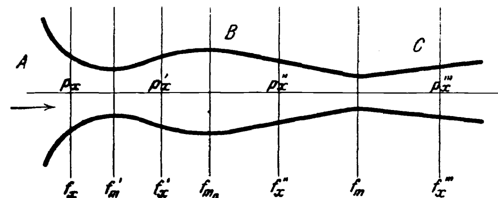


Abb. 24a. Wiederholte Einschnürung.

[1]) Z. f. d. ges. Turbinenwesen 1920, S. 266.

aber nicht bis zum Höchstwert, jenseits von f_m' durchläuft $\varphi(p)$, daher auch p, dieselben Werte wie vorhin, aber in umgekehrter Richtung. In B, wo f ein Maximum besitzt, wird $\varphi(p)$ am kleinsten (ohne analytisch ein Minimum zu sein), der Druck hat einen Höchstwert. Von B gegen f_m findet wieder Abnahme statt, und wenn $f_x'' = f_x$, so haben wir auch dasselbe p_x wie vorhin. Hinter f_m aber erfolgt eine Expansion, und wenn wieder $f_x''' = f_x$, so ist wohl $\varphi(p_x''') = \varphi(p_x)$, hingegen entspricht der Druck selbst einem Punkte jenseits des Maximums von $\varphi(p)$ und ist kleiner als p_x. Wäre $f_m' = f_m$, so müßten auch die Pressungen an beiden Orten übereinstimmen.

Höchstwert von G.

Die Formel $G_{sk} = f_m \varphi(p_m)$ stellt den größten Wert von G_{sk} dar, der durch den gegebenen Querschnitt f_m unter den gegebenen Druckverhältnissen strömen kann. Es ist indes eine Strömung mit einem Gewicht

$$G'_{sk} < G_{sk}$$

sehr wohl möglich. In diesem Falle nimmt der Druck gegen den Querschnitt f_m hin ab, $\varphi(p)$ nimmt zu, allein ohne bei f_m den Höchstwert zu erreichen. Daher müssen jenseits von f_m dieselben Werte von $\varphi(p)$ und von p wie vor f_m durchlaufen werden, d. h. der Dampf wird jenseits des engsten Querschnittes wieder verdichtet, und würde theoretisch bei genügender Erweiterung der Düse den gleichen Wert wiedererlangen wie im Ausflußgefäß. Es könnte also eine Strömung, wenn einmal in Bewegung gesetzt, theoretisch ohne Druckgefälle fortdauern. Allein dies ist eine Betrachtungsart, die der Annahme idealer Flüssigkeiten in der Hydraulik entspricht. In der Wirklichkeit sind stets Reibungen vorhanden.

21. Übergang aus dem Überhitzungs- in das Sättigungsgebiet.

Trifft die Adiabate im Überhitzungsgebiet mit der Gleichung

$$p v^k = p_1 v_1^k = a \quad \text{mit} \quad k = 1{,}3 \quad \dots \dots \dots \dots (1)$$

die Grenzkurve, deren Gleichung

$$p^\lambda v'' = 1{,}7235 = b \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{15}{16} \quad \dots \dots \dots \dots (2)$$

wobei p in at einzusetzen ist, so ist deren Schnittpunkt zu bestimmen, indem man die Logarithmen von (1) und (2) nimmt und nach $\log(p)$ und $\log(v)$ auflöst. Nennen wir die Lösung $p_s v_s$, so beginnt in diesem Punkte die Adiabate des nassen Dampfes

$$p v^{k_1} = p_s v_s^{k_1} \quad \text{mit} \quad k_1 = 1{,}135 \quad \dots \dots \dots \dots (3)$$

Um die Geschwindigkeit w zu bestimmen, müßte man das Integral

$$\int_{p_1}^{p} v\,dp \quad \text{zerlegen in} \quad \int_{p_1}^{p_s} v\,dp + \int_{p_s}^{p} v\,dp$$

und man erhielte w in der Form

$$w = \sqrt{w_s^2 + w'^2} \quad \dots \dots \dots \dots (4)$$

Auch in der Stetigkeitsbedingung $Gv = fw$ sind beim Durchgang durch die Grenzkurve die Werte für Naßdampf zu benutzen. Ist p_s kleiner als der kritische Wert p_m der zu p_1 gehört, so wird f_m mit $k = 1{,}3$ gerechnet. Im andern Fall muß w nach (4) in die Formel eingeführt und der Kleinstwert bestimmt werden. Diese umständlichen Rechnungen vermeidet man durch das weiter unten angegebene graphische Verfahren.

22. Mit Reibung verbundene Strömungen.

Wollen wir mit Reibung behaftete Strömungen untersuchen, so müssen wir die allgemeinen thermodynamischen Energieformeln (Abschn. 16) verwenden. Wir beschränken uns zunächst auf ruhende Kanäle mit Vernachlässigung der Schwere, so daß die Massenkraftarbeit $db = 0$ gesetzt werden kann. Ferner machen wir die Annahme, daß auch die Wärmeleitung, Strahlung und Wirbelung vernachlässigbar seien, so daß nur die gewöhnliche Reibungs-

wärme in Betracht kommt, die wegen der als undurchlässig angesehenen Kanalwand ganz dem strömenden Dampfe einverleibt wird. Unter diesen Umständen vereinfacht sich die Gleichung der Gesamtenergie (mit $dq_a = A\,da_r$) auf

$$A\frac{w\,dw}{g} = -di \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Ferner ist Gleichung der kinetischen Energie

$$\frac{w\,dw}{g} = -v\,dp - da_r \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Die Wärmegleichung

$$A\,da_r = di - A\,v\,dp \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Die Durchflußgleichung für den Beharrungszustand

$$Gv = fw \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Von diesen kann die erste allgemein, ohne Rücksicht auf die besondere Art des Reibungsgesetzes, integriert werden. Für zwei Querschnitte mit dem Anfangszustand p_1, v_1, w_1, i_1 und dem Endzustand p_2, v_2, w_2, i_2, ergibt nämlich die Summation der Elementaränderungen

$$A\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = i_1 - i_2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1a)$$

Wir bezeichnen $i_1 - i_2 = H$ als das **Wärmegefälle,** und erhalten den Satz:

Die Zunahme der kinetischen Energie (in Wärmemaß) **ist gleich der Abnahme des Wärmeinhaltes,** oder kurz **gleich dem Wärmegefälle.**

Dieser äußerst wichtige Satz wurde zuerst von W. Thomson und Joule (1856), später von Grashof und Zeuner abgeleitet.

Ist der Zustand $(p_2 v_2)$ im Querschnitt 2 experimentell ermittelt, so kann mit Hilfe von (1a) die Geschwindigkeit berechnet werden. Im anderen Fall ist das Reibungsgesetz heranzuziehen.

23. Polytropische Expansion bei vollkommenen Gasen.

Machen wir die Annahme, daß die elementare Reibungswärme der Abnahme des Wärmeinhaltes verhältnisgleich, d. h.

$$dq_r = -\zeta\,di \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

ist, so daß bei endlicher Expansion der gesamte Reibungsverlust ein **fester** Bruchteil des gesamten Wärmegefälles

$$q_r = \zeta H \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

wird, dann kann **für vollkommene Gase** die Wärmegleichung mit $i = c_p T + \text{konst} = A\,\frac{k}{k-1}\,pv + \text{konst}$ als

$dq_r = -\zeta\,di = di - A\,v\,dp$, d. h. $(1+\zeta)\,di - A\,v\,dp = 0$ oder $(1+\zeta)\,k\,(p\,dv + v\,dp) - (k-1)\,v\,dp = 0$

geschrieben werden, und liefert mit der Bezeichnung

$$\lambda = k\,\frac{1+\zeta}{1+k\zeta} \text{ oder } \zeta = \frac{k-\lambda}{k(\lambda-1)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

als Integral die polytropische Ausdehnungsgleichung

$$pv^{\lambda} = \text{konst} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Aus der Energiegleichung folgt

$$\frac{w^2 - w_1^2}{2g} = \frac{k}{k-1}\,(p_1 v_1 - pv) = \frac{k}{k-1}\,p_1 v_1 \left[1 - \frac{pv}{p_1 v_1}\right]$$

und wenn $w_1 = 0$

$$w = \sqrt{2g\,\frac{k}{k-1}\,p_1 v_1 \left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}\right]} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Aus der Stetigkeitsbedingung aber erhält man

$$G = \frac{fw}{v} = f\sqrt{\frac{2gk}{k-1}\,\frac{p_1}{v_1}\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{2}{\lambda}}\left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}\right]} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Im engsten Querschnitt ist der Wert der Quadratwurzel ein Maximum, man findet also durch Differentiation für den dort herrschenden Druck

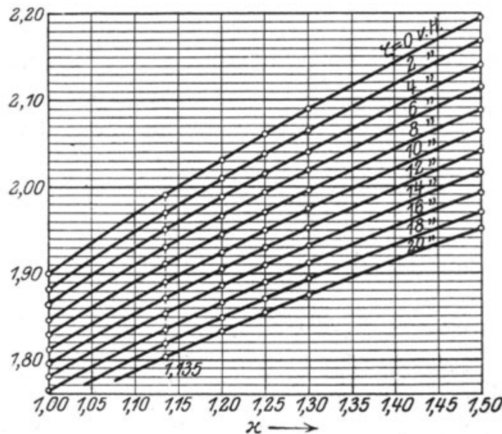


Abb. 25.
Ausflußzahl χ in Abhängigkeit von k und ζ.

$$\frac{p_m}{p_1} = \left(\frac{2}{\lambda+1}\right)^{\frac{\lambda}{\lambda-1}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

und durch Einsetzen hiervon in Gl. (5) u. (6)

$$w_m = \alpha\sqrt{p_1 v_1}; \quad G = f_m \chi \sqrt{\frac{p_1}{v_1}} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

wobei

$$\alpha = \sqrt{\frac{2gk}{k-1}\frac{\lambda-1}{\lambda+1}}; \quad \chi = \sqrt{gk\frac{\lambda-1}{k-1}\left(\frac{2}{\lambda+1}\right)^{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}}} \quad . \quad (9)$$

bedeuten. Die Werte von α und χ sind in der nachfolgenden Zahlentafel für verschiedene Werte von k und ζ nebst den Verhältnissen $p_m : p_1$ und dem Beiwert $\mathfrak{v}$, der das Verhältnis $v_m : v_1$ bedeutet, zusammengestellt[1]). Außerdem enthält die Zahlentafel die Verhältnisse $f : f_m$ für folgende Expansionsgrenzen: $p : p_1 = 0{,}14$, 0,12, 0,10, 0,01, 0,008, 0,005. Die Werte von χ sind als Abhängige von k in Abb. 25 dargestellt. Mit ziemlicher Annäherung können dieselben auch für überhitzten Dampf als gültig angesehen werden.

Gegenüber dem Reibungsgesetz, wie es in Wirklichkeit besteht, ist die Rechnung machtlos, und es muß das nachfolgend beschriebene graphische Verfahren eingeschlagen werden.

Zahlentafel der Ausflußzahl χ.

$k =$	1,135			1,20			1,25			1,30			1,50		
ζ	0,0	0,1	0,2	0,0	0,1	0,2	0,0	0,1	0,2	0,0	0,1	0,2	0,1	0,1	0,2
λ	1,1350	1,1213	1,1100	1,2000	1,1786	1,1613	1,2500	1,2222	1,2000	1,3000	1,2655	1,2381	1,5000	1,4348	1,3846
$p_m : p_1$	0,57740	0,58028	0,58261	0,56450	0,56866	0,57177	0,55495	0,56020	0,56450	0,54569	0,55206	0,55716	0,51200	0,52251	0,53086
$p_1 : p_m$	1,7319	1,7333	1,7164	1,7715	1,7585	1,7490	1,8020	1,7851	1,7740	1,8326	1,8114	1,7948	1,9531	1,9138	1,8837
α	3,2295	3,0711	2,9325	3,2714	3,1066	2,9638	3,3015	3,1521	2,9863	3,3302	3,1565	3,0075	3,4310	3,2411	3,0811
$\mathfrak{v} = v_m : v_1$ . . .	1,6224	1,6248	1,6269	1,6104	1,6144	1,6180	1,6018	1,6066	1,6108	1,5935	1,5991	1,6039	1,5625	1,5721	1,5799
$\chi = \alpha : \mathfrak{v}$ . . .	1,9907	1,8902	1,8025	2,0313	1,9243	1,8314	2,0611	1,9495	1,8543	2,0898	1,9739	1,8752	2,1959	2,0626	1,9503
$f : f_m$ für $p_1 : p =$															
1 : 0,14 . . .	1,9189	1,9413	1,9607	1,8230	1,8537	1,8770	1,7593	1,7937	1,8234	1,7028	1,7412	1,7739	1,5311	1,5797	1,6216
1 : 0,12 . . .	2,1330	2,1538	2,1775	2,0082	2,0465	2,0752	1,9304	1,9725	2,0082	1,8610	1,9082	1,9441	1,6727	1,7090	1,7620
1 : 0,10 . . .	2,4079	2,4432	2,4732	2,2594	2,3058	2,3429	2,1615	2,2142	2,2592	2,0757	2,1334	2,1837	1,8159	1,8880	1,9508
1 : 0,01 . . .	13,803	14,278	14,690	11,872	12,455	12,954	10,678	11,278	11,873	9,6781	10,352	10,994	6,9617	7,6772	8,3264
1 : 0,008 . . .	16,504	17,108	17,630	14,079	14,809	15,629	12,585	13,379	14,077	11,343	12,177	12,916	8,0002	8,876	9,6705
1 : 0,005 . . .	24,133	25,125	26,032	20,220	21,394	22,410	17,863	19,103	20,220	15,890	17,201	18,369	10,751	12,074	13,294

24. Graphische Darstellung der Reibungsarbeit und des Verlustes an kinetischer Energie im Entropieschaubild.

Betrachten wir eine reibungsfreie adiabatische Strömung zwischen den Zuständen A_1 und A_2', dargestellt durch Abb. 26 im p-v-Schaubild, durch Abb. 27 in der Entropietafel. Die gleichnamigen Punkte A_1, A_2' liegen in letzterer auf einer Senkrechten. Die Anfangs- und Endgeschwindigkeiten seien w_1 und w_2', die mit den Wärmeinhalten i_1, i_2' durch die Formel

$$\frac{w_2'^2}{2g} = \frac{w_1^2}{2g} + \frac{1}{A}(i_1 - i_2') \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

zusammenhängen.

Hiermit vergleichen wir eine vom gleichen Anfangszustand ausgehende, indessen mit Widerständen verbundene Bewegung, die bei gleichem Enddruck p_2 einen anderen

[1]) Für die Ausrechnung dieser Tafel bin ich Herrn Ing. Hohl zu Dank verpflichtet.

Rauminhalt v_2, eine andere, und zwar kleinere Geschwindigkeit w_2, einen anderen Wärmeinhalt i_2 aufweist, und für die

$$\frac{w_2^2}{2g} = \frac{w_1^2}{2g} + \frac{1}{A}(i_1 - i_2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

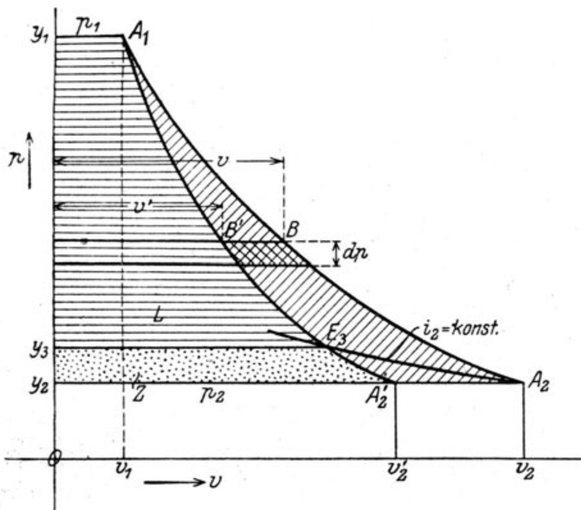


Abb. 26. Kinetischer Energieverlust.

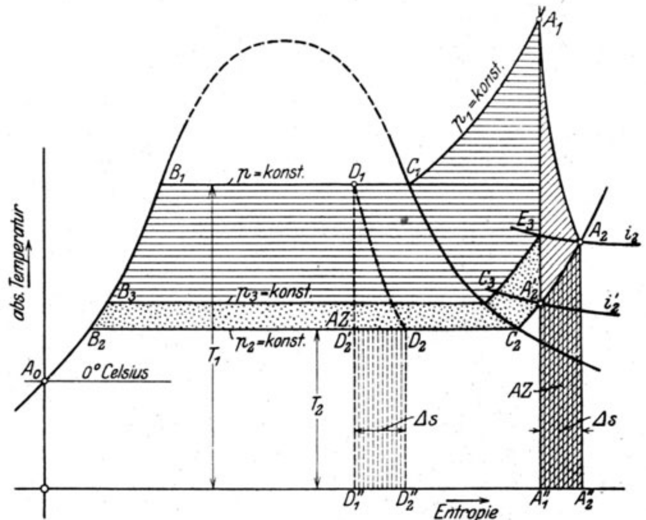


Abb. 27. Kinetischer Energieverlust und Reibungsarbeit.

gilt. Der Verlust an lebendiger Kraft Z (in mkg für 1 kg Dampf), auf den es uns vor allem ankommt, ist

$$Z = \frac{w_2'^2}{2g} - \frac{w_2^2}{2g} = \frac{1}{A}(i_2 - i_2')$$

oder

$$AZ = i_2 - i_2' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

d. h. der Wärmewert des Energieverlustes (Z) ist die Wärmemenge, die notwendig ist, um 1 kg Dampf aus dem Endzustande der reibungsfreien adiabatischen Expansion bei gleichbleibendem Drucke in den wirklichen Endzustand überzuführen.

Nun ist i_2, als die beim Drucke p_2 vom Celsius-Nullpunkt aus zuzuführende Wärmemenge = dem Flächeninhalte zwischen A_0, der Linie p_2 bis zu A_2 und der absoluten Nullinie; ebenso ist i_2' der analoge Flächeninhalt zwischen A_0 und A_2'. Daraus folgt, daß der kinetische Verlust durch die senkrecht schraffierte Fläche unterhalb $A_2'A_2$ dargestellt wird.

Betrachten wir die Verhältnisse bei der von D_1 durch die punktierten Linien Abb. 27 im Naßdampfgebiet dargestellten Expansion, so ist der Verlust

$$AZ = \text{Fläche } D_1''D_2'D_2D_2'' \text{ zugleich} = T_2 \Delta S$$

d. h. **das Produkt aus der Entropievermehrung und der tiefsten Temperatur des Prozesses,** wie es der zweite Wärmesatz verlangt. Die gleiche Beziehung würde für überhitztes Gebiet gelten, wenn wir den Dampf mit und ohne Reibung nicht auf gleichen Druck, sondern auf gleiche Temperatur expandieren ließen. Für technische Messungen ist indessen der Druck das unmittelbarer zugängliche, und so soll auch im ferneren stets die adiabatische Expansion **auf gleichen Druck** den Vergleichsmaßstab bilden.

Nun denken wir uns den wirklichen Dampfzustand auf irgendeine Weise, Punkt für Punkt ermittelt, so daß sich die Zustandskurve A_1A_2 ergibt, die man im Entropieschaubild (Abb. 27) eintragen kann. Der Gesamtbetrag der Reibungsarbeit kann aus der Wärmegleichung durch Integration als

$$Aa_r = i_2 - i_1 - \int_{p_1}^{p_2} v\,dp$$

ermittelt werden. Für die reibungsfreie Ausdehnung ist aber $R = 0$, daher

$$0 = i_2' - i_1 - A\int_{p_1}^{p_2} v'\,dp,$$

worin v' ein zu p gehörender Rauminhalt der umkehrbaren Adiabate ist. Ziehen wir diese Gleichung von der vorhergehenden ab, so erhalten wir bei gleichzeitiger Umkehrung der Integrationsgrenzen

$$A a_r = i_2 - i_2' + A\int_{p_2}^{p_1}(v - v')\,dp \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Mit Rücksicht auf Abb. 27 folgt:

$$A a_r = AZ + \text{Arbeitsfläche } A_1A_2A_2' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

d. h. a_r und Z sind durchaus nicht identisch; vielmehr ist der effektive Verlust an kinetischer Energie gegenüber der reibungsfreien adiabatischen Ausdehnung um den Inhalt der Arbeitsfläche $A_1A_2A_2'$ (Abb. 26) geringer als der Betrag der Reibungsarbeit. Diese wohl zu beachtende Erscheinung hat ihren Grund darin, daß die Reibungsarbeit stets unmittelbar in Wärme umgewandelt wird und hierdurch während der nachfolgenden Ausdehnung noch einen Beitrag zur Nutzarbeit liefern kann.

Abschätzung der Reibungsarbeit.

Obwohl die Kurve A_1BA_2 Abb. 26 nicht umkehrbarer Änderung entspricht[1]), so sind dennoch die Inhalte der gleichnamigen Flächen $A_1A_2A_2'$ im pv- und im TS-Diagramm gleich groß, was man am leichtesten einsieht, wenn man annimmt, daß 1 kg Dampf unter geeigneter Wärmezufuhr einen umkehrbaren Kreisprozeß längs des Kurvendreieckes $A_1A_2A_2'A_1$ beschrieben hätte. Daraus geht hervor, daß im Entropieschaubild

die eigentliche Reibungsarbeit (in Wärmemaß) durch den Flächeninhalt $A_1A_2A_2''A_1''A_1$ (schräg schraffiert) dargestellt wird.

Um hervorzuheben, wie unrichtig es wäre, in der Formel der kinetischen Energie das Reibungsglied zu übersehen (was in der Literatur wiederholt geschehen ist), ziehen wir in Abb. 27 durch den Schnittpunkt E_3 von i_2 und der Adiabate A_1A_2' die Linie p_3 konst und bilden A_2E_3 rückwärts im pv-Diagramm Abb. 26 ab. Dann ist i_2 auch die Fläche unterhalb $A_0B_3E_3$ und der Energieverlust gleich dem betupften Flächenstreifen, der sich inhaltsgleich in Abb. 26 vorfindet. Demnach ist die „Expansionsfläche" in Formel $(w_1^2 - w_2^2)/2g = L$ bei weitem nicht die ganze Fläche $Y_1A_1A_2Y_2$, sondern sogar kleiner als die adiabatische Fläche, und zwar um den Betrag $Z = Y_3E_3A_2'Y_2$.

Für die im Dampfturbinenbau üblichen Temperaturgrenzen sind die Temperaturunterschiede im Sättigungsgebiete, z. B. $D_2'D_1''$ mindestens 300° und D_1D_2' selten höher als 150°. Der Inhalt von $D_1D_2D_2'$ kann angenähert als Dreieck gerechnet werden, und macht hiernach selten mehr als $^1/_4$ der Verlustfläche Z aus. Nur wenig ungünstiger liegen die Verhältnisse auf seiten der Überhitzung. Demnach wird im allgemeinen **die eigentliche Reibungsarbeit den kinetischen Energieverlust auch bei den äußersten Expansionsgrenzen selten um mehr als 25 v. H. übertreffen.**

Da dieser Unterschied bei engeren Druckgrenzen noch weit geringer wird, ziehen wir es in den meisten Fällen vor, nicht mit der Reibungsarbeit, sondern unmittelbar mit dem kinetischen Verlust zu rechnen. Wir schreiben daher die Strömungsgleichung (2), indem wir i_2 aus (3) einsetzen in der Form

$$i_1 - i_2' = A\,\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} + AZ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

oder in Worten:

[1]) Daß hier eine nichtumkehrbare Zustandsänderung vor sich geht, ist derart selbstverständlich, daß man dem Standpunkt, den z. B. Morrow im Vorwort seines Buches über „Entwerfen und Konstruieren von Dampfturbinen" vertritt, nicht beipflichten kann. Wir verweisen auf das in Abschn. 15 über die Reibung Gesagte. Im übrigen sei bemerkt, daß die Anwendung der Gleichung $dq = Tds$ noch davon abhängig ist, daß die Reibungswärme mit unendlich kleinem Temperaturgefälle von den erhitzten Flüssigkeitsteilchen an ihre Nachbarn übergeht. Dies kann in Wirklichkeit kaum vorausgesetzt werden. Wenn die Geschwindigkeitsänderung infolge der Reibung von Punkt zu Punkt stetig erfolgt, dann verliert ein Wasserteilchen die kinetische Energie $dm \cdot d(w^2)/2$, die als unendlich Kleines 2. Ordnung allerdings nur eine Temperatursteigerung 1. Ordnung an dem ebenfalls 1. Ordnung unendlich kleinen Gewicht des Teilchens hervorrufen kann. Da sich indes eine ganze Schicht solcher Teilchen nebeneinander befindet, so wird die Reibungswärme, von der Wand her doch mit endlichem Temperaturunterschied ins Innere übertragen. Unsere Rechnungen beziehen sich also auf ziemlich grobe Mittelwerte.

Das verfügbare Gefälle (das der verlustfreien adiabatischen Strömung entspricht) dient zur Erhöhung der kinetischen Energie und zum Bestreiten des kinetischen Verlustes.

Diese Beziehung wird uns in den meisten Fällen die weit unbequemere Reibungsgleichung ersetzen.

25. Neuere Untersuchungen über die Reibung in geradlinigen zylindrischen Röhren.

a) Das Poiseuillesche Gebiet.

Poiseuille leitete im Jahre 1844 aus seinen Versuchen das Gesetz ab, daß in engen Röhren innerhalb gewisser Grenzen der durch Reibung bewirkte Druckabfall der Geschwindigkeit einfach proportional ist. Hagenbach gab im Jahre 1860 die Theorie der Erscheinung und stellte für ein zylindrisches Rohr die Beziehung

$$p_1 - p_2 = \frac{32\,\eta_{tech}\, l\,\overline{w}}{D^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

auf, worin $p_1 - p_2$ den Druckabfall (kg/qm), l die Rohrlänge (m), D den Durchmesser (m), $\overline{w}$ die mittlere Geschwindigkeit (m/sek) und η_{tech} die unten angegebene „Zähigkeit" bedeuten.

Bei der Ableitung dieser, auch für die Reguliergetriebe wichtigen Gleichung geht man von der Grundannahme aus, daß die auf die Flächeneinheit der reibenden Flüssigkeitsschichte wirkende Reibung τ durch die Änderung der Geschwindigkeit senkrecht zur Bewegungsrichtung und die Zähigkeitszahl, d. h. durch den Ansatz

$$\tau = \eta\,\frac{dw}{dn}$$

gegeben ist. Am Umfange des in Abb. 33 dargestellten Zylinders wirkt dann die Reibungskraft $K_r = 2\pi r l \eta \frac{dw}{dr}$, algebraisch im Sinne des Pfeiles (d. h. in Wirklichkeit, da dw/dr negativ ist, dem w entgegen). Im Beharrungszustande muß die Reibung mit den Pressungen auf die Stirnseiten des Zylinders im Gleichgewichte, d. h. es muß (algebraisch) $K_r + \pi r^2 (p_1 - p_2) = 0$ sein. Integriert man von r bis r_0, wobei die Geschwindigkeit für r_0 infolge des Haftens der zähen Flüssigkeit an der Wand = Null ist, so erhält man

$$w = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l}(r_0^2 - r^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Der sekundlich durchströmende Rauminhalt ist dann

$$V = \int 2\pi r\, dr\, w = \frac{p_1 - p_2}{8\eta l}\pi r_0^4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Die mittlere Geschwindigkeit ist aber definiert durch die Gleichung $V = \pi r_0^2 \overline{w}$, und daraus folgt:

$$\overline{w} = \frac{(p_1 - p_2)\, r_0^2}{8\eta l} \quad \text{oder} \quad p_1 - p_2 = \frac{8\eta l \overline{w}}{r_0^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

in Übereinstimmung mit Gl. (1).

Der Wert der Zähigkeitskonstanten ist nach den Tabellen von Landolt und Börnstein im absoluten Maßsystem (Dimension $cm^{-1} \cdot g \cdot sek^{-1}$)

$$\text{für Wasser} \quad \eta_{abs} = \frac{0{,}01775}{1 + 0{,}0331\,t + 0{,}000244\,t^2} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

$$\text{„ Luft} \quad \eta_{abs} = 1720 \cdot 10^{-7}(1 + 0{,}003665\,t) \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

wobei t Celsiusgrade bedeutet. Rechnet man in technischen Maßeinheiten (kg · m · sek), so ist an Stelle von η_{abs} der Wert

$$\eta_{tech} = \frac{\eta_{abs}}{98{,}1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

einzusetzen[1]).

[1]) Für den mit dem absoluten Maß seltener in Berührung kommenden praktischen Ingenieur sei in betreff dieser Umrechnung folgendes in Erinnerung gebracht. Gemäß Formel (4), die für jedes Maßsystem gilt, ist $\eta = (p_1 - p_2) d^2/(32 l w)$, und da w = Länge : Zeit, so ist die Dimension von η = spezif. Druck × Zeit, d. h. $kg \cdot m^{-2} \cdot sek$. Wollen wir die technischen Maße kg · m · sek durch die Absoluten, d. h. g (Masse) cm · sek ersetzen, so müssen wir uns erinnern, daß in letzterem die Krafteinheit, das Dyn, diejenige Kraft ist, die der Einheit der Masse (1 g) die Einheit der Beschleunigung ($1\, cm \cdot sek^{-2}$) erteilt. In technischem Maß ist 1 g Masse = 0,001 kg : 9,81 und $1\, cm \cdot sek^{-2}$ Beschleunigung = $0{,}01\, m \cdot sek^{-2}$, daher 1 Dyn

Für Rüböl (nach Biel) ist

bei $t =$	0^0	5^0	10^0	20^0	30^0 C
$\eta_{abs} =$	25,3	6,27	3,7	1,8	0,99

für Dampf

bei $t =$	20^0	100^0 C
$\eta_{abs} =$	$975 \cdot 10^{-7}$	$1320 \cdot 10^{-7}$.

Durch Versuche an Turbinenölleitungen von 12 mm Durchm. findet Camerer[1]) für Maschinenschmieröl

$$\eta_{tech} = \frac{0{,}31}{t} - 0{,}0034.$$

Oelschläger leitet[2]) aus einer größeren Zahl von Beobachtungen für Mineralöle das angenäherte Gesetz

$$\eta_{tech} = \frac{a}{t^n} = \frac{1{,}6}{10^4}\left(\frac{t_1}{t}\right)^n$$

ab, wo t die Beobachtungstemperatur, t_1 einen Festwert von etwa 185^0 C, n das eigentliche Maß der Zähigkeit bedeuten. Der Zahlenwert für $n = 1$ stimmt freilich mit dem von Camerer gar nicht überein. Praktisch wird die Zähigkeit nach Engler durch Vergleich der Zeiten gemessen, die gleiche Rauminhalte von Öl bei t^0 C und Wasser bei 20^0 C benötigen, um durch eine Kapillare im Engler-Gerät abzufließen. Das Verhältnis dieser Zeiten heißt „Englergrad" $= E$, aus dem die Zähigkeit nach Formel

$$\eta_{tech} = \frac{0{,}018}{98{,}1}\gamma\left[4{,}072\,E - \frac{3{,}518}{E}\right] \quad \text{(7a)}$$

wo γ die spezifische Dichte bedeutet, zu rechnen ist. Für technische Schmieröle wird es erlaubt sein, das zweite Glied zu vernachlässigen, und mit $\gamma \simeq 0{,}9$

$$\eta_{tech} = \frac{6{,}7\,E}{10^4}$$

zu setzen. Die Eisenbahnverwaltungen schreiben für dunkles Wagen- und Lokomotivöl im allgemeinen $E = 50 - 90$ bis 20^0 C für Sommeröl, und $E = 30 - 40$ für Winteröl vor. Dies würde $n \simeq 2{,}5$ bis 2 entsprechen.

b) Kritische Strömungsgeschwindigkeit.

Reynolds[3]) hat durch klassisch gewordene Versuche nachgewiesen, daß das Poiseuillesche Gesetz nur bis zu einer gewissen „kritischen" Geschwindigkeit gilt. Darüber hinaus wächst der Druckabfall mit einer höheren, und zwar nach seinen Versuchen für Wasser der 1,7fachen Potenz der Geschwindigkeit.

Als Wert der kritischen Geschwindigkeit fand Reynolds für zylindrische Röhren:

$$w_k = \frac{K\,\eta_{tech}}{d\,\gamma} \quad \text{(8)}$$

wobei K allgemein $= 20000$, wenn d in m, γ in kg/cbm, η in techn. Maß eingesetzt werden.

Reynolds beobachtete eine zweite Art von kritischer Geschwindigkeit, indem er bei möglichst wirbelfreier Strömung in der Rohrachse einen gefärbten Strahl einführte. Bei einem Grenzwert, der 6—7mal so groß ist als das oben bestimmte w_k, zeigt sich nach kurzem Parallellauf plötzliche Wirbelbildung; der farbige Strahl löst sich auf und vermischt sich. Reynolds nimmt an, daß dies der Ausdruck einer Labilität der Strömung ist. In technischen Anwendungen werden der Regel nach durch Absperrventile u. a. von Anfang an Wirbel geschaffen, daher man sich an das kleinere w_k halten wird.

$= (0{,}001/9{,}81) \times 0{,}01 = 1/981\,000$ kg. Die in der Formel für η_{tech} vorkommende Zahl der Kilogramme wird also ersetzt durch: Zahl der Dyn geteilt durch 981000, ebenso die Zahl der m durch: Zahl der cm geteilt durch 100, und so wird $\eta_{tech} = \left(\frac{\text{Dyn}}{981\,000}\right)\left(\frac{10\,000}{\text{cm}^2}\right)\text{sek} = \frac{\text{Dyn}}{\text{cm}^2}\frac{\text{sek}}{98{,}1} = \frac{\eta_{abs}}{98{,}1}$ wie oben angegeben.

[1]) Z. f. d. ges. Turbinenwesen 1907, S. 461.

[2]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1918, S. 423.

[3]) Philos. Trans. of R. Soc., London 1883, S. 995.

c) Über der kritischen Geschwindigkeit.

Aus den Arbeiten von Fritzsche[1]), Blasius[2]), Ombeck[3]) folgt, daß die elementare Reibungsarbeit für 1 kg der durchströmenden Flüssigkeitsmenge, auf die Rohrlänge dl gerechnet, durch den alten hydraulischen Ansatz dargestellt werden kann

$$da_r = \zeta_r \frac{dl}{D}\frac{w^2}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

worin D den Rohrdurchmesser in m
w die mittlere Geschwindigkeit in m/sek
ζ_r die Widerstandszahl

bedeuten. Letztere kann nach Blasius, gemäß dem „Ähnlichkeitsgesetz" (Abschn. 173) nur von dem Verhältnis ν/wD und der Rauhigkeit der Wand abhängen, worin

$$\nu = \frac{\eta_{abs}}{\mu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

und μ die Massendichte bedeutet, bzw. es ist

$$\nu = \frac{g\,\eta_{tech}}{\gamma} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2a)$$

je nachdem man mit dem absoluten oder dem technischen Maßsystem arbeitet. Die zusammenfassende Darstellung von Ombeck ergibt dann die Form

$$\zeta_r = \beta \sqrt[n]{\frac{\nu}{wD}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Für „glatte Rohre", als die sich die untersuchten gezogenen Schmiedeisen- und Messingrohre in reinem Zustand erwiesen haben, ist

$$\left.\begin{array}{lll}\beta = 0{,}316 & n = 4 & \text{für Wasser} \\ \beta = 0{,}242 & n = 4{,}47 & \text{für Luft}\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3a)$$

Als „rauh" haben Rohre zu gelten, die inwendig verrostet oder durch (Schlamm-, Stein- u. a.)Ansätze verunreinigt sind. Für solche fand Ombeck

$$\beta = 0{,}129 \qquad n = 4{,}2 + n'E/D \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3b)$$

wobei $n'E/D$ ein Maß der Rauhigkeit bildet, allein weder physikalisch noch geometrisch unmittelbar meßbar ist, und nur rückwärts, aus den Versuchsergebnissen erschlossen werden kann. Damit ζ_r bei gleichem ν, w, D beim rauhen Rohre mit den Beiwerten 3b größer werde als mit 3a, muß n infolge der sprungweisen Änderung von β, sprungweise von 4,47 auf höhere Beträge zunehmen. Ombeck fand $n = 6$ bis 8. Vom praktischen Standpunkt aus könnte man füglich der Rauhigkeit durch Vergrößerung von β Rechnung tragen bei unverändertem n, für das sich der bequeme Blasiussche Wert 4 empfiehlt.

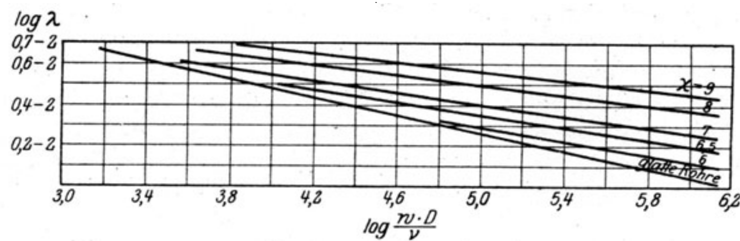


Abb. 28. Die Reibungszahl bei verschiedenen Rauheitsgraden.

Ombeck rechnet w, D, g, ν in absolutem Maß, aber l doch in Metern, so daß die Reibungsarbeit in mkg für 1 kg herauskommt. Wir finden es nicht empfehlenswert, Maßsysteme zu mischen, und beziehen alle Größen auf das technische Maß: m, kg, sek, wobei für ν Gleichung 2a zu benützen ist. Der Wechsel des Maßsystemes in Dwg beeinflußt übrigens, wie man leicht einsieht, die Werte von β nicht.

In Abb. 28 ist der Verlauf von log ζ_r (in der Abb. mit λ bezeichnet) als Abhängige von log $\frac{wD}{\nu}$ für verschiedene Exponenten n (in der Abb. mit x bezeichnet) und für absolutes Maß dargestellt. Alle Linien gehen eigentlich mit leichter Krümmung in die für glatte Rohre gel-

[1]) Mitteil. üb. Forschungsarb. Heft 60. S. 49.
[2]) „ „ „ Heft 131.
[3]) „ „ „ 1914, Heft 158.

tende Gerade über, wodurch der Geltungsbereich des jeweiligen Exponenten x begrenzt ist. Setzen wir in Formel (3) aus der Stetigkeitsbedingung $G_{sk} = (\pi/4) \cdot D^2 w \gamma$ den Wert von $Dw\gamma$ ein, nachdem man ν gemäß (2a) eingeführt hat, so entsteht, wenn wir noch bei wenig veränderlicher Geschwindigkeit die Reibungsarbeit auf ein endliches Rohrstück L beziehen:

$$a_r = \beta \sqrt[n]{\frac{\pi \eta_t g D}{4 G_{sk}}} \frac{L}{D} \frac{w^2}{2g} \quad \ldots \quad (4)$$

Hieraus folgt, daß die Reibungszahl

$$\zeta_r = \beta \sqrt[n]{\frac{\pi g \eta_{tech} D}{4 G_{sk}}} \quad \ldots \quad (5)$$

vom Verhältnis $\eta_t D/G_{sk}$ abhängt und infolge des großen Wertes von n bei wechselnden Werten von $GD\eta$ nur sehr wenig veränderlich ist. Wenn in der Tat G bei sonst gleichem D und η im Verhältnis von 1:10 zunimmt, so nimmt bei $n = 8$ die Reibungszahl nur im Verhältnis $1 : \sqrt[8]{10} = 1 : 1{,}33$ ab. Die Reibungsarbeit selbst nimmt natürlich, da w auch auf das 10fache steigt, im Verhältnis von 1:100/1,33 = 1:75 für 1 kg der durchströmenden Menge zu.

Eberle[1]) fand denn auch bei Versuchen mit gesättigtem und überhitztem Dampf an Leitungen von 70 und 150 m/m Durchmesser, und Dampfgeschwindigkeiten zwischen 7 und 100 m/sek ζ_r sehr wenig veränderlich, im Mittel

$$\zeta_r = 0{,}021\,,$$

so daß für gewöhnliche technische Rechnungen Formel (1) mit diesem Festwert benutzt werden kann.

Der **Druckabfall**[2]) wird bei hinlänglich wenig veränderlicher Geschwindigkeit und Dichte aus der Gleichung der kinetischen Energie berechnet, die mit Vernachlässigung von $w\,dw/g$ die Gestalt

$$o = -v\,dp - da_r \quad \ldots \quad (6)$$

annimmt Daraus folgt $-v\,dp = da_r$ oder auf die Länge L, mit $p_1 p_2$ als Druckgrenzen

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \zeta_r \frac{L}{D} \frac{w^2}{2g} \quad \ldots \quad (7)$$

Bei größeren Längen wird die Geschwindigkeit wegen der wachsenden v erheblich zunehmen und es wird eine Integration der Strömungsgleichungen erforderlich.

Die **eigentliche Reibungskraft** oder die **Schubspannung**, die zwischen der Flüssigkeit und der Wand auftritt, für die Flächeneinheit mit τ_r bezeichnet, folgt aus der Überlegung, daß $\pi D L \tau_r$ die ganze auf den Mantel wirkende Kraft bedeutet, die dem Produkt aus Querschnitt und Druckabfall, d. h. $(p_1 - p_2)\,\pi D^2/4$ gleich sein muß. Hieraus ergibt sich

$$\tau_r = \frac{D(p_1 - p_2)}{4L} \quad \text{oder nach (7)} \quad = \frac{\zeta_r}{4} \frac{w^2}{2g} \gamma \quad \ldots \quad (8)$$

Aus der Reibungskraft kann umgekehrt die auf 1 kg der durchströmenden Menge bezogene Reibungsarbeit berechnet werden, indem man die Reibungskraft bei einem Umfang U des Rohres für die Länge dL als $dK_r = U\,dL\,\tau_r$ ansetzt, so daß die Reibungsarbeit für die Verschiebung $dx = dK_r\,dx$ wird, oder mit $dG = F\,dL\,\gamma$ dem Gewicht des Elementes dividiert $= dK_r\,dx : dG$ für 1 kg der strömenden Menge ergibt. Beträgt die Summe der Verschiebungen dx die Länge L, so wird die Reibungsarbeit bei sonst unveränderlichen Verhältnissen

$$a_r = \frac{\zeta_r}{4} \frac{U}{F} \frac{w^2}{2g} L \quad \ldots \quad (9)$$

Zu demselben Ausdruck gelangt man, wenn man die ganze innerhalb der Länge L enthaltene Masse um dx verschoben denkt. Dann ist die Reibungskraft $K_r = U L \tau_r$, und deren Arbeit $= K\,dx$ ist so groß als ob das Element $F\,dx\,\gamma$ den Weg L zurückgelegt hätte, so daß $K\,dx : F\,dx\,\gamma$ wieder die Arbeit für 1 kg der durchfließenden Menge bedeutet und mit (9) identisch wird.

---

[1]) Forschungsarb. Heft 78. 1909.

[2]) Eine Verwechselung des Druckabfalles mit der Reibungsarbeit hat ihren Weg bis in die Mitteilungen über Forschungsarbeiten des Ver. deutsch. Ingenieure gefunden, wo in Heft 144, S. 59, Christlein bei der Kritik der Arbeiten von Loschge die Aufnahme des Faktors γ in Formel (2), und auf S. 60 in Formel (3) irrtümlicherweise glaubt fordern zu sollen.

Da UL die ganze der Reibung ausgesetzte Manteloberfläche O des Rohres ist, kann man (9) in der Form

$$a_r = \frac{\zeta_r}{4} \frac{O}{F} \frac{w^2}{2g} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

schreiben, die auch für andere Querschnittsformen als der Kreis (Rechteck, Kreisring u. a.) als gültig angesehen wird. Für rechtwinklige Blechkanäle wie sie bei Ventilationsanlagen üblich sind, stellt Brabbée[1]) für ein mittleres spezifisches Gewicht $\gamma = 1{,}2$ kg/cbm die Beziehung

$$a_r = \frac{\Delta p}{\gamma} = 6{,}61 \left(\frac{U}{4F}\right)^{1,281} w^{1,924} L \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

auf, worin $U = 2(a+b)$, $F = ab$ und a, b die Rechteckseiten bedeuten. Die in (10) vorausgesetzte einfache Proportionalität mit O/F muß also einem Potenzgesetz weichen.

26. Integration der Strömungsgleichungen für unveränderlichen Leitungsquerschnitt bei unveränderlicher Temperatur.

Ein sehr langes Rohr stehe in Wärmeaustausch mit der Umgebung, so daß die Temperatur während der Strömung sich nicht ändert. Bei kleiner Strömungsgeschwindigkeit kann die Änderung der kinetischen Energie vernachlässigt werden. Die zur Verfügung stehenden Gleichungen sind: 1. die kinetische Energie

$$o = -v\,dp - da_r = -v\,dp - \zeta_r \frac{dl}{D} \frac{w^2}{2g} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

2. die Wärmegleichung, wobei wegen $T =$ konst. für **vollkommene Gase** $di = 0$ wird:

$$dq_a + A\,da_r = -A\,v\,dp \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Mit Rücksicht auf (1) folgt eigentümlicherweise $dq_a = 0$, was indessen verständlich wird, wenn man bedenkt, daß bei verschwindender kinetischer Energie der Druckabfall gleichwertig mit einer Drosselung ist, bei der ohne Wärmezufuhr von selbst $T =$ konst. bleibt.

3. Die Stetigkeitsbedingung

$$Gv = fw \quad \text{oder} \quad \frac{w}{v} = \frac{w_1}{v_1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

wenn $w_1 v_1$ sich auf den Anfangsquerschnitt beziehen.

4. Die Zustandsgleichung, hier mit $T =$ konst.

$$pv = p_1 v_1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Gl. (1) (3) (4) ermöglichen pvw aus den gegebenen Anfangswerten $p_1 v_1 w_1$ zu bestimmen. Aus (3) (4) folgt zunächst $pw = p_1 w_1$. Indem wir hieraus w und aus (4) v durch p ausdrücken und in (1) einführen, wird diese Gleichung integrierbar und liefert

$$\frac{p_1^2 - p^2}{p_1^2} = \frac{2\zeta_r l}{D p_1 v_1} \frac{w_1^2}{2g} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

wo l die dem Drucke p entsprechende Rohrlänge ist. Mit Hilfe dieser Formel kann das sekundliche Gewicht für die Rohrlänge l durch den Druckabfall ausgedrückt werden, indem man nach Gl. (3) $G = f w_1 / v_1$ schreibt und w_1 aus (5), wie auch $f = \pi D^2/4$ einsetzt. Man erhält

$$G = K \sqrt{\frac{D^5 (p_1^2 - p^2)}{l}} \quad \text{mit} \quad K = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{g}{\zeta_r R T}} \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

Diese Formel gelangt bei der Berechnung der Fernleitungen für Naturgas beispielsweise in Nordamerika zur Verwendung. Die Leitungen werden in Abschnitte von 150 bis 180 km eingeteilt; das Gas wird auf 25 bis 28 at verdichtet, und langt im Endpunkt der Teilstrecke mit etwa 7 bis 14 at an. Über ein zweckmäßiges systematisches Vorgehen, um die wirtschaftlich günstigsten Verhältnisse einer Gas-Fernleitung zu ermitteln, vergleiche man Bánki, Drucktafel für Erdgas, Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1916. S. 512.

Ist die Änderung der Strömungsenergie eine bedeutendere, so muß Gl. (1) in ihrer vollständigen Form benutzt werden. Es werde angenommen, daß das Gas auf die Länge l zu-

[1]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1916. S. 509.

gleich um den Betrag h gehoben wird, dann führt[1]) die etwas umständlichere Integration (s. Abschn. 176) zum Ergebnis:

$$\lg n\left(\frac{w^2}{w_1^{\,2}}\right)-\left(1+\frac{Dh}{\beta g\, p_1 v_1 l}\right)\lg n\left[\frac{w^2+\dfrac{Dh}{\beta l}}{w_1^{\,2}+\dfrac{Dh}{\beta l}}\right]=\frac{2h}{p_1 v_1} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

mit $\beta=\zeta_r/2g$. Die in der Klammer neben 1 stehende Größe kann fast immer vernachlässigt werden, und man erhält

$$\lg n\left(\frac{1+\dfrac{D}{\beta w_1^{\,2}}\dfrac{h}{l}}{1+\dfrac{D}{\beta w^2}\dfrac{h}{l}}\right)=\frac{2h}{p_1 v_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Die entwickelten Formeln sind angenähert auch für gesättigten Dampf verwendbar, da man bei nicht zu großen Druckunterschieden pv als unveränderlich ansehen kann, daher in Gl. (6) RT durch $p_1 v_1$ zu ersetzen hätte.

27. Druckverlauf in gerader Leitung bei starkem Gefälle und Ausschluß von Wärmeaustausch.

Die durch Reibung erzeugte Wärme wird dem als vollkommen vorausgesetzten Gase einverleibt. In Abschn. 176 leiten wir die Lösung ab, die Grashof[2]) und Zeuner[3]) für ein zylindrisches Rohr in der Form

$$\left(\frac{RT_0}{H_0}+\frac{k-1}{k}\right)\left(1-\frac{H_0}{H}\right)-\frac{k+1}{k}\lg n\frac{H}{H_0}=\zeta_r\frac{l}{r} \quad . \quad (9)$$

gegeben haben, worin $H=w^2/2g$ und $H_0=w_0^{\,2}/2g$ mit w_0 als Eintrittsgeschwindigkeit, l die Rohrlänge bedeuten. Aus dieser Gleichung kann die Geschwindigkeit, die an einer im Abstande l gelegenen Rohrstelle herrscht, durch Probieren gefunden werden, worauf die Kontinuitätsgleichung v, die Zustandsgleichung T ergibt.

Proell[4]) stellte das Integral für die Strömung in einem kegelförmig erweiterten Rohr auf, deren Eigenschaften von Prandtl[5]) diskutiert worden sind.

Für Dämpfe muß man sich, wie Grashof a.a.O. gezeigt hat, mit Annäherungen begnügen. Hingegen ist mit Hilfe der Kurven von Fanno (s. unten) bei beliebigem Reibungsgesetz eine allgemeine graphische Behandlung möglich.

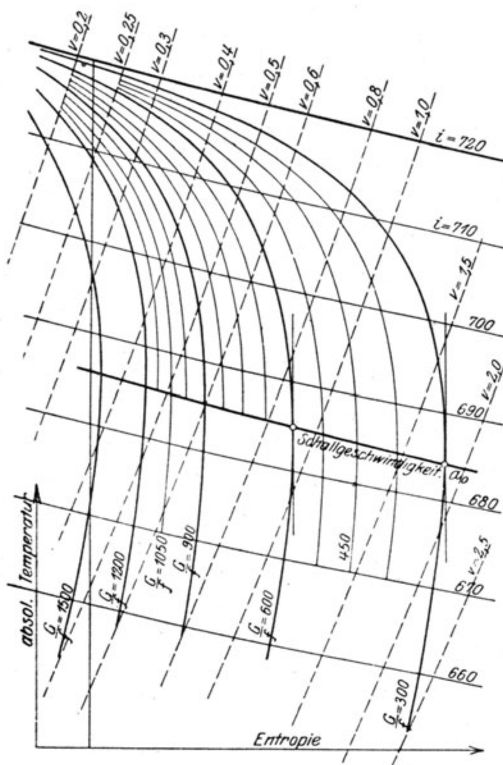


Abb. 29.
Zustände im zylindrischen Rohr, oder „Fanno"linien.

Die Fannolinie[6]) als „geometrischer Ort" der Zustände im zylindrischen Rohr.

Die Gleichung der Gesamtenergie

$$A\frac{w_x^{\,2}-w_1^{\,2}}{2g}=i_1-i_x \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

und die Stetigkeitsgleichung

$$G v_x = f w_x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

---

1) Nach Mollier, in „Hütte", Abschn. Wärme.
2) Theoret. Maschinenlehre, Bd. I, S. 593.
3) Techn. Thermodyn, Bd. I, S. 273.
4) Zeitschr. f. d. ges. Turbinenwesen 1904, S. 161; 1905, S. 151.
5) Encyklopädie d. math. Wiss., V, S. 311.
6) Von Ing. Fanno in einer Diplomarbeit a. d. Eidgen. Techn. Hochschule i. J. 1904 beschrieben.

enthalten zwar nichts, was auf das Gesetz der Reibungsarbeit Bezug hätte. Ist f unveränderlich, so können wir w_x mit Hilfe der zweiten ausscheiden, und erhalten trotzdem eine Beziehung zwischen den Zustandsgrößen, die bei jedem Reibungsgesetz gilt. Als Ausgangspunkt kann ein Gefäß gelten, an welches sich die Leitung anschließt, oder ein Punkt der Leitung selbst. Ist so w_1, i_1 durch den Anfangszustand festgelegt, so wählen wir ein beliebiges v_x, bestimmen aus (11) w_x und mit diesem aus (10) i_x, deren Schnitt im Entropiediagramm den betreffenden Zustandspunkt darstellt. Über die Länge des zurückgelegten Weges sagt diese Zustandslinie nichts aus, sie bildet den „geometrischen" Ort aller Zustände, die in einer Leitung bei unveränderlichem f und dem gegebenen G möglich sind.

In Abb. 29 ist ein System von Linien $G/f =$ konst. für denselben Anfangszustand $i_1 =$ 720 WE $w_1 = 0$, $p =$ beliebig aufgezeichnet. Die Linien i konst. sind zugleich Linien unveränderlicher Geschwindigkeit $w =$ konst. Die dick ausgezogene gibt $w = a_0$, wobei a_0 die Schallgeschwindigkeit für den betreffenden Dampfzustand bedeutet und alle Tangenten an die Linien $f =$ konst. lotrecht sind[1]). Da die wahre Zustandsänderung stets mit einer Vermehrung der Entropie verbunden sein muß, kann also die Strömung im zylindrischen Rohr bei einer Expansion nie die Schallgeschwindigkeit überschreiten. Befinden wir uns unterhalb der Linie $a_0 =$ konst., d. h. ist $w > a_0$, so muß, wenn die Entropie wachsen soll, ein Druckanstieg, eine Verdichtung stattfinden.

Graphische Darstellung des Druckverlaufs bei beliebigem Reibungsgesetz und unveränderlichem Leitungsquerschnitt.

Für irgendeine Kurve $G/f =$ konst. wird zwischen den Punkten A_1 und A_2 (Abb. 30) die Reibungsarbeit durch die unter der Zustandskurve liegende schraffierte Fläche des Entropiediagrammes dargestellt. Für das Element BB' ist

$$da_r = T\,ds = \zeta w^2 dL,$$

wo ζ in der angegebenen Weise von $G\eta D$ abhängt, und w die im Punkt B herrschende, aus der Abnahme des Wärmeinhaltes zu rechnende Geschwindigkeit bedeutet. Nun bilden wir das Integral

$$L = \int_1^2 \frac{T\,ds}{\zeta w^2}.$$

Hier steht unter dem Integralzeichen eine bekannte (graphisch vorliegende) Funktion von s, wir können die Integration graphisch ausführen und erhalten die Länge L der Rohrstrecke, in welcher der Druck von p_1 auf p_2 sinkt. Indem wir dies für mehrere Punkte durchführen, erhalten wir allgemein p als Funktion von L.

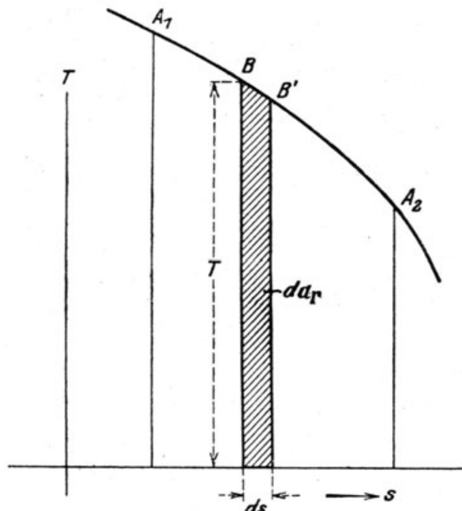


Abb. 30. Reibungswärme und Leitungslänge.

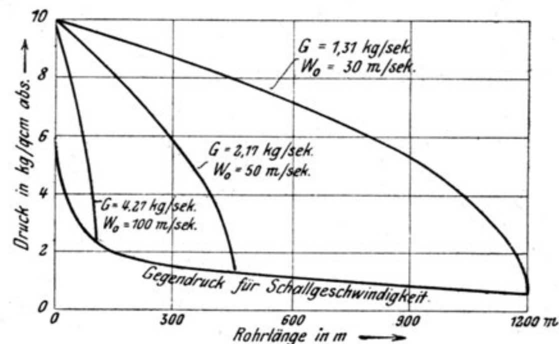


Abb. 31. Druckabfall in langen Leitungen.

Beispielsweise ist in Abb. 31 der Druckverlauf in einer Leitung von 100 mm Durchmesser bei 10 at abs und gesättigtem Anfangszustand unter Annahme eines unveränderlichen ζ dar-

[1]) Diese Eigenschaft wird rechnerisch in Abschn. (35) nachgewiesen werden.

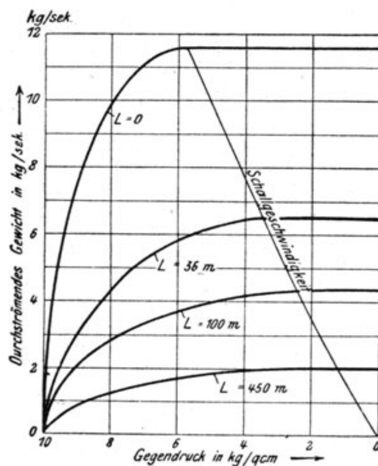


Abb. 32.
Druckabfall in langen Leitungen.

gestellt. Je kleiner die (in die Abbildung eingeschriebene) Eintrittgeschwindigkeit w_0, um so kleiner ist der Druckabfall. Bei genügender Verlängerung tritt am Rohrende Schallgeschwindigkeit ein. Unter den entsprechenden Druck kann mit der vorgeschriebenen Dampfmenge nicht expandiert werden — man muß die Dampfmenge verkleinern. In Abb. 32 wurden die durchfließenden Gewichte als Abhängige des Gegendruckes und der Rohrlänge dargestellt. Wie ersichtlich, nimmt das sekundliche Gewicht mit wachsender Rohrlänge, d. h. mit wachsender Reibung stetig ab und befolgt, was den Einfluß des Gegendruckes anbelangt, ein ähnliches Gesetz wie die einfache Mündung ($L = 0$), nur daß der Höchstwert von G bei immer kleineren Gegendrücken auftritt. Nimmt der letztere unter die Schallgeschwindigkeitsgrenze ab, so bleibt das sekundliche Gewicht konstant. Da bei gleichem w die Reibungsarbeit dem Verhältnis L/D proportional ist, so werden für eine Leitung von 10 mm Durchm. die Rohrlängen bei gleichem Druckabfall 10mal so kurz, und die durchströmende Dampfmenge sinkt natürlich auf 1/100 herab.

28. Die Turbulenz.

Unter Turbulenz versteht man die Überlagerung einer unregelmäßigen Wirbelströmung über eine regelmäßige Grundbewegung, wobei indessen die erstere mit der klassischen Wirbelbewegung von Helmholtz nicht zu verwechseln ist. Technisch am anschaulichsten ist es, sich unter der Grundströmung die Schwerpunktsbewegung des in hinlänglich kleine Elemente eingeteilten Stromes, und als Turbulenz die unregelmäßige Bewegung um diesen jeweiligen Schwerpunkt vorzustellen.

Für die Turbulenz unelastischer Flüssigkeiten in einem zylindrischen Rohr gab Lorentz[1]) die folgende elementare Darstellung. Es werde in Abb. 33 ein mit dem Rohr koaxialer Zylinder abgetrennt, dessen Elemente als Hauptbewegung die mit dem Halbmesser r regelmäßig veränderliche, aber längs des Rohres jeweils konstante axiale Geschwindigkeit w besitzen. Infolge der Hauptbewegung wird im nächsten Zeitelement links eine Schichte dm in den Zylinderraum eintreten, rechts eine gleich große austreten. Desgleichen strömt infolge der Turbulenz beispielsweise oben das Element δm hinein, unten hinaus. Die Bewegungsgröße der im Zylinder enthaltenen Maße ändert sich nicht, diejenige der axial ein- und austretenden Elemente dm wollen wir der Einfachheit halber, um nur das Wesentliche hervorzuheben, als gleich voraussetzen[2]). hingegen diejenige der durch Turbulenz seitlich hinein- und hinausgedrängten Elemente δm nicht. Der Antrieb aller axialen Kräfte auf die Zylindermaße und auf die eintretenden Elemente dm und δm muß dann der Zunahme der Bewegungsgröße im Endzustande gleich sein. Der Antrieb ist $[f(p_1 - p_2) - K_r]dt$, da neben diesem Gliede die auf die Elemente δm wirkenden Kräfte $df\,(p_1' - p_2')$ unendlich kleine Beiträge zweiter Ordnung ergeben. Die Größe des Elementes δm ist durch die seitliche Wirbelgeschwindigkeit u' als $\mu \delta f' u' dt$ gegeben; der Überschuß der Bewegungsgröße, die es mitbringt, über diejenige der Grundbewegung ist $\delta m\, w'$, wenn $w = \overline{w} + w'$ die ganze Geschwindigkeit, mithin w' die axiale Turbulenzkomponente bedeutet. Die gesamte Zunahme der Bewegungsgröße ist also, wenn wir u' für Ein- und Austritt durch Vorzeichen unterscheiden $\Sigma \mu \delta f' u' w' dt$, und nach dem Satz von Antrieb wird

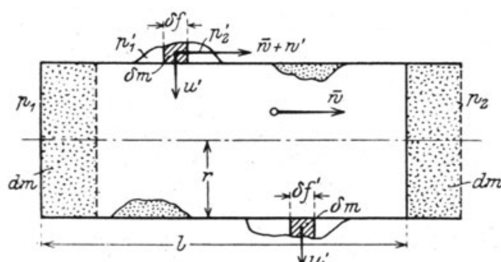


Abb. 33. Massenaustausch bei Turbulenz.

$$[\pi r^2 (p_1 - p_2) - K_r]\, dt = \Sigma \mu \delta f' u' w' dt \quad \ldots \quad (1)$$

Nun ist die Reibungskraft nach dem Gesetz von Poiseuille $K_r = -\eta F \partial w / \partial r = -\eta 2 \pi r l \partial w / \partial r$. und wenn wir nach dem Mittelwertsatz $\Sigma \mu \delta f' u' w' = 2 \pi r l \mu \overline{u' w'}$ setzen, und endlich

$$\mu \overline{u' w'} = X \quad \ldots \quad (2)$$

[1]) Abhandlungen, 1907, Bd. I, S. 43.

[2]) Eine ausführliche Ableitung vgl. man in Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1919, S. 32

als die mittlere Turbulenz für die Flächeneinheit bezeichnen, so entsteht

$$r\frac{(p_1 - p_2)}{l} = -2\eta\frac{\partial w}{\partial r} + 2X \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Hiernach ist der Druckunterschied ebenso sehr durch die „gleitende" Reibung und die Zähigkeit, wie durch die Turbulenz bedingt. Letztere spielt die Rolle einer zusätzlichen Reibung. (Gl. 3) kann auch dazu dienen, die Turbulenz zu ermitteln, wenn der Druckunterschied für die Längeneinheit, und die Geschwindigkeitsverteilung im Querschnitt bekannt sind.

Beobachtung der Geschwindigkeitsverteilung im Dampfstrahle.

Es wurden Dampfstrahlen erzeugt a) durch eine gut abgerundete Mündung von 17 mm l. Weite, b) durch ein zylindrisches Rohr mit gut abgerundetem Einlauf von 20 mm l. Weite und 136 mm zylindrischer Länge, c) durch eine Düse von 12 mm engstem, 18 mm äußerstem Durchmesser bei 153 mm Abstand der beiden Querschnitte.

Die Geschwindigkeit wurde durch ein axial gerichtetes Pitotsches Rohr von 1 mm lichter Weite ermittelt, indem man nach den Beobachtungen von Anderhub[1]) unter der kritischen Grenze die Geschwindigkeitshöhe dem adiabatischen Druckgefälle der Pitotanzeige gleichsetzte. Über der kritischen Grenze ist nach Löliger[2]) das Gefälle mit Hilfe der Theorie des Dampfstoßes bestimmt worden (s. Abschn. 33, Abb. 50).

In Abb. 34 sind die unmittelbaren Druckbeobachtungen zusammengestellt worden und zwar als Abhängige des Verhältnisses r/r_0, wo r den jeweiligen Abstand von der Achse, r_0 den Rohrhalbmesser bedeutet. Die Ordinaten stellen das Verhältnis des im Abstande r beobachteten Überdruckes zu dem in der Rohrachse am Pitotrohr beobachteten Überdrucke dar. Der Überdruck muß am Rohrrande = Null sein, in Wirklichkeit ergibt sich ein endlicher Wert, weil die zugeschärfte Mündung des Pitotrohres eine lichte Weite von 1 mm besaß; die Kurven sind daher innerhalb von $^1/_2$ mm vom Rande an gerechnet zu berichtigen. Es beziehen sich die Drucklinien

1, 2, 3 auf die Mündung, bei 4,0, 0,80, 0,20 at Überdruck im Ausflußgefäß;
4, 5, 6 auf das zylindrische Rohr, bei 0,009, 0,22, 0,79 at Überdruck im Ausflußgefäß;
7 auf die Düse, bei 7,0 at Überdruck im Ausflußgefäß

und trocken gesättigtem Anfangszustand.

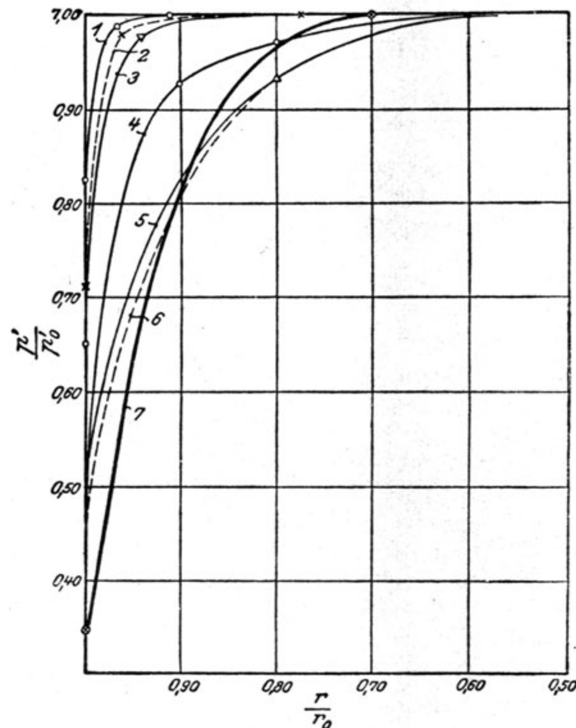


Abb. 34.
Verteilung des Staudruckes in Mündungen.

In Abb. 35 sind die Beobachtungen an der Düse für sich dargestellt und weiter verarbeitet, und zwar bedeutet Kurve $A'B'a_0$ die unmittelbare Druckablesung am Pitotrohr, die gemäß A_1Bd_0 so berichtigt wurde, daß am Rande der Atmosphärendruck A_0A_1 herrscht. Hieraus wurde der äquivalente Druck für adiabatische Expansion, und aus diesem die effektive Geschwindigkeitskurve $abcd \ldots g$ berechnet. Der Anfangsdruck des gesättigten eintretenden Dampfes ist fast gleich dem umgerechneten höchsten Pitotdruck, doch kann hieraus nicht auf die Größe des Wirkungsgrades geschlossen werden, da die Umrechnung der Pitotanzeige keine sehr hohe Genauigkeit beanspruchen darf. Die Verhältnisse der Geschwindigkeitswerte in verschiedenen Abständen von der Achse werden genügend genau dargestellt.

Man erkennt, daß die Geschwindigkeit über etwa $^4/_5$ des Durchmessers fast vollkommen unveränderlich ist, und gegen den Rand sehr rasch auf Null sinkt. Die punktiert eingezeichneten Kurven α, β, γ entsprechen dem Ansatz

$$w = w_0\left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^n\right] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

[1]) Unters. üb. Dampfström. im rad. Schaufelspalt. Dissert. Zürich 1912.
[2]) Unters. d. Druckverlaufes bei Überschallgeschw. Dissert. Zürich 1913

wobei w_0 die Geschwindigkeit in der Achse, n in gleicher Reihenfolge $= 20$, 25, 30 ist, und wie ersichtlich (mit $n = 25$) einen angenäherten Ersatz für die wirkliche Geschwindigkeitskurve bieten könnten.

Größe der Turbulenz.

Wenn wir annehmen, daß die Formel von Lorentz auch für Dampf und für kurze Rohre und Düsen gilt, so ergibt sich innerhalb des großen Gebietes, in dem nach der Beobachtung w unveränderlich ist, gemäß Gl. (3), für die Turbulenz der Wert

$$X = \frac{1}{2} \frac{p_1 - p_2}{l} r \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

d. h. die Turbulenz nimmt mit dem Halbmesser gleichmäßig zu, sie ist Null in

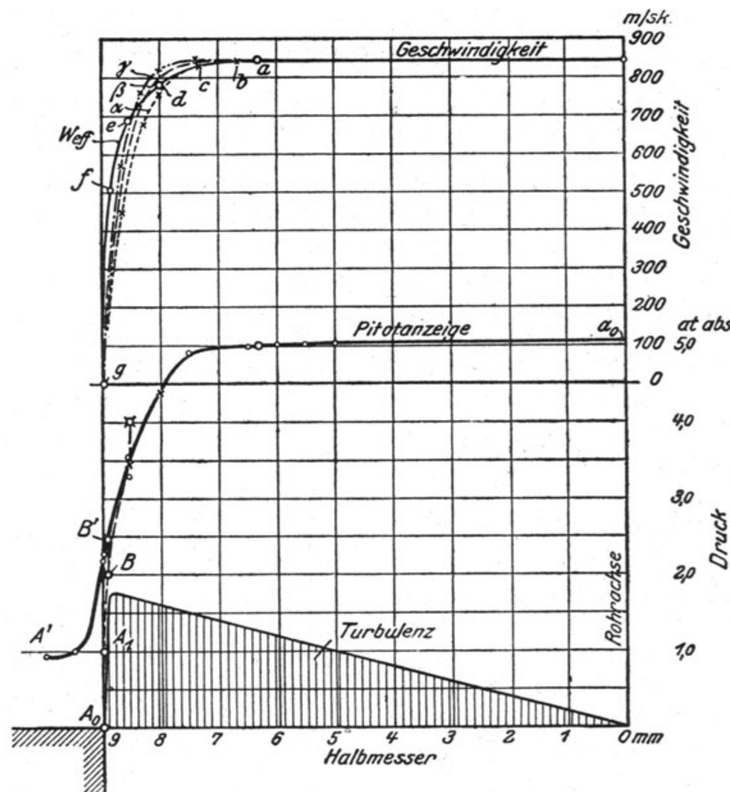


Abb. 35. Staudruck und Turbulenz am Düsenende.

der Strahlmitte, am heftigsten knapp in der Nähe der Wand, und wieder $= 0$ in der Grenzschichte, die an der Wand haftet [1]).

In der Tat wird mit $\eta = 1{,}3 \cdot 10^{-6}$ selbst im Punkte f der Düse nach Abb. 35 die eigentliche Reibung $\eta\, \partial w / \partial r$ nur etwa $= 2$ kg/m², während die Turbulenz den Wert 180 kg/m² besitzt. Damit die Poiseuillesche Reibung den ganzen erforderlichen Reibungswiderstand erzeuge, müßte für die fragliche Düse $\partial w / \partial r$ = rd. $1{,}4 \cdot 10^8$ (bei $\zeta_r = 0{,}02$) sein, d. h. die Geschwindigkeit müßte (wie sie das nur knapp am Rande tut) fast senkrecht abfallen.

Benützen wir den Ansatz

$$\frac{p_1 - p_2}{l} = \frac{\zeta_r}{D} \frac{\bar{w}^2}{2g} \gamma \,,$$

so liefert Gl. (5) mit $D = 2\, r_0$ den Ausdruck

$$X = \frac{\zeta_r}{4} \frac{\bar{w}^2}{2g} \gamma \frac{r}{r_0} = \mu\, u' w' \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5a)$$

Das hierdurch vorgeschriebene Produkt $u'w'$ kann durch ein großes u' und kleines w' und umgekehrt verwirklicht werden. Die kinetische Energie $(u'^2 + w'^2)/2g$ erlangt den geringsten Wert, wenn $u' = w'$ ist.

---

[1]) Die Strömung in der Achse wird trotzdem nicht etwa reibungsfrei adiabatisch verlaufen, da am Umfange des unendlich dünnen mittleren Fadens bereits unendlich kleine Turbulenzreibungen angreifen; sie genügen, um die ∞^2-kleine Masse des Fadens endlich zu verzögern.

Also ist $w'^2_{min} = X/\mu$. Die kinetische Energie der Turbulenz setzt sich aber aus drei Geschwindigkeitskomponenten: u' radial, w' axial und v' tangential zusammen, besitzt demnach mindestens den Wert:

$$\text{Min.}\ \frac{w_z^2}{2g} = \frac{u'^2 + w'^2 + v'^2}{2g} = 3 \cdot \frac{X}{2g\mu}$$

und ihr Verhältnis zur kinetischen Energie der Hauptbewegung, d. h. zu $\overline{w}^2/2g$ ist mit Rücksicht auf (5)

$$\frac{w_z^2}{\overline{w}^2} = \frac{3}{8} \zeta_r \frac{r}{r_0} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Bilden wir hieraus den mittleren Wert über den ganzen Querschnitt als $\int \frac{w_z^2}{2g} dG : \int dG$, so erhalten wir endlich

$$\frac{\overline{w_z^2}}{\overline{w}^2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} \zeta_r = \frac{\zeta_r}{4} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Die kinetische Energie der Turbulenz beträgt daher bei $\zeta_r = 0{,}02$ mindestens 0,005 Teile, d. h. $^1/_2$ Hundertstel der kinetischen Energie der Hauptbewegung. Wie groß sie in Wahrheit ist, läßt sich heute nicht bestimmen; doch würde man aus der Anschauung heraus kaum annehmen, daß sie obigen Mindestbetrag um ein Vielfaches überschreitet. Danach könnte man folgern, daß der Energieverlust durch Turbulenz im allgemeinen unbedeutend ist; sie übt anderseits die wohltätige Wirkung aus, durch die vom Rande ausgehenden Wirbel die Größe der Geschwindigkeiten in sehr vollkommener Weise auszugleichen.

29. Versuchsergebnisse über die Reibungsverluste in Düsen.

a) Aus der Beobachtung des Druckverlaufes.

Unter den älteren Versuchen über die Dampfströmung durch Mündungen und Düsen sind zu erwähnen diejenigen von Parenty[1]), Rosenhain[2]), Fliegner[3]), Rateau[4]), Gutermuth und Blaeß[5]), P. Emden[6]). Die Mehrheit der Experimentatoren neigte im Jahre 1902 zu der Ansicht, daß der Dampf beim Durchströmen

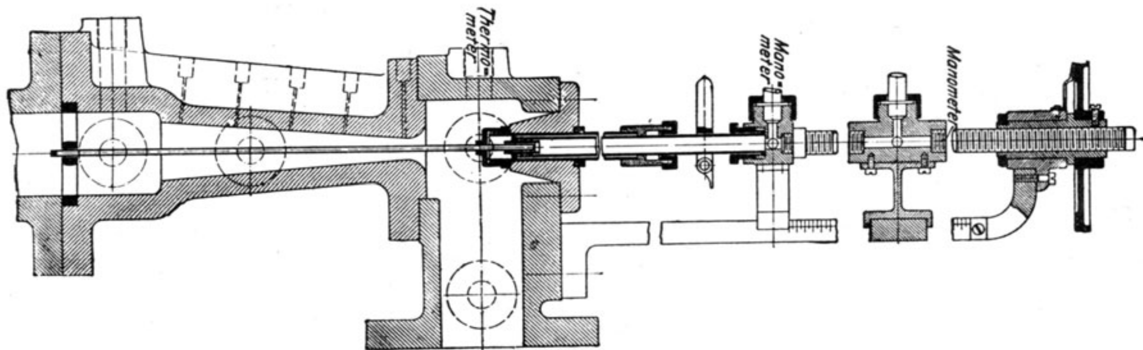


Abb. 36. Meßvorrichtung.

der Düse sich von der Wand ablöst und keine höhere als die Schallgeschwindigkeit erreichen könne. Der Überschuß der verfügbaren Energie sollte durch Schallschwingungen vernichtet worden sein. Die damals schon hinlänglich verbürgten Ergebnisse der Lavalturbine konnten aber unter Annahme so großer Verluste nicht erklärt werden und veranlaßten den Verfasser zu den nachfolgend beschriebenen Untersuchungen.

Die benutzte Versuchseinrichtung (Abb. 36) besteht aus der eigentlichen Düse mit einem zentrisch durchgeführten dünnen Meßrohre, das an einem Ende verschlossen, am anderen mit einem Mano-(bzw. Vakuum-)meter verbunden wird und in der Mitte eine 1 bis 1,5 mm weite Querbohrung besitzt. Durch eine Mikrometerschraube kann das Röhrchen hin und her geschoben und die Meßöffnung an irgendeine Stelle der Düsenachse gebracht werden. Außerdem befinden sich zur Kegelfläche senkrechte Bohrungen in der Wand der Düse, die ebenfalls mit Manometern verbunden werden.

[1]) Comptes r. Paris, Bd. 113, 116, 119; Ann. chim. phys., Bd. 8, 1896, Bd. 12, 1897.
[2]) Proc. Instit. of Civ. Eng., Bd. 140, Jahrg. 1900, S. 199.
[3]) Schweizer Bauztg., Bd. 31, Jahrg. 1898, S. 68 u. f.
[4]) Rev. de méc. 1900, S. 167.
[5]) Phys. Zeitschr. 1902, S. 82; Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1904, S. 75.
[6]) Ausströmungsersch. des Wasserdampfes. Inaug.-Diss., München 1903.

Nach seitherigen Erfahrungen besitzt die Druckmessung genügende Zuverlässigkeit, wenn man den Rand der Bohrungen gut abrundet.

Beobachtet man den austretenden Strahl im Freien, so ist deutlich eine hellere Außenschicht und ein milchig getrübter Kern wahrnehmbar, zum Zeichen, daß am Rande die Wandungsreibung eine teilweise Überhitzung bewirkt hat, während in der ungestörten Strahlmitte die adiabatische Expansion mit stärkerem Flüssigkeitsniederschlag vor sich geht.

Es seien

p_1, t_1, x_1 Druck, Temperatur, spezifische Dampfmenge vor der Düse (beobachtet),
p_x der beobachtete Druck im Querschnitt f_x,
G das durchströmende Dampfgewicht in kg/sk (gemessen),
i_1 der Wärmeinhalt vor der Düse,
w_1 die Geschwindigkeit vor der Düse.

Im Querschnitt f_x sei der Dampf naß, mit der unbekannten spezifischen Dampfmenge x; es ist $i_x = i' + xr$.

Die Energiegleichung liefert

$$A\frac{w_x^2}{2g} = A\frac{w_1^2}{2g} + i_1 - (i' + xr) \quad \ldots \quad (1)$$

Die Stetigkeit verlangt

$$G = \frac{f_x w_x}{v_x} \text{ oder annähernd } = \frac{f_x w_x}{x v''} \quad \ldots \quad (2)$$

Man setzt x aus Gl. (2) in Gl. (1) ein und erhält:

$$A\frac{w_x^2}{2g} = A\frac{w_1^2}{2g} + (i_1 - i') - \frac{f_x r}{G v''} w_x \quad \ldots \quad (3)$$

aus welcher quadratischen Gleichung w_x zu berechnen ist; das durch den Anfangszustand und G bestimmte $w_1^2/2g$ bildete bei den Versuchen nur eine unbedeutende Berichtigung. Mit w_x findet man x und i_x.

Nun wird auf bekannte Weise die spezifische Dampfmenge x' bei adiabatischer Expansion vom Anfangszustande auf den Druck p_x berechnet oder der Entropietafel entnommen und liefert $i'_x = i' + x'r$. Der Energieverlust beträgt somit

$$A Z = i_x - i_x' = (x - x')\, r,$$

den man in Teilen des adiabatischen Gefälles ausdrücken kann. Ergäbe sich $x > 1$, so wäre dies ein Zeichen, daß der Dampf überhitzt ist, auf welchen Fall wir nicht eintreten.

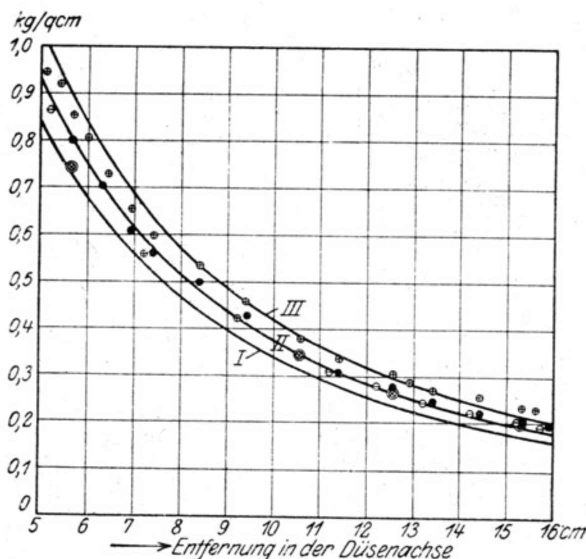


Abb. 37.
Druckverlauf in der Düsenachse.

In Abb. 37 stellt Kurve I den Verlauf dar, den der Druck in der untersuchten Düse bei adiabatischer, Kurve II und III bei einer Zustandsänderung mit 10 v. H. und 20 v. H. Energieverlust aufweisen müßte.

Die Beobachtungen sind als Punkte eingetragen, und zwar gelten die vollen Punkte für die normale Bohrung, die Punkte mit Kreuz für eine schräg in der Richtung des Stromes gerichtete, die mit Kreuz und Doppelkreis für eine schräg gegen die Strömung gerichtete Bohrung. Die untere zeigte etwas zu wenig, die letztere etwas zu viel Druck an. Punkte mit Kreis und wagerechtem Strich beziehen sich auf die Bohrungen in der Düsenwand, und ergeben, wie ersichtlich, fast genau den gleichen Druck wie in der Strahlmitte. Der Anfangszustand ist gekennzeichnet durch die Werte $p_1 = 10{,}48$ kg/qcm, $t = 198^0$ C, d. h. einer leichten Überhitzung, um Zweifel über die Dampfnässe auszuschließen. Das Meßröhrchen hatte 5 mm Durchmesser und wurde in seiner äußeren Führung, die mit dem Eintrittsdampf in Verbindung steht, durch Aufgießen von kaltem Wasser gekühlt. Immerhin mag es sich einmal mehr, einmal weniger ausgedehnt haben, so daß hierin eine weitere Fehlerquelle zu erblicken ist.

Ein Zwischendurchmesser der Düse kann durch die Formel $d = 12{,}19 + \frac{L}{6{,}485}$ mm dargestellt werden, wenn L den Abstand eines Querschnittes von dem vorderen Stirnende der Düse (in Millimetern) bedeutet, und zwar zwischen den Grenzen $L = 60$ bis 160. Für kleinere L war die Meridianlinie nicht genau

geradlinig. Das sekundlich durchströmende Dampfgewicht betrug $G = 0{,}153$ kg. Die engste Stelle der Düse hatte einen Durchmesser von 12,5 mm. Nach Zeuners Formel für gesättigten Dampf müßte

$$G = 1{,}99 f \sqrt{\frac{p_1}{v_1}} = 0{,}151 \text{ kg/sek.}$$

sein. Auf den Grund des Unterschiedes dieser Zahlen kommen wir weiter unten bei der Erörterung der Unterkühlung zurück.

Die Abb. 37 widerlegt die früher verbreitet gewesene Anschauung, als wäre die Bewegung in der Düse mit außergewöhnlich hohen Widerständen verbunden. Spätere Versuche führten mich zur Ansicht, daß der Gesamtverlust an kinetischer Energie für die untersuchte Düse 15 v. H. nicht überschreitet und wohl auf 10 v. H. herabgehen kann.

b) Widerstandsmessung mittels des auf eine Platte ausgeübten Strahldruckes.

Der mit der sekundlichen Masse m auf eine zu seiner Achse senkrechte Platte Abb. 38 treffende Strahl prallt nicht zurück, sondern wird, wie die Beobachtung zeigt, fast genau in die Richtung der Plattenebene abgelenkt. Die Bewegungsgröße mw geht in der Achsenrichtung verloren, mithin muß auf den Strahl seitens der Platte eine Gegenkraft P ausgeübt werden, deren „Antrieb" $P \times 1 \text{ Sek} = mw$ ist. Diese Ableitung läßt indessen unberücksichtigt, daß der Strahl seine Umgebung vor und hinter der Platte durch Reibung in die strömende Bewegung hineinzieht, wie in Abb. 38 durch die gekrümmten Strombahnen angedeutet wurde.

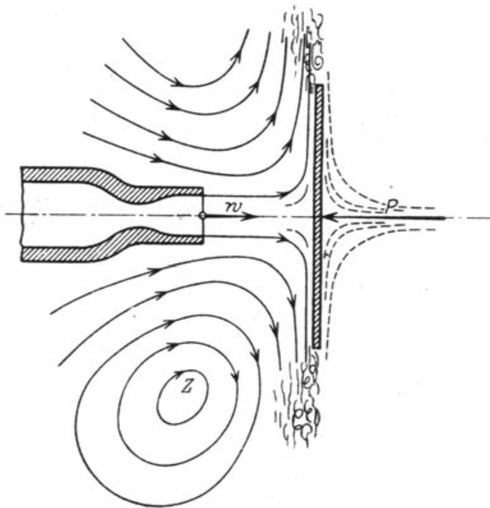


Abb. 38. Strahldruck auf eine Platte und Wirbelbildung.

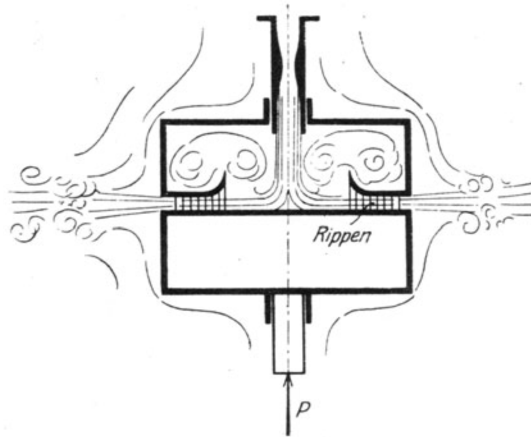


Abb. 38a. Verbesserte Strahldruckmessung.

Der in sich zurückkehrende Wirbel (Z) kann mit sehr kleinem Energieaufwand dauernd einen Druck auf die Platte ausüben[1]). Einwandfrei wäre eine Anordnung nach Abb. 38a, wobei die Wirbel im Innern eines geschlossenen, mit der Platte durch Rippen verbundenen Kastens sich ausbilden, der Strahl durch Führungen gezwungen ist, senkrecht zur Düsenachse auszutreten, und die Drücke der Außenwirbel infolge des an die Platte angeschlossenen symmetrischen unteren Kastens sich gegenseitig aufheben. Der Ausströmungsraum müßte groß genug sein, damit der Ausfluß wie im Freien erfolgt.

Versuche dieser Art sind von Delaporte mit einer Düse von 6 auf 9 mm Durchmesser und einer auf 50 mm zu schätzenden Länge nach Revue de Mécanique, Mai 1902, veranstaltet worden, wobei sich für den Ausfluß in die freie Atmosphäre der Verlust an kinetischer Energie auf 5,2 v. H. feststellen ließ. Größeren Maßstab besaßen Lewickis Versuche nach der

[1]) So fand Morley, Engineering 1916, I, S. 90, daß der Druck auf die Platte bei der beschriebenen Anordnung sich im Mittel um 10 v. H. größer ergibt, als nach der im nachfolgenden unter c) erläuterten Messung des „Reaktionsdruckes". Seine Versuche hatten allerdings eine sehr kurze Dauer; ähnlich hohe Abweichungen wurden bis jetzt von keiner Seite festgestellt.

Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1903, S. 49. Das Druckverhältnis war rd. 6,86, der Düsendurchmesser 6,06 auf 6,75 mm, die Länge etwa 30 mm, das Verhältnis des Ausflußquerschnittes zum engsten Querschnitt 1,26 (mithin etwas zu klein), und es ergab sich bei wenig überhitztem Dampf ein Energieverlust von rd. 8 v. H.

c) Widerstandsmessung mittels des Rück-(oder „Reaktions-")druckes, den der austretende Strahl auf die Düse selbst ausübt.

Die Düse ist an einem Pendelrohr B, Abb. 39, befestigt, das im Punkt A reibungsfrei (im Kugellager) schwingen kann und dem durch eine reibungsfreie Stopfbüchse Dampf zugeführt wird. Ein Wagebalken mit der Belastung Q hält der „Reaktion" P_0 das Gleichgewicht. Im Mündungsquerschnitt f herrsche ein Druck p_x und die Geschwindigkeit w_x, in der Umgebung ein Druck p_0. Der senkrecht herabströmende Dampf wird nach der Wagerechten abgelenkt, wodurch die in der Sekunde ausströmende Masse m die Bewegungsgröße mw annimmt. Die Gesamtheit der auf die Dampfmasse wirkenden Kräfte muß daher in der Wagerechten die nach rechts gerichtete Resultierende

$$P = mw_x \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

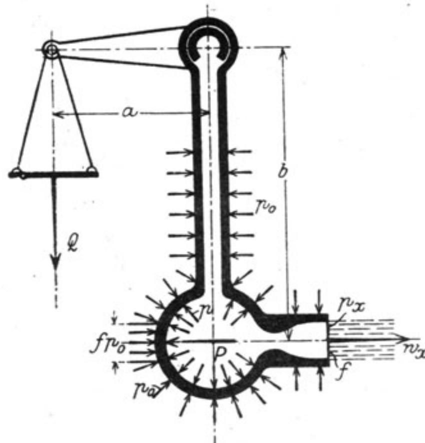


Abb. 39. Rückdruckwage.

ergeben. Diese Kraft setzt sich aus den von der Gefäßwand und vom Druck in der Mündung ausgeübten Kräften zusammen, d. h. es ist, wenn die Richtung nach rechts positiv zählt

$$P = P_g - fp_x \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Auf das Gefäß wirkt von innen $-P_g$ (nach rechts, d. h. $+P_g$ nach links) und von außen $+fp_0$, denn die Drücke der Umgebung heben sich sonst überall auf, mit Ausnahme des Wandstückes, das der Projektion der Mündung entspricht.

Von rechts nach links wird also auf das Gefäß der Druck $P_g - fp_0$ wirken, oder da nach (2) $P_g = P + fp_x = mw_x + fp_x$ ist, entsteht im ganzen der Rückdruck

$$P_0 = mw_x + f(p_x - p_0) \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Nur in dem besonderen Fall, daß $p_0 = p_x$ wird

$$P_0 = mw_x = P \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

in jedem andern Fall sind P_0 und P voneinander verschieden, was vielfach übersehen worden ist. Nach dem Hebelgesetz hat man

$$P_0 b = Qa,$$

so daß durch Wägung von Q die Reaktion, also auch w_x bestimmt werden kann.

Solange p_0 kleiner ist als p_x, bleiben, wie wir in Abschn. 42 nachweisen, p_x und w_x unverändert. Daher **wird in diesem Fall** nach Gl. (3) **die Reaktion mit dem Gegendruck streng linear abnehmen.**

Außerhalb der Mündung wird w_x, wenn man **von Reibungen und Schwingungen absieht,** schließlich auf eine Geschwindigkeit w_e beschleunigt, für die der Satz vom Antrieb die Beziehung

$$m(w_e - w_x) = f(p_x - p_0) \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

liefert. Setzen wir die rechte Seite in (3) ein, so folgt

$$P_0 = mw_e \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

d. h. **die Reaktion ist bei reibungsfreiem Strahl das Produkt aus der sekundlichen Masse und der schließlich hervorgebrachten Geschwindigkeit, unabhängig vom Zustand in der Mündung. Sobald man aber von der Reibung des Strahles gegen die Umgebung und von inneren Schwingungen nicht absehen darf, gilt Gleichung (6) nicht mehr.**

Die Herleitung vereinfacht sich, falls man als das der Betrachtung zugrunde gelegte System den Dampfinhalt + sekundl. ausströmende Menge **und das ganze Gefäß** ansieht. An

diesen Körpern ist zusammengenommen i. d. Sekunde bis zur Mündung die Bewegungsgröße $m w_x$ erzeugt worden; die wirkenden Kräfte sind $f(p_0 - p_x) + P_0$, woraus sich sofort Gl. (3) ergibt. Ebenso Gl. (6), wenn wir noch das Stück des Strahles dazu nehmen, an dessen Ende w_e und der Druck p_0 herrscht. Es ist jedoch pädagogisch nützlich, auch die zuerst gegebene Ableitung gründlich durchzudenken.

Die verwickelten Vorgänge bei schräg abgeschnittenen Düsen besprechen wir in Abschn. 43a.

Durch Vergleich mit der theoretischen Geschwindigkeit w_a, die dem Druckgefälle von p auf p_x entspricht, kann der Energieverlust bis zur Mündung ermittelt werden, demnach ist zu diesem Zwecke auch die Feststellung von p_x unerläßlich, was ebenfalls übersehen worden ist.

Die ersten ausführlichen Versuche dieser Art stammen von Frederic H. Sibley und T. S. Kemble[1]), deren Vorrichtung abweichend von dem oben beschriebenen Schema ein langes federndes Rohr A, Abb. 39, als Dampfzuleitung benützt, das durch die mehr oder weniger angespannte Feder stets in dieselbe Mittellage zurückgeführt wird, so daß seine eigene Elastizität aus der Rechnung ausscheidet. Die Düsen (Abb. 40a, b) hatten nachfolgend angegebene Abmessungen und führten auf den unten angegebenen Energieverlust.

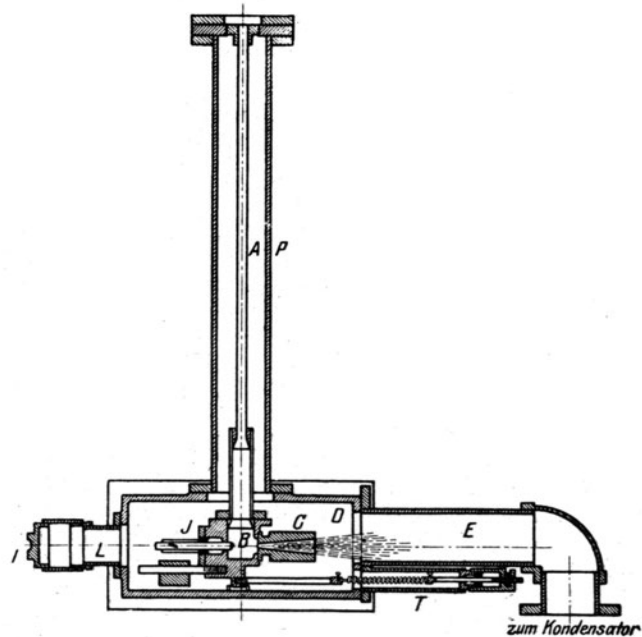
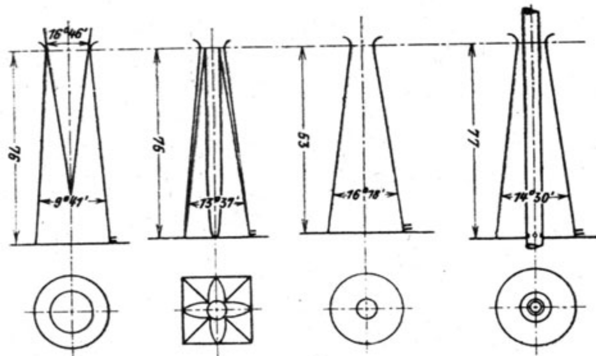


Abb. 40. Rückdruckwage mit federndem Zuflußrohr.



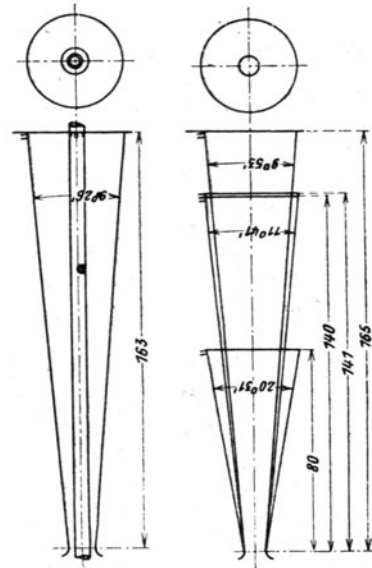


Abb. 40a. Abb. 40b.

Düsenformen von Sibley und Kemble.

	Nummer der Düse								
	9	10	11	12	13	14	15	16	18
Engster Durchmesser . . . . mm	10,01	7,72	7,72	7,72	10,01	7,72	7,72	15,88	7,72
Enddurchmesser . . . . „	36,85	36,16	36,16	36,16	29,36	28,65	25,42	28,70	36,16
Länge . . . . „	162,7	164,7	139,7	79,8	76,8	73,8	74,8	76,2	140,5
Kegelwinkel	9° 26′	9° 53′	11° 41′	20° 31′	14° 30′	16° 18′	13° 37′	9° 41′	11° 36′
Beschaffenheit	glatt poliert						rauh	glatt	rauh
Mittlerer Energieverlust . . . . v. H.	4	10	10	10	3	6	(6)	(6)	13

[1]) Transact. of the Amer. Soc. of Mec Eng. 1909.

Das nur bei Nr. 9 und 13 (als Kontrolle) angewendete mittlere Meßröhrchen besaß 6,35 mm Durchmesser. Der Anfangsdruck wurde von 7,0 auf 8,1, 9,15 und 10,4 at abs. gesteigert; der Gegensdruck so eingestellt, daß er mit dem Drucke in der Düsenmündung genau übereinstimmte, so daß für den Rückdruck die Beziehung (4) benutzt werden konnte. Weitere wichtige Versuche gleicher Art stammen von Josse und Christlein, über die wir in Abschn. 43a berichten.

Aus der Gesamtheit dieser Ergebnisse kann gefolgert werden, daß der Düsenverlust wie die einfache Rohrreibung zu beurteilen und durch Integration über die Düsenlänge mit etwa $\zeta_r = 0{,}02$ zu ermitteln ist. Im großen ganzen kann man bei 50 mm Länge etwa 4—5 v. H., bei 100 mm Länge 6—8 v. H., bei 150 mm Länge 10—15 v. H. Energieverlust annehmen. Die Gestalt der Düse beeinflußt den Verlust weniger, die Beschaffenheit der inneren Oberfläche (Rauheit) um so mehr.

Der kinetische Energieverlust am Düsenende kann unter Verwendung der älteren Reibungsformel durch den Ausdruck

$$A Z = \int \zeta_r' \frac{d l}{D} A \frac{w^2}{2g} \text{ nach dem Mittelwertsatz } = A \zeta_r' \frac{l}{D_m} \frac{\overline{w}_m^2}{2g}$$

dargestellt werden, wo ζ_r' eine Art (uneigentliche) Rohrreibungs-Zahl darstellt und unveränderlich vorausgesetzt werden soll. Wir führten die Rechnung für die Werte $p_1 = 10$ kg/qcm abs. $t_1 = 300^0$; $p_2 = 0{,}05$ kg/qcm; und eine Düse, die sekundlich $G = 0{,}1$ kg/sek aufnimmt, durch. Wenn man D_m von vornherein als das arithmetische Mittel des engsten und des Enddurchmessers annimmt, so bedeutet $\overline{w}^2$ das mittlere Geschwindigkeitsquadrat, das durch Auflösung obiger Gleichung genommen wird, und auf w_2 als Endgeschwindigkeit bezogen den Wert

$$\overline{w}_m^2 = k^2 w_2^2 \quad \text{mit} \quad k^2 = 0{,}77$$

ergibt. Lassen wir vom gleichen Anfangszustand in einer kürzeren Düse auf $p_2 = 1$ kg/qcm expandieren, so erhalten wir

$$k^2 = 0{,}57.$$

Nun ist aber, durch das adiabatische Gefälle H_0 ausgedrückt, $A w_2^2/2g = (1 - \zeta) H_0$, also wird $A Z = \zeta_r' \frac{l}{D_m} (1 - \zeta) k^2 H_0$; anderseits ist nach Definition $A Z = \zeta H_0$, und hieraus folgt

$$\zeta = \frac{1}{1 + \frac{D_m}{\zeta_r' l k^2}}.$$

Man kann also den Energieverlust aus der Reibungszahl ζ_r' und umgekehrt ermitteln. Für 10 v. H. Energieverlust ergab sich in obigem Beispiele $\zeta_r' =$ rd. 0,02, stimmt demnach mit dem mittleren Werte der Reibungszahl für Dampf befriedigend überein.

Zulässiger Kegelwinkel. Im allgemeinen finden wir einen Erweiterungswinkel von rd. 10° vor. Die Versuche von F. H. Sibley (Düse Nr. 12) bringen den wertvollen Nachweis, daß auch bei 20° noch keine Strahlablösung erfolgen muß, wenn schon hierbei die äußersten Dampffäden mit ungünstiger Schräge in die Schaufeln eintreten würden. Die Grenze für die Erweiterung wäre wohl die Form, die ein frei austretender Dampfstrahl annimmt, doch treten dann im Strahl die weiter unten besprochenen Schwingungen auf.

d) Messung des Temperaturverlaufes in der Düse.

Ist in einem Punkt, z. B. am Düsenende, die Temperatur bekannt, so ist hierdurch bei Naßdampf der Druck bestimmt, und man kann wie unter a) die Geschwindigkeit ermitteln. Bei Heißdampf müßte man Gl. (1) (2) und die Zustandsgleichung ähnlich behandeln. Das Verfahren ist indes gegenstandslos, da **ein Verfahren, die wahre Temperatur in strömenden Flüssigkeiten zu bestimmen, nicht bekannt** ist. Die Reibung an dem als Meßgerät benützten Thermometer oder Thermoelement erzeugt nämlich Wärme, die die Temperaturanzeige in einem vorläufig nicht angebbaren Maß fälscht.

Der Versuch mit einem längs der Achse einer Düse ausgespannten Meßdraht eines Kupfer-Konstantan-Elementes, dessen Lötstelle durch Hin- und Herziehen des Drahtes verschoben werden konnte, ergab den in Abb. 41 dargestellten Temperaturverlauf. Hiernach blieb die Temperatur bis weit hinter die engste Stelle unverändert, offenbar weil infolge der Reibung unmittelbar am Draht der Dampf „abgedrosselt" wird und die Zustandsänderung nach einer Linie $i =$ konst. erfolgt, bei der die Temperatur sich wenig ändert. Bei tieferer Expansion mischt sich die Grenzschicht vermöge der Turbulenz mit den Nachbarteilen, die weit kälter sind und die Temperatur herabsetzen. Auch die Wärmeableitung durch den Meßdraht kann ähnliche Wirkungen hervorrufen.

Mit Rücksicht auf diese Erfahrungen können wir auch den Messungen von C. Batho[1]) kein Vertrauen entgegenbringen, der mit 6,65 at abs. Anfangsdruck bei trocken gesättigtem Zustande und 1,125 at abs. Enddruck arbeitete. Die theoretische Temperatur bei adiabatischer Expansion ist in Abb. 42 punktiert, die tatsächlich gemessene voll eingezeichnet. Um den Einfluß der Strahlung festzustellen, wurde eine Porzellandüse benützt, die 10,8 mm an der engsten Stelle, 14,1 mm am Ausflußende bei 46 mm Entfernung dieser Schnitte maß, und mittels Stahldorn und Sand sorgfältig geschliffen war. Die theoretische Kurve stimmt mit der vorhin gerechneten überein, die beobachtete ist durch Kreuzpunkte gekennzeichnet. Sie

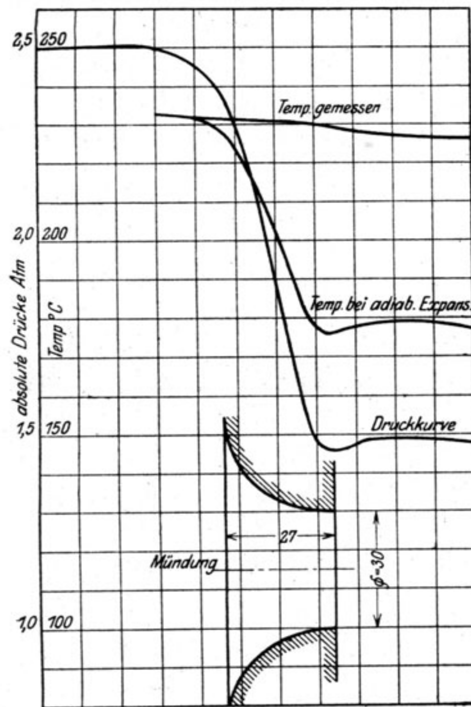


Abb. 41. Temperaturmessung mittels axialen Thermoelementes.

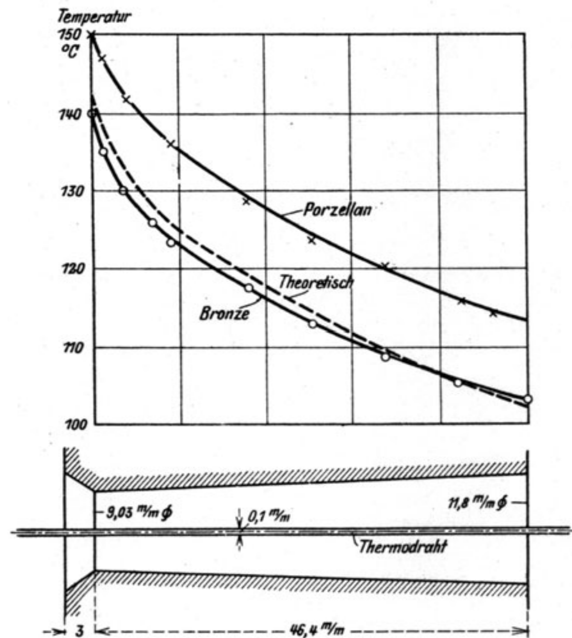


Abb. 42. Temperaturen nach Batho.

liegt durchweg höher als bei der Bronzedüse, und Batho berechnet, daß der Endpunkt 40 v. H. Energieverlust entspricht. Da schon an der engsten Stelle die effektive Temperatur fast um ebensoviel die theoretische übertrifft, wie am Ende, kann nicht gut angenommen werden, daß der Verlust bei dem ganz kurzen Einlauf so viel betragen haben solle, und so bestätigen auch diese Versuche die Unzuverlässigkeit solcher Messungen. Sonst kann man Batho beipflichten, daß die durch Leitung dem Dampf zunächst entzogene und am Düsenende wieder mitgeteilte Wärme berücksichtigt werden sollte — wenn man nur wüßte, wieviel sie eigentlich beträgt.

30. Zeichnerische Ermittelung der Düsenabmessungen.

a) Die Ausdehnung führt in das Gebiet des Naßdampfes herab.

Sobald die Expansion in das Gebiet des Naßdampfes führt (wovon man sich durch vorläufiges Einzeichnen der Adiabate im Entropiediagramm überzeugt), also sicher dann, wenn schon der Anfangszustand gesättigt ist, findet eine mehr oder minder starke Unterkühlung des Dampfes statt, die besondere Erwägungen betreffs der Zustandskurve erheischt. Wir verweisen auf Abschn. 41, wo diese Frage ausführlich erörtert wird.

b) Die Ausdehnung verläuft im Überhitzungsgebiet. Düse mit geradem Einlauf.

1. Das gewöhnliche Verfahren beruht auf dem Einzeichnen der Expansionslinie im J-S-Diagramm (Abb. 43a), wobei vorderhand angenommen wird, daß der Dampf axial mit kurzem Einlauf in die Düse eintritt. Bei richtiger Formgebung des Einlaufes (vgl. Abschn. 40) kann bis zum engsten Querschnitt der Energieverlust wahrscheinlich auf 3 v. H. herabgesetzt

[1]) Proc. of the Instit. of Civ. Eng., Vol. CLXXIV, 1907/8.

werden; als normal wollen wir $\zeta_m = 0{,}05$ d. h. 5 v. H. annehmen. Ist i_m' der Wärmeinhalt der adiabatischen Ausdehnung auf den (vorläufig durch Zeuners Formel zu ermittelnden) kritischen Druck p_m, so wird, wenn die Anfangsgeschwindigkeit vernachlässigt wird, der wirkliche Wärmeinhalt bei jenem Druck

$$i_m = i_m' + \zeta_m (i_1 - i_m') \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

sein, und bestimmt den Zustandspunkt im J-S-Diagramm (Abb. 43a). Für den Zustand am Düsenende wird man den Energieverlust mit $\zeta = 0{,}05 \ldots 0{,}15$ einschätzen, mithin auf den Wärmeinhalt

$$i_2 = i_2' + \zeta (i_1 - i_2') \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

gelangen, wenn wieder i_2' der adiabatischen verlustfreien Ausdehnung auf den vorgeschriebenen Enddruck p_2 entspricht. Die Zustandspunkte $p_1\, i_1$, $p_m\, i_m$, $p_2\, i_2$ bestimmen die nach Schätzung

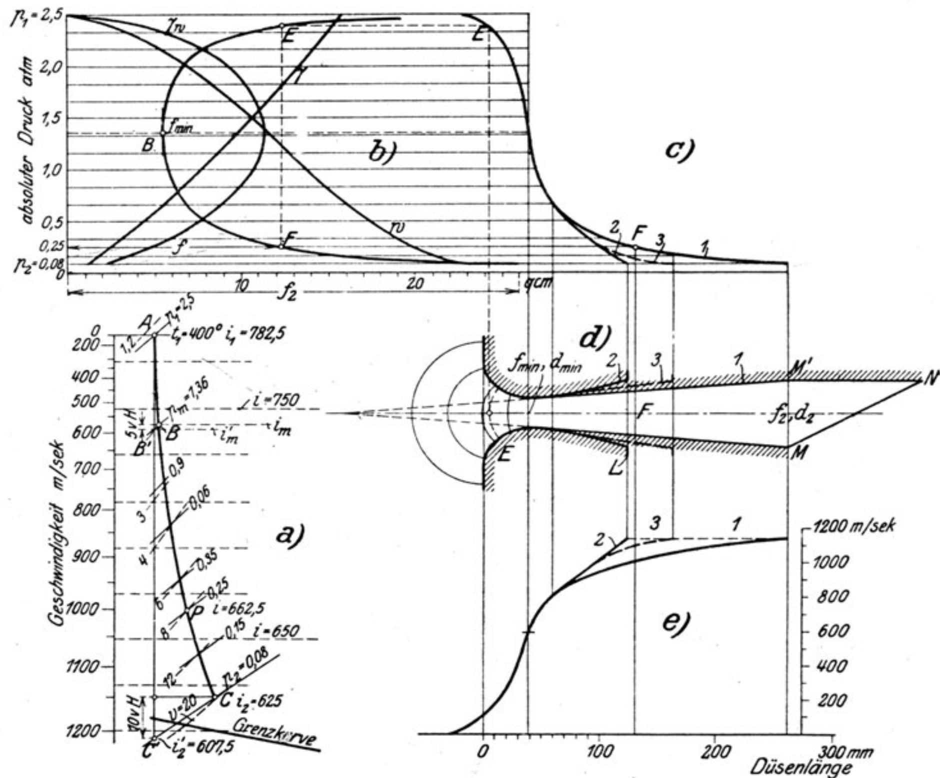


Abb. 43. Zeichnerische Ermittelung der Düsenabmessungen.

zu ergänzende Expansionslinie. Indem wir $w_1 = 0$ voraussetzen, gilt für einen beliebigen Zwischenpunkt P mit dem Wärmeinhalt i

$$A \frac{w^2}{2g} = i_1 - i.$$

Wir berechnen w, entnehmen die zu P gehörenden Größen p und v, d. h. γ. Dann liefert die Durchflußgleichung mit dem vorgeschriebenen sekundlichen Dampfgewicht $G_{sk} = f w \gamma$ den gesuchten Querschnitt

$$f = \frac{G_{sk}}{\gamma w},$$

den wir in Abb. 43b mit w und γ als Abhängige von p auftragen. Wenn man beachtet, daß w im Anfang Null ist und dann stetig zunimmt, während γ im Anfang groß war und stetig abnimmt, so sieht man leicht ein, daß γw einen Höchstwert aufweisen muß, dem der Mindestwert f_m entspricht. Letzteren finden wir durch Ziehen der zu p parallelen Tangente und erhalten in der Ordinate des Berührungspunktes auch den wahren Grenzdruck p_m. Die Ordinate p_2

bestimmt den Endquerschnitt f_2. Die Düse ist durch f_m und f_2 festgelegt. In bezug auf den Längenschnitt stellen wir zwei Forderungen auf:

a) daß der Strahl sich nirgends von der Wand loslöse,
b) daß der Verlust durch Reibung möglichst klein sei.

Je sanfter die Krümmung im engsten Teil ist und je kleiner wir den Divergenzwinkel machen, desto weniger ist Ablösung zu befürchten, aber desto länger und verlustreicher wird die Düse. Wir setzen als praktisches

Mittelmaß für den Erweiterungswinkel 10°

fest; bei kurzen Düsen noch weniger.

Wurde das Längenprofil der Düse festgelegt, so kann der Druckverlauf leicht ermittelt werden. Man braucht zu diesem Behufe nur nach Abb. 43d zu jedem Querschnitt f_x der Düse aus dem Diagramm der $p - f$ das zugehörige p_x herüberzuprojizieren. Dabei ist zu beachten, daß der stetigen Ausdehnung entsprechend, vor dem engsten Querschnitt der obere — hinter diesem der untere Zweig der f-Linie maßgebend ist.

So sind beispielsweise in der Düsenzeichnung Abb. 43d bei E und F zwei gleiche Querschnitte herausgegriffen; der erstere ist über dem Minimalpunkt B in Abb. 43b einzuschneiden und liefert den gleichnamigen Punkt in Abb. 43c, letzterer muß unterhalb von B eingeschnitten werden.

In Abb. 43e sind die Dampfgeschwindigkeiten als Abhängige der Achsenlänge eingezeichnet. Linie 1 stellt den Verlauf derselben für die kegelförmige Düse dar. Von dieser Darstellung muß man ausgehen, wenn man für die Veränderung der Geschwindigkeit irgendein Gesetz vorschreiben will. Beispielsweise wurde eine Düsenform mit konstanter Beschleunigung empfohlen, für die $dw/dt = k$ sein müßte. Da das Zeitelement gleich dem Quotient aus Wegelement und der Geschwindigkeit, d. h. $dt = ds/w$ ist, so müßte $w dw/ds = k$ sein, woraus sich $w^2 - w_0^2 = 2ks$ als Integral ergibt. Diese Regel hat indessen keine bessere Begründung als etwa die, daß die Geschwindigkeit mit der Weglänge gleichmäßig zunehmen solle, und dieser Verlauf ist in Abb. 43e durch die Schaulinie 2 dargestellt. Indem man in Abb. 43b zu den so vorgeschriebenen Geschwindigkeiten die Querschnitte aufsucht, entsteht die schärfer gekrümmte Düsenform 2 (Abb. 43d), die bei L endigt und wahrscheinlich einen zu stark divergierenden Dampfstrahl ergeben würde. Man müßte daher zu einer Abrundung, etwa nach Profillinie 3, schreiten, die das Strahlende parallel richtet. Die Verkürzung der Düse wäre erheblich, aber ob die starke Erweiterung ohne Strahlablösung möglich ist, kann nur die Erfahrung lehren.

Infolge des spitzen Winkels, unter dem die Düse gegen das Laufad gerichtet sein muß, wird das Ende häufig zylindrisch mit dem Durchmesser d_s fortgesetzt und nach MN (Abb. 43d) abgeschrägt, wobei natürlich bei M′ eine Hohlkehle eingeschaltet sein sollte.

Zahlenbeispiel.

Es sei eine Düse zu entwerfen für $G = 0{,}153$ kg Dampf in der Sekunde, die von $p_1 = 2{,}5$ kg/qcm abs. bei $t_1 = 400°$ C Temperatur auf $p_2 = 0{,}08$ kg/qcm abs. expandiert. Wir finden in der J-S-Tafel (Abb. 43a) im Anfangspunkt $i_1 = 782{,}5$ kcal und im Endpunkt der adiabatischen Expansion $i_2' = 607{,}5$; das theoretische Gefälle ist also $782{,}5 - 607{,}5 = 175{,}0$ kcal. Wir wollen als kinetischen Energieverlust 10 v. H., d. h. 17,5 kcal zulassen und finden $607{,}5 + 17{,}5 = 625{,}0 = i_2$ als den wahren Wärmeinhalt am Austritt, und die Linie i_2 schneidet den Punkt C auf der Linie $p_2 = 0{,}08$ at heraus. Da die ganze Expansion im Überhitzungsgebiet verläuft, so folgt für $p_1 = 2{,}5$ at zunächst angenähert ein kritischer Druck $p_m = 0{,}546 \times 2{,}5 = 1{,}36$ at. Wir nehmen für das kritische Gefälle einen Verlust von 5 v. H. an und erhalten den Punkt B. Die im übrigen nach Schätzung eingezeichnete Zustandslinie liefert beispielsweise im Punkte P den Wärmeinhalt $i = 662{,}5$ kcal, also ist das bis dorthin aufgebrauchte Gefälle $H = i_1 - i = 120{,}0$ kcal und die erlangte Geschwindigkeit aus Formel $(w/91{,}5)^2 = 120$ gerechnet $w = 1000$ m/sek, wie man am seitlich eingezeichneten Geschwindigkeitsmaßstab unmittelbar abgreifen kann. Als Rauminhalt erhält man $v = 8$ cbm/kg und so folgt $f = G \cdot v/w = 12{,}25 \cdot 10^{-4}$ qm $= 12{,}25$ qcm. Das Auftragen dieser Werte in Abb. 43b führt auf den Minimalquerschnitt $f_m = 5{,}4$ qcm. Am Düsenende berechnet sich ähnlich $w_2 = 1148$ m/sek, $v_2 = 19{,}5$ cbm/kg, $f_2 = 26{,}0$ qcm, und hieraus folgen die Durchmesser $d_m = 2{,}60$ cm, $d_2 = 5{,}75$ cm, mit Hilfe deren die Düse in Abb. 43d mit 8° Kegelwinkel entworfen wurde. Das Aufzeichnen des Druckverlaufes erfolgt wie wir oben beschrieben haben.

2. Entwurf mittels der v-Quadrat-Methode. Man liest nach Abb. 44 zu einzelnen Punkten der wie vorhin im J-S-Diagramm eingezeichneten Zustandslinie die spezifischen Rauminhalte ab und trägt deren **Quadrate** als Abhängige des jeweiligen Wärmeinhaltes (im Diagramm selbst, oder, der Deutlichkeit halber, getrennt) auf.

Setzen wir die anfängliche Geschwindigkeit vor der Düse $w_1 = 0$, so gilt für einen beliebigen Querschnitt f_x, in dem der Zustand durch die Größen p_x, v_x, w_x, i_x gekennzeichnet ist, die Energiegleichung

$$A\frac{w_x^2}{2g} = i - i_x = H_x \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

und die Stetigkeitsbedingung

$$G v_x = f_x w_x \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

Wir haben daher aus der letzteren das Verhältnis:

$$v_x^2 : w_x^2 = f_x^2 : G^2 \qquad \text{oder} \qquad v_x^2 : A\,w_x^2/2g = (f_x/G)^2 : A/2g$$

oder wenn (3) benützt wird

$$v_x^2 : H_x = (f_x/G)^2 : A/2g \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (5)$$

Nun ist G vorgeschrieben, und man kann von O ausgehend mit dem willkürlich herausgegriffenen f_x ein rechtwinkliges Dreieck konstruieren, in welchem die wagrechte Kathete

Abb. 44. Düsenentwurf mit Hilfe der v-Quadrate.

$QX = (f_x/G)^2$ und die lotrechte Kathete $OQ = A/2g$ ist. Die Hypotenuse schneidet auf der v^2-Kurve den Punkt B_2 heraus, für den Gl. (5) zutrifft. Die zugehörigen Werte v_x, i_x sind also mit f_x Lösungen der Gl. (3) und (4); wir können aus (3) die Geschwindigkeit berechnen und aus der Zustandskurve den Druck entnehmen, der übrigens auch in das v^2-Diagramm als Abhängige von i von Anfang an eingetragen werden kann. Nun schneidet der Strahl OB_2 die v^2-Kurve noch einmal, im Punkte B_1; zu einer bestimmten Querschnittsgröße gehören daher, wie wir schon oben gesehen haben, im allgemeinen zwei verschiedene Rauminhalte und Drücke. Ziehen wir aber von O aus den berührenden Strahl OC, so haben wir nur eine Lösung, und dieser Strahl schneidet die Kathete $QC' = (f_m/G)^2$ aus, die offenbar dem Minimalquerschnitt f_m entspricht. Wollen wir den Endquerschnitt ermitteln, so müssen wir bis zum End-

punkt der Zustandskurve i_k fortschreiten. Da die Rauminhalte stark wachsen, ist der zweite Teil der v^2-Kurve als Ast b in kleinerem Maßstab aufgetragen, was eine entsprechende Maßstabänderung für $(f/G)^2$ erforderlich macht. Die Verbindung des Endpunktes von $v_2{}^2$ als Strahl OD liefert $QD' = (f_2/G)^2$. Da die Düse meist mit geradlinigen Erzeugenden ausgeführt wird, benötigen wir in Wirklichkeit nur den engsten Querschnitt, und die Hilfslinien beschränken sich auf OD die Tangente OC zur Ermittlung des Minimalquerschnittes. Für das Düsenende gibt (3) die Endgeschwindigkeit und (4) den Endquerschnitt unmittelbar, das graphische Auftragen ist überflüssig.

Je größer die Reibungswiderstände sind, desto mehr weicht die Zustandslinie von der Adiabate im J-S-Diagramm ab, desto steiler wird die Kurve der v-Quadrate, desto größer ist der Neigungswinkel der vom Anfangspunkt gezogenen Tangente, also nimmt der Wert $(f_m/G)^2$ zu. Man erkennt, daß bei **gleichem Anfangszustand die durch einen gegebenen engsten Querschnitt strömende Dampfmenge um so mehr abnimmt, je größer die Reibungsverluste sind.** In Abb. 44 sind einige Ausdehnungslinien eingezeichnet, und der zugehörige Berührungspunkt bestimmt worden. Es zeigt sich, daß der im Mindestquerschnitt herrschende Druck p_m sich kaum merklich ändert, was unter gewissen Voraussetzungen auch theoretisch erwiesen werden kann.

Zahlenbeispiel.

Die in Abb. 44 eingeschriebenen Zahlenwerte beziehen sich auf die gleichen Zustände wie im Beispiel unter 1., und es erübrigt nur eine Bemerkung betreffs der Maßstäbe. Im v^2-Diagramm wählen wir die Einheiten für v^2 willkürlich, wie durch die beigezeichneten Maßstäbe angegeben ist, der für $(f/G)^2$ ist aber nicht mehr unabhängig. Um klare Übersicht zu gewinnen, tragen wir als Grundlinie $k^2 A/2g$ und als wagrechte Kathete $k^2(f/G)^2$ auf, wo k eine willkürliche Zahl ist, der wir den Charakter einer Geschwindigkeit zuschreiben wollen. Dann bedeutet $k^2 A/2g$ ein Wärmegefälle und wird im Maßstabe der Wärmeinhalte aufgetragen. So ist im Beispiel $k = 10^3$, daher wird die Grundlinie $= 119$ WE. Die Ordinaten $(kf/G)^2$ haben dann gemäß der Stetigkeitsbedingung (2) die Dimension von Quadraten des spezifischen Volumens und sind in deren Maßstab aufzutragen, beziehungsweise abzulesen. So schneidet die Schlußlinie OD die Kathete QD' ab, die, im Maßstabe der v^2 abgelesen, den Zahlenwert 288,0 cbm² ergibt, und wir haben f_2 aus der Gleichung $(f_2/G)^2 10^6 = 288$ zu rechnen, was mit $G = 0{,}153$ kg/sek auf $f_2 = 26 \cdot 10^{-4}$ qm $= 26$ cm² führt; ähnlich erhält man $f_m = 5{,}4$ cm², in Übereinstimmung mit unserer früheren Rechnung.

3. Die Vorgänge im schräg abgeschnittenen Ende der Düse behandeln wir im Abschn. 43.

31. Die Düse als Diffusor.

Bei hinlänglich kleinen Druckunterschieden vor und hinter der Düse tritt eine Erscheinung auf, die von der älteren Theorie nicht vorhergesehen worden ist. Es zeigt sich nämlich, daß der Druck an der engsten Stelle schon beim geringsten Druckabfall hinter der Düse tief sinkt und sich keineswegs auf die Höhe des Gegendruckes einstellt[1]). Die Düse wirkt gewissermaßen als „Diffusor" und übt eine intensive Saugwirkung aus, so daß die durchströmenden Dampfmengen ungemein rasch zunehmen, wie folgende Zusammenstellung zeigt:

Druck vor der Düse	$p_1 =$	10,45	10,48	10,45	10,40	kg/qcm
Druck hinter der Düse	$p_2 =$	10,40	10,36	10,30	9,90	„
Druckunterschied	$p_1 - p_2 =$	0,05	0,12	0,15	0,50	„
Druck an der engsten Stelle	$p_x =$	9,89	9,74	9,17	7,32	„
Sekundlich durchströmendes Dampfgewicht	$G =$	0,073	0,109	0,113	0,152	„

Die Abbildung dieser Zustandsänderung im J-S-Diagramm ist (unmaßstäblich) Kurve ADH' in Abb. 45 und entspricht einem kleineren Dampfgewicht G' als dem, das bei der Ausdehnung unter den kritischen Druck durchströmt. Mit diesem kleineren Gewicht ergibt die Wiederholung des allgemeinen Verfahrens in Abb. 45a die punktierten Linien b und b' der Querschnitte, und durch Übertragung der Druckes über den Düsenlängsschnitt den punktierten Druckverlauf. Hierbei muß im Querschnitte f_a der Düse derjenige Druck aufgetragen werden, der zum gleichen, d. h. dem Zweige b der f'-Kurve gehört, während im Querschnitte f_a' die Linie b' gilt. Die Grenze bildet Kurve ABH, bei der gerade der kritische Druck erreicht wird.

[1]) Diese Beobachtung ist zuerst von A. Fliegner gemacht worden (s. Schweiz. Bauzeitung, Bd. XXXI, Nr. 10 bis 12).

Offenbar kann mit Hilfe der Druckbeobachtung vor der Düse und an der engsten Stelle ein dem Venturi-Wassermesser ähnlicher Dampfmesser konstruiert werden, der in der Tat

Abb. 45 und 45a. Verdichtung im Diffusor.

seit längerer Zeit von der Firma J. Eckardt, Stuttgart und neuerdings von Siemens & Halske A.-G. Berlin in den Handel gebracht wurde.

Die Einrichtung des letzteren ist in Abb. 45b veranschaulicht. An den Meßstellen des Druckes ist die Düse durch einen Ringschlitz mit Wulst unterbrochen. Die Meßröhrchen a b führen zum Kondensiergefäß c, das bis zum Rohrrand stets mit Kondensat angefüllt bleibt, wobei der Überschuß durch die hinlänglich weiten Röhrchen zurückfließt. Gefäße $a_1 b_1$ bilden die „kommunizierende" Röhre, die mit Quecksilber gefüllt ist, dessen Spiegel dem durch a und b übertragenen Druckunterschied gemäß einen Abstand h einnehmen. Die von c führenden Röhrchen und der ganze Raum über dem Quecksilber sind stets mit Wasser von bekannter Druckhöhe gefüllt. Die Meßhöhe h wird durch Zahnstange und Zahnrad mittels magnetischer Fernkupplung auf das Zeigerwerk übertragen, so daß keine Stopfbüchse benötigt wird. Die lichte Weite von a_1 wird nach einem solchen Gesetz veränderlich gemacht, daß der Zeigerausschlag mit der sekundlichen Dampfmenge in geradem Verhältnis wächst. Durch eine sinnreiche elektro-magnetische Vorrichtung wird die in beliebiger Zeit durchgeflossene gesamte Dampfmenge summiert. Als Genauigkeit wird ± 2 v. H. gewährleistet.

Abb. 45b. Venturimesser von Siemens & Halske.

Theorie des Venturimessers, für reibungsfreie Expansion. Es bezeichne

$p_1 v_1 w_1$ den Zustand im vollen Rohr, d. h. im Eintrittsquerschnitt f_1

$p_m' v_m' w_m'$ desgl. im engsten Querschnitt f_m.

Es stehen zur Verfügung 1. die kinetische Energiegleichung

$$\frac{w_m'^2 - w_1^2}{2g} = \frac{k}{k-1} p_1 v_1 \left[1 - \left(\frac{p_m'}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

2. Die Durchflußgleichungen

$$G = \frac{f_1 w_1}{v_1} \quad \text{und} \quad G = \frac{f_m w_m'}{v_m'} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2) \text{ und } (3)$$

3. Die Expansionsgleichung

$$(p_m')^{\frac{1}{k}} v_m' = p_1^{\frac{1}{k}} v_1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Beobachtet man $p_1 p_m'$ und v_1 (d. h. bei Gasen die Eintrittstemperatur T_1), so erlauben obige Gleichungen die Unbekannten $w_1 w_2 v_2 G$ zu ermitteln. Am wichtigsten ist G. Man setzt aus (2) und (3) $w_m' = \frac{v_m'}{v_1} \frac{f_1}{f_m} w_1$

in (1), berechnet w_1 und schiebt dies in (2) ein. So entsteht mit Rücksicht auf (4)

$$G = f_1 \sqrt{\frac{2gk}{(k-1)} \frac{p_1}{v_1} \frac{\left[1 - \left(\frac{p_m'}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]}{\left[\left(\frac{p_1}{p_m'}\right)^{\frac{2}{k}} \left(\frac{f_1}{f_m}\right)^2 - 1\right]}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

In der Wirklichkeit müßte eine „Ausflußzahl" μ vorgesetzt werden, für die Gibson[1] die Werte

	$\mu = 0{,}91$	0,94	0,96	0,972	0,98	
bei $p_m' : p_1 =$	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	findet.

Die Genauigkeit, die ein Dampfmesser dieser Art erreichen kann, wurde von Bendemann[2]) an einer Düse von 14,9 auf 30,9 mm Durchmesser bei rd. 96 mm Abstand des engsten und des größten Querschnittes untersucht. Bendemann findet für das Druckverhältnis die bemerkenswerte Beziehung

$$\frac{p_1 - p_m'}{p_1 - p_2} = \frac{1 - \beta}{1 - \beta'} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

wobei p_m den Druck an der engsten Stelle, p_1 den Druck vor der Düse, p_2 den Druck hinter der Düse, β nahezu das kritische Druckverhältnis $= 0{,}56$, während $\beta' = 0{,}937$ dasjenige Verhältnis von p_2/p_1 bedeutet, von dem ab das sekundliche Gewicht bei der Düse nicht mehr zunimmt, wenn der Gegendruck abnimmt. Das sekundliche Gewicht als Funktion des Gegendruckes in Kurvenform dargestellt, ergibt eine ellipsenähnliche Kurve, wie Schaulinie V in der nachfolgenden Abb. 78 der Gutermuthschen Versuche. Für die Düse von Bendemann war

$$\frac{p_1 - p_m'}{p_1 - p_2} = 7 \quad \ldots \quad (2)$$

Ist p_2 vorgeschrieben, so kann p_m' berechnet und daraufhin mit Bendemanns weiter unten angeführten Ausflußformel G_{sk} ermittelt werden.

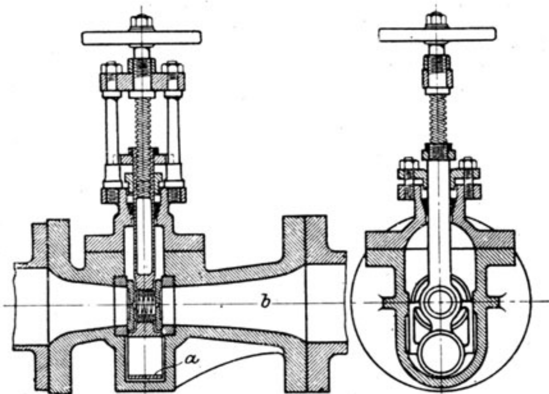


Abb. 46. Ventil von Ferranti.

Bendemann rechnet bei 0,2 at Druckabfall und $\pm$ 0,02 at Genauigkeit der Manometerablesung auf $\pm$ 2 v. H. Genauigkeit der Dampfmessung. Da aber in den meisten Fällen ein Abfall von 0,5 at unschädlich ist, wäre in Wahrheit die Genauigkeit bedeutend größer.

Forner[3]) gelangt durch Zusammenfassung der Versuche von Bendemann, Büchner, Gutermuth und des Verfassers zur Beziehung

$$\frac{p_m'}{p_1} = \beta_s + \sqrt{q\left(\frac{p_2}{p_1} - \beta_s\right)^2 - (q-1)(1-\beta_s)^2} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

worin β_s das kritische Verhältnis $= 0{,}545$,
q das Querschnittsverhältnis f_2/f_m

bedeuten. Diese Gleichung liefert bei kleinen Druckunterschieden merklich kleinere Pressungen p_m' als Gl. (1). Die von Forner aufgestellte Ausflußformel besprechen wir in Abschn. 40.

Eine originelle Anwendung der Düse als Diffusor gab Z. d. Ferranti, dessen Dampfabschlußventil Abb. 46 mit einer Einschnürung versehen ist, um die Dichtungsfläche möglichst zu verkleinern. Bei vollem Durchfluß wird Wirbelung durch den Führungsring a vermieden, die vergrößerte Dampfgeschwindigkeit im Diffusor b in Druck rückverwandelt.

[1]) Journ. of the Inst. of Mec. Eng. London, Okt. 1919.
[2]) Mitteil. über Forschungsarbeiten, Berlin 1907, Heft 37.
[3]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1919, S. 74.

31a. Prandtlsche Grenzschichten und Sonderverluste des Diffusors infolge Ablösungserscheinungen.

Nach Prandtls grundlegenden Untersuchungen[1]) findet in einer dünnen, an den Begrenzungswänden haftenden Flüssigkeitsschichte, sobald im Sinne der Strömung der Druck zunimmt, nach zunächst angenähert laminarer Strömung eine so starke Verzögerung in der Grenzschichte statt, daß sich schließlich der Strahl von der Wand ablöst. In dem entstehenden Hohlraum strömt die Flüssigkeit im entgegengesetzten Sinne wie der Hauptstrom, und so müssen verlustreiche Wirbelungen entstehen. Die Grenzschichte wird meist „aufgerollt", wie man an den höchst anziehenden Strömungsbildern Prandtls nachsehen kann.

Der Diffusor hat den Zweck, den Druck zu erhöhen, also wird früher oder später die Ablösung und Wirbelung eintreten.

Dies wird glänzend bestätigt durch die Arbeiten von Andres[2]), Hochschild[3]), und insbesondere Kröner[4]). Der in einen Kanal von 250×250 mm eingebaute Diffusor hatte einen engsten Querschnitt von rd. 68×250 mm. Die Versuche wurden mit Luft bei Geschwindigkeiten von 30 bis 40 m/sek durchgeführt. Die wichtigsten Ergebnisse sind in nachfolgender Zahlentafel enthalten.

Kanal Nr.		I	II	III	IV
Länge des Diffusors zwischen engstem Querschnitt und Ende der Erweiterung	mm	140	240	450	860
Reibungszahl etwas nach Ende der Erweiterung . .	$\lambda = \zeta_r/4$	0,52	0,34	0,15	0,023
Desgl. am Ende des 2400 mm langen Kanales . . .	$\lambda = \zeta_r/4$	0,016	0,003	0,004	0,003

Die Reibungszahl λ entspricht dem gewöhnlichen Ansatz $v\,dp = \frac{\lambda U}{F}\frac{w^2}{2g}dL$, wobei aber w als Mittelwert $(Q:F)$ einzusetzen ist. Man erkennt die außergewöhnliche Vergrößerung von λ im Wirbelgebiet. Der Strahl löste sich in unregelmäßiger Weise von der Wand ab. Nach stattgefundener „Beruhigung", d. h. Ausbildung der normalen turbulenten Strömung mit angenähert gleichmäßiger Geschwindigkeitsverteilung, sinkt die Reibungszahl auf normale Werte.

Nochmals sei hervorgehoben, daß eine Strömung mit Entspannung kleine — eine solche mit Verdichtung grundsätzlich erheblich größere Energieverluste aufweisen muß.

32. Das Auftreten des Dampfstoßes.

Durch teilweises Schließen eines zwischen der Versuchsdüse und dem Kondensator angebrachten Ventiles konnten wir hinter der Düse einen beliebig hohen Gegendruck erzeugen. Der Verlauf der sich hierbei ergebenden Druckkurven ist in Abb. 47 dargestellt. Man bemerkt, daß der Druck zunächst der Linie der freien Ausdehnung folgt, um dann je nach der Höhe des Gegendruckes mehr oder weniger sprunghaft zuzunehmen. Stellenweise, wie z. B. bei Kurve E, beträgt die Druckzunahme $1^1/_2$ at auf eine Rohrlänge von 3 mm. Ich deutete diese ungemein heftigen Drucksteigerungen im Jahre 1903 als Verwirklichung des von Riemann[5]) auf theoretischem Wege abgeleiteten „Verdichtungsstoßes", indem die mit großer Geschwindigkeit begabten Dampfteile gegen eine ungenügend rasch ausweichende Dampfmasse stoßen und hierbei auf höheren Druck verdichtet werden. Seither ausgeführte Versuche, die wir unten mitteilen, haben gezeigt, daß die Vorgänge verwickelter, und stets mit einer mehr oder minder starken Ablösung des Strahles von der Wand verbunden sind. Anzeichen hiervon erblickt man an Schaulinien G, H, J, K, deren wellenförmige Schwankungen nichts anderes als Schallschwingungen sein können, die durch Reibung aufgezehrt werden. Da es bei diesen Schaulinien mehr auf die Art der Vorgänge ankam, wurden Temperaturschwankungen in den Grenzen von 194

---

[1]) Verhandl. d. III. intern. Math. Kongr., 1905, S. 485.
[2]) Mitt. ü. Forschungsarb., Heft 76.
[3]) Mitt. ü. Forschungsarb., Heft 114.
[4]) Dissertation. Berlin 1919.
[5]) Riemann-Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der mathem. Physik, 1901, S. 469f.

bis 200° C zugelassen. Auch sind in Abb. 47 Beobachtungen mit Meßröhrchen von 3 und von 5 mm Durchmesser zusammengetragen, weshalb nicht alle Kurven sich an die durchgehende Expansionslinie vollkommen anschließen.

Eine gute Bestätigung erfuhren unsere Beobachtungen durch die auch andere wertvolle Versuche enthaltende Abhandlung von K. Büchner „Zur Frage der Lavalschen Düse“ in Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1904, S. 1036.

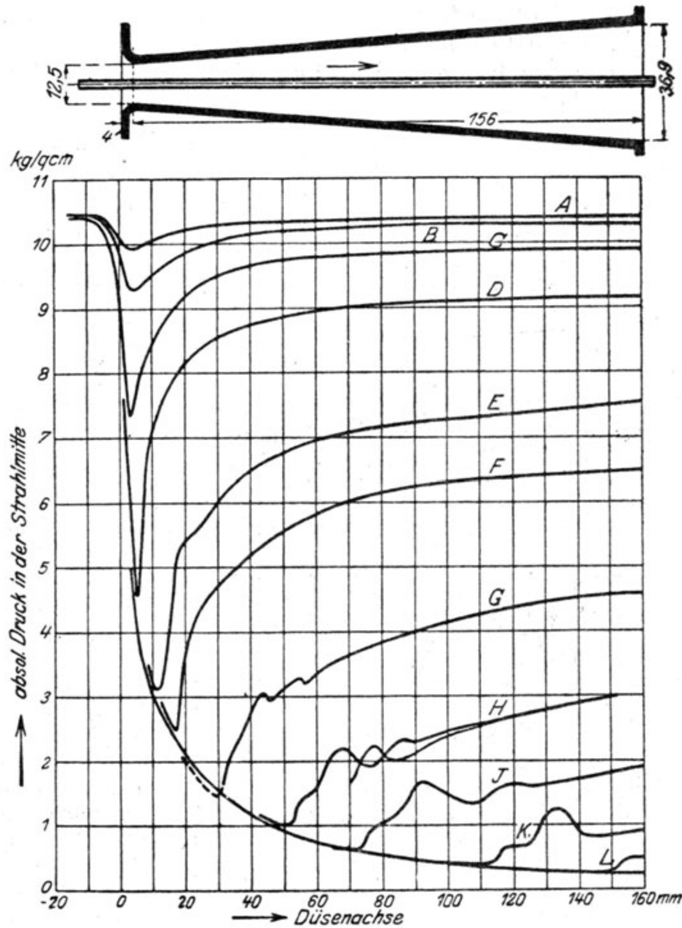


Abb. 47. Druckverlauf in der Düse bei Verdichtungsstößen und Strahlablösung.

Indem wir die Annahme machen, daß die Verdichtung in einer unendlich schmalen „Stoßzone“ vor sich geht, gelangen wir zum „theoretischen Dampfstoß“, der auch in einem zylindrischen Rohr denkbar wäre und der Theorie besonders leicht zugänglich ist, wie wir im folgenden erläutern.

a) Der theoretische Dampfstoß.

Es sei C die im Raume stillstehende Stoßebene (Abb. 48); von links ströme ihr der Dampf mit einer Geschwindigkeit w_1, dem Drucke p_1 und dem spezifischen Rauminhalt v_1 zu; nach dem Stoße seien die entsprechenden Größen w_2, p_2, v_2. Bei unendlich schmaler Stoßzone wird das Nachfolgende auch für die kegelige Düse gelten. Grenzen wir um C herum das unendlich kleine Element A_1B_1 ab, so besteht die Riemannsche Theorie einfach in der Anwendung des Satzes vom „Antrieb“. Der Zuwachs der Bewegungsgröße der im Zeitelement nach A_2B_2 fortrückenden Masse des Elementes ist

$$\left(\frac{f w_2 dt}{g v_2}\right) w_2 - \left(\frac{f w_1 dt}{g v_1}\right) w_1 = f(p_1 - p_2) dt$$

oder

$$\frac{w_2^2}{v_2} - \frac{w_1^2}{v_1} = g(p_1 - p_2) \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

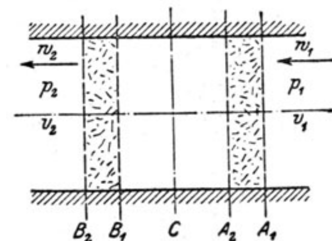


Abb. 48. Zur Theorie des Dampfstoßes.

Die Gleichung der Stetigkeit liefert

$$\frac{w_1}{v_1} = \frac{w_2}{v_2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

und die Gleichung der Gesamtenergie bei Abwesenheit einer äußeren Wärmezufuhr

$$\frac{w_2^2}{2g} - \frac{w_1^2}{2g} = \frac{i_1 - i_2}{A} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Aus diesen Gleichungen sind bei gegebenen p_1, v_1, w_1 die Werte p_2, v_2, w_2 zu rechnen, was bei Dämpfen nur auf dem Wege versuchsweiser Lösung oder besser mit Hilfe der geometrischen Örter geschieht. Die Verbindung der Gl. (2) und (3) liefert in der Tat die Fannolinie (Abschn. 27). Die Verbindung von (1) und (2), wobei man w_2 aus (2) in (1) einsetzt und p_2v_2 als Veränderliche betrachtet, wollen wie dir Rayleighlinie nennen; ihr Schnitt mit der

Fannolinie ist der gesuchte Endzustand. Im übrigen könnte man auch Gl. (1) und (3) verbinden falls i durch p, v ausdrückbar ist, und erhielte eine Beziehung zwischen $p_2 v_2$ als dritten geometrischen Ost, der an Stelle der Fanno- oder Rayleighlinie benutzbar wäre.

Für vollkommene Gase ist die algebraische Lösung stets möglich, und führt, indem man i/A durch $c_p pv/AR = kpv/(k-1)$ ersetzt, auf folgende von Prandtl[1]) angegebenen Ausdrücke:

$$p_2 = \frac{1}{k+1}\left[\frac{2w_1^2}{g v_1} - (k-1)p_1\right] \qquad (4)$$

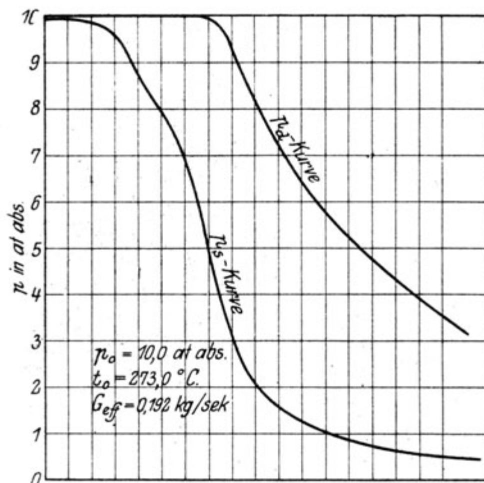
$$w_2 = \frac{a_1^2}{w_1} \quad \text{mit} \quad a_1^2 = \frac{1}{k+1}\left[(k-1)\,w_1^2 + 2g\,k\,p_1\,v_1\right] \qquad (5)$$

Nach (2) ist dann $v_2 = v_1 w_2/w_1$. Mit diesen Entwickelungen werden wir uns noch in Abschn. 172 beschäftigen.

b) Staudruckmessung und Dampfstoß.

Wird das offene Ende eines zugeschärften Röhrchens dem Strome entgegengehalten und am anderen Ende mit einem Manometer verbunden, so zeigt dieses den „Staudruck“ (auch „dynam. Druck“ genannt) an.

Der Zusammenhang desselben mit dem tatsächlichen („statischen“) Druck wurde im Maschinenlaboratorium der Eidgen. Techn. Hochschule von Anderhub[2]) und Löliger[3]) geprüft. Ersterer fand, daß die Anzeige jenes sog. „Pitot“röhrchens, solange die Geschwindigkeit unter der Schallgrenze liegt, mit dem statischen Druck praktisch genommen vollkommen übereinstimmt. Letzterer benützte für Überschallgeschwindigkeit gemäß Abb. 49 eine weite Düse mit axial durchgelegtem Rohr, an das als kleines Knie das Pitotrohr angeschlossen war. Nach Entfernung des Knies wurde durch das axiale Rohr der statische Druck gemessen, der an der Meßstelle des Staudruckes durch den Einbau des Knies nicht gestört wird. Das obere Schaubild zeigt, daß der Staudruck bis ziemlich weit über den engsten Querschnitt mit dem Druck vor der Düse übereinstimmt, dann sinkt, aber stets viel größer ist als der statische Druck. Hieraus wurde Abb. 50 hergeleitet, in der die Abszisse das Verhältnis des absoluten statischen Druckes, auf den man herabexpandiert hat, zum Anfangsdruck vor der Düse ist; die Ordinate ist das Verhältnis des absoluten Staudruckes zum absoluten Druck vor der Düse. Diese empirische Kurve wird man wohl auch bei anderen Anfangszuständen zur Ermittelung des statischen Druckes aus dem beobachteten Staudruck, also zur Berechnung der Strömungsgeschwindigkeit benutzen dürfen.



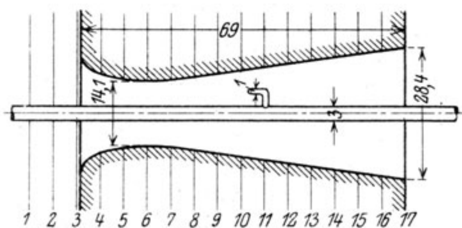


Abb. 49. Staudruckmessung bei Überschallgeschwindigkeit.

Beispiel. Anfangsdruck 8 at abs. gesättigt, Staudruck 4,8 at abs., Verhältnis 4,8 : 8 = 0,6 liefert das Expansionsverhältnis 0,11, also ist der statische Druck 0,11 · 8 = 0,88 at abs., mithin nach Entropietafel das adiabatische Gefälle rd. 70 k cal. Um die Geschwindigkeit zu berechnen, muß man freilich die Verluste bis zur Beobachtungsstelle einschätzen. Nehmen wir 10 v. H an, so ist die Geschwindigkeit rd. 820 m/sek.

Theoretische Ermittelung des Staudruckes. Löliger hat durch Nachrechnung einer Anzahl von Beobachtungen festgestellt[4]), daß der Staudruck ermittelt werden kann, wenn man annimmt, daß vor der Spitze des Staurohres zunächst ein Verdichtungsstoß, sodann eine

---

[1]) Z. f. d. ges. Turbinenwes. 1906, S. 241.

[2]) Unters. ü. d. Dampfstr. im radialen Schaufelspalt. Dissert. Zürich 1912.

[3]) Unters. d. Druck- u. Strömnngsverlaufs in Schaufeln f. Gleichdr.-Turb. Dissert. Zürich 1913.

[4]) Gleichzeitig aus theoretischen Gründen gefordert von Prandtl in seinem „Abriß der Lehre v. d. Flüssigk. u. Gasbeweg.“ 1913, Fischer, auf dessen Studium wir den Turbinenkonstrukteur angelegentlichst verweisen.

adiabatische Verdichtung stattfindet, bis die kinetische Energie der Strömung aufgebraucht ist. Diese Zustandsfolge führt im Entropiediagramm (Abb. 51) vom Anfangszustand A_1 durch die Fanno- und Rayleighkurve zum Stoßpunkt A_2, von da adiabatisch zum Staudruck p_{dyn}.

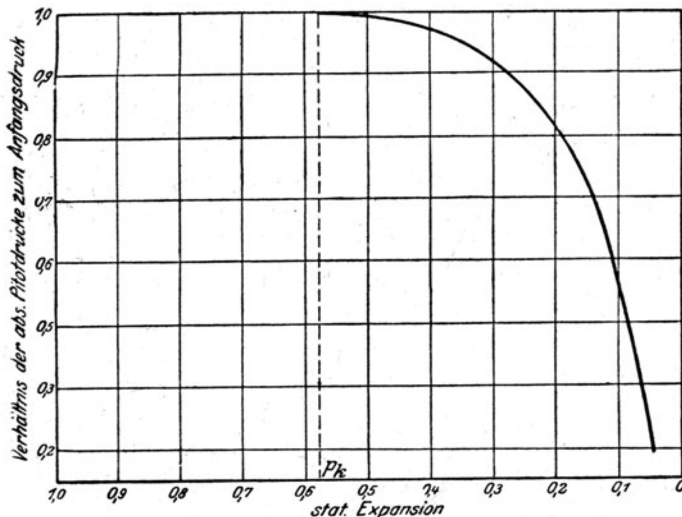


Abb. 50. Verhältnis des Staudruckes zum Anfangsdruck als Abhängige des Ausdehnungsverhältnisses.

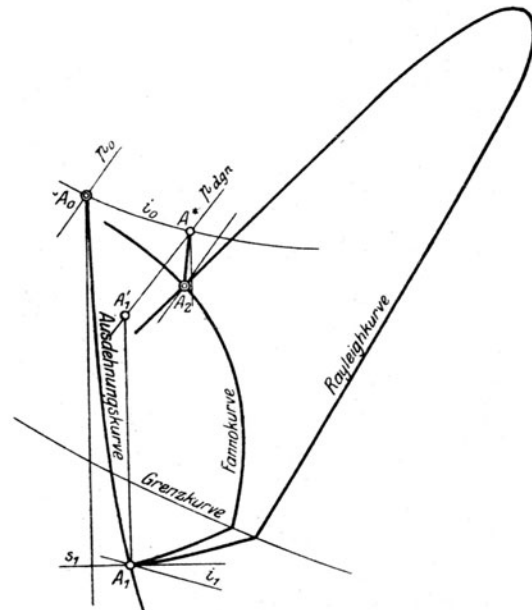


Abb. 51. Geometrische „Zustandsörter“ für den Verdichtungsstoß.

Im allgemeinen liegt der Zustandspunkt A etwas links von der Adiabate durch A_2 entsprechend einer gewissen Wärmeableitung. Auffallend ist die hohe Temperatur, die gemäß der Rayleighkurve während der Verdichtung auftritt. Sie erreicht unwahrscheinlich hohe Werte, die noch weiterer Aufklärung bedürfen.

c) Graphische Ermittelung des Zustandes am Ende der Düse nach einem Verdichtungsstoß.

Die bei Dampfturbinen fast ausschließlich zu lösende Aufgabe besteht darin, anzugeben, wie groß die Geschwindigkeit und der spezifische Rauminhalt am Ende der Düse sind, wenn der Gegegendruck gegeben und so groß ist, daß in der Düse ein Stoß auftreten muß.

Mit $w_1 = 0$ gelten für den Endquerschnitt unabhängig von allen Zwischenvorgängen die Energie- und die Durchflußgleichung:

$$A w_2^2/2g = i_1 - i_2; \quad G v_2 = f w_2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Die Gesamtheit der Werte von $p_2 v_2$, die den beiden Gleichungen genügen, liegen, wie ersichtlich, auf einer Fannolinie mit den Anfangswerten $w_1 = 0$, i_1, G und dem Querschnitt f_2. Ihr Schnittpunkt mit der vorgeschriebenen Drucklinie p_2 liefert den gesuchten Endzustand, worauf mittels (6) die Geschwindigkeit berechnet wird. In Abb. 52 ist eine Anzahl von Fannolinien eingezeichnet; die erste davon würde von 10 at ausgehend, den Gegendruck von 0,1 at nur bei adiabatischer Expansion erreichen. Bei der 2., 3., 4. Kurve, die mit 8, 6, 4 at anfangen, sind bei gleichem Enddruck die Zustände durch $B_2 C_2 D_2$ angegeben. Man erkennt, wie mit wachsendem Stoßverlust die Entropievermehrung zunimmt.

Die Voraussetzung dieser Herleitung, daß im Endquerschnitt überall gleicher Zustand und gleiche Geschwindigkeit vorhanden sind, trifft nicht zu, falls der Stoß in der Nähe des Düsenendes stattgefunden hat. Die dann auftretenden verwickelten Vorgänge werden in Abschn. 33 behandelt.

Dampfdrosselung vor der Düse.

Wird der Dampf vor der Düse gedrosselt, so liegen die den Anfangszustand darstellenden Punkte auf der Linie $i_1 =$ konst. $= 670$ k cal (Abb. 52). Wir ermittelten den kritischen Druck, daraus die Durchflußmengen, die der adiabatischen Expansion bis zum engsten Querschnitt entsprechen, und konstruierten mit diesen Gewichten die Fannolinien für den Querschnitt f_2. Der Schnitt dieser Kurven mit der unveränderten Gegendrucklinie p_2 liefert den jeweiligen Zustand $B_2 C_2 D_2 \ldots$ am Düsenende.

Auf diese Weise ist in Abb. 52a die Schaulinie der Ausflußgeschwindigkeit für eine Düse mit dem Ausdehnungsverhältnis 10 at auf 0,1 at entworfen worden, aus der wir die wichtige

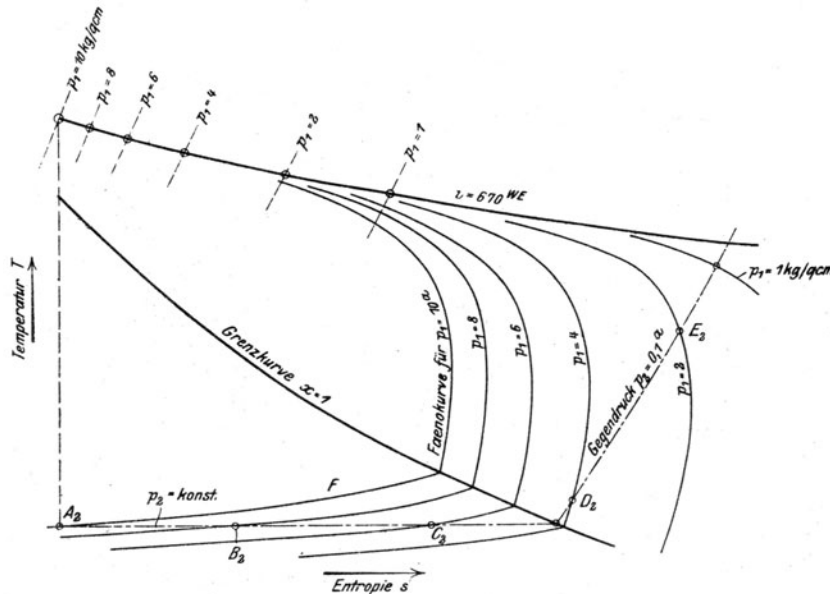


Abb. 52. Mittlerer Zustand am Düsenende bei Verdichtungsstößen.

Regel ableiten, daß das sekundliche Gewicht dem Anfangsdrucke sehr nahezu verhältnisgleich ist. —

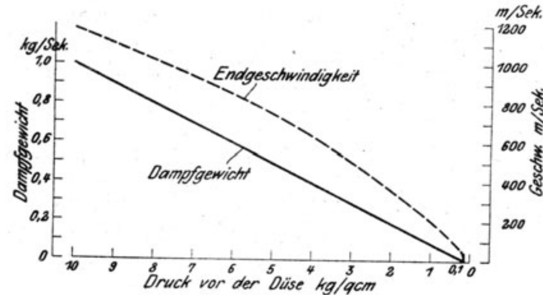


Abb. 52a. Veränderung des Ausflußgewichtes mit dem Anfangsdruck.

33. Der Verdichtungsstoß und Strahlablösung am Düsenende.

Um die Verdichtungserscheinungen möglichst deutlich sichtbar zu machen, wurde eine Glasdüse mit 40,8 mm lichter Weite am Austritt und 20 mm engstem Durchmesser ausgeführt. Ihre kegelförmige Erweiterung geht aus nachfolgenden Maßangaben hervor:

Abstand vom Düsenende	= 16	24	31,5	40	55 mm
lichte Weite der Düse	= 40,5	40	39	38	36 ,,

Die Länge vom engsten Durchmesser bis ans Düsenende betrug 170 mm.

Der in die Atmosphäre ausströmende ursprünglich gesättigte Dampf wurde von 11 at abs. auf 6 at abs. im Ausflußgefäß vor der Düse abgedrosselt. Der mittlere Barometerstand betrug 721 mm. Ein zur Achse paralleles Pitotrohr konnte sowohl in axialer wie in radialer Richtung, sich selbst parallel bleibend, verschoben werden.

In Abb. 53 sind die Druckablesungen beim Verschieben in der Achsenrichtung aufgetragen, und zwar beziehen sich die Schaulinien *a*, *b*, *c*, *d* auf Ablesungen in den Abständen 0; 3, 2; 10.2 und 14,2 mm von der Düsenachse.

Abb. 54 stellt die Beobachtungen in den Punkten eines Durchmessers dar, und zwar entsprechen die Linien *e*, *f*, *g*, *h*, *i* den Abständen 1, 11, 21, 28, 35 mm vom Düsenende. Die Entzifferung dieser verwickelten

Drucklinien wurde ermöglicht durch Aufnahme von Lichtbildern des Strahles, in denen Verdichtung und Ausdehnung sich durch hellere Felder von mehr oder minder kondensiertem Dampf deutlich abheben.

Abb. 55 ist eine Freihandskizze nach dem Lichtbild, die sich freilich auf eine andere Glasdüse bezieht, da die erste inzwischen gebrochen war. Man erkennt, daß der Verdichtungsvorgang sich nicht in einer Ebene abspielt, sondern daß von einer bestimmten Stelle an in schräger Richtung Störungen ausgehen, die in der Mitte durch eine kleine horizontale Fläche vereinigt werden. Der Strahl löst sich offenbar von der Wand ab und kann sich, da die Trennungsstelle nur etwa 30 mm vom Düsenende entfernt ist, nicht mehr wieder anlegen. Hierdurch werden die Versuchsergebnisse von Nusselt[1]) an Luftstrahlen wie auch die theoretischen Erörterungen von Flügel[2]) bestätigt. Wesentliches zum Verständnis der Erscheinungen wurde gewonnen, als man den statischen Druck durch ein seitlich angebohrtes glattes Röhrchen, das am Ende, um den Strom wenig zu stören, zugespitzt war, zu messen versuchte. Lichtbild 56 zeigt, daß sich der Strahl fast im gleichen Horizont, ebensosehr von der Wand, **wie auch vom Meßröhrchen ablöst.** Hierdurch wird die Bestimmung des wahren statischen Druckes für den

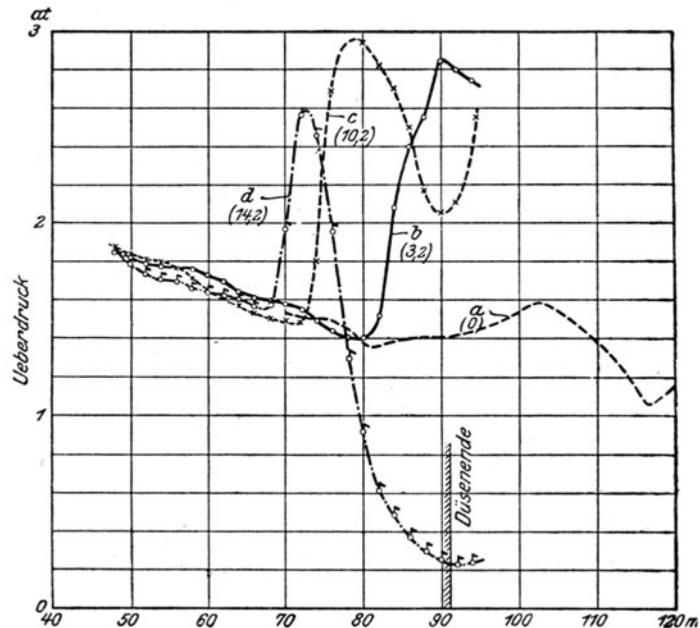


Abb. 53. Staudrücke in verschiedenen Abständen von der Düsenachse als Abhängige der Länge.

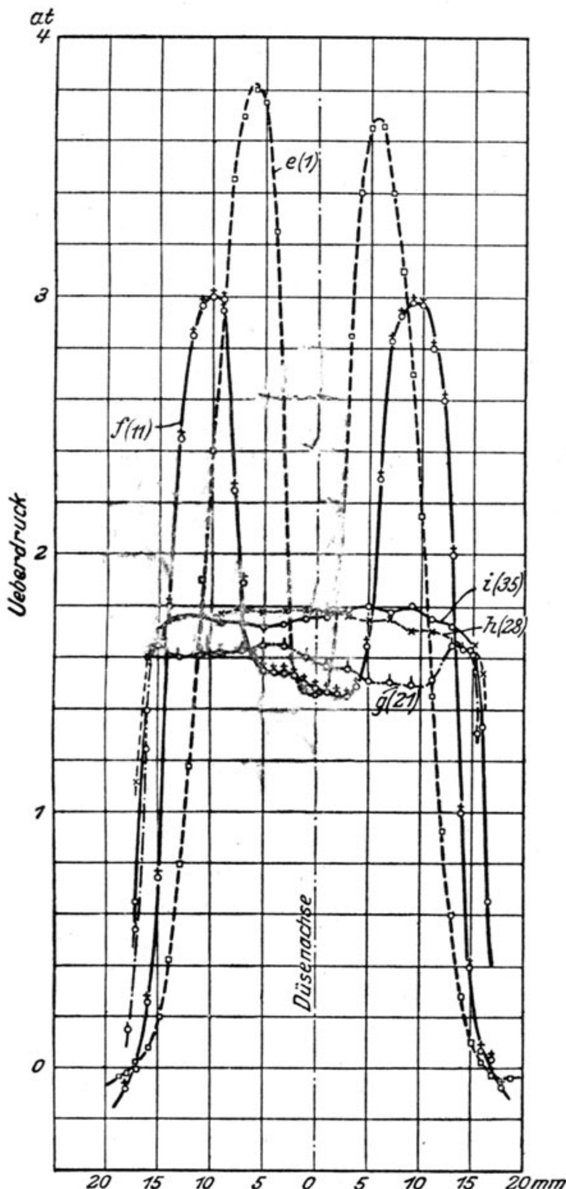


Abb. 54. Staudrücke in den Punkten eines Durchmessers.



Abb. 55.
Ablösung und Verdichtungsstoß.

---

[1]) Z. f. d. ges. Turbinenwes. 1916, Heft 13 u. f.

[2]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1917, S. 650.

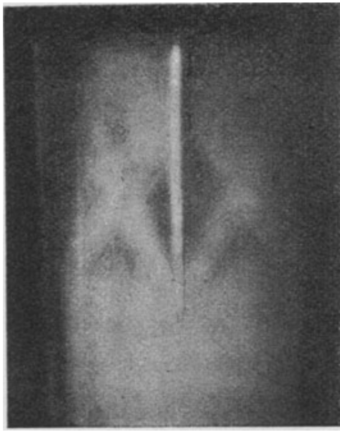


Abb. 56. Ablösung vom Meßrohr und vom Rande ausgehend.

Zustand, der vor der Einführung des Meßröhrchens bestand, illusorisch. Dies zeigt die Aufnahme der scheinbaren statischen Drücke durch die seitliche Anbohrung an einem an Stelle der Pitotröhre eingesetzten, am Ende geschlossenen und zugespitzten Röhrchen längs eines Durchmessers in Abb. 57, wobei die an die Schaulinien angeschriebenen Zahlen den Abstand des Meßquerschnittes vom Düsenende bedeuten. Die Ablösungsstelle war rd. 26 mm vom Düsenrande entfernt. Wir erkennen an Linien 24 und 22, daß in diesem Horizont die Störung nur am Rande merklich ist; sonst bleibt der Druck nahezu gleichförmig. Allein schon im Abstande 21 mm tritt in der Mitte, durch die Ablösung des Strahles veranlaßt, ein Stau auf, der deutlich bis zum Querschnitte 13 wahrnehmbar bleibt. Die bei Schaulinie 16 beim Halbmesser von etwa 7 mm tief herabreichende Zacke ist eine eigentümliche, aber sich regelmäßig wiederholende Erscheinung. Sie wird erklärt durch die Handskizze Abb. 58, nach der bei seitlich verschobenem Meßrohr die durch dieses veranlaßte Ablösungsstelle merklich in die Höhe rückt. Nahe am Düsenende ist gemäß Linie 4, Abb. 57, der statische Druck bereits ziemlich ausgeglichen.

Diese in der weiten Düse mit größter Deutlichkeit wahrnehmbaren Erscheinungen erklären es, warum in älteren Beobachtungen die Messung des statischen Druckes durch ein zentrales Meßrohr und durch Bohrungen in der Düsenwand an der Ablösungsstelle den gleichen Druck ergeben konnte, so daß man mit scheinbarer Berechtigung auf eine ebene Gestalt der Verdichtungs-

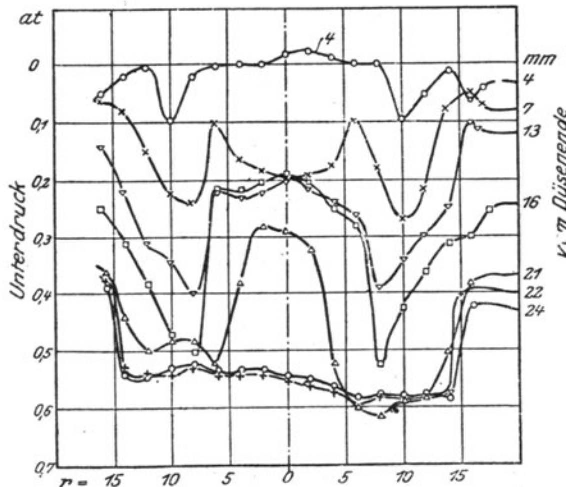


Abb. 57. Statische Drucke längs eines Durchmessers.

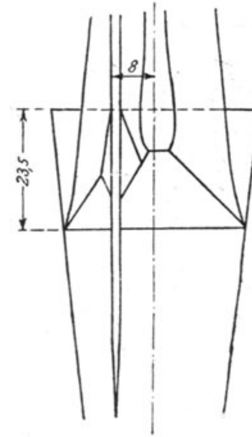


Abb. 58. Verschiebung der Ablösungsstelle bei seitlich verschobenem Meßrohr.

fläche schließen durfte. Wir erkennen, daß die Beobachtung des statischen Druckes durch ein in die Strömungsrichtung gestelltes Meßrohr mit Anbohrung auch für Überschallgeschwindigkeit immer noch zulässig bleibt, mit alleiniger Ausnahme desjenigen Gebietes, in dem wegen hohen Gegendruckes die Strahlablösung stattfindet.

Die Erklärung der Ablösungserscheinungen stellt uns vor neue Probleme der Dampfströmung. Betrachten wir nämlich den statischen Druck unmittelbar vor der Ablösungsstelle, der etwa 0,45 at abs., also den $0{,}45\ 6 = 0{,}075^{\text{ten}}$ Teil des Anfangsdruckes beträgt, so ergibt die Kurve von Löliger (Abb. 50) einen möglichen Staudruck von $0{,}47 \cdot 6 = 2{,}82$ at abs. Dieser Druck erscheint gemäß Abb. 54 in der Tat bei Schaulinie *i*, *h* und der Größenordnung nach gleich bis hinauf zur Kurve *e* im zentralen Teil des Dampfstrahls. Daraus ist zu folgern, daß an jenen Stellen der normale Expansionsdruck und die normale Geschwindigkeit vorhanden waren, und die Verdichtung im Pitotrohr unter Vermittlung eines Dampfstoßes vor sich ging.

Nun aber stellt sich die außergewöhnliche Erscheinung ein, daß bei Kurve *f* (Abb. 54) etwa in 10 mm Abstand von der Achse und an Kurve *e* in 6 mm Abstand von der Achse Staudrucke von 4,0 und sogar 4,8 at abs. auftreten. Diese hohe Pressung ist unmöglich, falls, sei

es im Pitotrohr, sei es vorhergehend in der Ablösungsstelle, ein gerader oder schiefer Verdichtungsstoff auftritt. Der verhältnismäßig geringe Verlust gegenüber dem 6 at abs. betragenden Anfangsdruck weist auf eine nahezu umkehrbare Verdichtung hin, als ob der schiefe Strahlenriß eine feste Düse bildete.

Daß eine Strahlablösung stattfindet, erkennt man deutlich in Abb. 53 an Schaulinie d, wo der dynamische Druck gegen das Düsenende sich deutlich der Null nähert, also auf starke Abnahme der Strömungsgeschwindigkeit schließen läßt. Die Voraussetzung, daß von dieser Stelle aus ein schiefer Verdichtungsstoß ausgeht und daß die Ablösung durch die Prandtlsche Theorie der Grenzschichten erklärt werden kann, widerspricht jedoch dem oben hervorgehobenen hohen Staudruck in Abb. 54. Die Aufklärung dieser eigenartigen Verhältnisse muß weiteren Studien vorbehalten bleiben.

Zur weiteren Veranschaulichung der inneren Vorgänge wurde in zur Achse parallelen Geraden der statische Druckverlauf aufgenommen, und zwar an einer neuen Düse bei 9,5 at Kesselüberdruck, der vor dem Eintritt auf 4,5 at Überdruck abgedrosselt wurde. Abb. 59 zeigt die gewonnenen Schaulinien; Abb. 60

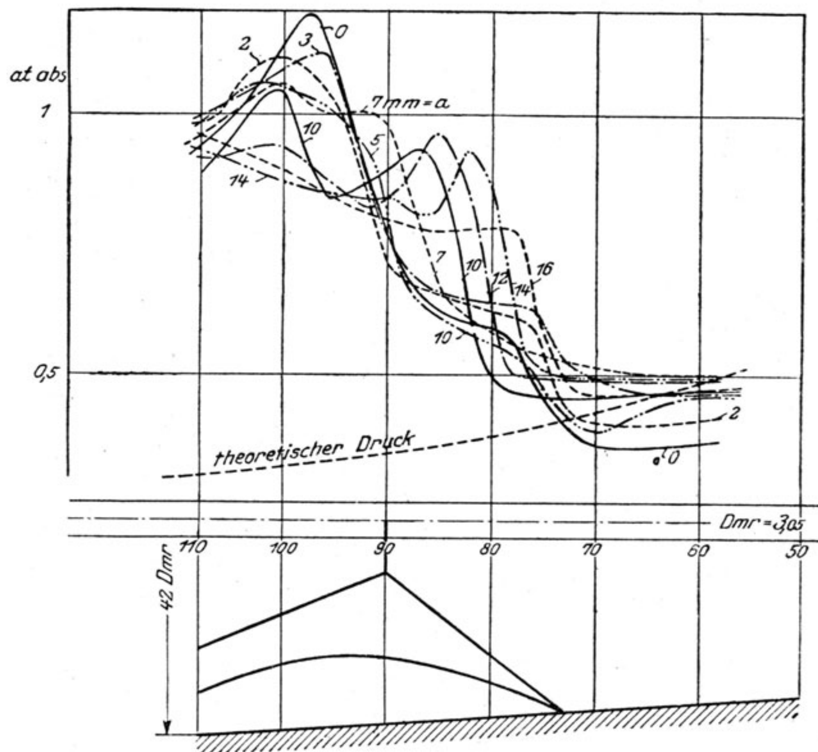


Abb. 59. Statischer Druck in zur Achse parallelen Geraden.

desgl. den Verlauf des mit dem Pitotrohr gemessenen dynamischen Druckes. Unterhalb der Schaulinien ist die Düse im Schnitt, mit dem Umriß des heller leuchtenden Verdichtungskegels eingezeichnet. Die jenem Kegel entsprechenden Druckpunkte sind an den Schaulinien durch stärkere Kreuze hervorgehoben. Die angeschriebenen Zahlen bedeuten den Abstand der Meßbohrung von der Düsenachse.

Wäre die Düse länger, so könnte sich der Strahl nach der Ablösung nochmals anlegen und geordnet weiter verdichtet werden. Dies ist offenbar bei meinen vor Jahren gemachten Beobachtungen mit rein zentraler Druckmessung der Fall gewesen, und man erkennt an Abb. 47, daß ein Wiederanlegen sicher bei Schaulinie J, noch mehr bei H und allen darüberliegenden angenommen werden kann.

Sofern der vom Strahl frei durchlaufene Weg nicht groß ist, wie man bei Schaulinien F, E, sogar G, voraussetzen kann, bleiben die alten Formeln des geraden Verdichtungsstoßes nach wie vor anwendbar, da sie nur den Satz von der Bewegungsgröße ausdrücken, der von der Art der inneren Vorgänge unabhängig ist.

Bedeuten nämlich in Abb. 61 $p_1 w_1 f_1$ und $p_2 w_2 f_2$ Druck, mittlere Geschwindigkeit und Querschnitt vor dem „Stoß" und nach dem Wiederanlegen des Strahles, und ist m die sekundlich durchströmende Masse, p_w der Mittelwert des von der Düsenwand im Stoßbereich auf den Dampf ausgeübten Druckes, so lautet der Satz vom Antrieb

$$f_1 p_1 + (f_2 - f_1)\, p_w - f_2 p_2 = m\,(w_2 - w_1)$$

Mit der Bezeichnung $f_m = (f_2 + f_1)/2$ und der angenähert zulässigen Annahme

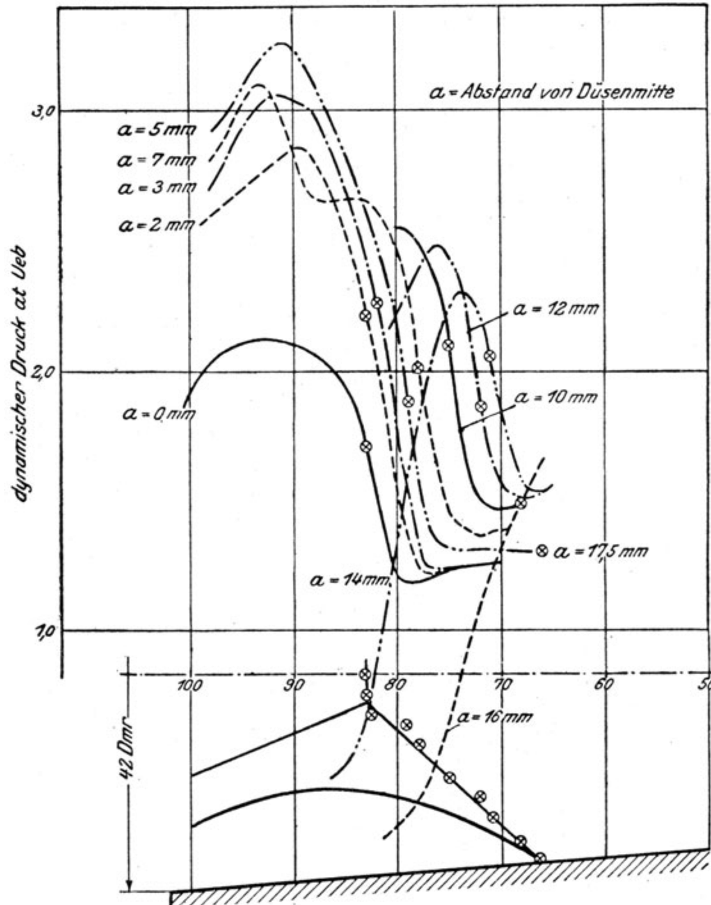


Abb. 60.
Staudruck in zur Achse parallelen Geraden.

$$p_w = \frac{p_1 + p_2}{2}$$

schreibt sich die obige Gleichung nach leichter Umrechnung:

$$f_m(p_1 - p_2) = m(w_2 - w_1) \quad . \quad (1)$$

ist also der Form nach identisch mit der alten Stoßgleichung. Im allgemeinen müßte man freilich $p_w = \alpha\,(p_1 + p_2)/2$ mit $\alpha \gtrless 1$ setzen, wodurch die Gleichung verwickelter wird, aber stets den gleichen Grundgedanken ausdrückt.

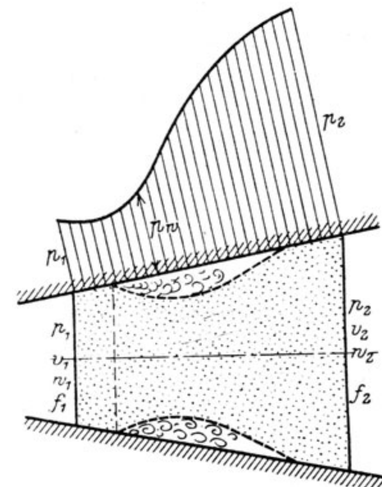


Abb. 61. Wiederanlegen des Strahles bei langen Düsen.

Zu Gl. (1) tritt die unveränderte Energiegleichung

$$A\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = i_1 - i_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Hingegen lautet die Durchflußgleichung

$$mg = f_1 w_1 \gamma_1 = f_2 w_2 \gamma_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Die graphische Ermittelung des Endzustandes kann genau so erfolgen wie beim „theoretischen" Dampfstoß, sofern das Wiederanlegen früh genug erfolgen konnte, so daß der Strahl am Düsenende den Querschnitt ganz ausfüllt und hinreichend gleichmäßig ist.

Endzustand bei unvollständigem Wiederanlegen des Strahles. In der Wirklichkeit wird der Zustand des Strahles nach dem Stoß, auch beim Wiederanlegen, kein über dem ganzen Querschnitt gleichartiger sein; vielmehr muß angenommen werden, daß die Geschwindigkeit in der Strahlmitte wesentlich größer ist als am Rande. In diesem Falle, der sich bei den Strahlvorrichtungen wiederholt, kann in erster Annäherung mit Mittelwerten gerechnet werden, die wie folgt aufzustellen sind. Bedeutet in Abb. 61a

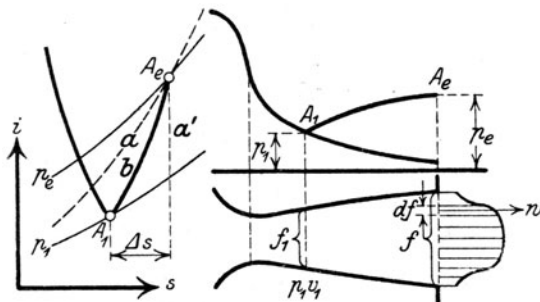


Abb. 61a.
Unvollständiges Wiederanlegen des Strahles.

df ein Querschnittselement, w, v, (γ), p, i, den dort herrschenden Zustand, G das sekundliche Gewicht, so kann man der Reihe nach darstellen:

1. Die mittlere sekundlich „durchfließende" kinetische Energie

$$K = \int \frac{1}{2} d\,m\,w^2 = \frac{1}{2}\int \left(d\,f\,w\,\frac{\gamma}{g}\right) w^2 = \frac{1}{2}\frac{G}{g} w_{me}^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

2. Das sekundliche Gewicht, ausgedrückt durch die auf die Energie bezogene mittlere Geschwindigkeit w_{me} und eine Verhältniszahl α

$$G = \int d\,f\,w\,\gamma = \alpha\,f\,\gamma_{me}\,w_{me} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Bedeuten i_{m1} und i_{me} den mittleren Wärmeinhalt vor dem „Stoß", d. h. bei A_1 und am Düsenende, so lautet die Gleichung der Gesamtenergie

$$\frac{A}{2g}(w_{me}^2 - w_{m1}^2) = i_{m1} - i_{me} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Als die dritte Hauptbeziehung empfiehlt es sich, die Wärmegleichung zu wählen, indem man für die Reibungsarbeit den Ansatz

$$a_r = \zeta_r \frac{L'}{D_m}\frac{w_m^2}{2g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

benutzt, worin mit Rücksicht auf die starke Wirbelung am Rande der Wert von ζ_r höher als in Abschn. 25 anzusetzen und nur durch Veruche bestimmbar ist. L' ist die Düsenlänge von der Ablösungsstelle bis ans Ende, D_m der mittlere Düsendurchmesser auf dieser Länge, w_m^2 das mittlere Geschwindigkeitsquadrat auf der gleichen Länge. Da zunächst nur w_{m1} bekannt ist, muß w_m versuchsweise (kleiner als w_{m1}) angenommen werden. Die Wärmegleichung wird dann in der Form

$$A\,a_r = T_m\,\Delta s; \text{ woraus } \Delta s = \frac{A\,a_r}{T_m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

angeschrieben, worin T_m die einzuschätzende mittlere Temperatur auf der Länge L' und Δs die stattfindende Entropievermehrung bedeuten. Vom Zustande $p_1 v_1$, d.h. Punkt A_1 im J-S Diagramm (Abb. 61a) ausgehend, bestimmen Gleichungen (5) und (6) eine Fannolinie a, die jedoch mit αf und nicht mit dem wirklichen Endquerschnitt zu rechnen ist, als den geometrischen Ort des Endzustandes. Der zweite ist die Adiabate a' im Abstande Δs von A_1, der Schnitt von a und a' ist der gesuchte (mittlere) Endzustand, der den Enddruck p_e, auf den die Verdichtung führen kann, ergibt. Die Zustandslinie b kann nach Schätzung auch eingezeichnet werden.

Ist p_e vorgeschrieben, und wird der Ablösungsquerschnitt gesucht, so wird man zwei oder drei Lagen von A_1 probeweise annehmen und die zugehörigen Endpunkte A_e ermitteln; deren Verbindung ergibt eine Kurve, die auf der Linie $p_e =$ konst. den wahren Endpunkt herausschneidet.

Wertvolle Versuche über das Verhalten des abgelösten Strahles, aus dem die hier benutzten Beiwerte α und ζ_r abzuleiten wären, wurden in den Werkstätten der Allgem. Elektriz.-Ges. veranstaltet, die Flügel, von anderen Gesichtspunkten ausgehend, ausgewertet hat[1]). Wir besprechen diese Versuche in Abschn. 43a.

Eine Bestätigung für die Tatsache der Strahlablösung bildet auch die nachfolgende Beobachtung über die

Unstabile Dampfströmung.

In einer und derselben Düse können bei zu hoch eingestelltem, aber unverändert bleibendem Gegendrucke und sonst gleichen Umständen zwei verschiedene Druckkurven entstehen.

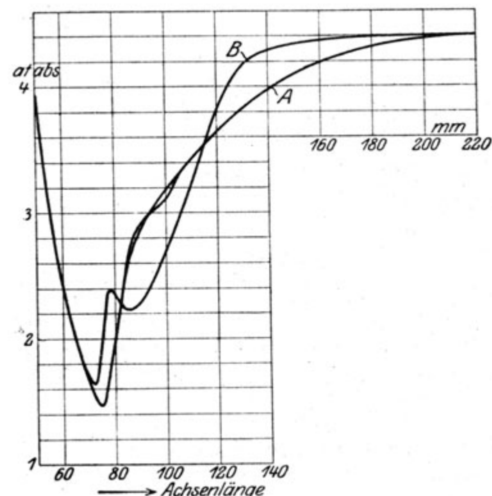


Abb. 61b. Labile Dampfströmung.

[1]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1917, S. 654, und Mitt. üb. Forschungsarb., Heft 217.

Die mit der in Abschn. 29 beschriebenen ziemlich übereinstimmende Düse wurde mit mehreren Bohrungen in der Wand versehen, um den Druck am Rande festzustellen, während der Druck in der Düsenachse durch ein 5 mm weites Röhrchen gemessen wurde. Während nun die Expansion (von 10,5 at abs. bei rd. 200° C ausgehend) stets dieselbe Drucklinie (Abb. 61b) ergab, stellt sich für den Verdichtungsstoß einmal die Linie A — A, dann plötzlich bei ganz geringer äußerer Veranlassung, z. B. Hin- und Herschieben des Meßröhrchens Linie B — B ein. Durch Öffnen der Hähne für die Randbohrungen kann man den entgegengesetzten Wechsel einleiten. Linie B — B erweist sich hierbei als die labilere. Die Pressungen am Strahlrande sind in das Schaubild mit eingetragen und zeigen, daß im ersten Momente des Verdichtungsstoßes offenbar eine Loslösung des Strahles von der Wand eingetreten ist. Die Randpressungen sind bald wesentlich tiefer, bald höher als der Druck in der Strahlmitte. Im weiteren Verlaufe **schwindet die Verschiedenheit mehr und mehr, und gegen das Ende der Düse ist die Übereinstimmung vollständig.**

34. Strömung mit abwechselnder Erweiterung und Verengerung.

Die Besonderheit der Strömung im zylindrischen Rohr.

Eine allgemeine Art der Dampfströmung ist an den in Abb. 62 dargestellten, mit ihren weiten Enden zusammengelegten Düsen untersucht worden. Schaulinie A stellt den Druckverlauf für den Fall dar, daß die Mündung der zweiten Düse gleiche Weite habe wie der engste Querschnitt auf der Einströmseite. Der Druck sinkt beim Eintritt in die engste Stelle von 10,5 auf etwa 6,5 kg/qcm abs., um in der konischen Erweiterung auf rd. 8 kg/qcm zu steigen. Erst in der zweiten Düse sinkt er wieder und fällt gegen die Mündung zu und darüber hinaus rasch bis auf den Vakuumdruck hinab. Nachdem die zweite Düse auf einen Mündungsdurchmesser d_2 von 10,8 mm ausgerieben worden war, während das weite Ende unverändert einen Durchmesser von $d_3 = 12,1$ mm und die Einströmung $d_1 = 10,3$ mm, beibehielt, entstand Schaulinie B. In gleicher Weise entsprechen die Schaulinien C und D einer Erweiterung der Mündung auf 11,4 bzw. 12,0 mm. Schließlich wurde die zweite Düse vollkommen zylindrisch auf 12,1 mm Weite ausgebohrt und ergab die Schaulinie E, gemäß welcher der Druck beim Eintritt in die engste Stelle auf rd. 5,5 kg/qcm, von da bis an das Ende der Kegeldüse weiter auf rd. 3 kg/qcm sinkt. Im zylindrischen Rohr ergibt sich nun das scheinbar widersinnige Verhalten, daß der Druck nicht sinkt, sondern um mehr als eine Atmosphäre steigt; erst etwa 10 mm vor dem Rohrende macht sich das Vakuum geltend und zieht den Druck hinab.

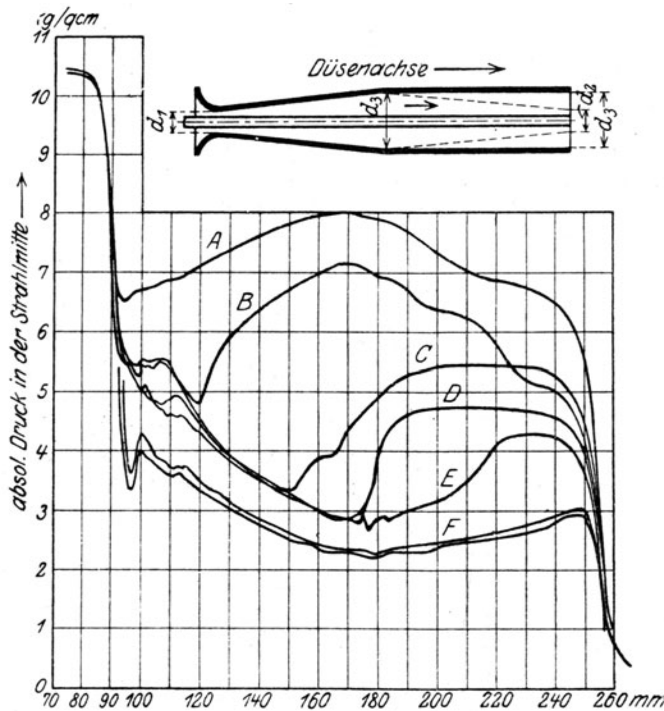


Abb. 62. Strömung in Doppeldüse und im zylindrischen Ansatzrohr.

Linie F erhielt man, nachdem die Abrundung an der Einmündungsstelle bei d_1 abgedreht war, so daß ein scharfkantiger Absatz entstand, der beim Eintritte eine Strahleinschnürung, auf die wir weiter unten zurückkommen, herbeiführen mußte. Der Erfolg ist eine tief herabreichende Zacke im Druckverlauf und eine Verminderung der durchströmenden Dampfmenge (wegen Verkleinerung des engsten Querschnittes), die den Druck im ganzen tiefer hielt. Das Ansteigen des Druckes im zylindrischen Rohr ist auch hier vorhanden[1]).

[1]) Die Unregelmäßigkeiten im Anfange der Schaulinien B bis E sind durch leichte Porosität des Gusses an der betreffenden Stelle verursacht.

35. Schrittweise Integration der Strömungsgleichungen.

Differentialquotient des Druckes nach dem Achsenabstand. Eigenartige Rolle der Schallgeschwindigkeit.

Die Mannigfaltigkeit der Strömungserscheinungen legt den Wunsch nahe, die Bewegungsgleichungen wenigstens nach dem Verfahren der „kleinen Differenzen“ schrittweise zu integrieren. Dies ist bekanntlich stets möglich, und zwar würde sich folgender Weg empfehlen.

Als Grundgleichungen für einen elementaren Strömungsvorgang benutzen wir, um die *S*-*T*- oder *J*-*S*-Tafel verwenden zu können, die Gleichungen der Gesamtenergie; die Wärme- und die Durchflußgleichung, mit dz als Schwerpunktsweg eines Elementes in der Form

$$A\frac{w\,dw}{g} = -di \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

$$dq = T\,ds = A\,da_r = A\,\zeta_r\frac{dz}{2r}\frac{w^2}{2g} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

$$Gv = fw,\ \text{oder differenziert}\ \frac{dv}{v} = \frac{df}{f} + \frac{dw}{w} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Der Leitungsquerschnitt f ist als Abhängige von z vorgeschrieben anzusehen. Von einem bestimmten Zustandspunkt A im *J*-*S*-Diagramm (Abb. 63), mit gegebenem p, v, i, s, w, f, ausgehend, liefert bei einem angenommenen endlichen kleinen Wert von dz Gl. (2) die Entropievermehrung ds, mithin den neuen Entropiewert s' und die Senkrechte a', die den ersten geometrischen Ort des Endzustandes bildet. Berechnet man die Zunahme df die dz entspricht, so ergibt sich ein zweiter geometrischer Ort durch Verbindung der Gl. (1) und (3)

$$\frac{w^2}{g}\left(\frac{dv}{v} - \frac{df}{f}\right) = -di.$$

Abb. 63. Differenzenrechnung.

Man nimmt ein willkürlich $(di)_\alpha$ an, berechnet das zugehörige $(dv)_\alpha$, und ermittelt den Schnitt der Linien $i_\alpha = i - (di)_\alpha$, $v_\alpha = v + (d\alpha)_\alpha$, der mit B_α bezeichnet ist. Ein oder zwei weitere Punkte B_β, $B_\gamma \ldots$ bestimmen dann offenbar die zum Querschnitt $f' = f + df$ gehörende Fannolinie b', deren Schnitt mit a' der gesuchte Zustandspunkt B ist.

Die Neigung der Druckschaulinie gegen die Achse, d. h. der **Differentialquotient** dp/dz, verdient wegen seiner Anschaulichkeit besondere Beachtung. Man müßte zu diesem Zwecke i als Abhängige von p und v allgemein darstellen und in Gl. (1)

$$di = \frac{\partial i}{\partial p}dp + \frac{\partial i}{\partial v}dv$$

einschieben. Da diese Darstellung auf sehr verwickelte Formeln führen würde, begnügen wir uns mit einer Überschlagsrechnung, indem wir annehmen, daß die Gleichung der Ausdehnungslinie

$$p = \Phi(v) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

von vornherein angenähert aufgestellt werden kann. Dadurch wird eine Differentialgleichung gespart, z. B. die Wärmegleichung. Statt Gl. (1) ziehen wir dann die Gleichung der Schwerpunktsbewegung

$$\frac{w\,dw}{g} = -v\,dp - \zeta_r\frac{dz}{2r}\frac{w^2}{2g} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2a)$$

heran, mit der einerseits Gl. (3), andererseits die aus (4) entstehende

$$dp = \frac{d\,\Phi(v)}{dv} = \Phi'\,dv \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4a)$$

verbunden wird. Aus diesen drei Beziehungen können die Differentiale dp, dv, dw als Abhängige des Anfangszustandes und von dz dargestellt werden. Durch Ausscheidung von dw und dv erhält man

$$\frac{dp}{v\cdot\Phi'} = \frac{df}{f} - \frac{g\,v\,dp}{w^2} - \zeta_r\frac{dz}{4r},\ \text{woraus}\ \left[\frac{1}{g v^2\Phi'} + \frac{1}{w^2}\right] g\,v\,dp = \left[\frac{df}{f\,dz} - \frac{\zeta_r}{4r}\right]dz$$

Wie wir in Abschn. 167 dartun, kommt dem Ausdruck $\sqrt{-g v^2\Phi'}$ die Bedeutung einer Schallgeschwindigkeit zu. Eine elastische Störung würde sich mit jener Geschwindigkeit fortpflanzen, falls die ihr zukommende

Zustandsänderung nach dem Gesetz $p = \Phi(v)$ verliefe. In Wahrheit ist jene Zustandsänderung infolge des sehr raschen Wechsels der Störung eine nahezu adiabatische. Es ist daher nur eine formale Abkürzung, wenn wir die Größe

$$w_s^2 = \sqrt{-gv^2\Phi'} \quad \ldots \quad (4b)$$

als „Schallgeschwindigkeit" einführen; sie weicht übrigens von der wahren nicht stark ab. Wenn dann noch in

$$\frac{df}{fdz} = \frac{d(\pi r^2)}{\pi r^2 dz} = \frac{2dr}{rdz} = \frac{\varphi}{r}$$

φ als der „Kegelwinkel" der Düse bezeichnet wird, so folgt

$$\frac{dp}{dz} = \frac{\zeta_r - 4\varphi}{w^2 - w_s^2} \cdot \frac{w^2 w_s^2}{4rgv} \quad \ldots \quad (5)$$

Der Druck steigt oder sinkt im Sinne der Strömung, je nachdem das Vorzeichen von $dp:dz$ positiv oder negativ ausfällt. Da die tatsächliche Geschwindigkeit w beim Ausfluß anfänglich nahezu Null ist, so haben wir einen anfänglich negativen Nenner. Bei abgerundeter Einmündung ist $2dr:dz$, d. h. der „Kegelwinkel" φ, anfänglich negativ, mithin der Zähler wesentlich positiv; für den Anfang ist also $dp:dz$ negativ, der Druck sinkt. Der weitere Verlauf hängt davon ab, ob und wie bald es zu einem Zeichenwechsel kommt. Für die Schaulinie A (Abb. 62) tritt er im Zähler zuerst auf, da die kegelförmige Erweiterung φ positiv und den Zähler negativ macht. Die Verengung in der zweiten Düse bedeutet wieder negatives φ und positiven Zähler: der Druck nimmt wieder ab.

Ein ganz eigenartiges Spiel der Werte der Reibungszahl, des Kegelwinkels, der wahren und der Schallgeschwindigkeit bedingt mithin das Auf- und Absteigen des Druckes.

Was insbesondere das **zylindrische Rohr** anbelangt, so ist $\varphi = 0$, und das Vorzeichen hängt nur vom Nenner ab. Man kann mithin den Satz aussprechen: Im zylindrischen Rohr wird der Druck im Sinne der Strömung (unabhängig vom Betrage des Gegendruckes) wachsen oder abnehmen, je nachdem die tatsächliche Dampfgeschwindigkeit größer oder kleiner ist als die Schallgeschwindigkeit.

Genaue Formeln für vollkommene Gase.

Der Fall, daß w allmählich wachsend w_s erreicht und übertrifft, ist besonders heikel, weil, da $dp:dz$ durch den Wert ∞ vom Negativen zum Positiven übergehen müßte, mithin eine Spitze mit senkrechter Tangente zu erwarten sein würde, falls nicht gleichzeitig im Zähler ein Zeichenwechsel vor sich geht.

Ob dies stattfindet oder nicht, kann in einfacher Weise nur für vollkommene Gase beantwortet werden, wie Lorenz in einem bemerkenswerten Artikel in der Physik. Zeitschr., IV. Jahrg., S. 333, mitgeteilt hat, in dem die von uns benutzte Methode, den Differentialquotienten in Verbindung mit der Schallgeschwindigkeit zu diskutieren, weiter ausgeführt wird. Bei Gasen ist für i der Wert $i = Akpv/(k-1) +$ konst. einzuführen, und es gelten mithin die Grundgleichungen:

$$\frac{wdw}{g} = -vdp - \zeta_r \frac{dz}{2r}\frac{w^2}{2g} \quad \ldots \quad (6)$$

$$\frac{wdw}{g} = -\frac{k}{k-1} d(pv) \quad \ldots \quad (7) \qquad Gv = fw \quad \ldots \quad (8)$$

Wenn wir die dritte differenzieren und dv sowie dw aus den Gleichungen wegschaffen, so erhalten wir mit

$$a = \sqrt{kgpv} \quad \ldots \quad (9)$$

d. h. derjenigen Schallgeschwindigkeit, die adiabatischer Zustandsänderung entspricht, und mit der Bezeichnung

$$\alpha = \frac{w^2}{a^2}(k-1) + 1; \qquad \zeta = \frac{\zeta_r}{4r} \quad \ldots \quad (10)$$

die Formel

$$\frac{dp}{dz} = \frac{\alpha\zeta - \dfrac{df}{fdz}}{w^2 - a^2} kpw^2 \quad \ldots \quad (11)$$

Diese Formel ist gleichartig mit der für Dampf entwickelten Gl. (5) und bestätigt die von uns gezogenen Folgerungen in bezug auf die Rolle der Schallgeschwindigkeit und das eigen-

tümliche Verhalten der Strömung im zylindrischen Rohr. An die Arbeit von Lorenz schlossen Prandtl und Proell Mitteilungen an[1]), in welchen besonders die Verhältnisse erörtert werden, die beim Eintritte der Schallgeschwindigkeit herrschen.

Um diese Beiträge beurteilen zu können, ist es zweckmäßig, auch für die Ableitung $dw:dz$ eine Formel aufzustellen. Indem wir aus (6), (7), (8) diesmal dv und dp wegschaffen, erhalten wir

$$\frac{dw}{w\,dz} = \frac{\zeta k \frac{w^2}{a^2} - \frac{df}{f\,dz}}{1 - \frac{w^2}{a^2}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

Nun bemerkt Lorenz, daß die Schallgeschwindigkeit a für einen gegebenen Anfangszustand bei beliebigen Widerständen und beliebigen Rohrformen stets einen und denselben Wert a_0 annimmt. Es ist nämlich das Integral von (7) bei anfänglich verschwindender Geschwindigkeit

$$w^2 = \frac{2gk}{k-1}(p_1 v_1 - pv) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

wo $p_1 v_1$ sich auf den Anfangszustand (mit $w_1 = 0$) beziehen. Die Schallgeschwindigkeit a_0 wird bei einem bestimmten Wertepaar pv erreicht, für das

$$w^2 = a_0^2 = kgpv \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

ist, und hieraus folgt durch Wegschaffen von pv und w

$$a_0 = \sqrt{\frac{2gk}{k+1} p_1 v_1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

so daß a_0 in der Tat nur vom Anfangszustand abhängt. Man kann, um Mißverständnisse zu verhüten, die allgemeine (einem beliebigen Zustand p, v entsprechende) Schallgeschwindigkeit a ausdrücken durch a_0, indem man in Gl. (13) pv durch $a^2:kg$ und $p_1 v_1$ durch a_0 aus (15) ersetzt. Man erhält

$$a^2 = -\frac{k-1}{2} w^2 + \frac{k+1}{2} a_0^2$$

Diesen Wert benutzen wir zur Einführung in Gl. (12), die alsdann die Form

$$\frac{dw}{w\,dz} = \frac{\frac{2k}{k+1}\zeta - \frac{df}{f\,dz}\left[\frac{a_0^2}{w^2} - \frac{k-1}{k+1}\right]}{\frac{a_0^2}{w^2} - 1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

annimmt, die ihr von Proell gegeben worden ist. Wenn der Zähler dieses Ausdruckes verschwindet, so bleibt w für das betreffende Rohrelement konstant und kann ein Maximum oder Minimum werden. Erreicht w den Wert a_0, so müßte $dw:dz$ unendlich groß werden. Allein eine unendlich große Beschleunigung ist physikalisch unmöglich, und so kann a_0 nur an einer solchen Stelle der Düse erreicht werden, wo auch der Zähler verschwindet, d. h. wo

$$\frac{df}{f\,dz} = k\zeta \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

ist. Auf mathematischem Wege kann dies strenger wie folgt eingesehen werden. Aus Gl. (16) wird durch Integration $\Phi(w, z, p_1 v_1) = C$ oder $w = \Psi(z, c)$ sich ergeben, wo C durch eine weitere Bedingung, z. B. durch die Größe der durchfließenden Dampfmenge oder des Gegendruckes am Düsenende bestimmt wird. Je nach Umständen kann es dann vorkommen, daß in Gl. (16) gleichzeitig Zähler und Nenner $= 0$ werden, wobei $w = a_0$ und Gl. (17) erfüllt sein muß. Wenn man nun mit Prandtl zu jedem Punkte der w, z Ebene nach Gl. (16) dw/dz aufträgt, Abb. 63a, wobei auf der rechten Seite sowohl f wie w als Funktionen von z betrachtet werden, so gibt es in jedem Punkte nur einen Wert dieser Tangentenneigung, bis auf den erwähnten Ausnahmefall. Die dann entstehende Form $^0/_0$ ist nach den Regeln der Differentialrechnung zu bestimmen, indem man das Verhältnis aus der Ableitung des Zählers und des Nenners nach z bildet. Die gesuchte Größe, oder besser $d(ln w):dz$ kommt nochmals im Zähler und Nenner vor und gibt, wenn man mit letzterem heraufmultipliziert, eine quadratische Bestimmungsgleichung. Aus dieser erhält man nach Proell (mit Ausmerzung eines Druckfehlers):

$$\frac{d\ln w}{dz} = -\frac{k\zeta}{2} \pm \sqrt{\frac{k^2\zeta^2}{4} + \frac{1}{k+1}\frac{d}{dz}\left(\frac{d\ln f}{dz}\right)},$$

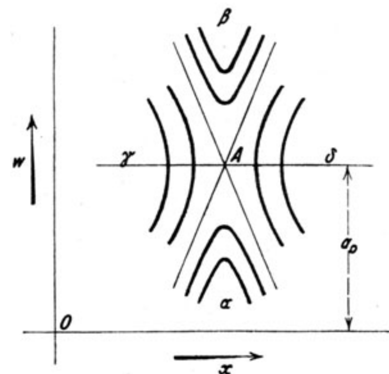


Abb. 63a.
Veranschaulichung der Gl. (16).

[1]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1904, Heft Nr. 10.

d. h. zwei Werte für die Neigung $dw:dz$ oder mit anderen Worten einen Doppelpunkt. Aus dem erwähnten Bilde der Tangentenneigungen, welches in der Umgebung der Doppelpunkte durch Abb. 63a dargestellt wird, ersieht man, daß aus dem Gebiet $w < a_0$ in das Gebiet $w > a_0$, wenn dabei zugleich z wachsen soll, d. h., wenn wir in der Düse vorwärtsschreiten, nur ein einziger Übergang durch den oben definierten Doppelpunkt möglich ist. Alle anderen Kurven bleiben entweder unterhalb bzw. oberhalb $w = a_0$ wie Linien α und β, oder sie biegen sich wieder zurück wie γ und δ. Durch einen Vergleich der Formeln (11) und (12) findet man ferner

$$\frac{dp}{pk\,dz} = -\left(\zeta + \frac{dw}{w\,dz}\right)\frac{w^2}{a^2},$$

Was für $dw:dz$ erwiesen worden ist, gilt also auch für $dp:dz$, d. h. auch für die Kurve, die p als Funktion von z darstellt, gibt es einen Doppelpunkt bei demselben z wie vorhin und bei $w = a_0$, und nur dieser Doppelpunkt macht einen Übergang aus dem Gebiete hoher Pressungen und kleiner Geschwindigkeiten in das Gebiet niedriger Pressungen und hoher Geschwindigkeiten im Sinne des Fortschreitens in der Düse möglich. Dann ist also für eine wirkliche Expansionskurve der Punkt, der durch die Gleichung

$$\frac{df}{f\,dz} = k\zeta$$

bestimmt wird, diejenige einzige Stelle der Düse, an der w den Wert a_0 erreicht. Wie ersichtlich, stimmt diese Stelle nicht mit dem Minimalquerschnitt überein, sondern liegt, wenn auch sehr nahe bei ihm, in der Erweiterung.

Die Verhältnisse in der Umgebung des Doppelpunktes lassen sich noch anschaulicher machen am Beispiele der reibungsfreien adiabatischen Strömung. Hier ist, wie schon oben benutzt,

$$f = \frac{G}{\varphi(p)} = \psi(p) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

wo ψ der Kürze halber eingeführt wird und für $p = p_m$ ein Minimum besitzt. Nun sei

$$f = F(z)$$

als Funktion des Achsenabstandes z willkürlich gegeben. Für ein bestimmtes $z = z_0$ wird F ein Minimum f_m, identisch mit $\psi(p_m)$. Man kann in Gl. (18) auf beiden Seiten nach Taylor entwickeln und erhält, wenn die Ableitungen mit Strichen bezeichnet werden, für die unmittelbare Nachbarschaft vom p_m:

$$\psi(p_m) + \psi'(p_m)(p - p_m) + \psi''(p_m)\frac{(p-p_m)^2}{2} = F(z_0) + F'(z_0)(z - z_0) + F''(z_0)\frac{(z-z_0)^2}{2}.$$

Da aber sowohl $\psi'(p_m) = 0$ als auch $F'(z_0) = 0$ st, so wird

$$\psi''(p_m)(p - p_m)^2 = F''(z_0)(z - z_0)^2,$$

worin $\psi''(p_m)$, wie leicht nachzuweisen, einen endlichen Wert darstellt. Nun kann durch Auflösen und Differenzieren auch für den Punkt $p = p_m$ die Ableitung $dp:dz$ berechnet werden und ergibt sich zu

$$\left(\frac{dp}{dz}\right)_{p=p_m} = \pm\sqrt{\frac{F''(z_0)}{\psi''(p_m)}} \quad \ldots \quad (19)$$

Ändert sich der Querschnitt ungemein wenig, so daß F'' klein wird, dann ist auch $dp:dz$ klein. Im anderen Fall steigt dieser Wert und nähert sich theoretisch dem Unendlichen, wenn, wie bei einer scharfen Kante, die Krümmung der Profillinie unendlich scharf wird, daher dort eine Strahlablösung und Schallschwingungen eintreten werden.

Dies geht deutlich aus meinen Versuchen an einer Düse mit verlängertem Einströmhals hervor, die nach Abb. 64 durch Zusammenlegen von zwei kongruenten Düsen gebildet wurde.

Schaulinie A zeigt den Druckverlauf bei tiefem, Linie B bei auf 4 at abs. eingestelltem Gegendruck. Der Verdichtungsstoß ist im letzteren Falle knapp vor der Mündung aufgetreten und zeigt einen höchst ausgeprägten Druckanstieg. Linien C, D, E, F sind mit mehr und mehr erhöhtem Gegendruck aufgenommen. Das Eigentümliche dieser Versuche liegt in den Zacken, welche die Schaulinien beim Übergange aus dem verengten in den erweiterten

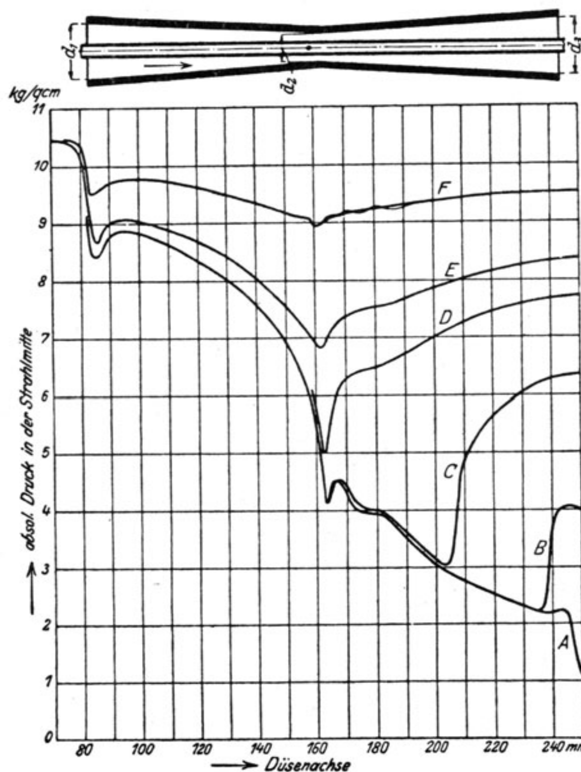


Abb. 64. Verlängerter Einströmhals.

Kegel aufweisen. Anfänglich war die vordere Düse an der engen Stelle um rund 0,1 mm weiter als die andere, so daß sich ein wenn auch kaum merkbarer Absatz bildete. Aber auch nachdem man die Düsen mit einer gemeinschaftlichen Reibahle auf genau gleichen Durchmesser gebracht hatte, verschwand die Zacke nicht. Nur das Polieren mittels Schmirgels, und zwar in der Strömungsrichtung, brachte die mittleren Zacken schließlich für gewisse Überhitzungsgrade weg, während sie für andere noch immer auftraten. Der Strahl kann sich eben der scharfen Krümmung nicht anschmiegen und gerät, örtlich abgelöst, in Schwingungen.

Differenzenrechnung bei Gasen.

Die schrittweise Integration der Strömungsgleichungen wird bei Gasen durch die glatte Auflösbarkeit der Grundgleichungen nach den Differentialen, sehr erleichtert. Zu den Gl. (11) und (12) für dp und dw fügen wir zunächst die für dv hinzu:

$$\frac{dv}{v\,dz} = \frac{k\zeta - \frac{df}{f\,dz}}{a^2 - w^2}\, w^2 \quad \ldots \quad (20)$$

Für den Wärmeinhalt folgt aus der Gleichung der Gesamtenergie

$$\frac{di}{dz} = -A\frac{w\,dw}{g\,dz} = -\frac{A\,w^2}{g}\left(\frac{dw}{w\,dz}\right) \quad \ldots \quad (21)$$

wobei für das Klammerglied Ausdruck (12) einzusetzen ist. Die Entropiezunahme ist nach Gl. (2)

$$\frac{ds}{dz} = \frac{A\,\zeta_r\,w^2}{T\,2r\,2g} \quad \ldots \quad (22)$$

aus (21) und (22) ergibt sich die Tangente an die Zustandslinie im J-S- oder T-S-Diagramm:

$$\frac{di}{ds} = \frac{c_p\,dT}{ds} = -\frac{4\,r\,T}{\zeta}\,\frac{dw}{w\,dz} \quad \ldots \quad (23)$$

Hieraus folgt insbesondere für die Fannolinie, die durch $f =$ konst. also $df = 0$ gekennzeichnet ist

$$\left(\frac{di}{ds}\right)_{Fanno} = \left(\frac{c_p\,dT}{ds}\right)_{Fanno} = -\frac{4\,r\,k\,T\,w^2}{a^2 - w^2} \quad \ldots \quad (24)$$

Wie schon früher bemerkt, wird also in der Tat $di/ds = \infty$, wenn man den Zustand $w = a$ erreicht, und umgekehrt.

Düse für unveränderlichen Druck.

Soll der Dampf die Reibungswiderstände unter gleichbleibendem Druck überwinden, so kann die Erweiterung der Düse wie folgt berechnet werden.

Für Gase ist in Formel (11) dp beständig $= 0$ zu setzen, und ergibt

$$\alpha\zeta = \frac{df}{f\,dz} = \frac{\varphi}{r}; \quad \text{oder wegen Gl. (10):} \quad \varphi = \frac{\zeta_r}{4}\left[1 + (k-1)\frac{w^2}{a^2}\right] \quad \ldots \quad (20)$$

Für nasse Dämpfe darf als Zustandsgleichung nicht mehr die Form $p = \Phi(v)$ benutzt werden, da mit $p =$ konst. auch $v =$ konst. wäre; somit sind die Grundgleichungen mit $dp = 0$ heranzuziehen, d. h. wenn r_0 die „äußere" Verdampfungswärme bedeutet:

$$\frac{A\,w\,dw}{g} = -di = -r_0\,dx; \quad \frac{w\,dw}{g} = -\frac{\zeta_r}{2r}\frac{w^2}{2g}\,dz; \quad Gv = fw$$

$$v = xv''; \; dv = v''\,dx\,.$$

Aus diesen erhalten wir durch Ausscheiden von dv, dw, dx

$$\varphi = \varphi_p = \frac{\zeta_r}{4}\left[1 + \frac{A\,w^2}{g\,r_0\,x}\right] \quad \ldots \quad (21)$$

Falls w wesentlich kleiner ist als a, so darf hier (wie auch für Gase) die Annäherung $\varphi = \zeta_r/4$ benutzt werden.

Graphische Zusammenfassung.

In Abb. 64a sind die praktisch wichtigsten Sonderfälle der Strömung mit Ausdehnung und Verdichtung zusammengestellt, deren aufmerksame Durchsicht die Anschauung wesentlich befestigt. Was insbesondere die Verdichtung in einem „Diffusor" anbelangt, so präge man sich den Satz ein:

Für Unterschallgeschwindigkeit ist der Diffusor ein sich erweiternder — für Überschallgeschwindigkeit ein sich verengender Kanal.

Ferner ist bemerkenswert, daß in der schwach erweiterten Düse (bei $\varphi < \varphi_p$) über der Schallgrenze Verdichtung, darunter Ausdehnung stattfindet.

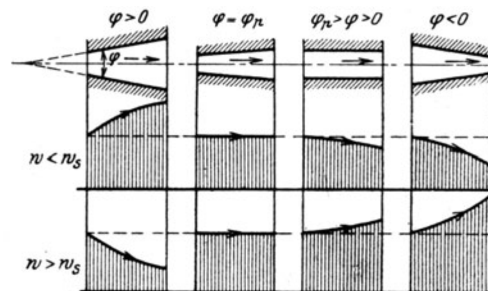


Abb. 64a.
Abhängigkeit der Druckänderung von Geschwindigkeit und Erweiterung.

36. Isentropische Linien.

Die Vorgänge beim Dampfstoß werden, wie Prandtl gezeigt hat, sehr veranschaulicht durch Verzeichnen der sog. isentropischen Linien, d. h. der Drucklinien für reibungsfreie adiabatische Ausdehnung oder Verdichtung des Dampfes in einer gegebenen Düse mit verschiedenen Anfangszuständen.

Setzen wir voraus, der Dampf dehne sich zunächst adiabatisch vom Anfangszustande A_1 auf den Enddruck bei A_2 aus gemäß Abb. 65, in der die Koordinaten Entropie und absolute Temperatur sind. Durch das früher angegebene Verfahren ermitteln wir für die Ausgangsgeschwindigkeit $w_1 = 0$ die Querschnitte f_x, die für 1 kg Dampf bei dem jeweiligen Druck p_x erforderlich sind.

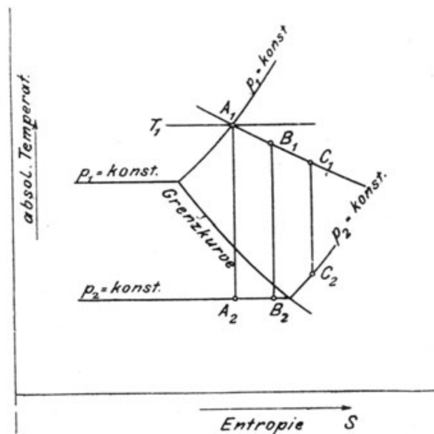


Abb. 65. Isentropen.

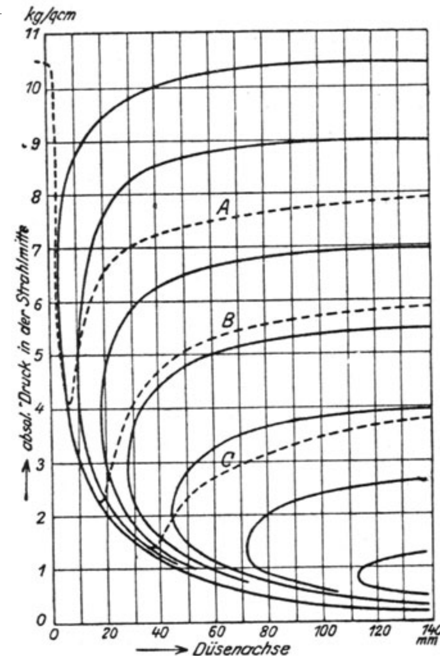


Abb. 66. Isentropen als Abhängige der Düsenlänge.

Nun denke man den Dampf vor dem Eintritt in die Düse auf einen kleineren Druck mit Zustand B_1 abgedrosselt. Der Wärmeinhalt ändert sich nicht, d. h. B_1 liegt auf der Kurve $i_1 =$ konst., die durch A_1 hindurchgeht, aber die Entropie hat zugenommen. Expandiert der Dampf von hier adiabatisch nach B_2, so läßt sich in gleicher Weise eine neue Querschnittsfolge als Funktion von p ermitteln, ebenso die weiteren zu C_1, D_1 usw. gehörenden Kurven. Statt 1 kg Dampf wählen wir nun die tatsächlich durch unsere Düse in der Sekunde durchgeströmte Dampfmenge als Bezugseinheit, statt des Querschnittes aber seinen Abstand von einem festen Punkt in der Düsenachse als unabhängig Veränderliche. Auf diese Weise erhält man die fest ausgezogenen Schaulinien Abb. 66, die mithin zu jedem Punkte der Düsenachse zwei mögliche Pressungen ergeben. Eine reibungsfreie Strömung wäre umkehrbar, d. h. der Dampf könnte die Düse sowohl expandierend als auch sich verdichtend durchströmen. Die oberen Zweige der Isentropen entsprechen verdichtetem Dampf und kleinen Geschwindigkeiten, die unteren einem Zustande starker Expansion und großer Geschwindigkeit. Die wahre Strömung aber findet stets unter Vermehrung der Entropie statt und so muß die wahre Zustandskurve, ob sie ab- oder aufsteigt, die Adiabaten im Sinne wachsender Entropie schneiden.

Um dies an der Wirklichkeit zu bewahrheiten, sind in das Bild auch die experimentell gefundenen Schaulinien aus Abb. 47 gestrichelt eingetragen, und es zeigt sich z. B. bei Kurve B und A eine schöne Übereinstimmung mit der Adiabate, während C einen merklich abweichenden Charakter aufweist. Über den wahrscheinlichen Grund dieser Erscheinung wird weiter unten Näheres mitgeteilt. Hier genügt es, darauf hinzuweisen, daß in der Tat während der Periode des eigentlichen Dampfstoßes mehrere Isentropen überschritten werden, als Beweis des großen Stoßverlustes, der stattfindet. Auch die Analogie mit dem Bidoneschen Wassersprung drängt sich unwillkürlich auf.

Die Isentropen lassen sich bei Gasen mit der Berechnung der Stoßkurven bequem verbinden, wie Prandtl a. a. O. gezeigt hat. In Abb. 67 sind die von ihm für die rechte und linke Seite der mitabgebildeten Düse entworfenen Isentropen dargestellt, wobei als Stromquerschnitte die punktierten Kugelflächen voraus-

gesetzt wurden. Die dickgezogene Linie stellt eine Expansionskurve mit willkürlich angenommenem ζ_r dar, die als einzige für das gewählte sekundliche Dampfgewicht aus dem Gebiet I der hohen Drücke und kleinen Geschwindigkeiten in das rechtsseitige Gebiet II der niederen Drücke und hoher Geschwindigkeiten herüberleitet. Wenn man in Gl. (7) des vorigen Abschnittes v durch die Stetigkeitsgleichung wegschafft, so zeigt sich, daß w unveränderlich bleibt für bestimmte feste Werte von pf/G, so daß es leicht ist, die Linien konstanter Strömungsgeschwindigkeit (in Abb. 67 mit u bezeichnet) aufzutragen. Unter diesen ist wichtig die stark gestrichelt gezeichnete Kurve der Schallgeschwindigkeit $u = a_0$. Auch die Linie $dw/dz = 0$ (in der Abbildung $du/dx = 0$), aus der die Konizität der Düse für konstante Geschwindigkeit ermittelt werden kann, ist strichpunktiert angegeben und trifft mit der wirklichen Expansionslinie und der Linie $u = a_0$ im oben definierten Doppelpunkte (0) zusammen.

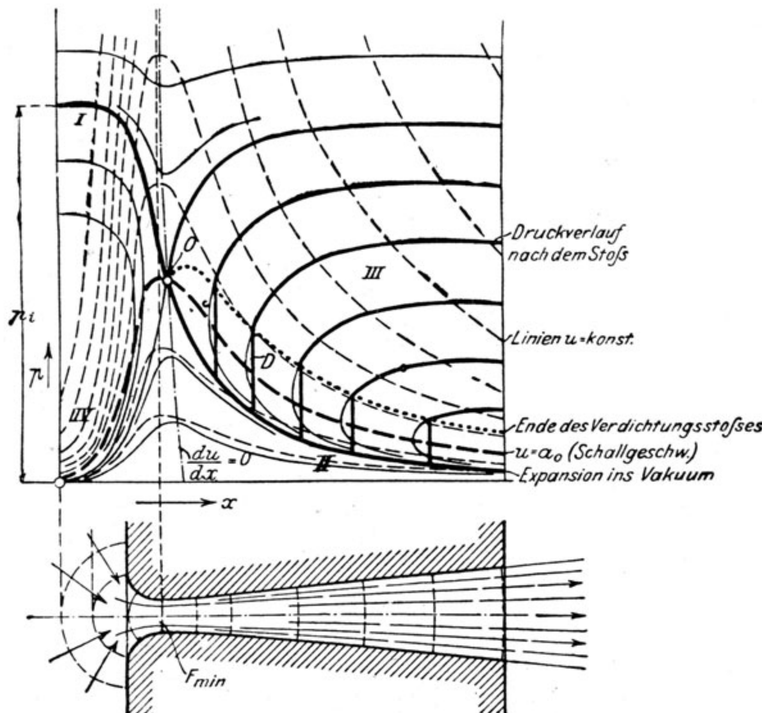


Abb. 67. Theoretische Stoß- und Verdichtungslinien.

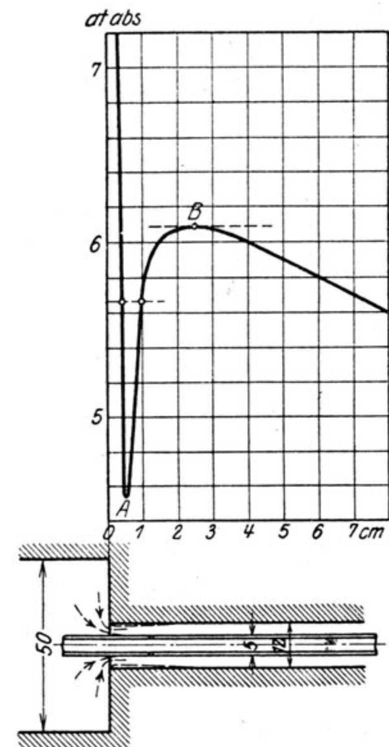


Abb. 68. Strahleinschürung.

37. Die Strahleinschnürung

tritt stets bei scharfkantigen Rohransätzen auf und kommt bereits bei den Schaulinien F in Abb. 62 zum Vorschein, ebenso an den Drucklinien A bis E in Abb. 64. Ganz besonders in die Augen springend aber war sie schließlich bei einem geraden zylindrischen Rohr von 12 mm Weite mit 5 mm weitem Meßrohr und scharfen Kanten, das in die Versuchseinrichtung an Stelle der Düse eingefügt wurde. Der mutmaßliche Umriß des Strahles (Abb. 68) mit darüber liegender beobachteter Druckkurve ist in der Abbildung eingezeichnet.

Die wahrscheinlichste Erklärung des Druckverlaufes dürfte die folgende sein: Bei ungefähr 5 6 at erreichen wir die Schallgeschwindigkeit, erhalten also Nullstellen des Zählers und Nenners im Ausdrucke von $dp:dz$. Von da bis zum Punkte A ist der Zähler negativ, wegen starker Konizität des Strahles, der Nenner positiv. Bei A beginnt ein Verdichtungsstoß. Der Druck steigt, die Geschwindigkeit sinkt unter die Schallgeschwindigkeit, der Nenner wird negativ; der Zähler ist es ebenfalls, da φ noch einen verhältnismäßig großen Wert besitzt. Da aber die Erweiterung schließlich aufhört, geht bei B der Zähler durch die Null ins Positive, der Nenner bleibt negativ, und der Druck sinkt wieder.

Immerhin ist zu beachten, daß die Formel für die eingeschnürte Stelle nur annäherungsweise zutrifft, da der Strahl hier nicht allseitig durch feste Wandungen begrenzt ist, mithin der Druck in der Mitte und am Rande merklich verschieden sein wird.

Die Formel $dp:dz$ eignet sich auch zur Berechnung der Reibungszahl ζ_r aus der Neigung der Tangente an die Druckkurve. Indessen ist in jedem Falle die experimentelle Bestimmung von G, um daraus w zu berechnen, unerläßlich, und wenn w bekannt ist, so berechnet sich der Energieverlust unmittelbar, ohne daß man auf $dp:dz$ zurückzukommen braucht.

38. Plötzliche Erweiterung im zylindrischen Rohr.

Ein zylindrisches Rohr von 17,9 mm Durchmesser mit einer zentralen Spindel von 10,95 mm Durchmesser wurde nach Abb. 69 gegen das Ende hin auf eine Länge von 11 mm unterbrochen, so daß der von links nach rechts strömende Dampf hier eine **Erweiterung** antraf. Die unmittelbar darunter gezeichneten Schaulinien *I, II, III* des Druckverlaufes beziehen sich auf die Anfangszustände 11 at abs. 222° C. bzw. 8 at abs. 213° C. bzw. 4 at abs. 190° C vor dem Eintritt, wobei die durchfließenden Dampfgewichte 818, bzw. 591, bzw. 299 kg/st betragen haben.

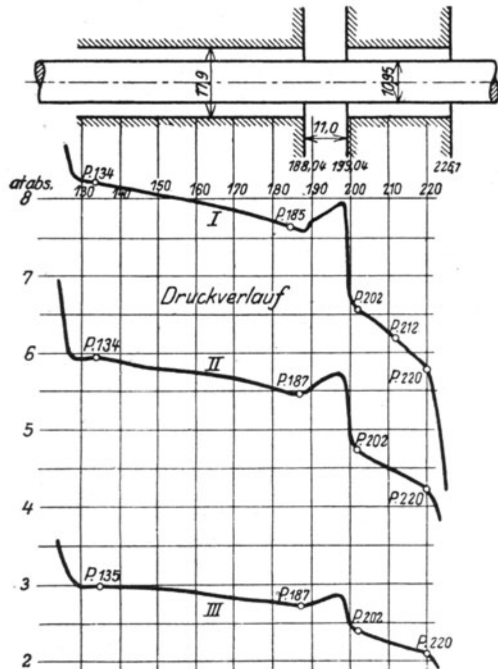


Abb. 69.
Druckverlauf in plötzlicher Erweiterung.

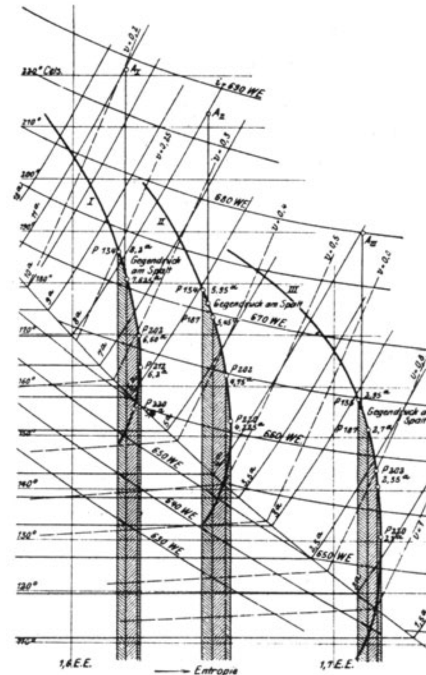


Abb. 70.
Fannolinien zu Abb. 69.

Beim Eintritt in die Erweiterung findet zunächst ein Stau statt, offenbar weil der Strahl teilweise in Wirbeln von der Achse in die Erweiterung abgedrängt wird.

In Abb. 70 sind die entsprechenden Fannolinien im Entropieschaubild entworfen, mit deren Hilfe die Größe des Wirbelungsverlustes in der Erweiterung berechnet werden kann. Mit A_I, A_{II}, A_{III} ist der Anfangszustand vor dem Eintritt bezeichnet. Die Punkte P 187 und P 202 bezeichnen den Zustand vor und nach der Erweiterung, man kann daher die stattgefundene Entropievermehrung ΔS ausmessen. Der Verlauf der Zustandsänderung in der Erweiterung weicht natürlich von der Fannokurve ab; allein die mittlere Temperatur derselben wird von dem arithmetischen Mittel T_m des Anfangs- und des Endwertes wenig abweichen und liefert uns im Produkt $T_m \Delta S$ den Betrag der Wirbelungswärme $A R$. Bestimmen wir die kinetische Energie $w^2/2g$ unmittelbar vor der Erweiterung, so stellt sich heraus, daß die Wirbelungsarbeit in den drei Fällen ungefähr 13 bis 10 v. H. davon ausmacht, bei Eintrittsgeschwindigkeiten die nahezu 400 m/sek erreichten.

Betrachtet man die Erweiterung als Rohr mit ebenfalls 17,9 mm Durchmesser, so berechnet sich daraus eine Rohrreibungszahl $\zeta_r = 0{,}04$ bis 0,05.

39. Überbrückung von Spaltverlusten.

Neuere Turbinenpatente gehen darauf aus, durch geeignete Führung des aus der Leitschaufel tretenden Strahles den Undichtigkeitsverlust der durch den Überdruck im Spalt verursacht wird, zu verringern. Versuche über eine verwandte Frage wurden von mir vor Jahren durchgeführt, konnten jedoch nicht abgeschlossen werden. Eine Mitteilung über die gemachten Beobachtungen dürfte dennoch einige Beachtung verdienen.

An der in Abb. 69 dargestellten Vorrichtung wurde die Erweiterung zu einem Spalt verengt und der aus diesem tretende „Undichtheitsdampf" besonders aufgefangen. In Abb. 71 sind die Drucklinien aufgetragen, die sich auf folgende Verhältnisse beziehen:

	Spaltweite 0,7 mm Drucklinien punktiert			Spaltweite 2,25 mm Drucklinien voll gezogen		
Anfangsdruck vor dem Eintritt . at abs.	11	8	4	11	8	4
Anfangstemperatur . . . . ° C	226	216	184	221	212	192
Gegendruck am Ende des Spaltes at abs.	1,15	1,15	1,10	1,72	1,39	1,11
Gesamtes Dampfgewicht . . . . . kg/st	876	624	318	873	633	318
Undichtheitsgewicht . . . . kg/st	32,2	23,9	12,3	120	84,2	29,0

Die Dampfmenge, die „theoretisch" durch den Spalt strömen würde, kann man berechnen entweder indem man den Druck vor dem Zuführungsrohr als Ausgangspunkt ansieht, oder den unmittelbar vor dem Spalt, unter Preisgabe der dort herrschenden kinetischen Energie. Es stellt sich heraus, daß im **ersten Fall nur etwa 10—20 v. H., im zweiten Fall etwa 30 v. H. der theoretischen Menge tatsächlich abströmen.** Die starke Drucksenkung im Gebiete des Spaltes deutet darauf hin, daß, wie in Abb. 72 unmaßstäblich dargestellt wurde, der Strahl sich schon vor dem Eintritt in den Spalt ablöst, so daß eine Art Düsenwirkung mit Expansion und darauf folgender Wiederverdichtung entsteht.

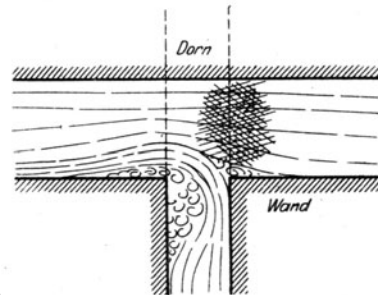


Abb. 72. Strahleinschnürung im Spalt.

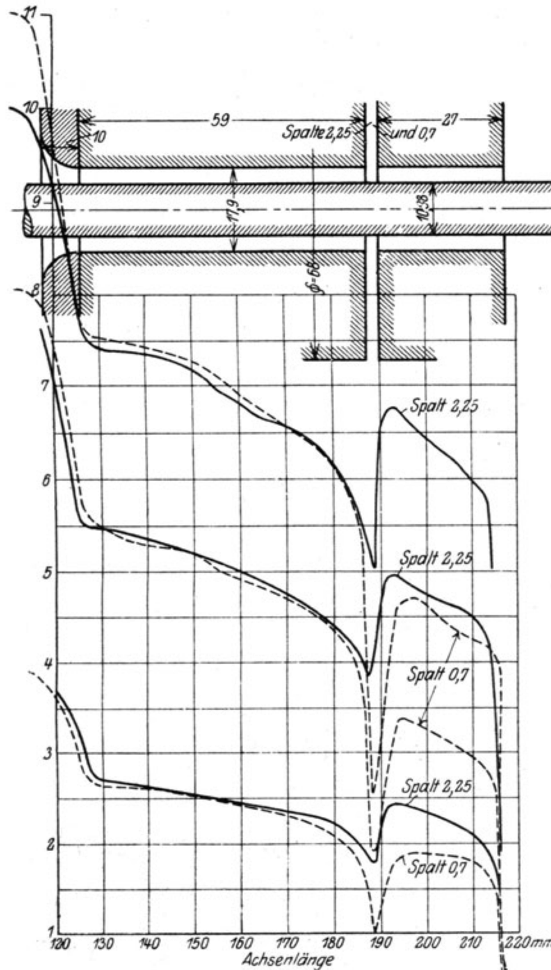


Abb. 71.
Verringerter Abfluß durch offene Spalte.

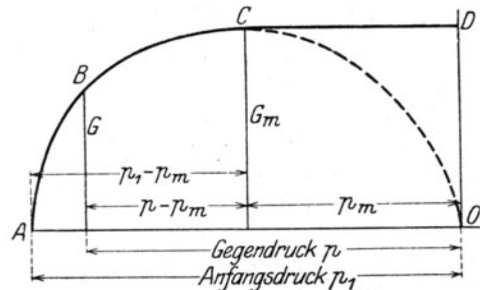


Abb. 73.
Ausflußmenge bei veränderlichem Gegendruck.

40. Ausfluß durch einfache Mündungen.

Der Ausfluß durch einfache, gut abgerundete Mündungen bietet in zweierlei Hinsicht besondere Eigentümlichkeiten.

1. Abhängigkeit der Ausflußmenge vom Gegendruck. Bedeutet f den zu den Stromfäden senkrechten Querschnitt (den man nach Schätzung in den Längsschnitt der Düse einzeichnen müßte), so gilt die allgemeine Strömungsgleichung (12) in Abschn. 19.

$$G = f\,\varphi\,(p)$$

Insbesondere für die Mündung selbst ist f unveränderlich, demnach ist G zu $\varphi(p)$ proportional, und wird gemäß Abb. 73 mit abnehmendem Gegendruck p gemäß Schaulinie ABC zunehmen. Beim kritischen Werte p_m des Gegendruckes erreicht G einen Höchstwert G_m um dann theoretisch gemäß der punktierten Linie mit dem Gegendruck abzunehmen. Der Versuch ergibt demgegenüber, daß die Ausflußmenge, sobald $p < p_m$ ist, unveränderlich $= G_m$ bleibt. Diese Tatsache kann nur so erklärt werden, daß der Druck in der Mündungsebene bei $p < p_m$ ebenfalls unveränderlich $= p_m$ ist, so tief man auch den Gegendruck herabsetzt. Wie ein solcher Drucksprung sich ausbilden und erhalten kann, wird durch folgende Überlegung verständlich.

Es sei die Pressung in der Umgebung $= p_m$, dann besitzt der Strahl in der Mündungsebene die „Schallgeschwindigkeit" w_m, die dem dortigen Zustand entspricht. Verringern wir nun den Außendruck plötzlich um einen kleinen Betrag, so wird diese elastische Störung sich mit Schallgeschwindigkeit ausbreiten. Sie kann jedoch axial in das Innere der Mündung nicht vordringen, da die Flüssigkeit eben mit Schallgeschwindigkeit ausströmt und jede Störung „fortschwemmt". Ist die Abnahme des Gegendruckes groß, so wird hinter der Mündung die Strömungsgeschwindigkiet wachsen und der größeren Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Druckstörung die Wage halten, so daß sich eine im Strahle relativ fortschreitende, aber im Raume stehende Welle ausbildet.

Versuche. Den Verlauf dieser Welle klarzulegen, wurden mannigfache Versuche unternommen. Nach einem eigenartigen Verfahren aufgenommene Lichtbilder des Strahles von Mach[1]), später von Emden[2]) ließen das Vorhandensein von regelmäßig aufeinanderfolgenden hellen und dunklen Linien erkennen, die folgerichtig nicht anders denn als Schallschwingungen gedeutet werden konnten; allein über die Größe des herrschenden Druckes und der Geschwindigkeit war man im unklaren. Emden glaubte den Nachweis erbracht zu haben, daß nur der Unterschied zwischen Anfangs- und Mündungsdruck zur Erzeugung von fortschreitender Geschwindigkeit verwendet wird; der Restbetrag der verfügbaren Arbeitsfähigkeit sollte in „Schallenergie" umgesetzt werden; eine Ansicht, die in der Folge noch viele Anhänger hatte.

Um diese Unklarheiten zu beheben, wurden vom Verfasser Mündungen aus Bronceplatten von 20 mm Dicke mit rd. 12 mm Bohrung zwischen ein 50 mm weites Zufluß- und ein 70 mm weites Abflußrohr eingebaut. Ein zentrales Meßröhrchen hatte 5 mm Dicke und war mit zur Oberfläche senkrechten Bohrungen von 1,5 mm Weite versehen. In Abb. 74 ist der Druckverlauf bei Anwendung einer abgerundeten Mündung dargestellt. Beim Ausfluß mit rd. 11 at abs. Anfangsdruck und 0,4 kg/qcm abs. Gegendruck ist dem Anscheine nach ein aperiodischer Zustand vorhanden. Hingegen bei den Schaulinien E und F finden wir ungemein heftig und vollkommen regelmäßig auftretende „gedämpfte" Schwingungen, die bei F abnehmen und bei G gänzlich aufhören.

Ähnliche Druckkurven erhält man bei der in Abb. 75 abgebildeten konischen Mündung mit beiderseits scharfen Rändern. Der Eintritt verursacht eine kleine nicht mehr zur Darstellung kommende Einbuchtung; beim Austritt ist die Periodizität bei Kurve A fraglich, bei D stark ausgeprägt, bei F hingegen nicht mehr vorhanden.

Die Abweichung, die man bei der beiderseits scharfkantigen zylindrischen Mündung (Abb. 76) im Eintrittsteil bemerkt, ist die Wirkung der von der scharfen Kante herrührenden Strahleinschnürung, mit der wir uns schon befaßt haben. Wie ersichtlich, findet bei Schaulinie A zunächst eine Ausdehnung in eine bis auf rund 3,3 kg/qcm herabreichende Spitze statt. Hierauf schnellt der Druck auf 4,4 kg/qcm hinauf, um nach einigen kleinen Schwankungen gegen das Vakuum abzufallen. Die Einschnürung hat zur Folge, daß die Mündung in ihrem Eintrittsteil wie eine kegelig divergente Düse wirkt und den Mündungsdruck gegenüber den früheren Versuchen herabzieht. Der Druckverlauf hinter der Mündung ist wieder derselbe und zeigt insbesondere bei Kurve D ausgeprägte Schwingungen. Bei H haben wir nur noch die tiefe Druckfurche der Strahleinschnürung.

Aus diesen Versuchen geht hervor, daß die Anschauung, als ob der Dampf nicht vollständig entspannt werden könnte, gegenstandslos ist. Es zeigt sich vielmehr, daß er zunächst unter den vor der Mündung herrschenden Druck expandiert, daß mithin im ersten Anlaufe (wie etwa bei einer plötzlich frei werdenden gespannten Feder) zu viel potentielle Energie in lebendige Kraft umgesetzt wird. Nur dieses Zuviel geht in Schallschwingungen über und wird durch die Reibung und Wirbelung am Strahlrande in Wärme rückverwandelt.

Im übrigen findet die Schwingung offenbar sowohl in axialer wie in radialer Richtung statt. Der Strahl tritt mit dem Mündungsdrucke plötzlich in eine Umgebung mit viel geringerer Pressung aus, wird also auch in radialer Richtung sich zu entspannen anfangen. Die schönen hierauf bezüglichen Untersuchungen Prandtls werden weiter unten besprochen.

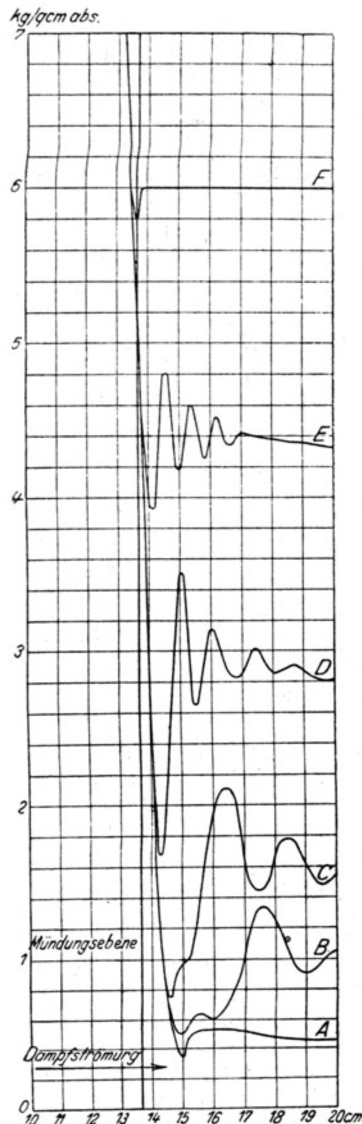
All diese Erscheinungen können aber nur auftauchen, wenn der Außendruck kleiner ist als die zum Anfangsdruck gehörende kritische Pressung. Bis zu diesem Gegendruck stellt

---

[1]) E. Mach und E. Salcher, Optische Untersuchungen der Luftstrahlen. Wiedemanns Annalen 1890, Bd. 41, S. 144.

[2]) Dr. R. Emden, Über die Ausströmungserscheinungen permanenter Gase. Wiedemanns Annalen 1899, Bd. 69, S. 264.

sich in der Mündungsebene angenähert der kritische Druck selbst ein. Steigern wir den Gegendruck darüber hinaus, so folgt ihm der Mündungsdruck nach.



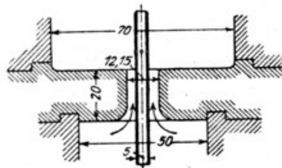
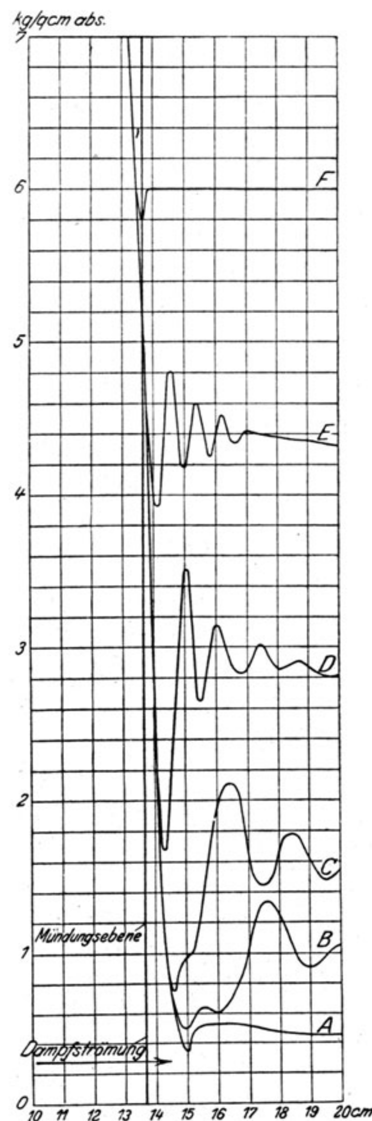


Abb. 74.



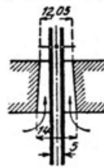
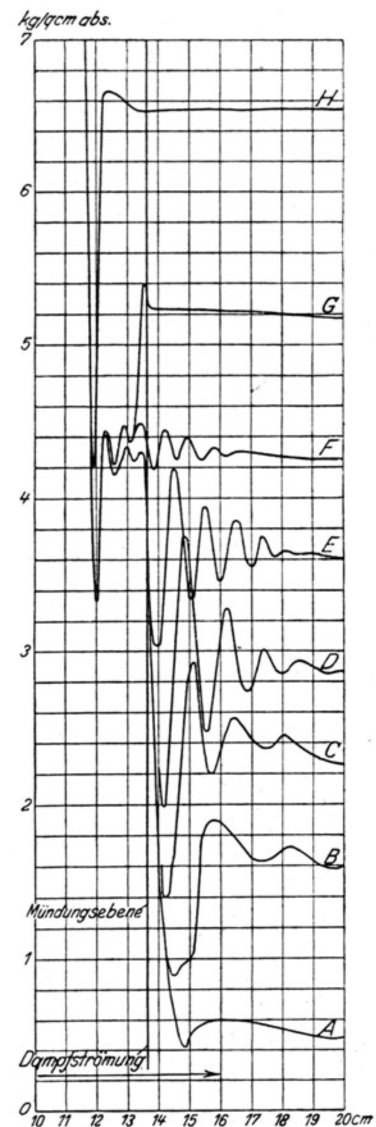


Abb. 75.



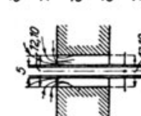


Abb. 76.

Druckschwingung außerhalb der Mündung.

2. Wirkliche und theoretische Ausflußmenge.

Rateau[1]) fand, daß die wahre Ausflußmenge um etwa 0,5 v. H. höher ist als die theoretische.

Gutermuth[2]) untersuchte die in Abb. 77 angeführten Mündungsformen, vornehmlich um die Verhältnisse der Strömung in Steuerungskanälen zu erforschen.

---

1) Recherches experimentales sur l'écoulement de la vapeur d'eau, Paris 1902.

2) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1904, S. 75.

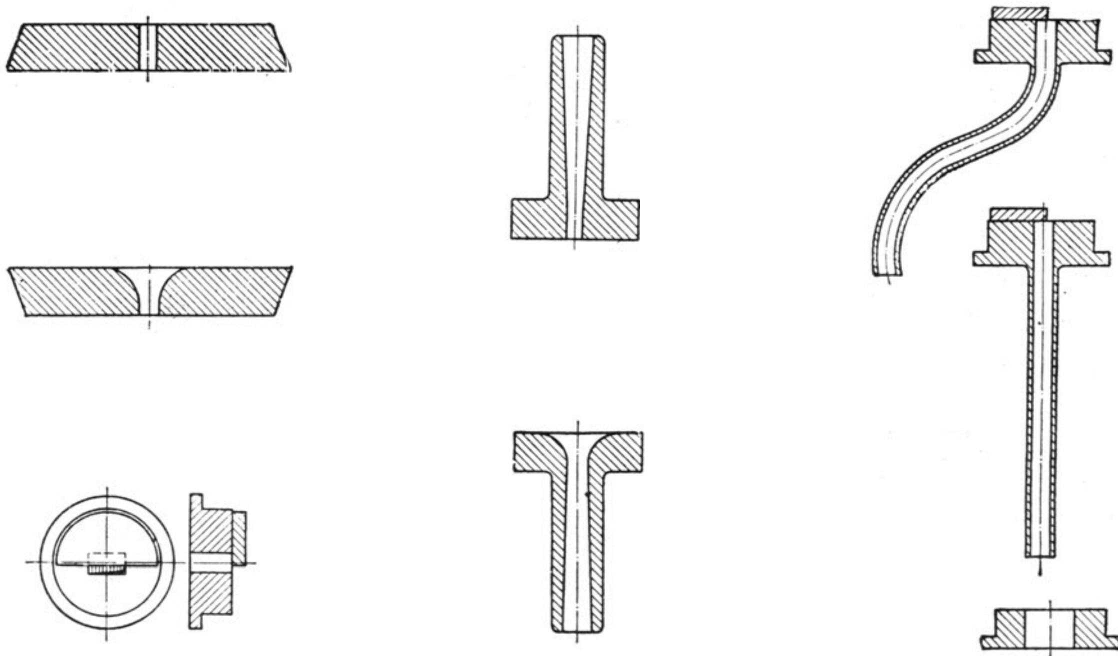


Abb. 77. Düsen zu Versuchen von Gutermuth.

In Abb. 78 sind die ermittelten Ausflußmengen in kg/min. bei 9 kg/qcm abs. Druck vor der Mündung und trocken gesättigtem Dampf als Funktion des hinter der Mündung eingestellten Gegendruckes verzeichnet.

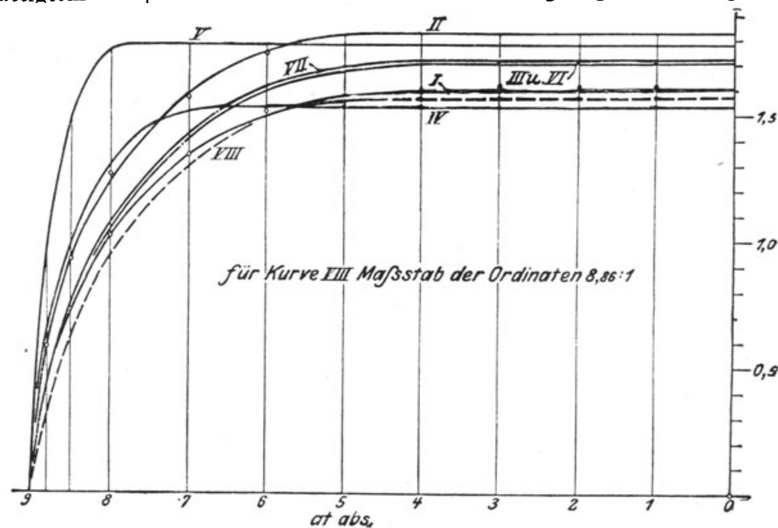


Abb. 78. Versuchsergebnisse von Gutermuth.

I = Kreisrundes Loch von 5,4 mm Durchmesser mit scharfen Kanten in einer Platte von etwa 13 mm Dicke.
II = Kreisrundes Loch von 5,4 mm Durchmesser mit trichterförmigem Einlauf.
III = Rechteckiger Kanal, der durch eine vorgelegte Platte verengt wird, mit gleich großem reinem Durchflußquerschnitt wie bei I und II.
IV = Kreisöffnung I mit angesetzter Lavaldüse von 2,5° Erweiterung.
V = Kreisöffnung II mit derselben Lavaldüse.
VI = Kanal III mit gebogenem rechteckigem Ansatzrohr.
VII = Kanal III mit geradem rechteckigem Ansatzrohr.
VIII = Kreisrundes Loch von 16,2 mm Durchmesser.

Mündungen II und V werden ohne Einschnürung gearbeitet haben, bei allen übrigen ist eine solche vorhanden, was sich deutlich in der gegenüber II kleineren Ausflußmenge kenntlich macht. Gutermuth

versteht unter „Einschnürungszahl" das Verhältnis des wirklichen Dampfgewichtes zu demjenigen, das bei Ausführung nach Form II durchströmen würde und findet folgende Werte:

Druck hinter der Mündung at abs.		8,8	8,5	8,0	7,0	6,0	5,2
Einschnürungszahl für Mündung	I	0,70	0,78	0,80	0,85	0,86	0,88
„ „ „	III	0,71	0,80	0,83	0,90	0,91	0,93

Die Wirkung der Düse als „Diffusor" äußert sich in Schaulinien IV und V darin, daß bei abnehmendem Gegendruck der Höchstwert von G weit früher erreicht wird als bei der einfachen Mündung.

Daß der rechteckige Kanal eine geringere Einschnürung ergibt als der zylindrische liegt wohl an der vorgelagerten Platte, die bei letzterem gewissermaßen nur „halbe" Kontraktion zuließ.

Bendemann vergleicht auf Grund einer sehr gründlichen experimentellen Untersuchung[1]) den theoretischen Wert von χ in der Formel für das sekundlich ausströmende Gewicht

$$G_{sk} = \chi f \sqrt{\frac{p_1}{v_1}} \quad \text{. . . . .} \quad (1)$$

mit dem wirklichen. Die aus Bronze hergestellten Mündungen (Abb. 79) hatten Durchmesser von 7,61; 10,01; 14,82; 17,81 mm. Obwohl der Mittelpunkt der Abrundung nur gerade in die Mündungsebene fällt, glaubt Bendemann genügend sicher eine Einschnürung vermieden zu haben. Die Versuche umfaßten Dampfdrücke bis zu 9 kg/qcm und eine Überhitzung von 20—50° C (vereinzelt bis 120°) über die Sättigung. Als Gesamtergebnis stellt sich heraus, daß die größte Ausflußmenge unabhängig von der Überhitzung mit dem Mittelwerte $\chi = 2{,}03$ in kg-m-sek-Einheiten gerechnet werden kann. **Die Ausflußmenge ist demnach bei gesättigtem Dampf um etwa 2 v. H. größer als die theoretische.** Für Gegendrucke p, die über dem kritischen Werte liegen, ist, wie Bendemann nachweist, der Ersatz des Bogens AC in Abb. 73 durch einen Ellipsenquadrant mit hoher Annäherung zulässig. Aus der Gleichung der Ellipse

$$\left(\frac{G}{G_m}\right)^2 + \left(\frac{p - p_m}{p_1 - p_m}\right)^2 = 1 \quad \text{. . . . .} \quad (2)$$

folgt mit $\beta = p_m/p_1$

$$G_{sk} = \frac{\chi f}{1-\beta} \sqrt{\frac{p_1}{v_1}\left[1 - 2\beta\left(1 - \frac{p}{p_1}\right) - \left(\frac{p}{p_1}\right)^2\right]} \quad \text{. . . . .} \quad (2a)$$

wobei $\chi = 2{,}03$ die obige Ausflußzahl ist, und der Wert von $\beta = 0{,}545$ dem kritischen Druckverhältnis sehr nahe kommt. Mit diesen Werten wird für Dampf allgemein

$$G_{sk} = 4{,}462 f \sqrt{\frac{p_1}{v_1}\left[1 - 1{,}09\left(1 - \frac{p}{p_1}\right) - \left(\frac{p}{p_1}\right)^2\right]} \quad \text{. . . . .} \quad (3)$$

wobei f in qm, p_1, p in kg/qm, v_1 in cbm/kg einzusetzen sind. Durch Wahl eines entsprechenden Maßstabes kann G_{sk} in Abhängigkeit von p als Kreisquadrant dargestellt werden.

Loschge[2]) bestätigt die Ergebnisse von Bendemann, indes mit den Werten $\chi = 2{,}035$ und $\beta = 0{,}570$.

Am Ende der von ihm benutzten Mündung, die bei 10 mm l.W. eine zylindrische Verlängerung von 7 mm besaß, zeigte sich gegenüber der Umgebung, solange deren Druck höher war als der kritische, ein Unterdruck bis zu 6 v. H. des Anfangsdruckes. Hieraus ist zu schließen, daß die Krümmung des Meridianschnittes der Mündung, obwohl gemäß Zeichnung sehr mild, doch schon zu scharf war, wie dies auch die nachfolgenden Versuche von Bachmann vermuten lassen.

Wichtig ist, daß nach Loschge eine **Porzellanmündung** und eine sehr dünnwandig abgedrehte Metallmündung, bei der die Wärmeleitung so gut wie verschwinden mußte, genau gleiche Ergebnisse lieferten.

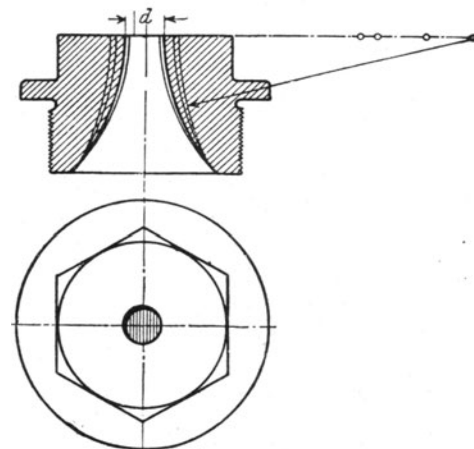


Abb. 79.
Meßmündung von Bendemann.

[1]) Mitteil. über Forschungsarbeiten, Berlin 1907, Heft 37.

[2]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1913, S. 60.

Sehr wertvolle Versuche über den **Ausfluß von Luft** verdanken wir Bachmann[1]) und Ombeck[2]). Diesen Forschern standen zwei Windkessel von je rd. 1700 mm Durchmesser und 7500 mm Länge zur Verfügung, an die bei Bachmann die Mündungen durch ein Rohr von 82,5 mm Durchmesser und rd. 2600 mm Länge, bei Ombeck unmittelbar an der Kesselwand angeschlossen waren. Eine Auswahl der verwendeten Mündungen ist in Abb. 80 dargestellt. Abb. 81 veranschaulicht die Ausflußzahl α, d. h. das Verhältnis der wirklich ausfließenden Menge zur theoretischen, die durch die Gleichung

$$G = \alpha \chi_{theor} f \sqrt{\frac{p_1}{v_1}} \quad \text{mit} \quad \chi_{theor} = \sqrt{2g \frac{k}{k+1} \left(\frac{p_m}{p_1}\right)^{\frac{2}{k}}} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

erklärt wird, wobei χ_{theor} gemäß Gl. 15 Abschn. 18 den theoretischen Beiwert bedeutet. Die Schaubilder erweisen folgendes:

1. Die Ausflußzahl nimmt mit abnehmendem Gegendruck, bis zum kritischen Wert desselben geradlinig zu, von da ab bleibt sie unverändert.

2. Die Ausflußzahl erreicht den Höchstwert ($\alpha = 0,98$), wenn die Länge des Mündungs-

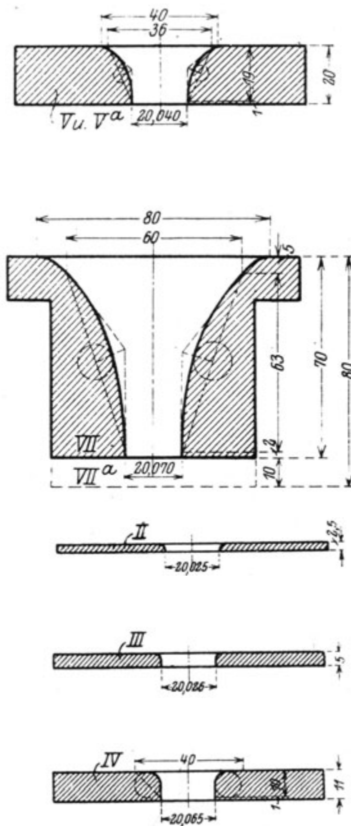


Abb. 80. Meßmündungen von Bachmann und Ombeck.

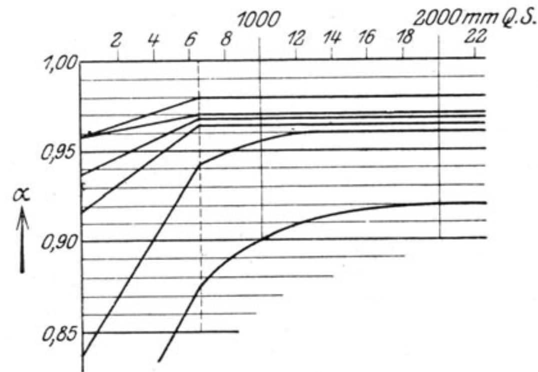


Abb. 81. Die Ausflußzahl bei wachsendem Innendruck.

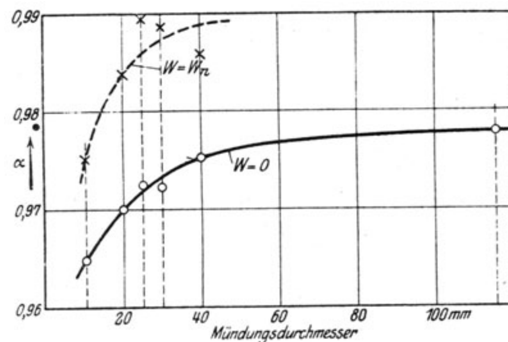


Abb. 82. Die Ausflußzahl bei wachsender Mündungsweite.

halses gleich ist dem Durchmesser, und der Meridian nach einer Sinuslinie geformt ist. Offenbar wird bei der Rundung nach einem Kreisbogen die radiale Verzögerung der Teilchen am Rande zu groß und veranlaßt den Strahl zu teilweiser Ablösung.

Abb. 82 stellt die Ausflußzahl nach späteren Versuchen von Ombeck in Abhängigkeit von der Mündungsweite dar, und zwar für die Grenzwerte sehr kleiner Druckgefälle ($w \simeq 0$) und für den kritischen Gegendruck ($w = w_m$).

[1]) Beitrag z. Messung v. Luftmengen. Dissertat. Techn. Hochschule Darmstadt, 1912.

[2]) Nach freundlicher brieflicher Mitteilung v. J. 1914.

Die Vorgänge in einer Mündung mit zu kleiner Abrundung werden durch eine Untersuchung von Nusselt[1]) anschaulich gemacht.

In Abb. 83 sind vollgezogen die in der Achse mittels Staurohres beobachteten Drücke und Geschwindigkeiten — punktiert dieselben in 2 mm Abstand von der Düsenwand (mittels eines gebogenen, sich der Wand anschmiegenden Röhrchens gemessen). Die Summe aus $\gamma w^2/2g$ und p_s, dem statischen Druck, liefert den Staudruck p_{st}, der als „Energie" (für die Raumeinheit) in die Abbildung eingetragen ist. Abb. 84 stellt Druck und Geschwindigkeit längs eines Durchmessers dar. Man bemerkt, daß in der Düse nahe am Rand ein Unterdruck entsteht, wobei sich der Strahl jedoch nicht ablöst, sondern dem vermehrten Druckgefälle folgend, höhere Strömungsgeschwindigkeiten annimmt als in der Mitte. Die Mündung hatte 100 mm Durchmesser.

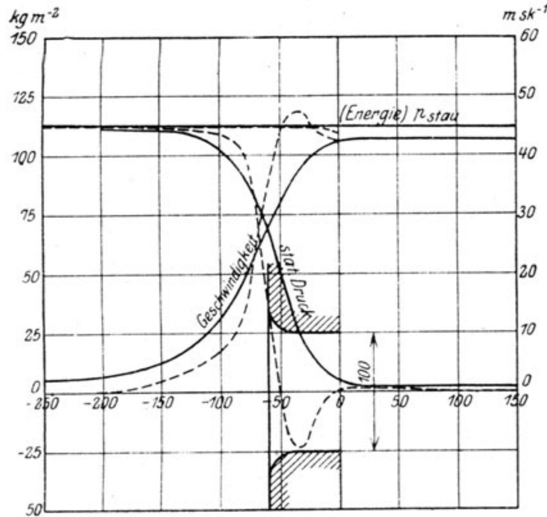


Abb. 83.

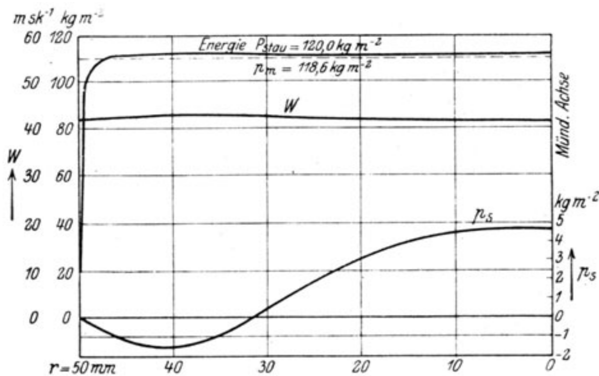


Abb. 84.

Beobachtungen von Nusselt.

Die Gesamtenergie ist auch in 2 mm Entfernung von der Wand überall da gleich, wo Druck in Geschwindigkeit umgesetzt wird. Nur wo das Umgekehrte stattfindet, gegen das Ende der Düse am Rande, zeigt sich ein Energieverlust.

Über Versuche mit großen Dampfdüsen berichtet Czernek[2]), der im Prüffelde der Allgem. Elektriz.-Ges. Berlin Gelegenheit hatte, die nach Abb. 85 hintereinander geschaltete Mündung von 80 mm Durchm. und zwei Düsen mit 130 bzw. 210 mm Durchm. durch

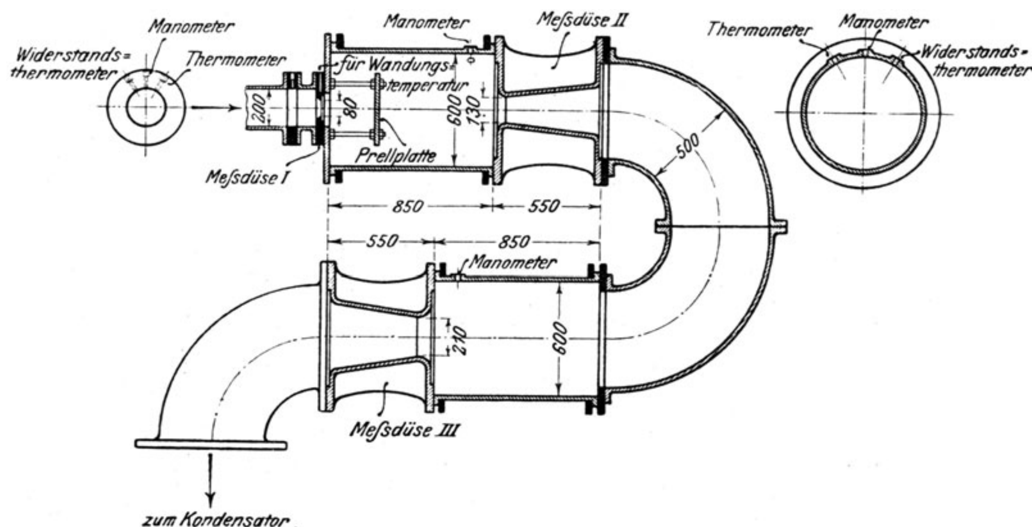


Abb. 85. Düsenprüfeinrichtung der A.E.G.

[1]) Zeitschr. f. Flugtechn. u. Motorluftschiff. 1915, Heft 23 u. 24.
[2]) Sonderabdruck aus d. Niederschrift der Preuß. Dampfk.-Überw.-Ver. Mai 1914.

Wägung der hindurchströmenden Dampfmenge zu eichen. Die festgestellten Beiwerte χ und die beobachteten Dampfzustände sind in nachfolgender Tabelle angegeben.

Beiwerte χ.

	Versuch 1	Versuch 2	Versuch 3
Durchfließendes Dampfgewicht . . . . kg/sek	0,3925	0,9997	2,6683
Anfangsdruck vor Düse I . . . . at abs.	0,574	1,492	3,996
Anfangstemperatur vor Düse I . . . . ° C	186,4	218,6	238,3
χ_I	**1,989**	**2,013**	**2,037**
Anfangsdruck vor Düse II . . . . at abs.	0,2180	0,568	1,548
Anfangstemperatur vor Düse II . . . . ° C	178,9	212,7	232,1
χ_{II}	**1,972**	**1,994**	**2,011**
Anfangsdruck vor Düse III . . . . at abs.	0,086	0,216	0,593
Anfangstemperatur vor Düse III . . . . ° C	156,7	199,2	222,9
χ_{III}	**(1,863)**	**1,984**	**1,977**

Wie man leicht nachprüft, spielte sich die Zustandsänderung bei diesen Versuchen durchweg im Überhitzungsgebiet ab. Daß die Vorschaltung von Düsen (die bei Messungen während des Betriebes als Diffusoren zu wirken hatten und bei Düse II beispielsweise vor der Düse 3,5 at abs. im engsten Querschnitt 1,3, hinter der Düse 2,9 at abs. ergaben) den Durchfluß merklich zu beeinflussen vermochte, kann nicht von vornherein ausgeschlossen werden. Die Abweichung von χ gegen den Bendemannschen Wert dürfte indes hauptsächlich durch die verhältnismäßig schwache Rundung der Mündung verursacht worden sein, da nach Abb. 85 deren Krümmungshalbmesser nur etwa das 0,34fache des engsten Durchmessers beträgt.

Czernek teilt mit, daß bei einer Parallelmessung mit Düse und Wägung des Speisewassers bei 25000 kg Dampf stündlich eine Abweichung von bloß 0,4 v. H. beobachtet wurde. Desgleichen bei Wägung des Kondensates von 4800 kg/st ein Unterschied von +1,6 v. H.

Forner faßt die Ergebnisse[1]) zu der Formel

$$\chi = 1{,}985 + 0{,}015\, p_1^{(\mathrm{at})}$$

zusammen, wobei p_1 in at abs. einzusetzen ist. Die Extrapolation bis zu den Werten von Bendemann dürfte wegen Verschiedenheit der Rundungshalbmesser kaum zulässig sein.

Forner leitet im weiteren eine wertvolle Beziehung für die Ausflußmenge durch eine erweiterte Düse und dem Gegendrucke ab, für den Fall, daß die Düse als Diffusor wirkt. Bei verlustfreier Strömung müßte nämlich die Ellipsengleichung (2) auch für den Düsenendquerschnitt f_2 in der Form

$$\left(\frac{G}{G_{2m}}\right)^2 + \left(\frac{p_2 - p_{m2}}{p_1 - p_{m2}}\right)^2 = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

gelten, wobei in neuer Bezeichnung $\frac{p_{m2}}{p_1} = \varepsilon_s$ dem kritischen Druckverhältnis 0,545; $\frac{p_2}{p_1} = \varepsilon_2$ gesetzt werden soll. Für G_{2m} hat man mit $f_2/f_m = q$

$$G_{2m} = f_2\,\chi \sqrt{\frac{p_1}{v_1}} = \left(\frac{f_2}{f_m}\right) \cdot f_m \chi \sqrt{\frac{p_1}{v_1}} = q \cdot G_m \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Setzt man ferner

$$\xi_2 = \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_s}{1 - \varepsilon_s}\right)^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

so schreibt sich die Auflösung von Gl. (5) als

$$G_{theor} = q\, G_m\, \xi_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

Infolge von Widerständen wird G kleiner, und zwar findet Forner für die Ausflußzahl aus Versuchen von Büchner, Gutermuth, Bendemann und des Verfassers den empirischen Wert $1/\sqrt{q}$, so daß die tatsächliche Durchflußmenge sich als

$$G_{eff} = G_m\, \xi_2 \sqrt{q} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

[1]) Z. d. Ver. deutscher Ing. 1919, S. 77.

darstellt. Anderseits ist nach Bendemann, indem man den engsten Querschnitt ins **Auge** faßt mit $\varepsilon_m = p_m'/p_1$

$$\xi_m = \sqrt{1 - \frac{(\varepsilon_m - \varepsilon_s)^2}{(1-\varepsilon_s)^2}}; \quad G = G_m \xi_m \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

Die Gleichsetzung von (9) und (10) liefert eine Beziehung zwischen ε_m und ε_2

$$\varepsilon_m = \varepsilon_s + \sqrt{q(\varepsilon_2 - \varepsilon_s)^2 - (q-1)(1-\varepsilon_s)^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

aus welcher man den an der engsten Stelle herrschenden Druck p_m' in Abhängigkeit von p_2 ermitteln kann. Erreicht G den Höchstwert G_m, so wird $p_m' = p_m$ oder $\varepsilon_m = \varepsilon_s$ und die Auflösung von (11) ergibt

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_2' = \varepsilon_s + (1-\varepsilon_s)\sqrt{\frac{q-1}{q}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

als den Grenzwert von p_2/p_1, dessen weitere Verkleinerung die durchfließende Menge nicht mehr vergrößert.

3. Erklärung des Unterschiedes zwischen Theorie und Wirklichkeit durch die Einschnürung, die genauere Durchflußgleichung und durch die Unterkühlung des Dampfes.

Bei scharf gekrümmter Mündung wird sich der Strahl ablösen und einschnüren, wodurch naturgemäß die Durchflußzahl sich vermindert. Bei besserer aber ungenügender Rundung, wie in Abb. 84 kann sich der Strahl bald wieder anlegen, vermindert indes den Durchfluß durch die eintretende Verdünnung am Rande.

Wo diese Einflüsse ausgeschlossen werden dürfen, wie bei den Versuchen von Bachmann, muß man auf die genauere Durchflußgleichung zurückgreifen, die auf die Verschiedenheit der Geschwindigkeiten und Raumgewichte im Querschnitt Rücksicht nimmt. Es ist

$$G_{sk} = \int_0^r 2\pi\varrho\, d\varrho\, w\gamma = \alpha G_{theor} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

wobei ϱ einen Zwischenhalbmesser bedeutet. Wie wir im Abschn. 175 nachweisen, kann man unter vereinfachenden Annahmen die Ausflußzahl α durch den gesamten Energieverlust ζ der Strömung ausdrücken, und zwar ergibt sich die Beziehung

$$\alpha = 1 - 1{,}5\,\zeta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

oder umgekehrt

$$\zeta = \frac{2}{3}(1-\alpha) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Bei den Versuchen von Bachmann erreichte α den Wert 0,98; somit ist die Verlustzahl

$$\zeta_{min} = 0{,}013.$$

Aus den Versuchen von Nusselt (Abb. 84) würde folgen $\zeta = 0{,}0126$, in naher Übereinstimmung mit Obigem, und damit ist der bis jetzt beobachtete Kleinstwert der Verlustzahl erreicht.

Nach Bendemann ist für überhitzten Dampf

$$\alpha = \chi_{eff} : \chi_{theor} = 2{,}03 : 2{,}090 = 0{,}971 \qquad \text{also} \qquad \zeta = 0{,}0193.$$

Die Erhöhung gegenüber Bachmann kann sehr wohl eine scheinbare sein, da die Krümmung am Düsenende ungünstig war.

Für gesättigten Dampf wäre nach Bendemann $\alpha = 2{,}03 : 1{,}99 = 1{,}02$, also größer als 1, was unmöglich ist. Da dies Ergebnis durch Loschge ausdrücklich bestätigt worden ist, muß nach einer anderen Erklärung gesucht werden, als die sich die Annahme darbietet, daß der Dampf während der Entspannung **unterkühlt bleibt,** d. h. sich nicht kondensiert, **sondern gemäß des Gesetzes des überhitzten Dampfes expandiert.** Dann gilt auch bei gesättigtem Zustand $\chi_{theor} = 2{,}09$, also wird α wie oben $= 0{,}971$, und der Verlust behält wahrscheinliche Werte.

Die Tatsachen, durch die diese Ansicht gestützt wird, sollen im folgenden ausführlicher dargelegt werden.

41. Die Unterkühlung bei der Entspannung gesättigten Dampfes.

Die klassische Strömungstheorie läßt, soweit das Sättigungsgebiet in Frage kommt, folgende Umstände außer Betracht:

1. Damit sich sofort beim Überschreiten der Sättigungsgrenze in der ganzen Masse einer expandierenden Dampfmenge Niederschlag in Form von Tröpfchen bilden könne, muß der Dampf „Kondensationskerne", Staubteilchen oder Ionen enthalten. Sind solche Kerne nicht vorhanden, so tritt bis zu einer gewissen Grenze eine **Unterkühlung** oder **Übersättigung** auf, d. h. der Dampf ist kühler als der Sättigungstemperatur des erreichten Druckes entspricht, beziehungsweise der Druck ist höher als die zur erreichten Temperatur gehörende Sättigungspressung.

2. Zur Ausbildung eines noch so kleinen Tropfens gehört eine gewisse Zeit, und es ist nicht bekannt, ob die Dauer der Expansion in einer Mündung oder Düse, die unter Umständen nur einige Zehntausendstel einer Sekunde beträgt, hierzu hinreicht. Ebenso beansprucht die Wärmeleitung im Innern des Tropfens und innerhalb der Dampfmasse eine meßbare Zeit.

3. Ein Tropfen von bestimmter Größe und Temperatur ist in einer Dampfumgebung von gleicher Temperatur nur dann im thermodynamischen Gleichgewicht, wenn der Dampfdruck die Sättigungspressung um einen durch die Kapillarkräfte bedingten Betrag überschreitet, und es ist unbekannt, wie rasch sich nach einer Störung dieses Gleichgewicht wieder herstellt.

4. Die Strömungsgeschwindigkeit des Tropfens ist nur im Augenblicke seiner Entstehung mit der Geschwindigkeit des ihn umgebenden Dampfes gleich; später kleiner, da er wie ein Fremdkörper durch Reibung vom inzwischen beschleunigten Dampfe mitgenommen wird.

5. Die Strömung wird als eindimensional behandelt, d. h. man sieht von der Verschiedenheit der Geschwindigkeit und des Dampfzustandes an verschiedenen Stellen eines Querschnittes ab.

Die schwierige Natur der aufgeworfenen Fragen läßt es begreiflich erscheinen, daß bis jetzt kein Versuch zu ihrer Lösung unternommen worden ist. Auch die nachfolgend mitgeteilten Versuche beschäftigen sich vorzugsweise mit der Unterkühlung, während auf die Punkte 4 und 5 nicht näher eingegangen wird.

a) Die Strahlbeobachtung von R. v. Helmholtz und die Versuche von Wilson.

R. v. Helmholtz, der Sohn des berühmten Naturforschers, war der erste, der auf die Unterkühlung beim Ausfluß gesättigten Dampfes, und zwar im Jahr 1887[1]) hingewiesen hat. Er beobachtete, daß der durch eine Mündung von etwa 2 mm Dmr. ins Freie tretende Dampfstrahl unmittelbar über der Mündung luftklar blieb und sich erst in einiger Entfernung zu trüben begann. Im durchfallenden Licht zeigten sich im nebligen Teil die Regenbogenfarben als Folge der Lichtbeugung an den Tropfen. Helmholtz machte auch die wichtige Entdeckung, daß die gegen den Strahl gerichtete Spitzenentladung einer Elektrisiermaschine ihn noch trüber macht, d. h. die Kondensation unterstützt.

Die Verspätung der Kondensation konnte als Folge der Abwesenheit von „Kernen" gedeutet werden, über deren Wirkung wir durch die Versuche von Aitken, insbesondere aber diejenigen von C. T. R. Wilson[2]) unterrichtet sind. Wilson ließ in einem Glasbehälter mit Feuchtigkeit gesättigte Luft durch Fortrücken eines Glaskolbens plötzlich expandieren, wobei sofort starke Nebelbildung auftrat, sofern in der Luft Staubteilchen enthalten waren. Ließ man diese mit dem sich bildenden Nebel niedersinken, bis die Luft vollkommen staubfrei gemacht war, so zeigte sich nach abermaliger Sättigung mit Feuchtigkeit, daß bei einer Expansion bis auf den 1,25fachen Rauminhalt nicht einmal Spuren von Kondensation auftraten. Bei einer Ausdehnung auf den 1,25- bis 1,38fachen Rauminhalt erschienen nur wenige rasch sinkende Tropfen, und erst bei mehr als 1,38facher Ausdehnung bildete sich ein dichter Nebel in der ganzen Luftmasse. Wilson berechnet,

[1]) Annal. d. Phys, N. F. 32, 1887, S. 1.

[2]) Proc. Royal Soc. London 1897, Bd. 61, S. 240 bis 243; Phil. Magaz. 1897, A 189, S. 281; Beibl. zu Wied. Annal. 1897, Bd. 21, S. 720.

wie tief sich die Luft hierbei adiabatisch abkühlt, und welche Dichte der Dampf annimmt. Diese wird verglichen mit der Dichte, die gesättigter Dampf bei dieser Temperatur haben würde. Es stellt sich heraus, daß ihr Verhältnis bei 1,38facher Raumausdehnung den Wert 7,9 besitzt, und dies ist auch das Verhältnis der entsprechenden Dampfdrücke bei gleicher Temperatur. Durch spätere Untersuchungen von Wilson wurde erwiesen, daß auch die Ionen (d. h. Elektronen) der Luft in Übereinstimmung mit der oben erwähnten Beobachtung von R. v. Helmholtz als Mittelpunkte für die Angliederung von Dampfmolekülen dienen können.

In vollkommen kernfreier Luft findet mithin ein erster schwacher Dampfniederschlag (Nebelbildung) bei rd. 4facher Übersättigung statt, starke Nebelbildung erst bei rd. 8facher Übersättigung.

Hiernach lag es nahe, zu vermuten, daß in Helmholtz' Versuch die Kondensation deshalb ausblieb (beziehungsweise erst nach der Vermischung des Dampfes mit der Luft auftrat), weil der Dampf, aus destilliertem Wasser in physikalischen Geräten hergestellt, keine Kondensationskerne enthielt.

Über das Verhalten von „technischem" Dampf, der in einem Dampfkessel üblicher Art erzeugt wurde, liegen die

b) Versuche von Hirn und Cazin[1])

vor, die die stärkste Stütze der klassischen Theorie bildeten. Diese Forscher benutzten einen Versuchskessel von 180 Liter Inhalt und ließen den erzeugten Dampf in ein von einem Ölbad umgebenes Rohr eintreten, in dem er überhitzt wurde. Durch Öffnen eines weiten Ventiles konnte der Dampf zu plötzlicher Entspannung veranlaßt werden, wobei die ersten Spuren der Nebelbildung durch Glasfenster in den Rohrböden beobachtet wurden. Einige der so gewonnenen Zahlen seien hier angeführt

Anfangsdruck . . . . alte at abs.	1,397	2,451	4,275
Anfangstemperatur . . . . °C	131,5	189,2	254,7
Enddruck beim Auftreten der ersten Nebelbildung . . . . alte at abs.	0,984	0,979	0,967
Endtemperatur . . . . °C	99,6	99,4	99,1

Wenn wir an Hand unserer Entropietafeln den Endzustand unter Annahme adiabatischer Ausdehnung bestimmen, so zeigt sich, daß dieser bis auf verschwindend kleine Abweichungen mit der Sättigungsgrenze übereinstimmt; ein Beweis für die große Sorgfalt der Hirnschen Beobachtungen.

Ist hiernach anzunehmen, daß technischer Dampf hinreichend viel Kerne enthält, um sofort nach Unterschreitung der Grenzkurve zu kondensieren, so mußte die Frage auftauchen, wie sich wohl derartiger Dampf beim Ausfluß gegenüber der Beobachtung von Helmholtz verhalten werde. Dies wurde durch die nachfolgend beschriebenen Versuche aufgeklärt.

c) Versuche des Verfassers über den Ausfluß durch Mündungen und Düsen.

Eine gut abgerundete Mündung von 11,5 mm Durchmesser war unmittelbar auf einen Wasserabscheider von etwa 300 mm l. W. aufgesetzt. Um auch schwache Trübungen wahrnehmen zu können, wurde der Strahl durch ein mittels Linse verdichtetes Lichtbündel einer Bogenlampe beleuchtet und nach Art des Ultramikroskopes senkrecht zur Lichtrichtung beobachtet. Außerdem erwies es sich als zweckmäßig, einen langen Schlitz als Blende zu verwenden, so daß gewissermaßen ein Längsschnitt durch die Mittelebene des Strahles in die Erscheinung trat. Bei etwa 8,2 at abs. im Kessel und 8,0 at abs. im Abscheider bietet der Strahl das in Abb. 86 dargestellte Lichtbild. Die hellen Stellen bedeuten Nebelbildung, die dunkeln Stellen Abwesenheit davon. Der Ursprung dieser von Mach beobachteten „Schlierenlinien" wird nach Prandtl in Abschn. 42a gedeutet werden; doch besteht ein wesentlicher Unterschied darin, daß in jenen Bildern nur Dichtenänderungen zum Ausdruck kommen; in den Bildern des Dampfstrahles hingegen erblickt man Kondensationsfelder, die mit der Dichtenänderung wohl zusammenhängen, aber nach einem vorläufig unbekannten Gesetz. So ist das plötzliche Verschwinden des Niederschlages nach der gebogenen scharf hervortretenden Knotenlinie eine höchst merkwürdige Erscheinung, die man gerne mit dem Auftreten eines Dampfstoßes und einer durch die Verluste bedingten Wiederverdampfung in Verbindung bringen möchte. Da indessen der Aufklärung der Schlierenlinien technisch eine geringere Bedeutung zukommt, halten wir uns bei diesem Gegenstand nicht auf.

In natürlicher Beleuchtung erscheint der Strahl dem Auge zart blau gefärbt, und man bemerkt knapp an der Mündung eine schmale niederschlagfreie Zone.

Wird der Dampf vor dem Abscheider gedrosselt, so muß der anfänglich gesättigte Dampf schwach überhitzt austreten, was sich sofort an den veränderten Kondensationsverhältnissen bemerkbar macht,

[1]) Comptes rendus de l'Acad. franç. 63, 1866, S. 1144.

wie Abb. 87 mit rd. 7,5 at abs. im Kessel und 5,0 at abs. im Abscheider, ebenso Abb. 88 mit 7,5 at abs. im Kessel und 3,5 at abs. im Abscheider dartut.

Es schien von Wert, auch die schief abgeschnittene Mündung auf ihr Verhalten hin zu prüfen. Abb. 89 zeigt nach Handskizze die Form des Strahles, der aus einem mit 28° Schräge abgeschnittenen rechteckigen

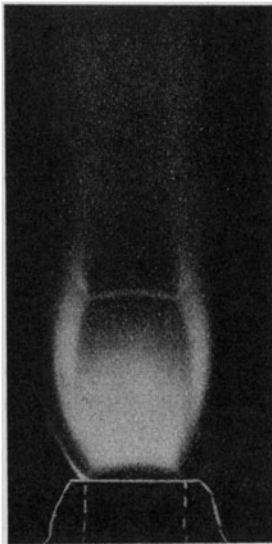


Abb. 86. Strahlbild bei 8,0 at abs. Innendruck.

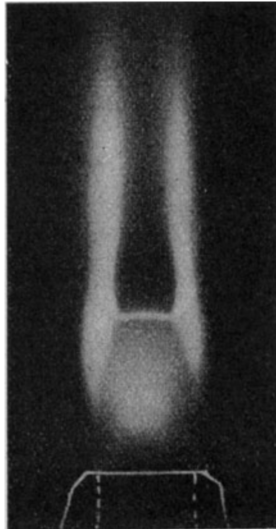


Abb. 87. Strahlbild bei von 7,5 auf 5 at abs. gedrosseltem Innendruck.

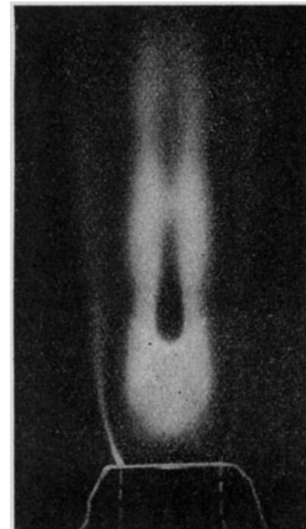
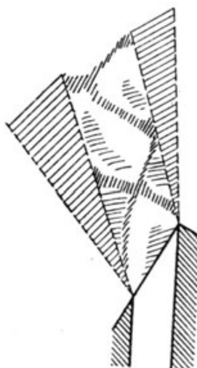


Abb. 88. Strahlbild bei von 7,5 auf 3,5 at abs. gedrosseltem Innendruck.

Kanal von 16 × 16 qmm Querschnitt mit gut abgerundeter Einmündung bei 7,5 at abs. Anfangsdruck austritt, Abb. 90 dasselbe bei 3,5 at abs. Druck im Abscheider. Die durch Schraffur hervorgehobenen Stellen bedeuten die helleren Teile, d. h. die Gebiete stärkerer Kondensation. Das Entstehen periodischer Druckänderungen ist unverkennbar; die Abbildungen beweisen die Unrichtigkeit der in der Literatur vertretenen Meinung, als ob der aus schiefer Mündung austretende Strahl sich in dieser Hinsicht anders als bei normal zur Achse stehenden Mündungen verhielte.

Wenn das Druckverhältnis unter den kritischen Wert sinkt, verschwinden die Schlierenbilder, und der runde Strahl bietet den Anblick der Abbildung 91 bei etwa 1,7 at abs. Kesseldruck und 1,6 at abs. im Abscheider (so daß keine Überhitzung durch Drosselung auftreten konnte). Abb. 92 stellt denselben Strahl



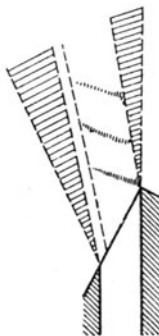


Abb. 89. Abb. 90. Strahl aus schief abgeschnittener Mündung.

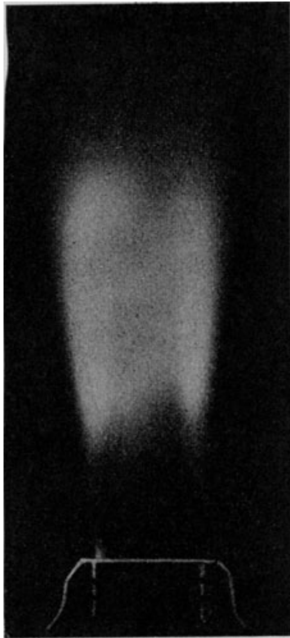


Abb. 93. Strahl beim kritischen Gegendruck.

dar, jedoch in der ganzen Ausdehnung (ohne Blende) beleuchtet. Ein gleiches Verhalten weist der aus schiefer Mündung austretende Strahl nach Handskizze Abb. 93 auf. Man bemerkt, daß die nebelfreie Zone nicht bloß, wie Helmholtz annahm, in der Nähe der Mündung vorhanden ist, sondern sich tief in das Innere des Strahles erstreckt, bis durch allmähliches Vermischen mit der Luft der Umgebung eine Trübung entsteht.

Um auch die Vorgänge auf der Innenseite der Mündung verfolgen zu können, wurden ferner durch-

sichtige Düsen aus Kesselwasserstandsgläsern hergestellt und mit der gleichen Blendenbeleuchtung versehen wie oben. Die Aufnahme der Strömung, Abb. 94, läßt nun mit Sicherheit erkennen, daß der Einlauf (unten) bis zum engsten Querschnitt klar bleibt und daß die **Trübung** eigentümlicherweise **unmittelbar hinter dem engsten Querschnitt einsetzt.** Es ist bemerkenswert, daß diese Kondensierungsgrenze **ihre**



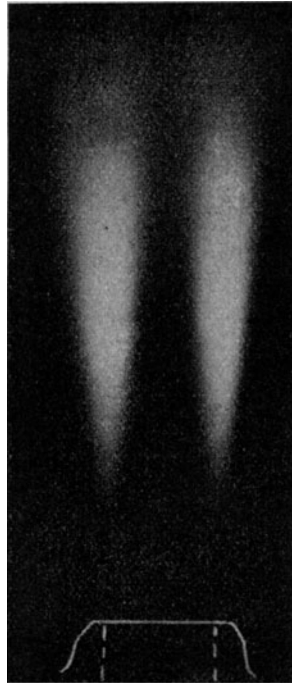


Abb. 91. Abb. 92.
Strahl beim kritischen Gegendruck ohne und mit Blende beleuchtet

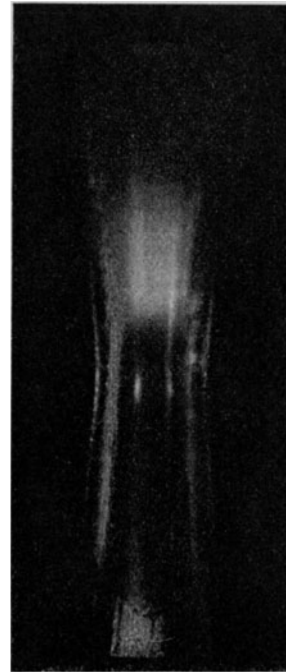


Abb. 94. Auftreten der Kondensation hinter dem engsten Querschnitt.

Lage beibehält, wie groß auch der Anfangsdruck sei, wenn man **vom gesättigten Zustand ausgeht** (die Abbildung entspricht 6 at abs.). Bei anfänglicher Überhitzung rückt die Grenze im kegeligen Rohrteil hinauf, allein um sehr kleine Beträge, die nur bei sehr schlanken Düsen bemerkbar sind.

Ist am Ausbleiben der Kondensation der Mangel an Zeit schuld, so ist es auffallend, daß nach Überschreitung der kritischen Druckgrenze sofort Niederschlag auftritt, und zwar gleicherweise in kurzen wie in langen, schwach erweiterten Düsen. Daher könnte als Erklärungsgrund für das Fehlen des Niederschlages die Annahme in Betracht kommen, daß auch der technisch erzeugte Dampf (oder doch derjenige unseres Maschinenlaboratoriums, dessen Kessel mit frischem sehr weichem Seewasser gespeist werden) arm an Kondensationskernen ist.

Da diese Annahme in grellem Widerspruch zu den Beobachtungen von Hirn und Cazin stünde, unternahm ich ihre Nachprüfung.

d) Wiederholung der Versuche von Hirn und Cazin.

Man ließ den Dampf in ein wagerechtes Gußrohr von rd. 1,5 m Länge und 150 mm l. W., Abb. 95, bei *a* oben ein- und bei *b* durch ein mittels Hebels zu öffnendes Ventil austreten; am andern Ende befand sich ein Entwässerungshahn *c*, so daß das Rohr gut mit Dampf durchflutet werden konnte. Ein Indikator und ein Thermometer waren bei *d* angeschlossen. Die Böden erhielten Glasverschlüsse zur Durchleuchtung des Innern mittels Bogenlampe *e* und Linsensystemes *f*. Die Röhre wurde mittels isolierter Nickeldrahtbewicklung elektrisch geheizt. Temperaturen wurden innen und in der Rohrwand mit Thermoelementen beobachtet. Der Gang des Versuches war der folgende: Das Rohr wurde bei offenem Ablaß *c* so lange gespült, bis die Temperatur dauernd gleich blieb. Nach Abschluß von *c* wurde durch einen Hammerschlag Ventil *b* sehr wenig angehoben und so eine möglichst kleine Ausdehnung eingeleitet. Sofern der Anfangszustand der Sättigung nahe kam, trat sofort eine Verdunkelung des Gesichtsfeldes ein. Die Sättigungsnähe wurde sehr empfindlich dadurch angezeigt, daß bei einer kleinen Druckerhöhung an den kältesten Stellen des (nicht

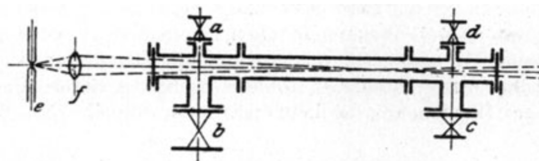


Abb. 95. Plötzliche Entspannung.

vollkommen gleich erwärmbaren) Rohres ein leichter Taubeschlag erschien. Schon vorher bildeten sich bei der Ausdehnung die ersten zarten Nebelwölkchen gerade über diesen Stellen. Eine Ausdehnung von 4,5 at abs. auf 4,0 at abs. lieferte bereits deutlich wahrnehmbaren Nebel; wie die Entropietafel zeigt, gestattet also das Verfahren, eine Niederschlagmenge von weniger als 1 v. H. nachzuweisen. Die Zeitdauer der Ausdehnung wird nach Schätzung auf weniger als $^1/_{20}$ sek zu veranschlagen sein.

Endlich bestätigten sich die Wahrnehmungen von Hirn bei tieferen Ausdehnungen aus dem Überhitzungsgebiet auf die Grenzkurve hinunter, die man durch volles Öffnen des Ventiles *b* einleitete. Dabei erschien die Wolke stets zuerst im Zentrum eines das Rohr der Länge nach durchsetzenden Wirbels, der sich beim Abströmen des Dampfes ausbildet. Auch dieses Verfahren ist sehr empfindlich. Beispielsweise zeigt sich eine Nebelwolke bei einer Expansion von 1,7 at abs. und 144° C Innentemperatur auf 0,98 at (= dem Barometerstand), was wieder weniger als 1 v. H. Dampfnässe entspricht. Bei der Ausdehnung von 1,65 at abs. erscheint kein Nebel mehr.

Obwohl die Nachprüfung nicht mit der hohen Genauigkeit der ursprünglichen Versuche durchgeführt werden konnte, genügt sie zur Feststellung, daß auch der Dampf unseres Laboratoriums (also wohl technischer Dampf überhaupt) reichlich mit Kondensationskernen versehen ist und daß bei weniger als $^1/_{20}$ sek Expansionszeit sicher ein genügend dichter Niederschlag entsteht. Die Kerne sind übrigens geradezu sichtbar. Ist eine Nebelwolke durch Kompression wieder verdampft worden, so sieht das Lichtbündel im Rohre genau so aus wie ein Sonnenstrahl in staubigem Zimmer, und die Kerne wirbeln durcheinander wie Staubteilchen in der Luft.

e) Verschärfte Beobachtung der Düse.

Der Unterschied zwischen der Expansion in der Hirnschen Vorrichtung und in der Düse besteht lediglich in der Zeitdauer des Vorganges. Um in der Düse eine Länge $\varDelta s = 100$ mm mit einer mittleren Geschwindigkeit von $w = 250$ m/sek zurückzulegen, bedarf der Dampf einer Zeit $\varDelta t = \varDelta s : w = 4 \cdot 10^{-4}$ sek, während die Dauer bei Hirn etwa $^1/_{20}$ sek betragen hat. Daher tauchte die Frage auf, ob bei künstlich verlängerter Strömungsdauer schon früher eine Nebelbildung sichtbar werden könnte und so wurde ein zylindrisches Glasrohr von rd. 400 mm Länge an beiden Enden mit Erweiterungen von 50 mm Länge versehen und in gleicher Weise beleuchtet wie oben. Wenn man das Auge der Lichtquelle fast gegenüber, jedoch so hinstellt, daß das direkte Licht abgeblendet ist und die Sehrichtung einen Winkel von etwa 10 bis 20° mit dem Lichtstrahl bildet, wie in Abb. 96 angedeutet, so ist schon die allergeringste Trübung wahrnehmbar, und es konnte folgendes beobachtet werden:

Kesseldruck (Sattdampf)	Abgedrosselt vor der Einmündung auf	Auftauchen der ersten Trübung in einer Entfernung (vom Rohranfang) von
5,0 at abs.	1,8 at abs.	320 mm
5,0 „ „	2,0 „ „	200 „
5,0 „ „	2,7 „ „	100 „
5,0 „ „	4,7 „ „	50 „

Bei ungedrosseltem Dampfe war der ganze zylindrische Teil des Rohres mit Nebelschwaden angefüllt, die als Flocken oder Streifen in raschem Wechsel des Ortes auftraten, aber immer nur schwach nebelgrau gefärbt waren. Beim Austritt in die Erweiterung erscheint wieder die intensive sattblaue Trübung, die entweder einer viel reichlicheren Tropfenbildung oder einer Vergrößerung der Tropfen entspricht.

Hiernach ist es Tatsache, daß in einer Düse oder Mündung schon vor dem engsten Querschnitt eine Kondensation auftritt, wenn auch in sehr schwachem Maße. Aber der Übergang durch den engsten Querschnitt, d. h. die Expansion auf etwas unter den kritischen Druck, bildet die **Veranlassung zu einer fast plötzlichen starken Zunahme des Niederschlages.**

f) Grenzen für die Tropfengröße.

Aus einer teilweise mit Wasser gefüllten Flasche wurde durch eine Strahlluftpumpe die Luft plötzlich mehr oder weniger abgesaugt. War die Luft frisch dem Zimmerraum entnommen, so entstanden sofort Nebel, durch die man parallel gerichtetes Bogenlampenlicht hindurchfallen ließ. Infolge der Beugung des Lichtes an den Wassertröpfchen erscheinen am Strahl gegen die Lichtquelle gesehen intensive Regenbogenfarben. Bei einfarbigem Licht geht die Hauptmenge geradlinig durch; der abgelenkte Teil erreicht ein erstes Maximum der Intensität in einer Richtung, deren Neigung mit der ursprünglichen Richtung einen Winkel ϑ bildet, für den uns die Lehrbücher der Physik[1]) die Formel

$$\sin \vartheta = \varkappa \frac{\lambda}{r}$$

liefern. In dieser bedeutet

λ die Wellenlänge der betreffenden Lichtart,
r den Halbmesser der kugelförmig gedachten Tropfen,
$\varkappa$ eine Konstante.

---

[1]) Beispielsweise R. W. Wood, Physical Optics 1905, S. 189.

Die Intensität des ersten Maximums mit $k = 0{,}81$ ist allerdings nur der 0,0174fache Teil derjenigen der geradlinig durchgehenden Lichtmenge. Ein zweites Maximum tritt auf bei einem Wert von ϑ, für den $k = 1{,}33$ ist, aber die Intensität nur noch 0,0041 der ursprünglichen beträgt; noch schwächer sind die weiteren Maxima.

Durch Zwischenschaltung eines Linsensystems l (eines „Tessars" von Zeiß) nach Abb. 97 kann jedes Bündel von parallel abgelenkten Strahlen zu einem Punkt vereinigt werden, und es entstehen auf dem Schirme

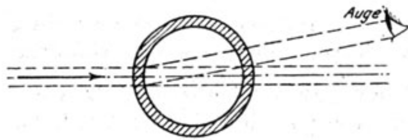


Abb. 96. Beste Beobachtungsrichtung.

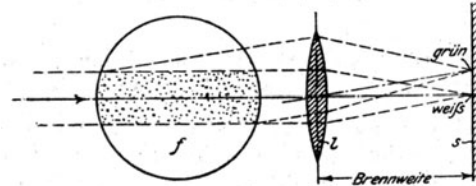


Abb. 97. Beugungserscheinungen.

s, der in der 250 mm betragenden Brennweite aufgestellt wurde, konzentrische Farbenringe, deren Halbmesser wie folgt ermittelt wurden:

Auf den hellen Mittelfleck folgend:	Unterdruck der Ausdehn. mm Quecksilber	Äußerster Halbmesser mm
Erstes Violett	35 bis 40	55 bis 60
„ Grün	70 „ 80	60 „ 80
„ Rotgelb	95 „ 110	45 „ 50
„ Rot	120 „ 130	45 „ 50
Zweites Violett	150	40
„ Grün	200	30
„ Rot	300	30
Drittes Violett	460	30

Der Barometerstand betrug im Mittel 720 mm.

Dabei folgt auf einen innersten roten Ring ein äußerer grüner und ein äußerster violetter Ring, und so stets in dieser Reihenfolge. Beim Vorschalten eines roten Glases vor die Flasche erschien nach dem helleren Mittelfleck ein ganz isolierter Ring als erstes Maximum, mit einem Halbmesser von ungefähr gleicher Größenordnung wie die oben angegebenen. Es dürfte hiernach zulässig sein, wenigstens für den innersten Ring die Formel des einfarbigee Lichtes mit der entsprechenden Wellenlänge zu benutzen, und es wird z. B. für das erste Violett $\sin\vartheta = 60 : 250 = 0{,}24$, daraus mit $\lambda = 4 \cdot 10^{-5}$ cm der Halbmesser des Tropfens $r = \frac{0{,}81 \cdot 4 \cdot 10^{-5}}{0{,}24} = 1{,}35 \cdot 10^{-4}$ cm und für das erste Rot mit $\lambda = 6 \cdot 10^{-5}$ cm, $r = 2{,}43 \cdot 10^{-4}$ cm.

Diese Zahlen erhalten eine Bekräftigung durch die Beobachtung der **Fallgeschwindigkeit der Nebeltröpfchen;** bei scharfer Bogenlichtbeleuchtung sieht man in der Tat die obere Begrenzung des Nebels in Begleitung leicht wallender Bewegung langsam herabsinken. Nach der Formel von Stokes, die J. J. Thomson zu seiner interessanten Bestimmung des elektrischen Elementarquantums benutzt hat, ist der Tropfenhalbmesser

$$r = \sqrt{\frac{9}{2}\,\frac{\eta c}{\gamma}}\,,$$

wo c die Fallgeschwindigkeit in m/sek,
γ das spezifische Gewicht (kg/cbm),
η die Reibungszahl der Luft, nach der „Hütte" $= 1{,}69 \cdot 10^{-6}$ kg/m² sek bei 0° C,

bedeutet. Die Fallgeschwindigkeit war im ersten Augenblicke groß, bis 8 mm/sek, wo offenbar die ganz großen Tropfen zuerst sanken. Dann wurde sie ziemlich unveränderlich und wechselte zwischen etwa 2 und 0,5 mm/sek, was für r die Werte $3{,}9 \cdot 10^{-4}$ bis $1{,}9 \cdot 10^{-4}$ cm, also was die Größenordnung anbelangt, Übereinstimmung mit dem Obigen ergibt.

Hieraus könnte mit der zu berechnenden Menge des Niederschlages leicht die Zahl der vorhandenen Kerne ermittelt werden. Es sei erwähnt, daß Aitken durch besondere Messungen zu folgenden Werten gelangte:

Kernzahl in 1 ccm

Zimmerluft	3000000	Luft auf dem Lande	50000
Luft in London	100000	„ in Bellagio (Comer See)	3000
„ „ Paris	210000	„ auf Rigikulm	210

Wilson schließt aus seinen Versuchen, daß bei achtfacher Übersättigung 10^8 Tropfen in 1 ccm gebildet wurden. Farbenringe können nur auftreten, solange $\sin\vartheta < 1$, also $r > 0{,}81\,\lambda$ ist.

Wir untersuchten nun gleicherweise die sich in der Düse bildende Trübung optisch. Zu diesem Zwecke wurde eine auf zwei Seiten durch geschliffene parallele Glasplatten begrenzte Düse hergestellt, um eine Störung durch die unvollkommene Gleichmäßigkeit und die Krümmung der kegeligen Düsenwandung auszuschließen. Es konnte indessen innerhalb 5 at abs. Anfangs- und 1 at Enddruck auch nicht die geringste Andeutung einer Färbung wahrgenommen werden. Hieraus folgt, daß die Trübung in der Düse innerhalb der angegebenen Expansionsgrenzen durch Tropfen gebildet wird, deren Halbmesser kleiner ist als der oben angegebene Grenzbetrag, so daß füreviol ttes Licht

$$r < 3 \cdot 10^{-5}\,\text{cm}$$

sein muß. Die kleinste vorkommende Tropfengröße kann aus der optischen Beobachtung nicht abgeleitet werden und beginnt, theoretisch genommen, schon mit dem Zusammenhaften zweier Wassermoleküle.

Auf alle Fälle erhellt aus der relativen Kleinheit der oberen Halbmessergrenze, daß wir es während des Strömungsvorganges mit Tropfen von außergewöhnlich kleinen Abmessungen zu tun haben. Bei diesen spielen die kapillaren Oberflächenkräfte eine wichtige Rolle.

g) Unterkühlung und Kapillarkräfte.

Das Gleichgewicht zwischen einem Tropfen (Abb. 98) und der ihn umgebenden Dampfatmosphäre kann nur bestehen, wenn in der Zeiteinheit die Zahl der vom Tropfen infolge seiner eigenen Molekularbewegung weggeschleuderten Moleküle gleich ist der Zahl derjenigen, die aus der Dampfumgebung auf ihn niederstürzen und von ihm festgehalten werden. Die Zahl der ersteren ist bei der konvex gekrümmten Oberfläche eine größere als bei einer ebenen Spiegelfläche. Bedeutet nämlich ϱ in Abb. 98 den Abstand, auf den die Anziehung zwischen zwei Molekülen wirksam ist, so ist das in der Oberfläche liegende Molekül A der Anziehungskraft aller im schraffierten Raum enthaltenen Flüssigkeitsteile ausgesetzt. (Von der Anziehung der Dampfatmosphäre darf wegen ihrer mehrere hundertmal kleineren Dichte abgesehen werden.) Beim ebenen Spiegel tritt noch die Anziehung der im punktiert angedeuteten Raum enthaltenen Teile hinzu, ist also größer als beim Tropfen. Da die zufällige örtliche Steigerung der Energie der „thermischen Agitation“ nur von der Temperatur abhängt, wird sie beim Tropfen früher, also häufiger den Betrag erreichen, der hinreicht, um das Molekül entgegen dem Kraftfelde der Anziehungskräfte abzuschleudern, die Zahl der von der Einheit der Oberfläche wegfliegenden Moleküle wird größer sein als beim ebenen Spiegel.

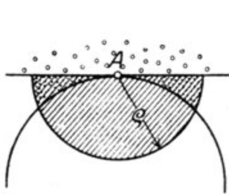


Abb. 98.

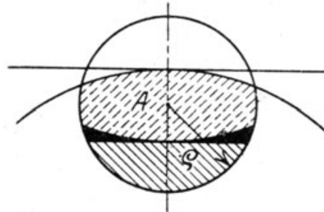


Abb. 98a.

Kapillarkräfte.

Zeichnet man das Molekül in tieferer Stellung unterhalb der Oberfläche (Abb. 98a), so lehrt die Überlegung, daß dort freilich die Anziehung umgekehrt eine größere ist als am ebenen Spiegel, und zwar um den Betrag der von den schwarz angelegten Teilen ausgehenden Kräfte. Im ganzen braucht es, wie wir später nachweisen, trotzdem eine kleinere Arbeit, um das Molekül wegzuschleudern. Die Zahl der aus der Dampfumgebung in die Oberfläche fallenden Moleküle ist aber unter sonst gleichen Umständen der Dampfdichte proportional. Bei gleicher Temperatur von Dampf und Tropfen, die wir wegen des thermischen Gleichgewichtes fordern, muß also die Dampfdichte größer sein als am ebenen Spiegel, **d. h. der Dampf muß unterkühlt sein.** Wäre er gesättigt, so würden mehr Moleküle vom Tropfen abgeschleudert, als auf ihn hinfliegen: in gesättigter Dampfumgebung müssen kleine Tropfen verdampfen.

(Bei großen Tropfen, schon von $^1/_{10}$ mm Durchmesser an gerechnet, ist die Oberflächenkrümmung zu klein, um eine Wirkung auszuüben.) Umgekehrt wird ein großer Tropfen von gleicher Temperatur wie eine übersättigte Dampfumgebung erheblich mehr Moleküle empfangen als er aussendet, der Dampf wird sich dauernd niederschlagen, die Temperatur des Tropfens erhöhen, so daß die von ihm später abgeschleuderten Moleküle durch ihre höhere Temperatur (kinetische Energie) die Dampfumgebung „heizen“, bis sich Gleichgewicht bei der normalen Sättigungstemperatur einstellt, d. h.: **Die Unterkühlung ist ein labiler Zustand, der durch die Gegenwart großer Tropfen (oder eines ebenen Wasserspiegels) unter Temperaturerhöhung in den gesättigten Zustand überführt wird.**

Die Wirkung der vermehrten Massenanziehung beim Tropfen läßt sich, wie die mathematische Physik beweist, durch die Annahme einer in der Oberflächenschicht herrschenden **kapillaren Spannung** ersetzen, die von der Größe des Tropfenhalbmessers merkwürdigerweise unabhängig ist, aber mit steigender Temperatur abnimmt.

Bezeichnen wir bei der gemeinsamen Temperatur T mit

p_s den Sättigungsdruck am ebenen Wasserspiegel in kg/qm,
p den Gleichgewichtsdruck am Tropfen vom Halbmesser r,
$\gamma = p_s/RT$ das Raumgewicht des Dampfes kg/cbm,
γ_0 das Raumgewicht des Wassers in kg/cbm,
σ die kapillare Oberflächenspannung in kg für 1 m Breite,
r den Tropfenhalbmesser in m,

so kann auf thermodynamischem Wege (s. Abschn. 178) die Beziehung

$$\lg n \frac{p}{p_s} = \frac{2\sigma}{\gamma_0 r R T} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

oder für kleine Unterschiede

$$p - p_s = \frac{2\sigma}{r} \frac{\gamma}{\gamma_0 - \gamma} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

abgeleitet werden. Da man nach Volkmann[1])

$$\sigma = 11{,}62 \cdot 10^{-3} - 1{,}45 \cdot 10^{-5} \cdot T \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

in kg für 1 m Breite setzen kann, so ergibt sich für $T = 373$ (= 100° C) mit $R = 47{,}1$, $\gamma_0 = 1000$ und $\sigma = 6{,}41 \cdot 10^{-3}$ kg/m die Tabelle.

Unterkühlungsdruck.

r in m	10^{-9}	$2 \cdot 10^{-9}$	$5 \cdot 10^{-9}$	10^{-8}	10^{-7}	10^{-5}
r in mm	10^{-6}	$2 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-6}$	10^{-5}	10^{-4}	10^{-2}
p/p_s	2,074	1,440	1,157	1,076	1,007	1,00007

Ein Unendlichwerden des Druckes ist ausgeschlossen, da die Kapillargesetze nicht bis zur Molekulargröße hinab gelten, und auch das Molekül selbst endlich bleibt (für Wasser ist beispielsweise mit dem spezifischen Gewicht $\gamma_0 = 1000$ gerechnet, $r_0 = 1{,}85 \cdot 10^{-10}$ m $= 1{,}85 \cdot 10^{-7}$ mm).

Durch später (in Abschn. 178) zu gebende Betrachtungen wird klar gemacht, daß diese Oberflächenspannung mit einer Vermehrung der inneren Flüssigkeitsenergie, ebenso mit einer Zunahme der Entropie verbunden ist. Hier sei vorläufig so viel angeführt, daß wahrscheinlich die Unterkühlung bis zum und etwas hinter dem engsten Querschnitt einer Düse eine nahezu vollkommene ist. Da aber, wie in Abschn. 40 nachgewiesen wurde, die Energieverluste bis zum engsten Querschnitt kaum 2 v. H. ausmachen, darf als Ausdehnungsgleichung des Dampfes die Formel

$$p v^k = \text{konst.} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

mit $k = 1{,}3$ bis zum engsten Querschnitt benutzt werden. Bei längerem Düsenhals würde man nach Bedarf von den Gleichungen der polytropischen Ausdehnung in Abschn. 23 Gebrauch machen

h) Entwurf einer Düse mit Rücksicht auf die Unterkühlung.

Gemäß der eben gemachten Bemerkung wird der engste Querschnitt auf Grund der Ausflußgesetze des überhitzten Dampfes berechnet, einerlei, welches der Anfangszustand ist. Mit Rücksicht auf die Verluste verwendet man den Bendemannschen Beiwert $\chi = 2{,}03$, so daß aus

$$G_{sk} = \chi f_m \sqrt{\frac{p_1}{v_1}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (5)$$

der engste Querschnitt zu berechnen ist. Mit sinusförmiger Meridianlinie nach Bachmann dürfte eine Erhöhung von χ auf etwa 2,05 möglich werden.

In der Erweiterung findet bei gesättigtem Anfangszustand, wie wir gesehen haben, eine teilweise Kondensation statt, demnach bleibt am Düsenende eine gewisse Unterkühlung bestehen. Nach von mir veranstalteten Versuchen (s. Abschn. 178) wäre zu folgern, daß

bei 7,5 facher Ausdehnung eine Unterkühlung von 8° C,
„ 20 facher „ „ „ „ 3° C

am Düsenende zu erwarten ist. Für andere Ausdehnungsgrenzen würde man sie nach diesen Zahlen einzuschätzen haben.

Ist p_2 der vorgeschriebene Enddruck mit der Sättigungstemperatur t_{s2}, so ist die wahre Temperatur

$$t_2 = t_{s2} - \tau \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (6)$$

wo τ die „Unterkühlung" bedeutet.

Am anschaulichsten werden die Verhältnisse im pv-Diagramm (Abb. 99) dargestellt. Darin bedeutet A_1 den etwa auf der Sättigungskurve gelegenen Anfangszustand. Linie $A_1 A'_n A'_{2n}$ bedeutet die gewöhnliche Adiabate

$$p v^k = C \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (7)$$

[1]) Wied. Annal. N. F. 56, 1895, S. 457.

mit $k = 1{,}135$. Die Linie $A_1 A'_u A'_{2u}$ möge hinwieder die Adiabate der vollständigen Unterkühlung mit der Gleichung

$$pv^{k'} = C' \quad \text{und} \quad k' = 1{,}3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

darstellen.

Die Adiabate in der Wirklichkeit würde bis unterhalb A_u' mit derjenigen der vollständigen Unterkühlung übereinstimmen und möge, wie punktiert angedeutet, in A_2' endigen.

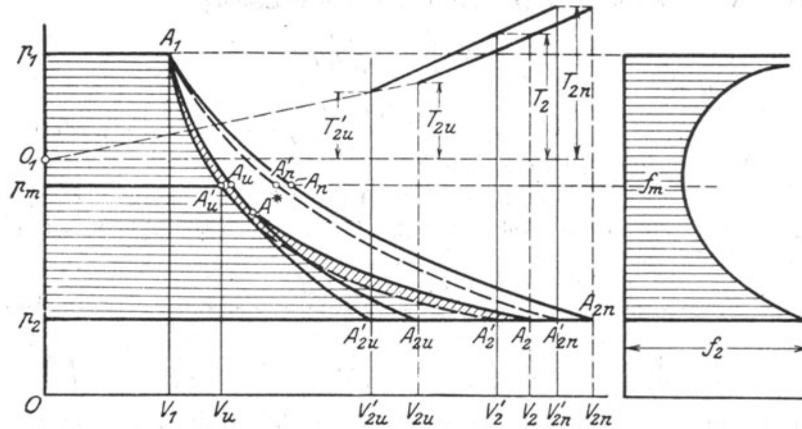


Abb. 99. Unterkühlung in erweiterten Düsen.

Die wirklichen Ausdehnungslinien werden wegen der Reibung in allen drei Fällen unter Rauminhaltszunahme rechts von den Adiabaten verlaufen, und zwar gemäß

$A_1 A_u A_{2u}$ mit vollständiger Unterkühlung,
$A_1 A_u A_2$ „ teilweiser „
$A_1 A_n A_{2n}$ „ normaler Kondensation.

Die Zunahme des Rauminhaltes für den 1. und 3. Fall wird rechnerisch oder mit der Entropietafel ermittelt. Für die wirkliche Ausdehnungslinie ist die Temperatur der Unterkühlung nach den oben gemachten Angaben einzuschätzen und kann wie folgt zur Festlegung der Lage der Endpunkte A_2' und A_2 benutzt werden.

Über A'_{2u} und A'_{2n} werden die ermittelten adiabatischen Temperaturen aufgetragen. Die wahre Endtemperatur ist im 1. Fall dem Rauminhalte verhältnisgleich, d. h.

$$\frac{T_{2u}}{T'_{2u}} = \frac{v_{2u}}{v'_{2u}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

so daß, wie die Hilfsfigur angibt, T_{2u} von O_1 aus durch den projizierenden Strahl ausgeschnitten wird. Im Fall 3 nehmen wir Sättigung, also $T_{2n} = T'_{2n}$ an. Für Zwischenunterkühlung wird man angenähert linear interpolieren dürfen; schneidet man mit dem angenommenen T_2 in die Temperaturlinie ein, so ergeben die Lote auf p_2 die gesuchten Punkte A_2' und A_2. Danach würde man in der Gegend von A^* die wahre Zustandslinie an die Linie $A_1 A_u$ anschließen und nach Schätzung zu A_2 hinführen. Die wagerecht schraffierte Fläche stellt die verfügbare Arbeit der Adiabate dar. Von dieser ist in erster Linie der schräg schraffierte Anteil, sodann noch ein weiterer Bruchteil ζ wie bei normalen Düsen als kinetischer Verlust abzuziehen. Hierauf kann für einige durch wagerechte Linien gebildete Abschnitte die Größe der Zwischenarbeit, daraus die Strömungsgeschwindigkeit und aus dem vorgeschriebenen Gewicht der Düsenquerschnitt nach Gleichung

$$f = \frac{Gv}{w} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

berechnet werden, dessen Verlauf in der Hilfsfigur rechts angegeben wurde. Der engste Querschnitt ist bereits durch Gl. (5) bestimmt. Dabei müßte allerdings die Zunahme des Rauminhaltes $P_m A_u$ im Einklange stehen mit der Annahme über den Beiwert χ in Gl. (5).

Abgesehen vom Fehlen genügender Erfahrungsunterlagen, befriedigt das beschriebene Verfahren auch deshalb nicht, weil, wenn man genau sein will, die ungleiche Verteilung der Geschwindigkeit über den Querschnitt (s. Abschn. 175) zu berücksichtigen ist. Eine auf thermodynamischen Betrachtungen fußende Berechnung wird in Abschn. 179a erläutert.

42. Schallschwingungen beim Ausströmen aus einer erweiterten Düse ins Freie.

Der aus einer erweiterten Düse austretende Strahl weist dieselben Schwingungserscheinungen auf, wie bei der einfachen Mündung. In Abb. 100 ist der Druckverlauf für den aus einer

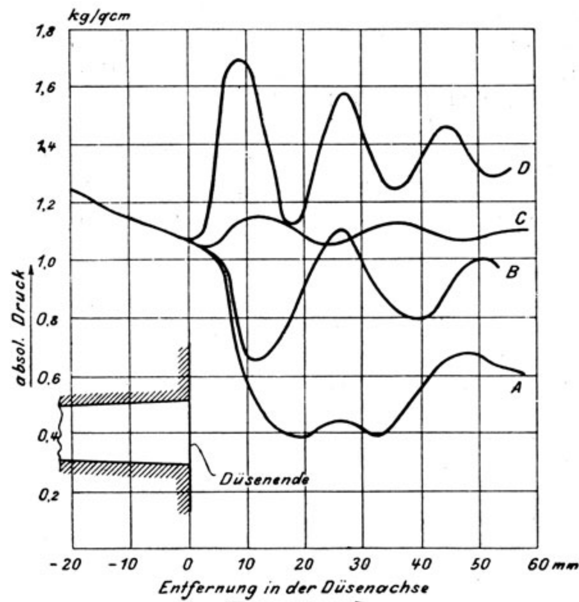


Abb. 100. Schallschwingungen außerhalb einer Düse.

Düse von ungefähr 7 auf 12 mm Weite in den Hohlraum einer Bombe austretenden Strahl dargestellt. Wurde Vakuum eingestellt, so expandierte der Dampf gemäß Kurve *A*; — bei geringerem Unterdrucke gemäß *B*. Der allerkleinste Überdruck wie bei *C* veranlaßte schon kleine

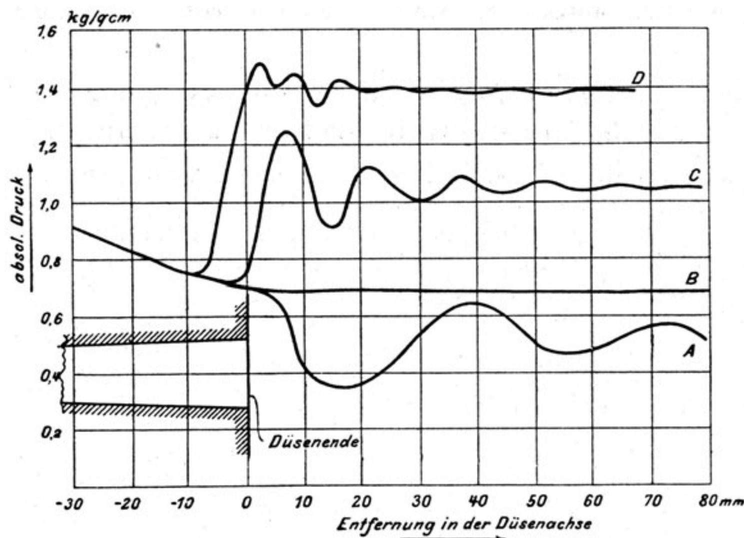


Abb. 101. Schallschwingungen und Verdichtungsstoß am Ende einer Düse.

Schwankungen, bei etwas größerem Überdrucke erschienen die sehr ausgeprägten Schallschwingungen gemäß Schaulinie *D*. In Abb. 101 ist eine zweite Versuchsreihe dargestellt, wobei sich sehr regelmäßige Schallschwingungen nach Kurve *A* ergaben. Bei *B* gelang es, den Gegendruck so einzustellen, daß jede Spur einer Schwingung verschwand. Linie *D* entspricht schließlich einem so hohem Gegendruck, daß sich der Stau in das Innere der Düse

erstreckt und die Schwingung wohl zufolge dieses Umstandes bedeutend geringere Intensität aufweist wie im ersten Versuche. Der Verlauf der regelmäßigen Ausdehnung im Innern der Düse wird durch den Gegendruck nicht beeinflußt, und es treten dortselbst keine Schwingungen auf.

Aus diesen Versuchen ist die Folgerung zu ziehen, daß der Dampf in der Düse zunächst unabhängig vom Gegendrucke nahezu adiabatisch expandiert. Strömt der Strahl in einen Raum aus, in dem ein Gegendruck herrscht, der dem Enddrucke der Expansion genau gleich ist, so ändert sich die Pressung im Strahl nicht. Ist der Gegendruck niedriger, so entstehen Schallschwingungen, wie bei der einfachen Mündung; ist der Gegendruck zu hoch, so entsteht ein Dampfstoß mit mehr oder weniger stark ausgeprägten Schwingungen. In letzterem Fall ist auf Grund der Darlegungen in Abschn. 33 anzunehmen, daß der Strahl sich von der Wand ablöst. Die Abwesenheit jeder Druckschwankung einer Ausdehnungslinie ist umgekehrt ein weiterer Beweis dafür, daß der Strahl den Querschnitt vollständig ausfüllt.

Das Vorhandensein von Schwingungen beim Austritte des Dampfes aus Düsen haben auch schon Oberingenieur Kienast, Prof. Gutermuth und P. Emden beobachtet. Über die Versuche des letzteren wurde von A. Fliegner in der Schweiz. Bauzeitung 1903, Bd. XLI, S. 173 berichtet. Die von Emden benutzte Düse hatte eine Weite von 5,5 auf 11 mm bei etwa 30 mm Länge, sie war mithin für einen Anfangsüberdruck von bis zu 5 kg/qcm und atmosphärischen Gegendruck viel zu stark erweitert, und dieser Umstand, unterstützt durch den scharfen Ansatz beim Eintritt, läßt es nach obigem begreiflich erscheinen, daß der Strahl, wie aus den Lichtbildern hervorgeht, sich von der Düsenwand ablöste. Eine Übertragung der sich hieraus ergebenden ungünstigen Folgerungen auf richtig bemessene Düsen ist, wie unsere Versuche beweisen, unstatthaft.

Für unendlich kleine Schwankungen des Druckes und der Geschwindigkeit während der beschriebenen Schallschwingung in freien Strahlen gelang es Prandtl, die hydrodynamischen Gleichungen zu integrieren[1]) und die Wellenlänge λ zu bestimmen. Er findet für eine kreisrunde Mündung vom Durchmesser d, aus der der Dampf mit der mittleren Geschwindigkeit w_m ausströmt, während c die dem Dampfzustande entsprechende Schallgeschwindigkeit ist.

$$\lambda = 1{,}307\, d \sqrt{\frac{w_m^2}{c^2} - 1}\,.$$

Gegenüber der von R. Emden für Luft aufgestellten Formel liefert die Gleichung von Prandtl eine rd. 1,35 mal so große Wellenlänge. Bei einem flachen Strahl von der Höhe h und sehr großer Breite ist der Beiwert vor dem Wurzelzeichen $2h$. Aus der Formel geht die wichtige Tatsache hervor, daß **Schwingungen nur auftreten können, wenn die mittlere Geschwindigkeit des Strahles über der Schallgeschwindigkeit liegt.**

42a. Prandtls Untersuchungen über die Vorgänge bei Überschallgeschwindigkeit in freien Luftstrahlen.

Prandtl[2]) gibt für die Erscheinungen der Strömung, die an einer Austrittskante einer theoretisch unendlich weiten Düse (Abb. 102) bei Überschallgeschwindigkeit stattfinden, folgende mathematische Lösung. Beim Übergang von höherem zu kleinerem Druck ($p_1 > p_2$) geht von der Kante eine keilförmige Verdünnungswelle aus, wobei bemerkenswerterweise die Pressung in allen Punkten eines von der Ecke ausgehenden Fahrstrahles die gleiche ist. Hingegen ist selbstverständlich senkrecht zur Strömungslinie das durch die Krümmung geforderte Druckgefälle vorhanden. Bis zum Strahle OA_1 bleibt die Strömung ungestört, im Raume A_1OA_2 sind die Bahnen gekrümmt, und die Pressung nimmt ab. Rechts vom Strahle OA_2 ist die Strömung wieder geradlinig, der Druck dem der Umgebung gleich.

Bei adiabatischer Ausdehnung nach der Gleichung

$$p v^k = p_0 v_0^k \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

wenn $p_0\, v_0$ sich auf den Zustand vor der Düse beziehen, ist die Gleichung der Stromlinien[3]) in den Polarkoordinaten r, φ (Abb. 102)

$$r = \frac{r_k}{(\cos\varphi \sqrt{\lambda})^{\frac{1}{\lambda}}} \quad \text{mit } \lambda = \frac{k-1}{k+1} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

---

[1]) Physik. Zeitschr. 1904, S. 599f.

[2]) Physik. Zeitschr. 1907, 8. Jahrg., S. 23, der auch die Abb. 110 u. ff. entnommen sind.

[3]) Nach den Gleichungen Prandtls, die wir in Abschn. 167 behandeln, rechnerisch ausgearbeitet von Th. Meyer in Mitteil. üb. Forsch.-Arb. Berlin 1908, Heft 62, S. 16.

Der Winkel φ wird von dem Fahrstrahl $OA_0 = r_k$ gerechnet, der zur Stromlinie senkrecht steht. Die Strömung hat die Eigenschaft, daß in jedem Punkt die Umfangskomponente der Strömung w_u der dem dortigen Zustand entsprechenden Schallgeschwindigkeit

$$w_u = \sqrt{kgpv} \quad \ldots \quad (3)$$

gleich ist; w selbst ist die adiabatische Geschwindigkeit, die der Ausdehnung von p_0 auf p zukommt. Daher gilt für die Winkel $\psi_1\ \psi\ \psi_2$

$$\cos\psi_1 = \frac{w_{u1}}{w_1};\ \cos\psi = \frac{w_u}{w};\ \cos\ \psi_2 = \frac{w_{u2}}{w_2} \quad \ldots \quad (4)$$

Die Strahlablenkung ϑ ergibt sich als der Unterschied der Neigung von w_2 und w_1. Die erstere ist von OA_0 gerechnet $= \varphi_2 + \left(\frac{\pi}{2} - \psi_2\right)$ und die letztere $\varphi_1 + \left(\frac{\pi}{2} - \psi_1\right)$, daher erhält man

$$\vartheta_{1-2} = (\varphi_2 - \psi_2) - (\varphi_1 - \psi_1) \text{ oder } = \nu_2 - \nu_1 \quad \ldots \quad (5)$$

wenn man die Bezeichnungen

$$\nu_2 = \varphi_2 - \psi_2;\ \nu_1 = \varphi_1 - \psi_1 \quad \ldots \quad (6)$$

einführt. Der allgemeine Wert von ν ist als Abhängige des Ausdehnungsverhältnisses p/p_0 nach Th. Meyer für Gase ($k = 1{,}405$) in Abb. 103 samt den dazu gehörenden Werten von φ und ψ dargestellt. In die gleiche Abbildung sind nach Christlein[1]) die Werte von ν für überhitzten und gesättigten Dampf eingetragen. Ferner veranschaulicht Abb. 104 die Stromlinien maßstäblich für trocken gesättigten Zustand vor der Düse[2]) (wobei p_2 den Gegendruck und p_1 den Druck vor der Düse bedeutet). Die Fahrstrahlen r sind

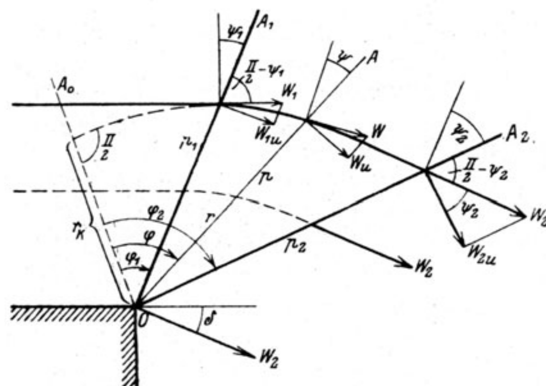


Abb. 102. Prandtlsche Strömung.

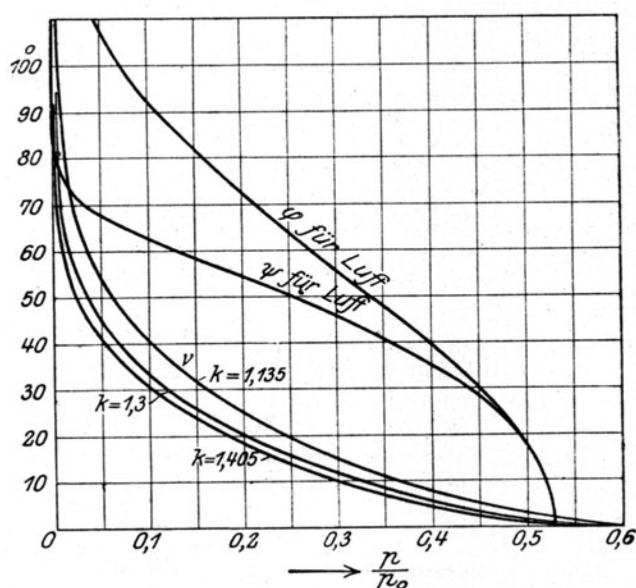


Abb. 103. Randwinkel bei freier Strahlausdehnung.

als Vielfache von r_k aufgetragen. Die bei P_0 beginnende halbkreisförmige Kurve liefert das zum Winkel φ gehörende Ausdehnungsverhältnis.

Die Stromlinien werden für Gase auf Grund dieser Hilfsmittel wie folgt aufgezeichnet: Vorgeschrieben ist p_0, p_1 (am Ende der mit Parallelaustritt versehenen oder erweiterten Düse), p_2. Man berechnet nach (3) die Schallgeschwindigkeit w_{u1} und w_1. Nach (4) den Winkel ψ_1, der den Fahrstrahl OA_1 in Abb. 102 liefert. Aus Abb. 103 entnimmt man den Winkel φ_1 und erhält den Strahl AO_0. In gleicher Weise liefert p_2/p_0 die Größen ψ_2, φ_2, also die Lage von OA_2. Aus Gl (2) folgt dann das Verhältnis der Fahrstrahlen $r_2/r_1 = \cos\sqrt{\lambda}\cdot\varphi_1/\cos\sqrt{\lambda}\cdot\varphi_2$. Bei anfänglich gesättigtem Dampf braucht man in Abb. 104 nur mit dem Expansionsverhältnis in die Polarkurve P einzuschneiden, um OA_1 und OA_2 zu erhalten. Der zu rechnende Winkel ψ_1 bestimmt die Lage der Düsenachse gegenüber OA_1.

---

[1]) Unters, üb. d. Verhalten v. Geschwindigkeitskoeff. Dissert. München, Oldenbourg, 1911.

[2]) Nach Zerkowitz, Zur Beurteilung der Leitvorrichtungen. Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1917, S. 869.

Angenäherte Bestimmung des Randwinkels bei nicht ebener Strömung.

Wird die ebene Strömung nicht durch vorgelagerte Wände erzwungen, so weist der Strahl allseitig auseinanderstrebende Bahnen auf. Die schiefgerichteten Geschwindigkeiten können bei Vernachlässigung der Widerstände aus dem adiabatischen Gefälle berechnet werden. Die

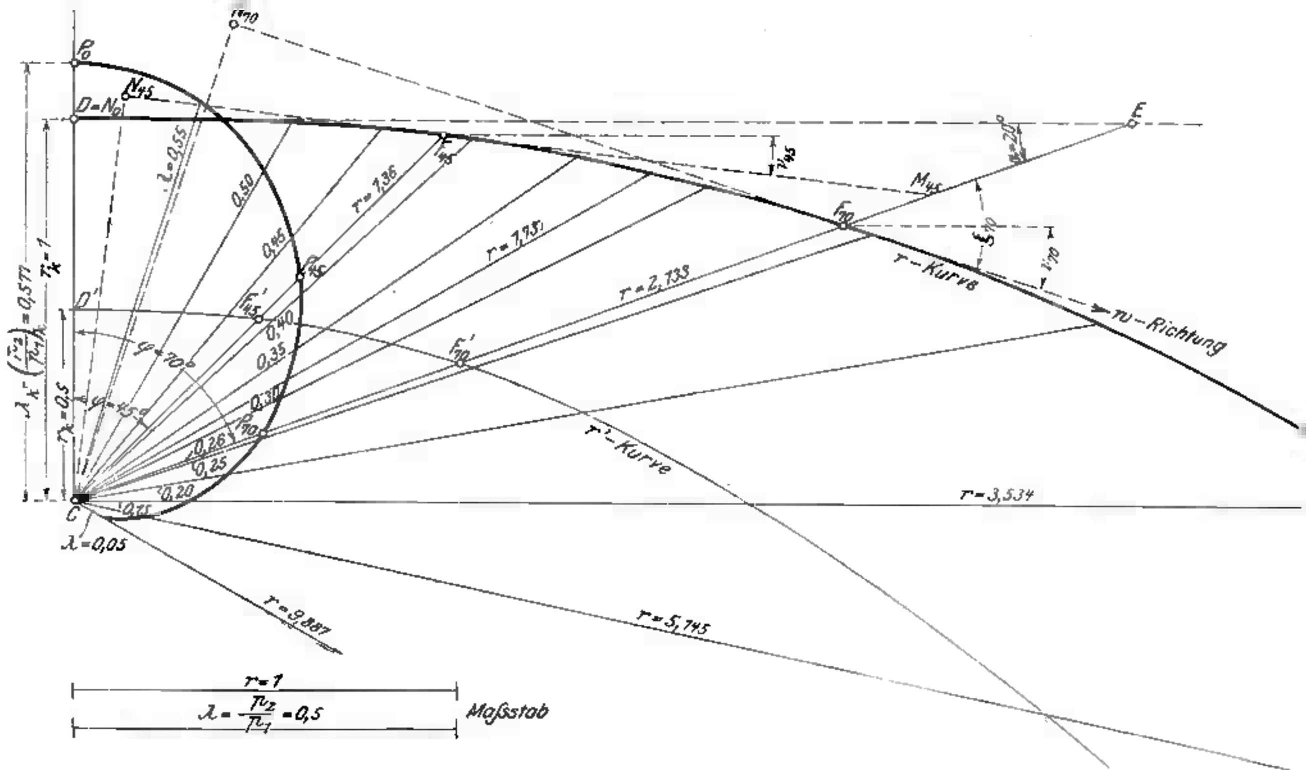


Abb. 104. Stromlinien für gesättigten Dampf.

mittlere axiale Geschwindigkeit ermittelt sich mit Hilfe des Satzes vom Antrieb, wie wir in Abschn. 43a zeigen. Die kinetische Energie der axialen Strömung ist um die kinetische Energie der zur Achse senkrechten Geschwindigkeitskomponenten kleiner als die gesamte Energie und erlaubt Schlüsse auf die Größe jener seitlichen Komponenten, mithin auf die Ablenkung. Wir verweisen auf Abschn. 43a, wo am Beispiele einer geraden Mündung die Durchführung dieses Verfahrens veranschaulicht wird.

Der schiefe Verdichtungsstoß.

Es erreiche bei regelrechter Expansion der Druck am Düsenende den in Abb. 105 mit p_2 bezeichneten Wert. Ein theoretischer gerader Verdichtungsstoß soll den Druck auf p_3 zu

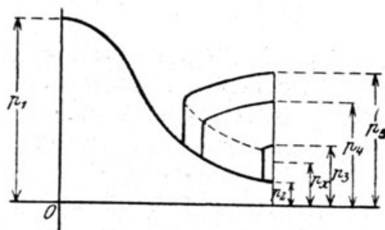


Abb. 105. Gebiet des schiefen Stoßes.

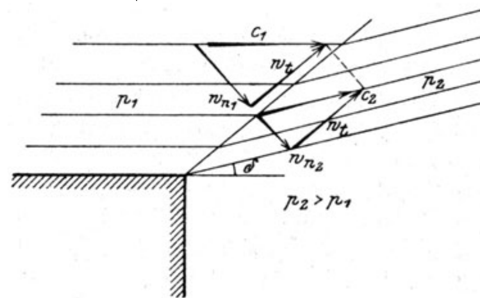


Abb. 106. Der schiefe Verdichtungsstoß.

steigern vermögen. Stellen wir jedoch in der Umgebung einen Druck p_x ein, der zwar größer als p_2, aber kleiner als p_3 ist, so kann sich der gerade Stoß nicht ausbilden, und doch wird, wie die Erfahrung zeigt, der Gegendruck überwunden. Die Lösung zeigt Abb. 106, wo die Be-

zeichnung, um Übereinstimmung mit Meyer[1]) zu erzielen, abgeändert wurde. Es tritt ein schiefer Verdichtungsstoß ein, bei dem von der Strömungsgeschwindigkeit c_1 nur die zur Stoßebene senkrechte Komponente w_{n1} zum Stoße gelangt und auf den Betrag w_{n2} herabgesetzt wird, während die Parallelkomponente w_t unverändert bleibt. Die aus w_{n2} und w_t zusammengesetzte resultierende Geschwindigkeit c_2 ist somit um einen gewissen Winkel δ gegen die alte Strömungsrichtung geneigt. Das Strömungsbild sieht aus, als ob eine „Strahlenbrechung" stattgefunden hätte.

Die Winkelabweichung kann nach Meyer wie folgt ermittelt werden. Als bekannt sind am Düsenende p_1, v_1, c_1 anzusehen. Dann ist

$$\left.\begin{aligned} w_{n1}^2 &= [(k-1)p_1 + (k+1)p_2]\frac{v_1 g}{2} \\ \frac{w_{n2}}{w_{n1}} &= \frac{[(k-1)p_2 + (k+1)p_1]}{[(k-1)p_1 + (k+1)p_2]} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6a)$$

Mit den hieraus berechneten Werten von w_{n1}, w_{n2} ergibt sich $w_t^2 = w_{t1}^2 = w_{t2}^2 = c_1^2 - w_{n1}^2$; $c_2^2 = w_{n2}^2 + w_t^2$. Bezeichnen α, bzw. β die Winkel, die von w_{n1} und c_1, bzw. von w_{n2} und c_2 eingeschlossen werden, so ist

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{w_t}{w_{n1}}; \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{w_t}{w_{n2}} \quad \ldots\ldots\ldots 6b)$$

und die Winkelabweichung

$$\delta = \beta - \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6c)$$

Die Vorgänge im Freistrahl bei ebener Strömung.

Die Vorgänge in einem mit Überschallgeschwindigkeit aus einer Düse tretenden Freistrahl setzen sich nach Prandtl aus den soeben geschilderten Verdünnungs- und schiefen Stoßwellen wie folgt zusammen.

a) Der Gegendruck ist kleiner als der Düsenenddruck. Nach Abb. 107a geht von jeder Kante aus (da die eine „nichts von der andern weiß") eine Verdünnungswelle im Raume A_1 aus. Dadurch wird in den Räumen $C_1 - C_1$ der Druck der Umgebung hergestellt. Im Raume B_1 durchdringen sich beide Wellen und hierdurch wird nach Steichen[2]) eine weitere Senkung des Drucks auf $p_3 < p_2$ im Raume D vermittelt; eine Fortsetzung der Verdünnungswellen bilden Räume $A_2 - A_2$. Infolge der hohen Geschwindigkeit der Strömung spielt die Umgebung an der Grenze des Strahles gewissermaßen die Rolle einer festen Wand, und die Verdünnungs-

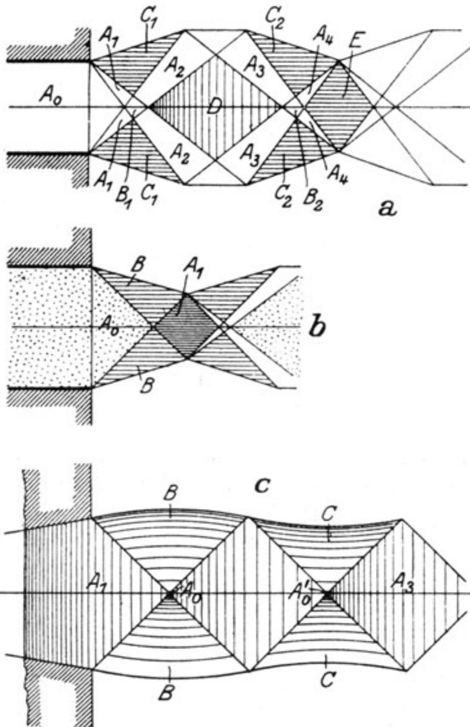


Abb. 107. Prandtls Strahlenbilder bei ebener Bewegung.

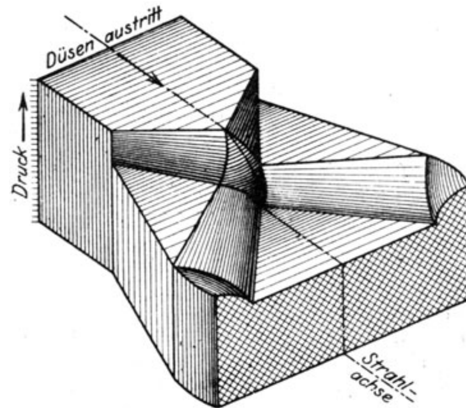


Abb. 108. Körperliche Darstellung des Druckes im Freistrahl.

[1]) Forsch.-Arb., Heft 62, S. 26. [2]) Beiträge zur Theorie der zweidimensionalen Bewegungsvorgänge in einem Gase. Dissert. Göttingen, Kaestner, 1909.

welle wird wie eine Schallwelle reflektiert, so daß in A_3 Verdichtung vor sich geht, und in $C_2 - C_2$ wieder der Umgebungsdruck herrscht. Die Durchdringung in B_2 ruft eine Fortsetzung der Verdichtung in A_4 hervor, so daß in E theoretisch derselbe Druck herrschen würde wie in A_0. Warum die Verdichtung in A_3, A_4 nicht durch einen (unstetigen) Dampfstoß vor sich geht, hat Prandtl nicht erörtert. Von E aus würde sich der Vorgang wiederholen; in Wahrheit wird durch die Reibung am Umfang die Geschwindigkeit allmählich vernichtet. Ein Modell der erläuterten Druckverteilung (bis zum Mittelpunkt von D) wird durch Abb. 108 veranschaulicht.

b) Der Gegendruck ist größer als der Düsenenddruck (Abb. 107b). Von den Kanten gehen zwei schiefe Verdichtungsstöße aus, so daß sich der Strahl einschnürt, und in $B - B$ der Außendruck hergestellt wird. Nach dem unten Mitgeteilten müßte man schließen, daß jenseits des Kreuzpunktes der Verdichtungswellen ein neuer Stoß auftritt und die Pressung im Raume A_1 über den Gegendruck steigert. Von hier aus müßte eine Rückexpansion gemäß Abb. 107a folgen.

c) Der Gegendruck ist dem Düsenenddruck gleich, allein der Strahl ist divergent. Der Strahl ist bestrebt seine Richtung am Rande beizubehalten, er expandiert also zu stark, so daß von den Kanten aus leichte Störungslinien unter dem Machschen Winkel (s. unten) ausgehen. Unter der Wirkung des Gegendruckes beschreiben die äußersten Teile gekrümmte Bahnen, so daß wegen des Zentrifugaldruckes die Pressung im Punkte A_0 auf den Betrag sinkt, den die Fortsetzung der normalen Expansion erzeugen würde. Daraufhin folgt eine Verdichtung, man erklimmt in A_0' den Gipfel einer Druckpyramide, die Außenbahnen sind nach einwärts gekrümmt.

d) Die Prandtlschen Strahlenbilder[1]). Nach einer von Töpfer angegebenen Methode können Dichteunterschiede in Gasstrahlen mit großer Deutlichkeit durch Lichtbilder zum

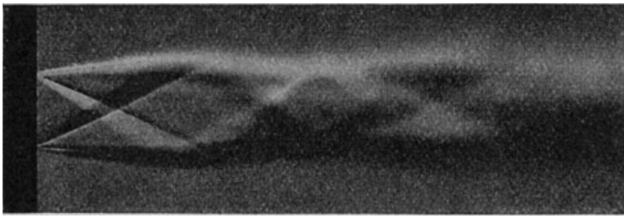


Abb. 109.

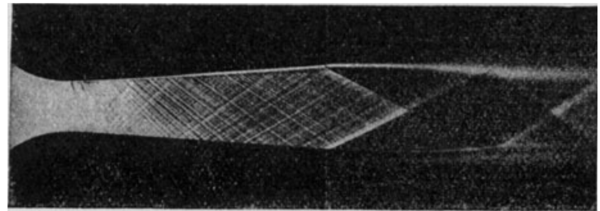


Abb. 111.

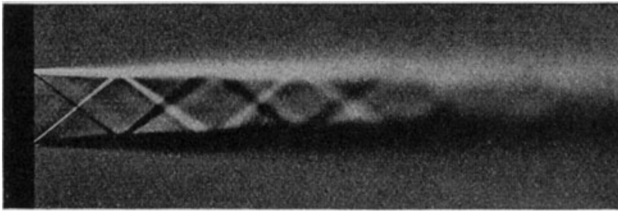


Abb. 110.

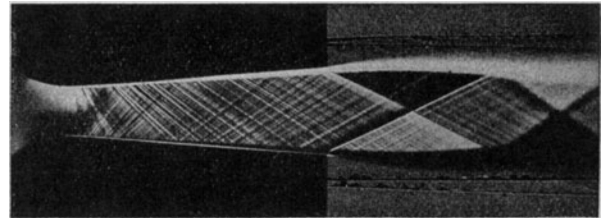


Abb. 112.

Abb. 109 bis 112. Prandtlsche Strahlenbilder.

Ausdruck gebracht werden. So entstand die Abb. 109 eines mit Überdruck austretenden Luftstrahles, die man gewissermaßen als Modell der Druckverteilung ansehen kann, indem man sich vorstellt, daß das Licht in der Ebene der Bilder von oben kommt. Man wird die Übereinstimmung mit Abb. 108, wenn man die „Schatten"verteilung beachtet, leicht bestätigen können.

Abb. 110 betrifft einen mit Unterdruck austretenden, also sich einschnürenden Strahl. Die Erhabenheit der mit A_1 in Abb. 107b bezeichneten Fläche tritt insbesondere beim zweiten Auftauchen derselben klar hervor. Abb. 111 und 112 beziehen sich auf einen mit dem richtigen Druck austretenden, aber divergenten Strahl. In Abb. 112 ist die Beleuchtung dieselbe wie oben, und man erkennt die Pyramidenkuppe A_0 der Abb. 107c. In Abb. 111 hat man sich die Beleuchtung axial von rechts nach links kommend zu denken. In diesen Bildern bestanden die Seitenwände der Düse aus Glas (die Düse reicht bis ans Ende der ganz schwarzen Fläche), so daß man auch die Vorgänge im Innern beobachten kann. Man erblickt ein dichtes System von sich kreuzenden Linien, für die das Folgende die Erklärung bringt.

[1]) Physik. Zeitschr. 1907, 8. Jahrg., S. 23 u. f.

e) Der Machsche Winkel. Man stellte an Lichtbildern von Geschossen eine von der Spitze ausgehende Verdichtungswelle fest, die dadurch entsteht, daß wenn gemäß Abb. 113 das Geschoß mit der Geschwindigkeit w fortschreitet, die größer ist als die Schallgeschwindigkeit (hier mit a bezeichnet), die von der Spitze ausgehende Schallwelle in der Zeit t den Weg at zurücklegt, der vom Wege der Spitze, d. h. wt übertroffen wird. Alle während der Zeit t ausgesandten Schallwellen werden den von der Spitze an die Kugel at gelegten Kegel ausfüllen, für dessen halben Spitzenwinkel wir den Ausdruck

$$\sin \alpha = \frac{a}{w} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

gewinnen. Dieselbe Schallwelle erscheint, falls das Geschoß ruht und die Luft mit der Geschwindigkeit w gegen die Spitze strömt. Man nennt α den Machschen Winkel, der auch in den Abb. 111 u. 112 erscheint. An den betreffenden Düsen wurden die Seitenwände mit einer Feile aufgerauht, so daß jeder einzelne Vorsprung der Strömung gegenüber die Rolle der Geschoßspitze übernahm und Schall-, d. h. Verdichtungswellen, von sehr kleiner Intensität auslöste.

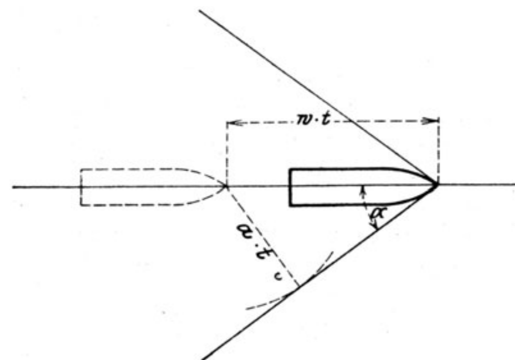
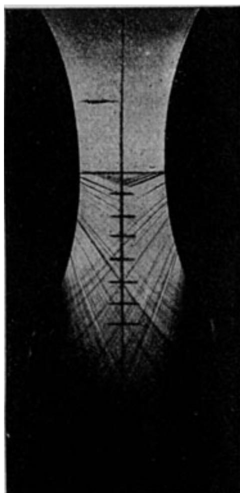
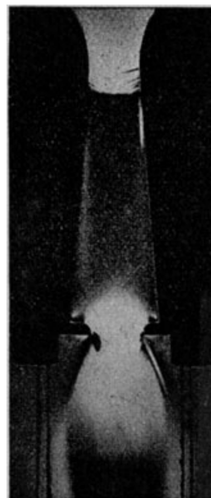


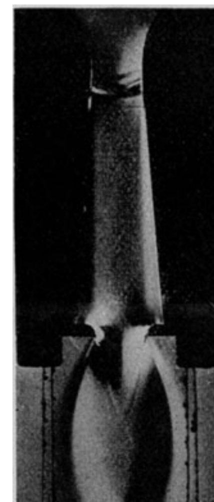
Abb. 113. Die Machsche Verdichtungswelle.

Der Machsche Winkel tritt als Komplement der Winkel $\psi_1 \psi_2$ in Abb. 102 auf; hingegen hat er nichts zu tun mit der Neigung der Verdichtungsebene beim schiefen Stoß (Abb. 106).

Die Machschen Wellen wurden von Meyer[1]) benutzt, um die Vorgänge an der engsten Stelle der Düse genauer zu verfolgen. Die Unebenheiten der Wand können Schallwellen erst dann aussenden, wenn die Strömung die Schallgeschwindigkeit erreicht und überschritten hat. Dabei muß der Machsche Winkel anfänglich ein rechter sein und allmählich zunehmen. Dies wird durch das Lichtbild (Abb. 114) aufs beste bestätigt, welches zugleich mit einer vorher auf Grund der Potentialfunktion theoretisch entworfenen Strömungsform sehr gut übereinstimmt.


Abb. 114. Schallstörungen im Innern der Düse.


Abb. 115.


Abb. 116.

Schlierenbilder des Verdichtungsstoßes.

Gleichfalls aus Prandtls Laboratorium stammt die Arbeit von E. Magin[2]), der die Machschen Wellenzüge zu einer Auswertung der Reibungsverluste benützt. Magin zeigt, daß die Neigung dieser Wellen von derjenigen, die der reibungsfreien Adiabate entspricht, abweicht, und daß die Abweichung nicht durch die Gegenwart der Luftfeuchtigkeit erklärt werden kann. Für eine Düse von 7,3 $\times$ 30 mm Querschnitt an der engsten und 12,8 $\times$ 30 mm

[1]) Mitteil. über Forschungsarbeiten. Berlin 1908. Heft 62, S. 44.
[2]) Mitteil. über Forschungsarbeiten. Berlin 1908. Heft 62.

an der Austrittsstelle bei rund 40 mm Abstand dieser Querschnitte, und einer Ausdehnung von 8,3 kg/qcm auf 1 kg/qcm wird die Einbuße an Geschwindigkeit für Luft zu 1,5 bis 2 v. H. ermittelt. Dies ergibt einen Energieverlust von 3 bis 4 v. H., was in Anbetracht der Kürze der von Magin untersuchten Düse mit anderen Angaben gut übereinstimmt.

f) Lichtbilder des Verdichtungsstoßes. Durch vorgeschraubte Plättchen wurde der Strahl am Austritt gedrosselt. Die Folge war ein Verdichtungsstoß, der in Abb. 115 und 116 klar zum Vorschein kommt. Wie man am Schatten erkennt, ist das erste Bild in der Achsenrichtung, das zweite seitlich „beleuchtet". Die Abschattierung vor dem engsten Querschnitt rührt vom Pressungsunterschied wegen der Krümmung der Bahnen her. Die hellen Streifen in Abb. 116 sind nicht durch Druckunterschiede verursacht, sondern stellen die Erwärmung durch Reibung und Wirbelung am Rande dar.

Die Bedeutung der bewunderungswürdigen Arbeiten Prandtls und seiner Schüler wird aus der Nutzanwendung hervorgehen, zu der dieselben Anregung gegeben haben.

43. Die Ausdehnung im Schrägabschnitt einer Düse; die Strahlablenkung.

a) Beobachtungen. An Beobachtungen liegen aus unserem Prüffeld vor: In Abb. 117 der Druckverlauf (Isobaren) in einer nicht erweiterten Düse von rd. 10 mm lichter Weite, 20 mm Höhe bei 2,51 at abs.

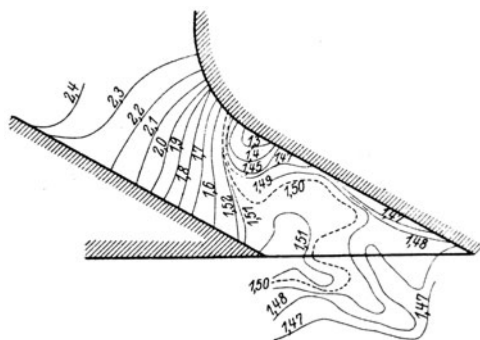


Abb. 117.

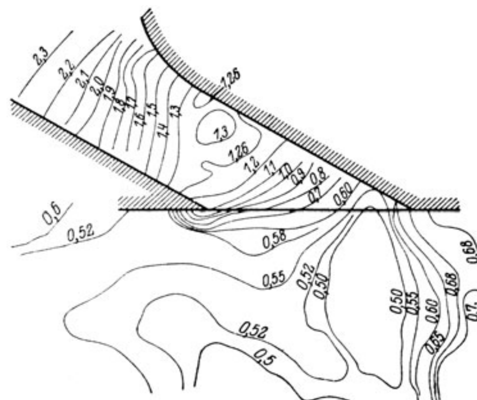


Abb. 118.

Isobaren im Austritt der Paralleldüse.

Anfangsdruck, 198° C Temperatur, und rd. 1,48 at abs. Gegendruck. Die Expansion im Schrägabschnitt ist hier beeinflußt durch die Krümmuug des Einlaufes, der bei den meisten Leitvorrichtungen vorhanden ist, und beim Eintritt in den verengten Teil eine Drucksenkung auf der konvexen Seite veranlaßt. Im übrigen ist der Druck im Schrägabschnitt ziemlich gleichmäßig.

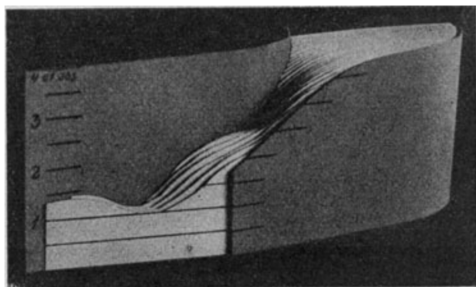


Abb. 118a. Räumliche Darstellung des Druckverlaufes in der Paralleldüse.

Abb. 118 stellt den Druckverlauf in der gleichen Düse bei gleichem Anfangszustand, aber bloß rd. 0,5 at abs. Gegendruck dar. Die Expansion beginnt bereits im geraden Teil, setzt sich im Schrägabschnitt fort und bildet im Auspuffraum ein Tal aus, das in den Schrägabschnitt hineinreicht.

Lichtbild 118a stellt das Raummodell des Druckverlaufes in einer nicht erweiterten Leitschaufel mit $\alpha_1 = 17^0$ und einer stärkeren Ausdehnung, nämlich von 4,5 at abs. Anfangsdruck (gesättigt) auf 1 at abs. als Gegenenddruck. Der Druckverlauf wurde für gleich weit abstehende Ebenen auf Kartonpapier gezeichnet und ausgeschnitten. Man erkennt die Ausbildung von Schwingungen mit einem besonders tiefen Wellental gegen die Mitte des Schrägabschnittes. Unwillkürlich drängt sich der **Vergleich mit einem Wasserfall** auf.

Abb. 119 und 119a beziehen sich auf eine erweiterte Düse mit gekrümmtem Einlauf bei rd. 11 at abs. Anfangs- und 1 at abs. Gegendruck. In Abb. 119 scheint sich bei X der Strahl abgelöst zu haben; der Verlauf in Abb. 119a entstand, als man die Seitenwand gemäß Y geradlinig fortsetzte. Der Druck im normalen Endquerschnitt Z

ist nahezu der theoretische, das Gebiet der Ausdehnung auf den viel kleineren Gegendruck reicht aus dem Schrägabschnitt, wie in Abb. 118, in den Raum außerhalb der Mündung hinaus, wir haben **„Spaltexpansion“**

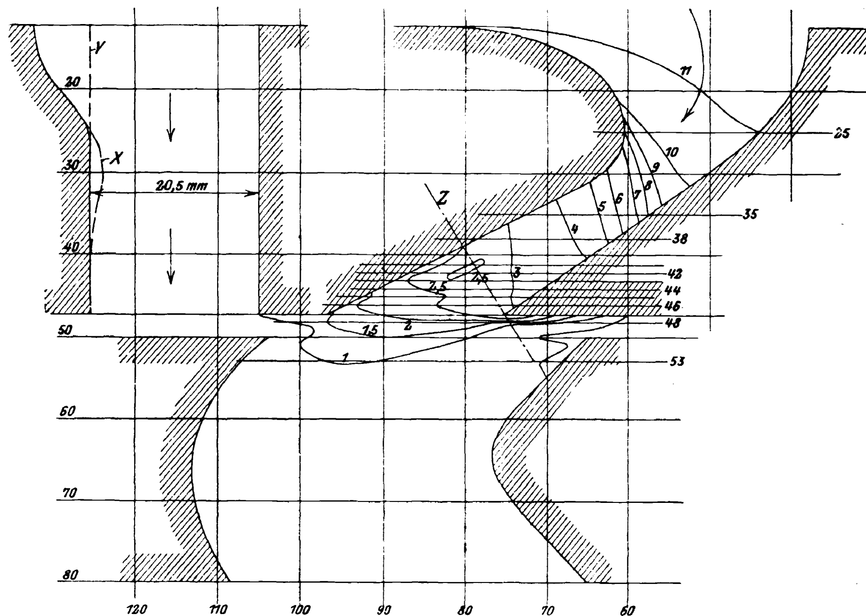


Abb. 119.

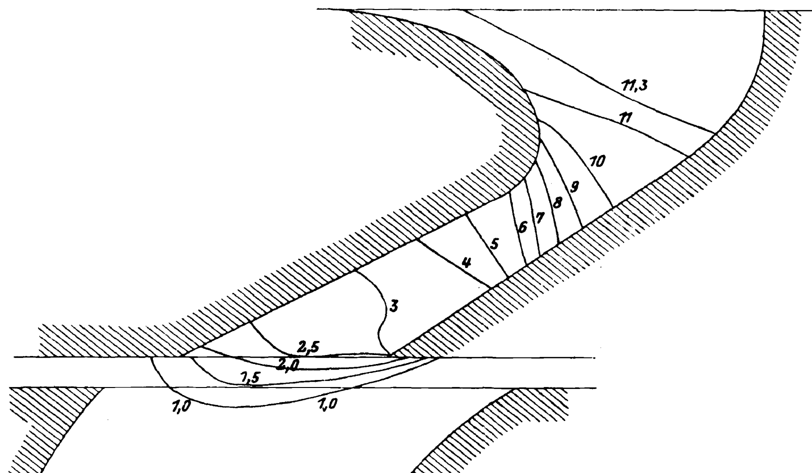


Abb. **119a.**

Abb. 119 und 119a. Isobaren in der erweiterten Düse.

Abb. 120 stammt von Löliger[1]) und betrifft eine Düse mit „Parallelaustritt“, bei der, wie ersichtlich, die hierzu erforderliche Krümmung der oberen Wand zu einer scharfen Verdichtung führt, die sicher eine merkliche Ablenkung des Strahles zur Folge haben wird. Auch das Hinaufverlegen der Richtungsänderung nach Abb. 120a war von keinem Erfolg begleitet. Erst die symmetrische Ausführung nach Abb. 120b brachte schließlich eine Besserung. Die Störungen beim Eintritt in den gleichachsigen Schaufeleintritt verschwanden auch hier nicht.

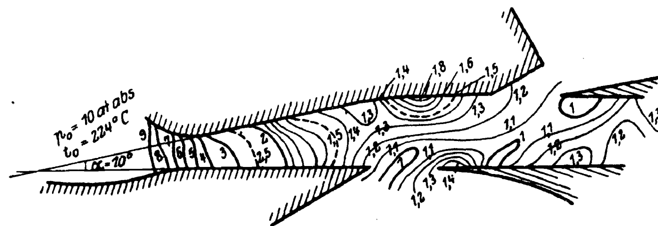


Abb. 120. Isobaren in erweiterter Düse mit Parallelaustritt.

[1]) Dissertation. Zürich 1913.

Die erwähnte Strahlablenkung tritt insbesondere dann auf, wenn am Düsenende gegen die Umgebung ein Überdruck herrscht, wie zuerst Lewicki[1]) beobachtete.

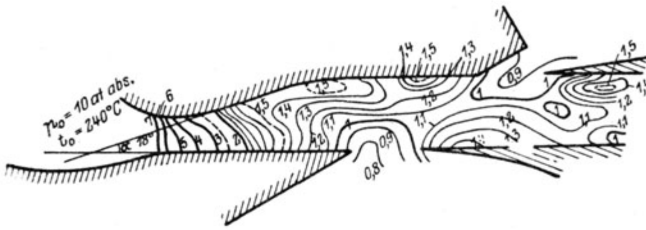


Abb. 120a.

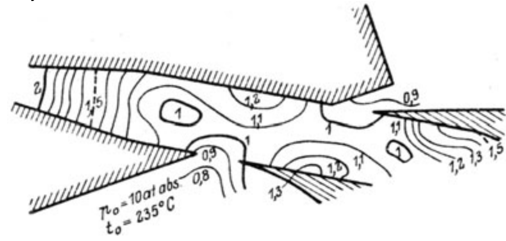


Abb. 120b.

Isobaren bei verschobener Achsenlage.

Abb. 121a stellt das in unserem Laboratorium gewonnene Lichtbild eines aus runder Düse Abb. 121b und 121c, desgleichen eines aus rechteckiger Düse tretenden Dampfstrahles dar, bei rd. 15 at Überdruck vor der Düse. Die mit den seitlichen Bohrungen verbundenen Manometer

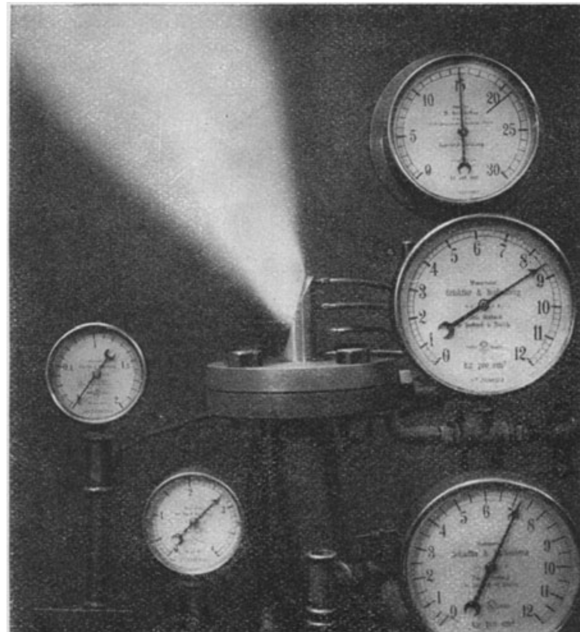


Abb. 121a. **Strahlablenkung bei runden Düsen.**

wurden, wie ersichtlich, mit photographiert. Abb. 121d und 121e veranschaulichen den Druckverlauf bei verschiedenen Anfangsdrücken. Die Abmessungen der nicht erweiterten Düsen und die Ablenkungswinkel (von der Düsenachse aus gerechnet) sind in der nachfolgenden Zahlentafel vereinigt.

Ablenkungswinkel.

Abb.	Düsen		Anfangsdruck p_0	$\frac{p_b}{p_0}$	Ablenkungswinkel	
	Querschnitt	Winkel	at abs.		innen	außen
121b und 121d	15 × 9 mm	18°	5,6 10,7 16,0 18,9	0,178 0,111 0,108 0,105	31 37 46 51	−9 −3 +2 +3
121c und 121e	15 × 15 mm	28°	5,8 10,9 15,8	0,204 0,202 0,202	27 32 44	−5 +7 +3
121f	16 × 16 mm	28°	7,5	—	—	—

[1]) Mitteil. über Forschungsarbeiten. Berlin. Heft 12, S. 73.

Es erwies sich als notwendig, die Außenkante am Ende der Mündung rechtwinkelig abzuschneiden, da sonst der Strahl angesaugt wird. Das Verhältnis p_5/p_0 ist, wie ersichtlich, abhängig von der Weite und dem Düsenwinkel; verlängert man die Drucklinien bis zur Austrittskante,



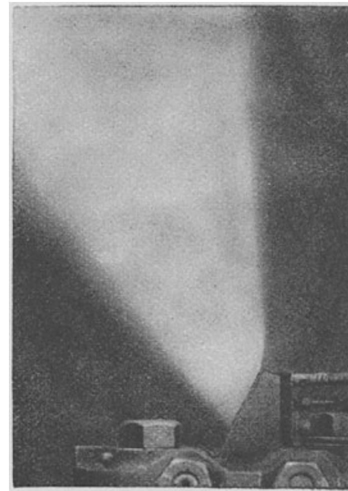


Abb. 121 b. Strahlablenkung bei rechteckigen Düsen. Abb. 121 c.

so scheinen sie alle beim Atmosphärendruck zusammenzutreffen. Die eingeschriebenen Ablenkungswinkel beziehen sich auf die äußersten Dampfteilchen; in Wirklichkeit scheint ein kompakterer Strahl in der Mitte vorhanden zu sein, der in Abb. 121 a klar hervortritt.

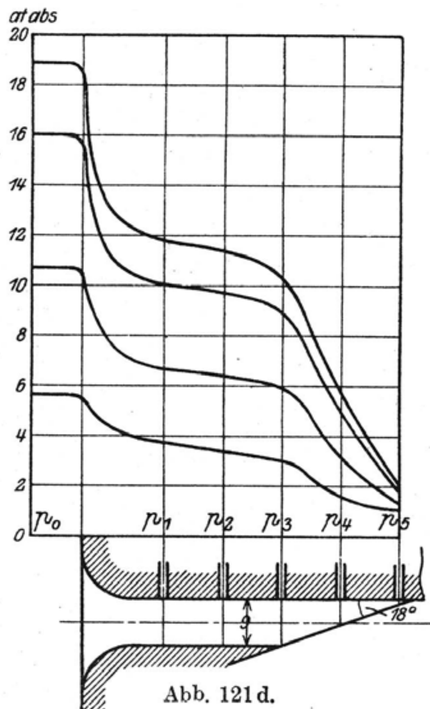


Abb. 121 d.

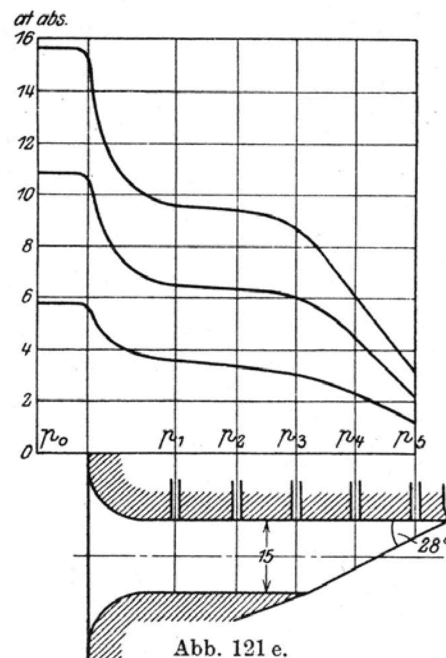


Abb. 121 e.

Druckverlauf in rechteckigen Düsen.

An der früher aufgenommenen Abb. 89 (Handskizze) erkennt man, daß im Innern des Strahles reichliche Schwingungen vor sich gehen müssen, wie beim Austritt aus normal abgeschnittenen Düsen.

Aus Abb. 122, die nach einem Lichtbild von Josse[1]) angefertigt wurde, geht hervor, daß die aus der Leitvorrichtung tretenden Strahlen sich gegenseitig beeinflussen. Der Austrittswinkel der Schaufel ist $21^1/_2{}^0$, die Teilung 28,5 mm, die Kanalbreite 13 mm. Der gesättigte Dampf besaß 2,01 at abs. Anfangsdruck, der Gegendruck war 0,25 at abs. Die Ablenkungswinkel wachsen, wie eingeschrieben, von 13° an der äußersten bis 35° an der innersten Kante.

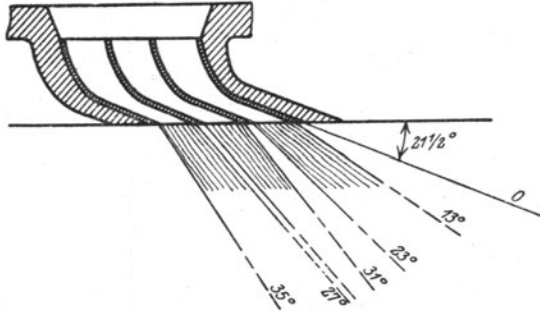


Abb. 122. Strahlablenkung nach Josse.

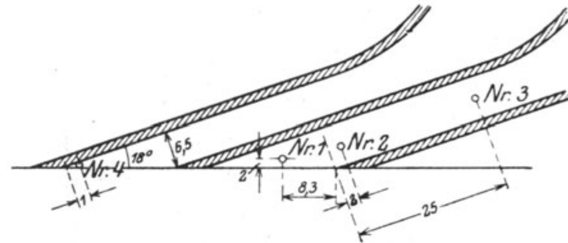


Abb. 122a. Druckmessungen von Loschge.

Über die Druckverhältnisse bei Überschallgeschwindigkeit liegen Messungen von Loschge[2]) vor, die sich auf die Meßbohrungen 1 bis 4 (Abb. 122a) einer Zoelly-Leitvorrichtung mit rd. 20 mm radialer Schaufelhöhe beziehen. Ist p_1 der Anfangsdruck, p_2 der Gegendruck, p_x der Druck in einer der Meßstellen, so weicht für Bohrung Nr. 1 p_x wenig von p_2 ab, solange p_2/p_1 zwischen 1 und 0,4 liegt. Bei noch niedrigeren Gegendrücken ist p_x/p_1 für gesättigten Dampf 0,335, für überhitzten Dampf 0,275 und bleibt unverändert. Bei Sattdampf war dieser unveränderliche Druck für Bohrung Nr. 3, 2, 4 bzw. $= 0{,}602\ p_1$; $0{,}554\ p_1$; $0{,}20\ p_1$. Bemerkenswert ist an Nr. 4 ein bis auf 6 v. H. von p_1 steigender Unterdruck gegenüber p_2 bei zwischen 1 und 0,4 liegenden Verhältnissen p_2/p_1. Vollkommene Aufklärung kann nur durch vermehrte Beobachtungen wie in Abb. 117 u. f. geschaffen werden.

b) Theorie der Strahlablenkung.

α) Der Winkel von Prandtl-Meyer.

Die Prandtlsche Strömung „um die Ecke" wird sich stets ausbilden, wenn im Überschallgebiet am Düsenende der Umgebungsdruck unter dem Enddruck der Expansion liegt. So bildet in Abb. 123 der Eckpunkt A_1 der Düse a eine Störungsquelle, von der sich der Prandtlsche

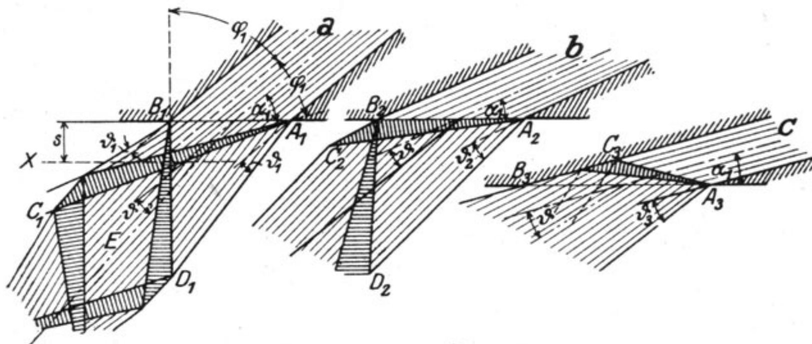


Abb. 123. Ausdehnung im „Spalt" und im Schrägabschnitt von Düsen.

Ausdehnungskeil mit dem Machschen Winkel φ_1 gegen C_1 ausbreitet. Ebenso ist die Kante B_1 eine Störungsquelle, die von den Vorgängen bei A_1 „nichts weiß", da diese infolge der Überschallgeschwindigkeit nach C_1 „fortgeschwemmt" worden sind. An jeder der Kanten **findet daher eine Ablenkung um denselben Winkel $\delta_1 = \delta_1'$ statt.** Über die verwickelten Verhältnisse, an der Durchdringung der Keile, der Drucksenkung im Raume E, usw. haben wir in Abschn. 42a

[1]) Neuere Versuche über Strömungserscheinungen. Jahrb. d. Schiffbautechn. Ges. 1911.
[2]) Mitteil. über Forschungsarbeiten, Heft 144, 1913.

berichtet. In den meisten Fällen liegen die Enden der Keile C_1D_1 schon in der Laufschaufel drin. Eine bestimmte Festsetzung über die Ablenkung des Strahles im ganzen kann nur getroffen werden, wenn eine bestimmte Ebene, z. B. die im Abstande s angenommene Eintrittsebene X des Laufrades ins Auge gefaßt wird. Man darf dabei nicht vergessen, daß **auch senkrecht zur Bildebene eine Ablenkung eintritt,** deren Betrag nicht genau angebbar ist, da die Düsenkante gegen den Strom schräg liegt. In der Nähe der Ecken des (rechtwinkligen) Düsenquerschnittes wird die Ablenkung stark abnehmen. Die Größe und Richtung der Geschwindigkeiten und die Drücke können mithin nur angenähert angegeben werden. Immerhin kann man sich ein einigermaßen klares Bild von der Beschaffenheit des Strahles machen.

Weit unbestimmter liegen die Verhältnisse bei Düse b, wo angenommen ist, daß der von A_2 ausgehende Expansionskeil die Kante B_2 gerade trifft. Während die Ablenkung bei A_2 — gleiche Dampfdrücke vorausgesetzt — gleich groß sein muß, wie die bei A_1, so können wir aus Prandtls Theorie für die Ablenkung bei B_2 nichts ableiten.

Am schwierigsten ist der Fall der Düse c zu beurteilen, wo der Keil von A_3 aus die gegenüberliegende Wand im Schrägabschnitt trifft. Sollte der Strahl im ganzen die Ablenkung ϑ_3 (die wieder $= \vartheta_1$ ist) annehmen, müßte die Wand von C_3 an den Prandtlschen Strombahnen gemäß gekrümmt sein. In Wirklichkeit erfolgt die Strömung in der Richtung C_3B_3 und auch außerhalb der Düse werden neue Störungen in nicht angebbarer Weise den Strahl beeinflussen.

Legt der Strahl einen längeren Weg zurück, so gleichen sich die inneren Unterschiede aus, und die Beobachtung zeigt, daß der dann meßbare (mittlere) Ablenkungswinkel, mit dem theoretischen Winkel an der inneren Kante gerade in den praktisch wichtigen Fällen der Düsen b und c in Abb. 123 verhältnismäßig befriedigend übereinstimmt.

Vom Standpunkt der Mechanik gewährt einen sehr klaren Einblick in die Entstehung der Ablenkung

β) der Satz vom Antrieb.

Wir wenden diesen Satz auf die Bewegung der durch die Düse im Zeitelement dt strömenden Masse dm einmal für die axiale, dann für die dazu senkrechte Richtung an.[1]). Die Lage dieses Elementes vor dem Eintritt in den Schrägabschnitt ist in Abb. 123a durch $A_1A_2A_2'A_1'$ dargestellt. Für den Austritt wählen wir im abgelenkten Strahle Querschnitt CD an einer Stelle, wo der Druck nicht durchweg dem der Umgebung gleich geworden zu sein braucht, wenn nur sein Mittelwert mit ihm übereinstimmt. Im gleichen Zeitraum tritt durch CD dieselbe Masse dm aus. Wir betrachten nun die zwischen $A_1'A_2'$ und CD gelegene Gesamtmasse. Die wirkenden Kräfte sind im Endquerschnitt der eigentlichen Düse $P_{a2} = f_2 p_2$ in der Achsenrichtung. Auf die obere Seitenwand des rechteckig vorausgesetzten Schrägabschnittes wirkt die Resultierende der Normaldrücke, die wir in die axiale bzw. dazu senkrechte Komponente P_{as} und P_n zerlegen. Die Reibungskraft K ist das Produkt aus der Manteloberfläche f_s des Schrägabschnittes und der Reibungsschubspannung τ_r (Gl. (8), Abschn. 25). Die Mantelreibung des freien Strahles wird hier vernachlässigt, obwohl sie sehr bedeutend sein kann. Wenn wir w_s als den Mittelwert[2]) der Geschwindigkeit im Schrägabschnitt anführen, so wird die Kraft

$$K = f_s \tau_r = \frac{\zeta_r}{4} \frac{w_s^2}{2g} f_s \gamma_s \quad \text{. . . . .} \quad (1)$$

die wir angenähert als axial gerichtet ansehen wollen. Die auf die ganze Strahloberfläche $BCDA_1$ wirkende Resultierende ist bekanntlich ebenso groß, als ob der Außendruck p_3 auf die Austrittsfläche $A_1B = f_3$ wirken würde. Wir zerlegen $P_3 = f_3 p_3$ ebenfalls axial und senkrecht dazu in die Komponenten P_{a3} und P_{n3}. Im ganzen wirken demnach axial $P_{a2} + P_{as} - K - P_{a3}$ und senkrecht dazu $P_n - P_{n3}$. Der „Antrieb" dieser Kräfte während des Zeitelementes dt erzeugt die nach denselben Richtungen zu zerlegende Zunahme der Bewegungsgröße. Am Ende des Zeitelementes befindet sich die betrachtete Masse zwischen den Querschnitten A_1A_2 und $C'D'$; die Bewegungsgröße der im Raume V_s und V_3 befindlichen Teile ist infolge des Beharrungszustandes dieselbe wie am Anfang, scheidet also aus der Rechnung aus. Es

[1]) In der Literatur zum erstenmal erörtert von Zerkowitz, Z. f. d. ges. Turbinenwes. 1916, Heft 2—4 und 27—30.

[2]) Angenähert als arithmetisches Mittel aus w_2 und w_3 oder auch der adiabatischen Endgeschwindigkeit w_3', da w_3 meist schon im Schrägabschnitt erreicht wird. Etwas genauer wäre das geometrische Mittel $w_s = \sqrt{w_2 w_3}$; $\gamma_s = \sqrt{\gamma_2 \gamma_3}$, s. das Verfahren von Flügel unter c).

bleibt nur zu vergleichen diejenige der austretenden und die der eintretenden Massenteilchen dm Wir zerlegen dessen Schlußgeschwindigkeit in $w_{a3} w_{n3}$ parallel zu P_a und P_n. Dann ist die Zunahme in der Achsenrichtung[1])

$$dm \cdot (w_{a3} - w_2) = (P_{a2} + P_{as} - K - P_{a3}) dt \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

in Richtung von P_n:

$$dm \cdot w_{n3} = (P_n - P_{n3}) dt \quad \ldots \ldots \quad (2a)$$

Da $dm/dt = m_{sek}$ die sekundlich durchströmende Masse ist und w_2 aus der Erweiterung der Düse (einschließlich Widerstände) berechnet wird, so liefern (1) und (2) die Komponenten $w_{a3} w_{n3}$, oder die Geschwindigkeit w_3 selbst nach Größe und Richtung, also auch die Ablenkung ϑ, als

$$tg\,\vartheta = \frac{w_{n3}}{w_{a3}} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Vergleicht man w_3 mit der adiabatischen Geschwindigkeit w_3', die bei gleichem Druck in verlustfreier Düse erreicht wird, so erhält man die Beizahl $\varphi = w_3 : w_3'$.

Zunahme des Dralls. Wäre die Lage der wirkenden Kräfte genau angebbar, so könnte aus der Zunahme des Dralls („Impulsmomentes) auf die Ungleichmäßigkeit der Geschwindigkeit im Austrittsquerschnitt geschlossen werden. Zu diesem Behufe müßten die Summe der Kraftmomente M in bezug auf den Schwerpunkt der zwischen $A_1' A_2'$ und CD eingeschlossenen Masse mit dt vermehrt jener Zunahme gleichgesetzt werden. Auch hier fällt der Drall des zwischen $A_1 A_2 CD$ enthaltenen Teils, weil am Anfang und am Ende gleich, heraus, es verschwindet der Drall $dm w_2 \varrho_2$ des eintretenden Elementes, und es kommt der des austretenden Elementes hinzu. Dieses liefert zunächst das Grundmoment $= -dm w_3 \varrho_3$ in bezug auf S und das auf den Schwerpunkt des Elementes bezogene Integral $\int dm w \varrho$. Setzen wir voraus, daß die Geschwindigkeit etwa nach dem Gesetz $w = w_3 + a\varrho$ verteilt ist, so ist der Wert des Integrales bei stets gleichem γ leicht zu ermitteln.

Da indes die Geschwindigkeit, die an der Kante A_1 entsteht, derjenigen, die bei adiabatischer Ausdehnung von p_2 auf p_3 erreicht würde, sehr nahe kommt, so ist Δw im wesentlichen von vornherein gegeben, daher der Drall eher zur Berechnung des Momentes, und so mittelbar zur Nachprüfung der Lage (zum Teil der Größe) der Kräfte benützt werden könnte.

Die Druckverteilung längs der Wandfläche $A_2 B$ wird durch den Schnitt des von A_1 ausgehenden Verdünnungskeiles, der bei A_x unter dem Machschen Winkel φ die Wand trifft, bedingt. Von A_2 bis A_x wird die Ausdehnung fortgesetzt, als ob die Düse geschlossen wäre. Von A_x an wird man in erster Näherung die Werte annehmen, die nach der Prandtlschen Theorie für die Strömung um die Ecke A_1 sich ergeben würden, so daß bei B entweder schon der Gegendruck p_3 erreicht wird, oder ein darüber gelegener „Grenzdruck“ p_y. Für nicht erweiterte Düsen können Abb. 117 u. f. als Vorbild dienen, und es wäre wünschbar, wenn durch Fortsetzung jener Untersuchungen die Sachlage weiter aufgeklärt würde. Ein empirischer Ansatz ist in Abb. 237c dargestellt.

γ) Berechnung der Ablenkung aus der Stetigkeitsbedingung.

Die Benützung der Durchflußgleichung zur Berechnung der Strahlablenkung wird häufig damit begründet, der Strahl werde an der inneren Kante um einen gewissen Winkel abgelenkt, der als der „stärkere“ die Strahlbegrenzung an der anderen Kante zwingt, sich ihm anzubequemen. Ein Blick auf Abb. 123, insbesondere Düse a, zeigt, daß die Begründung in dieser Form nicht stichhaltig ist. Nur wenn man annimmt, daß sich die Geschwindigkeits- und Dichtenunterschiede unmittelbar nach dem Austritt ausgeglichen haben, kann man die Durchflußgleichung auf den Normalquerschnitt BB' in Abb. 123a anwenden, und dann freilich bei bekanntem w_3 und v_3 aus der Breite BB' auf die Ablenkung schließen. Dabei wird vielfach

[1]) Zur Erinnerung sei aus der analytischen Mechanik der Antriebsatz kurz wiederholt: Die im Schrägabschnitt vorhandene Flüssigkeitsmasse wird in unendlich kleine Elemente δm geteilt. Für jedes einzelne davon gilt nach irgendeiner Richtung x die Gleichung

$$\delta m \frac{dw_x}{dt} = \delta X_i + \delta X_a \quad \text{oder} \quad d(\delta m w_x) = (\delta X_i + \delta X_a) dt$$

wo δX_i die inneren, zwischen den Elementen wirkenden Druck- und Reibungskräfte, δX_a die Fernkräfte bedeuten. Bilden wir die Summe der elementaren Zunahme $d\,(\delta_m w_x)$ der Bewegungsgröße für die ganze Masse, so heben sich in der Summe $\sum \delta X_i$ alle im Innern der Masse wirkenden Kräfte nach dem Wechselwirkungsgesetz auf, es bleiben nur die auf die Begrenzungsflächen wirkenden übrig, und das sind eben die vorhin ermittelten Resultierenden. Da wir Fernkräfte ausgeschlossen haben, so ist $\sum \delta X_a = 0$.

übersehen, daß auch senkrecht zur Bildfläche, wie Schnitt b in Abb. 123a andeutet, eine Verbreiterung mit dem Randwinkel ϑ' stattfinden muß, sobald die Machsche Linie $A_1 A_x$ die gegenüberliegende Düsenbegrenzung nicht mehr trifft. Wir haben vorläufig keine

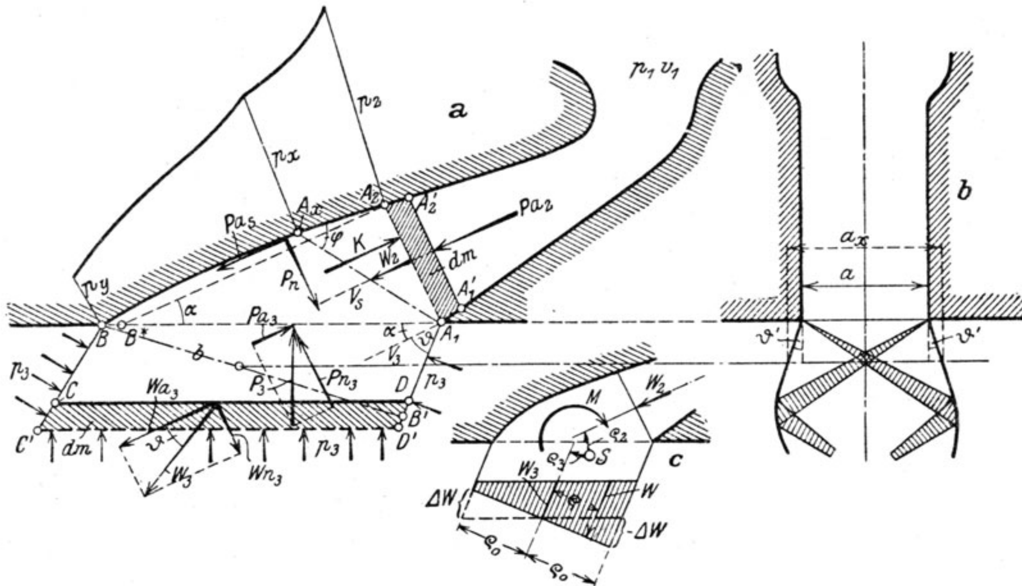


Abb. 123a. Kräfte bei Expansion im Schrägabschnitt und Strahlablenkung.

Anhaltspunkte, um die dann gültige Strahldicke a_x festzusetzen. Hat der in Abb. 123 dargestellte Expansionskeil Platz, sich innerhalb des Schrägabschnittes auszubilden, dann braucht trotz der unendlich nahen Nachbarschaft von hohem und tiefem Druck an der Kante A_1 eine Verbreiterung nicht aufzutreten. Wir lassen a_x der Allgemeinheit halber in den Formeln stehen und führen die Rechnung im Anschluß an Flügel[1]) wie folgt durch.

Wir nehmen der Einfachheit halber eine mit geradlinigem zur Achse parallelem Anlauf gemäß Linie $A_2 B^*$ in Abb. 123a versehene Düse an und leiten zunächst die Größe des in Richtung der Düsenachse fallenden Rückdruckes ab. Dieser ist gemäß Gl. (2)

$$P_1 = m w_{a3} = P_{a2} - K - P_{a3} + m w_2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

Rechts befinden sich bekannte Größen $P_{a2} = f_2 p_2$; $P_{a3} = f_2 p_3$; in K, Gl. (1), setzen wir angenähert die (geometrischen) Mittelwerte $w_s = \sqrt{w_2 w_3}$; $\gamma_s = \sqrt{\gamma_2 \gamma_3}$ ein; m ist $= G/g = f_2 w_2 \gamma_2 / g$. Wir führen noch zur Abkürzung die Geschwindigkeitszahl der axialen Komponente

$$\varphi_1 = \frac{w_{a3}}{w_3'}$$

ein und erhalten mit Voransetzung des adiabatischen Wertes w_2'

$$\varphi_1 = \frac{w_2'}{w_3'} \left[\frac{w_2}{w_2'} + \frac{f_2 g (p_2 - p_3)}{G w_2'} - \frac{\zeta_r}{8} \frac{f_s}{f_2} \frac{w_3}{w_2'} \sqrt{\frac{\gamma_3}{\gamma_2}} \right] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (5)$$

Im letzten Gliede darf schließlich der Ausdruck $w_3 \sqrt{\gamma_3/\gamma_2}$ durch die bekannten adiabatischen Werte $w_3' \sqrt{\gamma_3'/\gamma_2'}$ ersetzt werden.

Nun lautet die Durchflußgleichung für den Querschnitt BB' Abb. 123a (der eigentlich durch B^* hindurchgelegt gedacht werden muß), den wir mit f_3' bezeichnen,

$$G = f_3' w_3 \gamma_3$$

die mit $G = f_2 w_2 \gamma_2$ verbunden, wenn man $A_1 B = c$ und

$$f_3' = c \sin(\alpha + \vartheta) a_x; \quad f_2 = c \sin(\alpha) \cdot a; \quad w_3 = \frac{w_{a3}}{\cos \vartheta}$$

einsetzt

$$\frac{a_x}{a} \frac{\sin(\alpha + \vartheta)}{\sin \alpha} \frac{w_{a3}}{\cos \vartheta} \gamma_3 = w_2 \gamma_2$$

[1]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1917, S. 650.

ergibt. Mit den Beziehungen

$$w_2 = \varphi_2 w_2'; \quad w_{a3} = \varphi_1 w_3'; \quad \gamma_2 = \psi_2 \gamma_2'; \quad \gamma_3 = \psi_3 \gamma_3'$$

erhält man schließlich durch Auflösung

$$\operatorname{tg} \vartheta = \left(\frac{a}{a_x} \frac{\varphi_2}{\varphi_1} \frac{w_2'}{w_3'} \frac{\psi_2 \gamma_2'}{\psi_3 \gamma_3'} - 1\right) \operatorname{tg} \alpha \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Damit folgt $w_{n3} = w_{a3} \operatorname{tg} \vartheta$; $w_3^2 = w_{a3}^2 + w_{n3}^2 = w_{a3}^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta) = \varphi_1^2 w_3'^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta)$, und so auch die wichtige Geschwindigkeitszahl für die gesamte Ausdehnung

$$\varphi = \frac{w_3}{w_3'} = \varphi_1 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

Unsere Formel liefert auch für den Grenzfall des „passenden" Gegendruckes, d. h. $p_3 = p_2$ eine leichte Ablenkung, denn es ist dann

$$w_2' = w_3'; \quad \gamma_2' = \gamma_3'; \quad a = a_x; \quad \varphi_1 = \frac{w_3}{w_2'} - \frac{\zeta_r}{8} \frac{f_s}{f_2} \text{ sei} = \varphi_2 - \zeta, \text{ also } \operatorname{tg} \vartheta = \left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1} \frac{\psi_2}{\psi_3} - 1\right) \operatorname{tg} \alpha, \text{ mit } \psi_2 = \psi_3$$

$$\text{wird } \operatorname{tg} \vartheta = \frac{\zeta}{\varphi_1} \operatorname{tg} \alpha.$$

Dies ist auch begreiflich, da im Schrägabschnitt eine Reibung verzögernd wirkt, also jedenfalls $w_3 < w_2$ ist. Oder auch: die Verzögerung erzeugt einen Druckstau, mithin eine Normalkraft P_n und diese eine entsprechende Geschwindigkeitskomponente. Da wir uns über der Schallgrenze befinden, kann jene Reibung w_2 nicht beeinflussen. Bei nicht erweiterten Leitschaufeln ist der Grenzfall $p_3 = p_2$ nur an der Kante A_1 verwirklichbar. Gegen A_2 hin würde bei geradlinigem Kanal der Innendruck wachsen; im gekrümmten Kanal treten die in Abb. 117 erkennbaren Störungen auf.

c) Düsenformen für „Spaltexpansion".

Um einen homogenen Parallelstrahl mit vorgeschriebenem Austrittswinkel zu erhalten, benutzt Zerkowitz[1]) die Prandtlsche Strömung (Abb. 124). Der Pol ist C, die innere und äußere Begrenzung des Strahles wird durch zwei Stromlinien nach Gl. (2) Abschn. 42a gebildet. Der Beginn der Krümmung fällt mit dem engsten Querschnitt CI der Düse zusammen. Die Ausdehnung wird fortgesetzt, bis bei $C - II$ der vorgeschriebene Enddruck p_2 erreicht ist. Querschnitt CX würde einem Zwischengefälle entsprechen, wobei, um den erforderlichen kleinen Austrittswinkel zu verwirklichen, ein geradliniger Ansatz GG' anzuschließen wäre, in dem keine Ausdehnung stattfindet. Der Pol C kann der inneren Wand näherrücken und schließlich in sie hineinfallen. Auf diese Weise würde eine Düse mit theoretisch vollkommener Beherrschung der Strömung geschaffen, falls die Strömungen durch Reibung und die Eintrittskrümmung sich nicht zu stark geltend machen. In der Tat müssen wir auf die in Abb. 117 u. 118 dargestellten Drucksenkungen gefaßt sein, welchen andere Konstrukteure dadurch vorzubeugen suchen, daß nach Abb. 125 die innere Wand unmittelbar nach der engsten Stelle abgeschrägt wird und den Dampf zu vermehrter Ausdehnung nach dieser Seite hin veranlaßt.

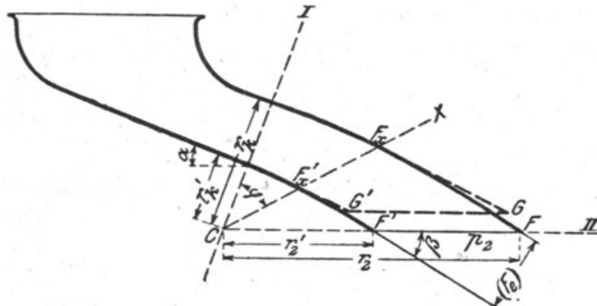


Abb. 124. Leitvorrichtung nach Zerkowitz.

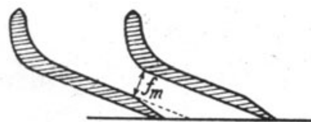


Abb. 125
Unsymmetrischer Austritt.

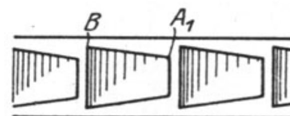


Abb. 125a.
Leitkanalverbreiterung.

[1]) Zur Beurteilung der Leitvorrichtungen. Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1917, S. 869 und D.R.P. Kl. 14c Nr. 306642, H. Wirth und G. Zerkowitz, Leitvorrichtung. 1916. Man vergl. auch Wewerka, Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1919, S. 699.

Im D. R. P. Nr. 297713 schlägt die A.-G. Escher-Wyss & Co. nach Abb. 125a vor, den Austrittsquerschnitt der Düsen trapezförmig zu gestalten, wobei die Kanten A_1 und B den gleich bezeichneten Kanten in Abb. 123a entsprechen. Dadurch wird erzielt, daß der an der Innenkante A_1 sich mehr als an B verbreiternde Strahl auf die Eintrittsebene des Laufrades mit überall gleicher Breite trifft und die Schaufeln lückenlos anfüllt, was bei rechteckigem Austritt nicht der Fall wäre. Eine Ergänzung dieser Anordnung bildet die Versetzung der Kanäle nach Abb. 358a.

d) Verhinderung der Strahlablenkung durch die Rückwirkung des Laufkranzes.

Die oben gegebenen Entwickelungen sind ausdrücklich an die Bedingung geknüpft, daß in der Umgebung des Strahles gemäß Abb. 123 ein kleinerer Druck p_3 herrscht als am Düsenende (p_2). Ist durch die Düse ein ganz eng anschließender Schaufelkranz beaufschlagt, so kann sich je nach der Schaufelform (dem Austrittsquerschnitt) ein Stau einstellen, der p_3 schließlich bis auf p_2 erhöhen könnte. **Dadurch würde eine „Überdruckturbine" entstehen,** und **die Strahlablenkung wäre aufgehoben.** Statt dessen würde durch den Spalt (der immer vorhanden sein muß) ein Undichtigkeitsverlust auftreten, der die Strömung in seiner Weise stört. Je nach Umständen kann sich jeder Zwischenwert des Druckes zwischen p_3 und p_2 einstellen.

43a. Wirkungsgrad der Ausdehnung im Schrägabschnitt bzw. im Spalt.

Läßt man den mit Überdruck aus einer Düse austretenden Strahl frei expandieren, so gibt die Möglichkeit des seitlichen Ausweichens Veranlassung zu einem **grundsätzlichen Verluste** gegenüber der reibungsfreien adiabatischen Ausdehnung in einer geschlossenen Düse. Die Spannkraft des Dampfes dient dann eben nicht bloß zur axialen, sondern auch zu einer Beschleunigung in dazu senkrechten Richtungen, deren kinetische Energie in der gewöhnlichen Turbine nicht ausgenutzt werden kann. Der Fehlbetrag kann für eine einfache Mündung an Hand von Abb. 126 besonders einfach berechnet werden.

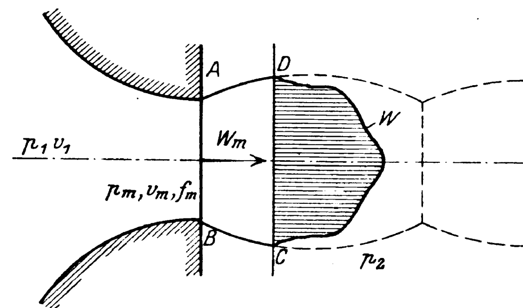


Abb. 126.
Theoretischer Verlust durch Freiexpansion.

Wir schneiden den sich in Schwingung befindlichen Strahl durch CD an der Stelle, wo der mittlere Druck dem Außendruck p_2 gleich ist, und wenden den mehrfach erläuterten Satz vom Antrieb wie folgt abgekürzt an. Die treibende Kraft in f_m ist $f_m\,p_m$; auf die Fläche $ADCB$ (des ganzen Strahles) wirkt $-f_m p_2$; die Zunahme der Bewegungsgröße für die sekundliche Masse m ist $m\,(\overline{w}-w_m)$, wenn $\overline{w}$ die mittlere Geschwindigkeit in CD bedeutet. Mithin erhalten wir

$$m(\overline{w}-w_m)=f_m(p_m-p_2) \text{ daraus } \overline{w}=w_m+\frac{f_m(p_m-p_2)}{m} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Es möge die Strömung in der Mündung verlustfrei erfolgen, und es sei w' die Endgeschwindigkeit in einer verlustfreien erweiterten Düse bei einer Ausdehnung auf den Druck p_2. Dann ist der Verlust an kinetischer Energie

$$\zeta=1-\frac{\overline{w}^2}{w'^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Setzt man für gesättigten Dampf

$$w_m=3{,}23\sqrt{p_1 v_1}\,;\quad m=G/g=(\chi\, f_m\sqrt{p_1/v_1}):g\,;\quad p_m=0{,}577\,p_1\,,$$

so wird w durch $\sqrt{p_1 v_1}$ allein ausgedrückt, und man erhält für

$p_1/p_2 =$	1/0,577	10	100
$\zeta =$	0	0,21	0,48

also ganz erhebliche Verluste.

Wie im Abschn. 42a erwähnt wurde, kann aus diesem Verlust **auf die Ablenkung der Randstrahlen geschlossen** werden. Abb. 86 läßt erkennen, daß die Geschwindigkeiten, von der Achse aus gerechnet, zu-

nehmende Ablenkungen erfahren. Es wird daher eine von der Wirklichkeit nicht allzuweit entfernte Annahme sein, wenn wir für die Normalkomponente w_n der Geschwindigkeit, die in einem Querschnittselement im Abstande ϱ der Mündung gehört, den Ansatz

$$w_n = a \frac{\varrho}{r} w'$$

wählen. Der kinetische Verlust ist dann

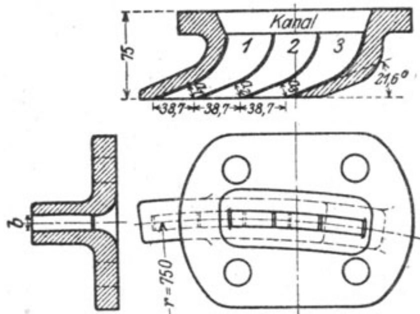
$$\zeta = \left\{\int \frac{dm \cdot w_n^2}{2}\right\} : \left\{\frac{m\,w'^2}{2}\right\} = \left\{\int \frac{2\pi\varrho\,d\varrho\,w_m\gamma_m a^2\varrho^2 w'^2}{2g r^2}\right\} : \frac{m\,w'^2}{2} = \frac{2}{4}\left(\frac{\pi r^2 w_m \gamma_m}{gm}\right)\cdot a^2 = \frac{a^2}{2}.$$

Nun ist für den Rand $w_n = w' \sin\vartheta$, also wird $a = \sin\vartheta$, und obige Beziehung liefert

$$\sin\vartheta = \sqrt{2\zeta} \quad \text{(2a)}$$

Es wäre jedoch ein Irrtum zu folgern, daß es mithin stets vorteilhafter sei, in der Düse zu expandieren, denn in dieser findet infolge der Wandreibung auch ein Verlust statt, und es kommt ganz auf die Reibzahl, die Düsenweite und Länge an, ob die „freie" oder die „geführte" Ausdehnung im Vorteil sei.

Es ist das Verdienst von **Josse**[1]) und **Christlein**[2]), zuerst auf dem Wege des Versuches die Lösung dieser Frage in Angriff genommen zu haben. Unter anderem wurde eine unbearbeitete Leitvorrichtung mit eingegossenen Schaufeln nach Abb. 127 mit folgenden Abmessungen benutzt:



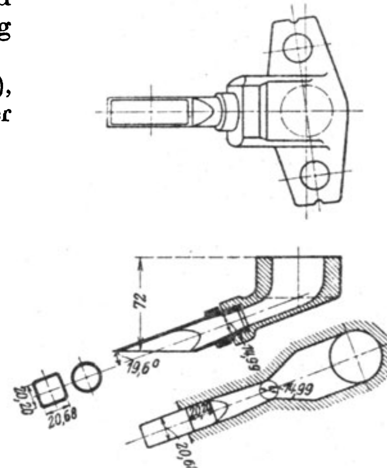
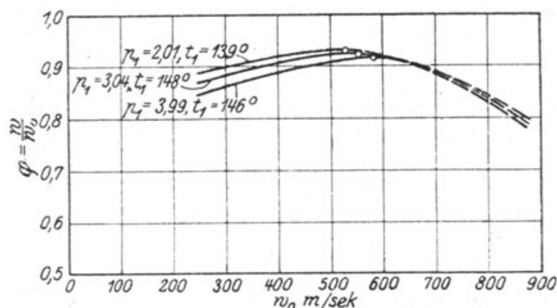


Abb. 127. Abb. 128.

Leitschaufeln und Düse von Christlein.

Kanal		1	2	3
Lichte Weite	a mm	13,48	12,96	12,59
Breite	b „	13,05	13,15	13,72

Ferner eine bis zur engsten Stelle unbearbeitete Düse, deren Maße Abb. 128 zu entnehmen sind. Die mittels Reaktionsmessung ermittelte tatsächliche Geschwindigkeit w wird verglichen mit der adiabatischen Geschwindigkeit w_0. Das Verhältnis $\varphi = w/w_0$ ist für die Leit-



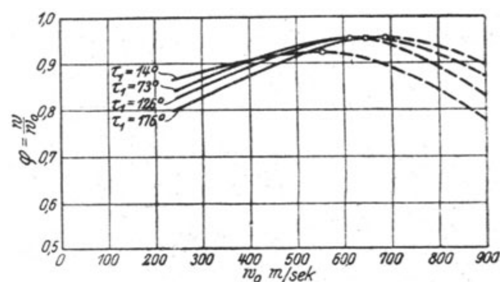


Abb. 129. Abb. 129a.

Verhältniszahl φ für den Parallelkanal nach Christlein.

[1]) Jahrbuch d. Schiffbautechn. Ges. 1911.

[2]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1911, S. 2081, und Dissertation: „Untersuchungen über das Verhalten der Geschwind.-Koeffiz.", 1911. Oldenbourg.

vorrichtung in Abb. 129 als abhängige von w_0 bei verschiedenen Anfangsdrücken aufgetragen, in Abb. 129 a desgleichen bei unveränderlichem Anfangsdruck $p_1 = 3{,}01$ at abs. und verschiedenen Dampftemperaturen (wobei τ den Überschuß der wahren über die Sättigungstemperatur bedeutet). Die Schaubilder lassen folgendes erkennen:

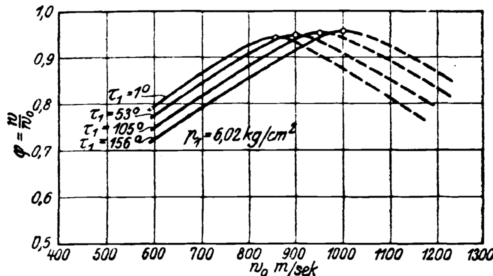


Abb. 129 b. Verhältniszahl φ für die Düse nach Christlein.

1. Die Zahl φ nimmt mit wachsender Geschwindigkeit zu und erreicht einen Höchstwert weit über der Schallgeschwindigkeitsgrenze.

2. Unterhalb der Schallgrenze nimmt φ bei unveränderlicher Geschwindigkeit mit abnehmendem Druck oder abnehmender Überhitzung zu.

3. Der Höchstwert von φ ist bei kleiner Überhitzung merklich kleiner als bei hoher Überhitzung.

Die Feststellung unter 1. ist dem Sinne nach in Übereinstimmung mit dem Reibungsgesetz von Reynolds und den Versuchen von Fritzsche und Blasius, allein die Veränderung des φ ist weit größer als dieses Gesetz zuläßt. Satz 3 kann wie bei der einfachen Mündung durch die auftretende Unterkühlung erklärt werden. In Satz 2 ist die Wirkung der Überhitzung als Folge der Verkleinerung des Raumgewichts erklärlich, die Wirkung der Druckabnahme steht hiermit in Widerspruch.

Das Schaubild der Düse Abb. 129 b verläuft ähnlich, weist aber noch stärkere Verschiebung des Höchstwertes von φ mit wachsender Überhitzung auf. Welchen Enddruck die Düse im Endquerschnitt erreicht, kann nur theoretisch angegeben werden, da dieser Druck nicht gemessen wurde. Nach Angabe von Christlein tritt der Höchstwert von φ erst ein, wenn freie Expansion vorliegt.

In kritischer Hinsicht ist zu bemerken, daß sowohl bei der Düse wie bei der Leitvorrichtung alle bei freier Expansion bestimmten Werte von φ mit einem grundsätzlichen Fehler behaftet sind. Die Meßvorrichtung war nach Abb. 130 gebaut und ermöglichte es dem Seitendruck P_n im Schrägabschnitt ein Moment am Hebelarm c auszuüben. Zerlegt man die tatsächliche Geschwindigkeit w in die axiale und normale Komponente $w_a w_n$, so ist offenbar

$$P_a = m w_a;\quad P_n = m w_n \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Demnach besteht an der Wage Gleichgewicht, wenn die Gleichung

$$Q a - P_a b + P_n c = 0 \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

erfüllt ist. Christlein übersah das Vorhandensein von P_n und fand dadurch einen zu niedrigen Wert für P_a und φ.

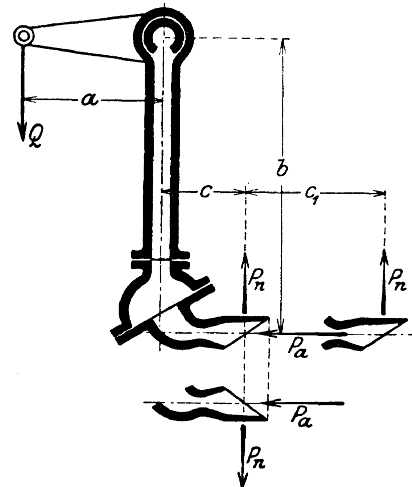


Abb. 130. Rückdruckwage von Christlein.

Flügel weist in seiner lichtvollen Studie über die „Düsencharakteristik"[1]) darauf hin, daß neben P_a, P_n, auch c unbekannt ist, und daß dessen Bestimmung möglich ist, wenn man, wie in Abb. 130 angedeutet wurde, zwei weitere Messungen so durchführt, daß einmal die Düsenachse um 180° gedreht, wobei P_n nach oben unten wirkt, und an der Wage eine Last Q' erforderlich sein möge; das andere Mal soll die Düse um das Stück c_1 nach rechts verschoben werden, wobei die Last Q'' gemessen werde. Die zugehörigen Momentengleichungen sind

$$Q' a - P_a b - P_n c = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$Q'' a - P_a b + P_n (c + c_1) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Bildet man (4) + (5) und (4) — (6) so ergibt sich

$$P_a = (Q + Q') \frac{a}{2b};\quad P_n = (Q - Q'') \frac{a}{c_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

[1]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1917, S. 650, und Mitteil. über Forschungsarbeiten, Heft 217, S. 26.

Daraus folgt die Tangente des Ablenkungswinkels

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{P_n}{P_a} = 2 \frac{b}{c_1} \frac{Q - Q''}{Q + Q'} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

der wahre Rückdruck

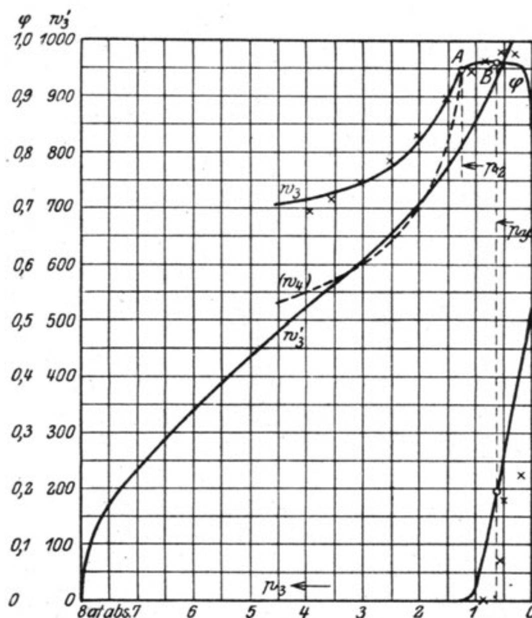
$$P = \frac{P_a}{\cos \vartheta} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

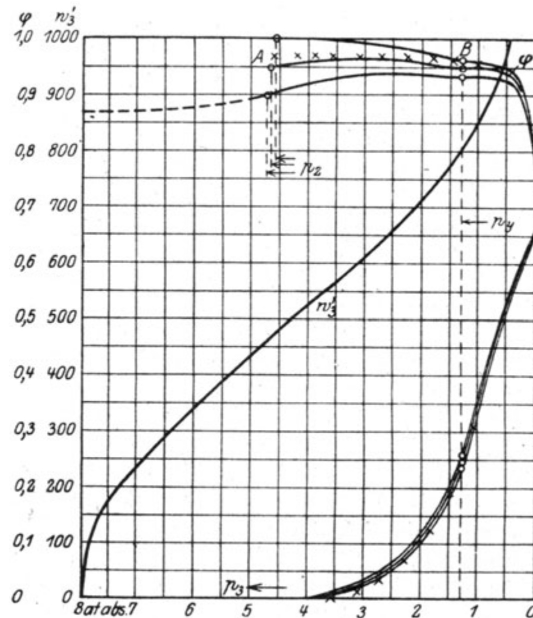
und die wahre Geschwindigkeit

$$w = \frac{P}{m} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

Begnügt man sich mit der Messung von Q und Q', so muß c geschätzt werden, aus (4) und (5) erhält man wieder $P_a P_n$.

Im weiteren weist Flügel[1]) nach, daß die Ergebnisse von Christlein im wesentlichen **theoretisch vorausgesagt werden können**. Der Grund, warum dies nicht schon früher geschah, liegt wahrscheinlich darin, daß man sich meist mit Berechnungen des Verlustes für größere


Abb. 131.


Abb. 131 a.

Verhältniszahl φ nach Messungen von Flügel in der A.E.G.

Ausdehnungsverhältnisse (wie im Eingang dieses Abschnittes) begnügte und dabei das Auftreten eines Höchstwertes von φ übersah. Dieser tritt sofort in Erscheinung, wenn man genügend viele Zwischenwerte rechnet, wie Flügel nach seinem in Abschn. 43c erläuterten Verfahren für eine nicht erweiterte und eine erweiterte Düse durchgeführt hat. Erstere hatte quadratischen engsten Querschnitt von 18×18 mm mit $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}3$ und bestand aus Gußeisen (war also wohl unbearbeitet). Die Rechnung wurde durchgeführt unter folgenden drei Annahmen

$\varphi_2 = 1{,}0$	0,95	0,90
$\zeta_r = 0$	0,012	0,029

Die Ergebnisse (φ und $\operatorname{tg} \vartheta$) sind in Abb. 131a eingetragen. In betreff der erweiterten Düse wird nur das Erweiterungsverhältnis $= 1:2$ und $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}3$ angegeben. Es wurde $\varphi_2 = 0{,}95$ angenommen, ζ_r ist nicht angegeben. φ und $\operatorname{tg} \vartheta$ sind in Abb. 131 als Abhängige des (mit p_2 bezeichneten) Gegendruckes aufgetragen.

Wertvoll ist die Bestätigung der theoretischen Werte durch Versuche, die im Prüffeld der Allgem. Elektrizitäts-Gesellschaft Berlin vorgenommen wurden. Für die nicht erweiterte Düse war der Anfangszustand $p_1 = 8$ at abs.; $t_1 = 208^0$ C. Die erweiterte bestand aus einer Gruppe von drei gepreßten Bronzedüsen mit je 15 mm Durchmesser im engsten Querschnitt, 20×20 mm Endquerschnitt, also einer Erweiterung von $1:2{,}26$ und $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}36$; der Anfangszustand war:

[1]) A. a. O.

$p_1 = 7{,}35$ at abs. $t_1 = 218^0$ C. Für das Diagramm wurden die gemessenen Gegendrücke im Verhältnis 8:7,35 vergrößert. Die Ergebnisse sind als Kreuze in Abb. 131 u. 131a eingetragen. Die Grenzpressung p_y (bzw. der Mittelwert davon über den Querschnitt f_3) wurde mittelbar aus der plötzlichen Krümmungsänderung der Linie φ erschlossen, die bei B eintritt.

In Abb. 131a sind auch Versuchswerte Flügels für **zu hohen Gegendruck** eingetragen. Es zeigt sich, daß diese wesentlich höhere Beträge von φ ergeben, als wenn man nach dem Stoß vollkommenen Strahlanschluß mit gleichmäßiger Geschwindigkeit annimmt, was auf die gestrichelte Linie führen würde. Damit ist unmittelbar erwiesen, daß der Strahl sich abgelöst haben muß, und daß die Verluste trotz scharfer Reibung am Strahlrand geringer sind, als wenn der (theoretische) Verdichtungsstoß stattgefunden hätte. In betreff der Berechnung von φ verweisen wir auf die Erörterungen Flügels in der angeführten Quelle.

Eine Bestätigung der obigen Erörterungen bilden auch die im Maschinen-Prüffeld der Eidg. Techn. Hochschule mit Leitvorrichtungen der A. G. Escher Wyß & Cie. ausgeführten Beobachtungen, deren Ergebnisse in Abb. 132 veranschaulicht sind. Die Abmessungen und die Dampfzustände finden sich in nachstehender Zahlentafel vereinigt.

Versuche an Leitvorrichtungen der A. G. Escher Wyß & Cie.

Schaulinien in Abb. 132	1	2	3	4	5
Austrittswinkel	17° 20′	17° 20′	16° 58′	17° 15′	16° 40′
Engster Querschnitt . . . cm²	2 × 1,932	2 × 1,847	2 × 2,116	2 × 2,237	2 × 2,176
Erweiterungsverhältnis . . . $f_2 : f_m$	1,0	1,0187	1,052	1,187	1.560
Anfangsdruck . . . . kg/cm² abs.	4,61	4,602	4,617	4,618	4,620
Anfangstemperatur . . . . °C	181,4	223,6	219,4	219,5	219,3
Ausflußzahl . . . . . χ	2,002	1,995	2,023	1,997	1,988

In Schaulinie Nr. 1 ist der Punkt der „theoretischen“ Schallgeschwindigkeit, die dem theoretischen kritischen Druckverhältnis entspricht, eingetragen. Unterhalb der Schall-

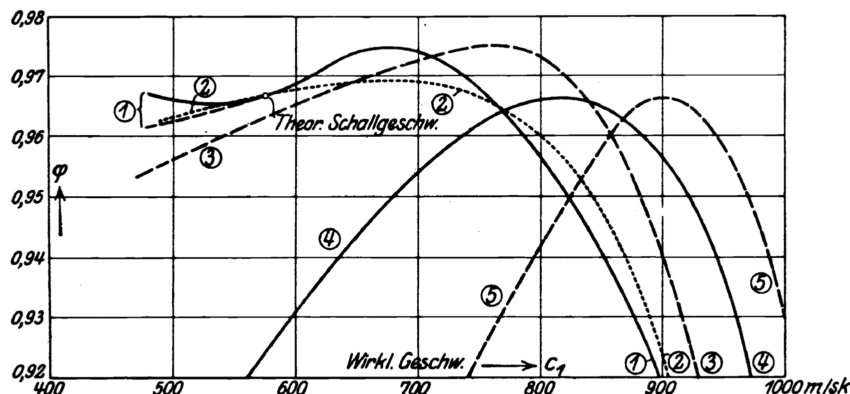


Abb. 132. Versuche des Verfassers.

grenze bedeutet die vollgezogene Linie die Beobachtungswerte, die punktierte diejenigen, die sich ergeben würden, wenn man den Dampfverbrauch nach der Ellipse von Loschge, Abschn. 45, interpolieren würde. Schaulinie 2 entspricht einer Düse, die mit parallelem Austritt ausgeführt werden sollte, bei der Ausmessung jedoch das sehr geringe Erweiterungsverhältnis 1,019 aufwies. Der Unterschied zwischen den beiden Schaulinien, insbesondere die Höckerform an Linie 1, ist auffallend, und es ist wahrscheinlich, daß bei Wiederholung der Versuche Schaulinie 1 einen ähnlichen Verlauf nehmen würde wie Linie 2[1]). Es ist eben kaum möglich, die Fehlergrenze solcher Messungen unter 0,5 v. H. herabzudrücken.

Die verwendete Vorrichtung war derjenigen von Christlein nachgebaut mit wagrechter Aufstellung des Dampfzuführungsrohres. Um die nicht ausgeglichene Dampfdruckkomponente im Schrägabschnitt bei Überschallgeschwindigkeit unschädlich zu machen, war die Leitvorrichtung so aufgestellt, daß diese Komponente durch den Drehpunkt hindurchging. Auf diese Weise wurde allerdings nur die in die Düsenachse fallende Komponente der gesamten Dampfreaktion gemessen, und so bedeutet auch

[1]) Der letzte Versuch fand am denkwürdigen 30. Juli 1914 statt.

der Beiwert φ, ähnlich wie Christlein es beabsichtigt hatte, nur **das Verhältnis der nach der Achse gerichteten Geschwindigkeitskomponente zur theoretischen (adiabatischen) Geschwindigkeit.**

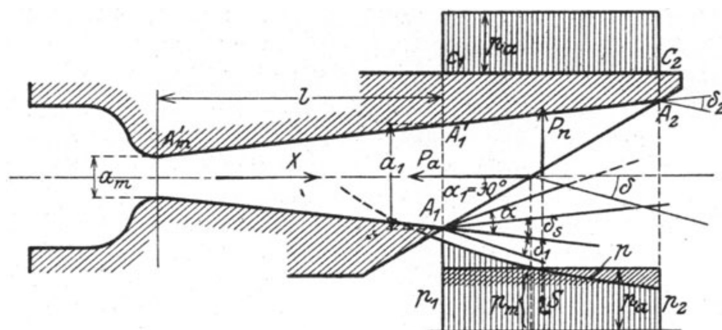


Abb. 133. Versuchsdüsen von Brown, Boveri & Cie.

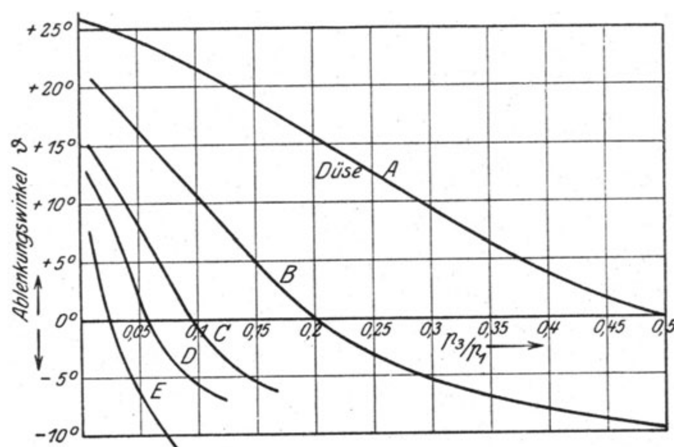


Abb. 133a. Ablenkungswinkel bei Düsen von B., B. & C.

Der Verlauf der Messungen hat gezeigt, daß trotz ihrer Einfachheit nur bei äußerster Sorgfalt und nur unter Anwendung besonderer Maßnahmen einigermaßen zuverlässige Werte erreicht werden können. Ein Hauptübelstand besteht in der **Rückwirbelung des in das Auspuffrohr axial geleiteten Dampfstrahles,** der die Wägung der Düsenkraft in merklicher Weise beeinflußt. Diese Störung konnte nur beseitigt werden, nachdem **in das Abflußrohr** mehr oder weniger **dichte Siebe eingebaut** wurden, deren Wirksamkeit bei abgehobenem Oberteil des Ausflußgefäßes und Betrieb bei atmosphärischem Gegendruck geprüft wurde.

Unmittelbar vor Abschluß des Druckes gehen mir von der Firma Brown, Boveri & Cie. Mitteilungen über eine groß angelegte Reihe von Versuchen an Düsen zu, über die noch kurz berichtet werden kann. Die verwendeten Düsen waren nach Abb. 133 mit Rechteckquerschnitt von unveränderlicher Höhe (rd. 12 mm) und Schrägabschnitt mit 30° Neigung gegen die Achse ausgeführt. Die Abmessungen sind in nachstehender Zahlentafel vereinigt.

Düse		*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
Unveränderte Höhe	h mm	12,01	12,04	11,975	12,00	12,0
Breite an der engsten Stelle .	a_m „	12,03	15,0	9,30	6,34	3,42
„ im Anfang d. Schrägabschn.	a_1 „	12,03	21,0	21,0	20,5	21,6
Länge l nach Abb. 134a . .	„	18,0	31,0	60,0	73,0	83,5
Querschnittsverhältnis	f_2/f_m	1	1,40	2,26	3,24	6,32

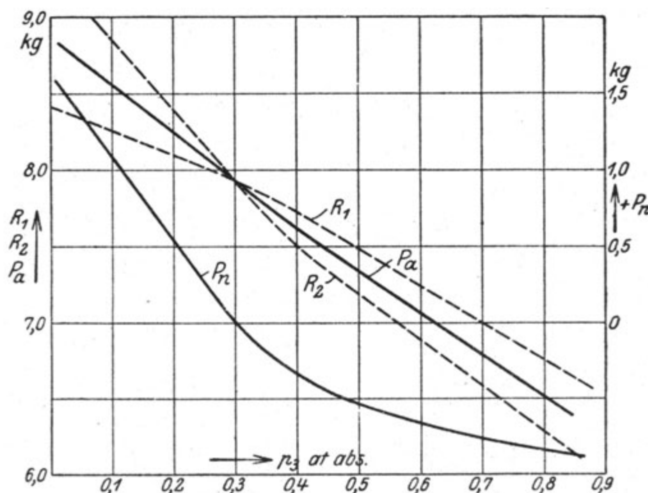


Abb. 134. Rückdruck in Abhängigkeit vom Gegendruck.

Da der Strahl infolge der geradlinigen Fortführung $A_m' A_1' A_2$ mit auseinanderstrebenden Rändern austritt, findet im Schrägabschnitt bei starker Erweiterung den oberen Rand entlang eine stärkere Ausdehnung statt, als den unteren entlang. Trifft die unter dem Machschen Winkel α von A_1 aus gezogene Störungslinie den oberen Rand nicht, so wird zwischen A_1' und A_2 die regelmäßige Ausdehnungslinie p (im unteren Teil der Abbildung) den Druckverlauf darstellen. Die lotrecht schraffierte Fläche zwischen $p_1 p_2$ stellt die zur Düsenachse senkrechte Komponente P_n des Dampfdruckes auf die Seitenfläche $A_1' A_2$ dar. Gleichgewicht in Richtung der Normale herrscht, wenn der Gegendruck p_a auf die Projektion $C_1 C_2$ von $A_1' A_2$ die gleiche Gesamtpressung ausübt. Dann ist in A_1 die Pressung p_1 zu

hoch, in A_2 die Pressung p_2 zu tief; **oben tritt ein schiefer Stoß auf, wodurch der Strahl gegen die Achse abgelenkt wird.** Bei A_1 findet eine Ausdehnung „um die Ecke" statt, mit einer nach abwärts gerichteten Ablenkung. **Im ganzen muß die mittlere Strahlachse dennoch wagrecht bleiben, da kein freier seitlicher Antrieb vorhanden** ist. Nimmt der Gegendruck ab, so entsteht eine freie nach abwärts gerichtete Seitenkraft und bewirkt eine entsprechende Strahlablenkung. Nimmt der Gegendruck zu, so ist die freie Seitenkraft nach oben gerichtet, der **Strahl wird nach oben abgelenkt.** Vom unteren Rand gehen dabei wegen der Strahldivergenz Verdichtungsstöße unter veränderlichem Winkel aus. Der Ablenkungswinkel wurde durch Messung des Rückdruckes in der gezeichneten und einer um 180° gedrehten Lage der Düse ermittelt, so daß die Kraft P_n das eine Mal nach oben, das andere Mal nach unten gerichtet war. Bezeichnet man die in die Düsen-Mittellinie fallende Komponente des gesamten Rückdruckes mit P_a, die Hebelarme von P_a und P_n mit a und b, die ausgeübten Momente mit M_1; M_2, so gelten die Gleichungen

$$P_a a - P_n b = M_1; \qquad P_a a + P_n b = M_2,$$

aus diesen folgt

$$P_a a = (M_2 + M_1)/2; \qquad P_n b = (M_2 - M_1)/2.$$

Als Angriff von P_n wurde mit genügender Näherung der Punkt A_0 vorausgesetzt. Die Größe des Ablenkungswinkels folgt dann aus der Gleichung

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{P_n}{P_a} \qquad (9)$$

Der gesamte Rückdruck ist

$$R = \sqrt{P_a^2 + P_n^2} \qquad (10)$$

Die so bestimmten **Ablenkungswinkel sind in Abb. 133a dargestellt.** Es ist bemerkenswert, daß sie im positiven Teil, d. h. bei Spaltausdehnung, als Abhängige des Ausdehnungsbruches p_3/p_1 fast geradlinig verlaufen, und **bei weitem nicht so stark zunehmen, wie der Grenzwinkel von Prandtl-Meyer fordert.**

Der Verlauf des Rückdruckes ist aus Abb. 134 ersichtlich. Darin bedeuten R_1, R_2 die Gesamtkräfte für die beiden Düsenstellungen, P_a P_n die axiale und normale Komponente für die Düse E bei $p_1 = 12{,}71$ at abs. $t_1 = 201°$ C und veränderlichem Gegendruck.

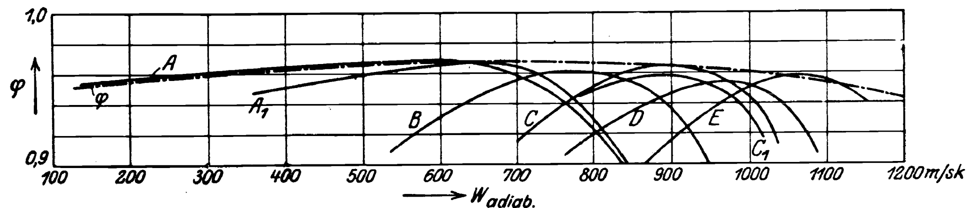


Abb. 134a. Versuche von Brown, Boveri & Cie.

Der Beiwert φ, der hier das Verhältnis der wirklichen Gesamtgeschwindigkeit zur adiabatischen Geschwindigkeit bildet, ist in Abb. 134a als Abhängige der letzteren dargestellt. Die Schaulinien beziehen sich auf folgende Anfangszustände:

Schaulinie	A	A_1	B	C	C_1	D	E
Anfangsdruck . . . at abs.	1,94	2,42 2,84	2,84 3,84	6,02 8,90	4,91	6,92 10,92	8,90 12,71
Anfangstemperatur . . . °C	154		144				201°

Im Gegensatz zu Christlein weist hier die Düse A mit Parallelaustritt die besten Ergebnisse auf. Daß φ in diesen Versuchen mit steigender Ausflußgeschwindigkeit abnimmt, beweist übrigens nichts gegen das Gesetz von Reynolds, denn Düse E hatte einen sehr kleinen engsten Querschnitt, große Länge, also erhöhte Reibung.

B. Strömung in krummlinigen Kanälen (Schaufeln).

44. Turbulenz; Verdichtung in der Krümmung.

Die Strömung in den Schaufeln einer Dampfturbine ist wesentlich verwickelter als die in der Düse, da durch die meist scharfe Krümmung sofort starke Wirbel verursacht werden, die Bewegung ist „turbulent". In einem schaufelförmigen Kanal (Abb. 135) wurde bei A durch eine mittlere Abteilung Luft, die durch Verbrennen von Phosphor weißlich gefärbt war, mit rd. 60 m Geschwindigkeit eingeführt. Durch die Seitenabteilungen $B_1 B_2$ strömte reine Luft mit ebenfalls 60 m Geschwindigkeit ein. Der Versuch zeigte, daß so-

gleich beim Beginn der Krümmung die „Turbulenz" eintrat. Irgendein bestimmtes Teilchen bewegt sich nicht auf einer einfachen, den Umrissen der Schaufel ähnlichen „Stromlinie". Man wird daher dessen eingedenk sein müssen, daß die Masse eines Elementes, das wir uns längs der „mittleren" Stromlinien fortbewegt denken, Teile an Nachbarelemente abgibt und solche von ihnen aufnimmt. Es dürfte indes, wie in der kinetischen Gastheorie auch hier zulässig sein, diesen Einfluß durch einen entsprechenden Ansatz über die Reibung zu berücksichtigen[1]**).**

Bei sehr engen Kanälen wird man die Formeln für die Strömung in geraden Kanälen anwenden dürfen mit einem durch Versuche zu gewinnenden Ansatz für die Reibungswiderstände.

Bei weiteren Kanälen muß die Verdichtung an der hohlen Schaufelseite in Betracht gezogen werden.

In **angenäherter Weise** kann diese Verdichtung wie folgt bestimmt werden. Es sei in Abb. 136 ϱ der Krümmungshalbmesser der Bahn des Massenelementes dm; ebenso seien die Krümmungshalbmesser in allen Punkten des Normalschnittes AB bekannt, insbesondere sei der innere Rand nach dem Halbmesser ϱ_1, der äußere nach dem Halbmesser ϱ_2 gekrümmt.

Die Strömung durch diesen Schnitt darf nun unter keinen Umständen als eine „Rotation" aufgefaßt werden, bei der die Geschwindigkeit gegen den Außenrand zunimmt. Schon bei unzusammendrückbarer Flüssigkeit ist (für reibungsfreie Strömung), wie wir später nachweisen, die Geschwindigkeit innen größer

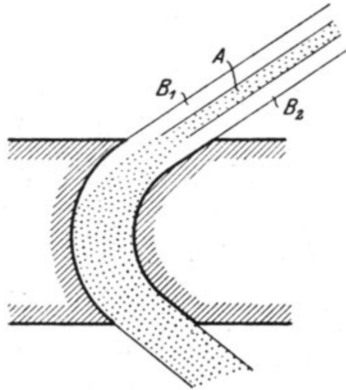


Abb. 135.
Rauchmischung zum Beweis der Turbulenz.

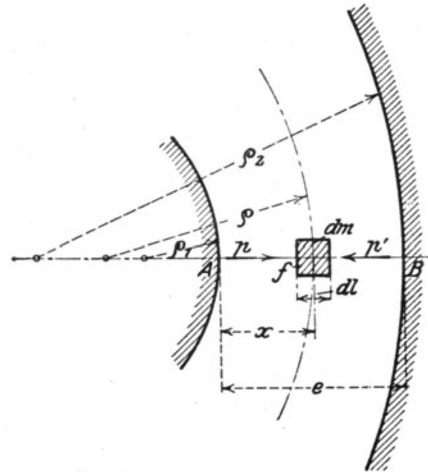


Abb. 136.
Verdichtung in gekrümmten Kanälen.

als außen. Hier kommt die Verdichtung am Außenrande hinzu, wodurch die Geschwindigkeit dort noch mehr vermindert wird. Man muß daher zu den allgemeinen Strömungsgleichungen greifen, die sich indes, wenn wir uns auf den Zustand im betrachteten Querschnitt beschränken, wie folgt vereinfachen. Die zentripetale Beschleunigung des Massenteilchens dm ist w^2/ϱ. Die Beschleunigungskraft ist $f(p' - p)$, und so haben wir als erste Grundgleichung für den Beharrungszustand, wenn noch $dm = f\,dx\,\mu$ eingesetzt wird

$$\frac{dx\,f\mu w^2}{\varrho} = f(p' - p); \quad \text{da } (p' - p)/dx = dp/dx, \text{ so folgt } \mu\frac{w^2}{\varrho} = \frac{dp}{dx} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Die zweite Grundgleichung liefert das Gesetz der kinetischen Energie, und zwar wollen wir annehmen, der Zustand vor dem Eintritt in die Leitschaufel sei durch $p_0 v_0$ bedingt, und die Geschwindigkeit w_0 sei $= 0$.

Dann gilt $\frac{w^2}{2g} = -\int_{p_0}^{p} v\,dp - R$. Das Reibungsglied berücksichtigen wir durch Vermehrung des Ausdruckes der Expansionsarbeit mit $\varepsilon < 1$, welche Größe eine Art Wirkungsgrad der Strömung darstellt, so daß die Gleichung

$$\frac{w^2}{2g} = -\varepsilon\int_{p_0}^{p} v\,dp \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

---

[1]) Es sei hier hingewiesen auf die von anderen Gesichtspunkten aus unternommenen Versuche von H. Thoma in „Wasserkraft und Energiewirtschaft", 1920, S. 81, durch die in Rohrkrümmern eine starke Strahlablösung (am Rücken) erwiesen wird. Durch Einbau einer zur Krümmerebene senkrechten Scheidewand soll D. Thoma bei hydraulischen Turbinenanlagen (infolge Verringerung der Wirbelung) einige Prozente Leistung gewonnen haben.

lautet. Wir setzen nun eine Dampfart voraus, für die als Zustandsgleichung

$$p v = k = p_0 v_0 \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

gelten kann. Dann liefert (2)

$$w^2 = 2 g \varepsilon p_0 v_0 \lg n \frac{p_0}{p} \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

und indem wir dies, wie auch $\mu = \gamma/g = 1/gv$ in (1) einsetzen, entsteht nach Trennung der Variablen

$$\frac{d p}{p\,[\lg n\, p_0 - \lg n\, p]} = 2 \varepsilon \frac{d x}{\varrho} \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Da aber $dp/p = d(\lg n\, p)$, so kann (5) mit der einstweiligen Bezeichnung

$$U_0 = \lg n\, p_0; \qquad U = \lg n\, p \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

auch

$$\frac{d U}{U_0 - U} = 2 \varepsilon \frac{d x}{\varrho}$$

geschrieben werden, woraus sich durch Integration zwischen den Grenzen $x = 0$ bis $x = e$ oder $\varrho = \varrho$ und $\varrho = \varrho_2$

$$\lg n \frac{U_0 - U_2}{U_0 - U_1} = -2 \varepsilon \int\limits_{\varrho = \varrho_1}^{\varrho = \varrho_2} \frac{d x}{\varrho} \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

ergibt. Man kann daher die Integration allgemein lösen, sofern ϱ als Funktion von x bekannt ist.

1. Als erste passende Annahme wählen wir

$$\varrho = \varrho_1 + \beta x, \;\text{ mit } \beta = \frac{\varrho_2 - \varrho_1}{e} \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

woraus mit Gl. (7)

$$\lg n \frac{U_0 - U_2}{U_0 - U_1} = -\frac{2\varepsilon}{\beta} \lg n \left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right) = -\lg n \left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)^{\frac{2\varepsilon}{\beta}}$$

folgt. Von den Logarithmen zu den Zahlen übergehend und den Wert von U einsetzend, erhalten wir

$$\frac{U_0 - U_1}{U_0 - U_2} = \frac{\lg n\, (p_0/p_1)}{\lg n\, (p_0/p_2)} = \left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)^{\frac{2\varepsilon}{\beta}} = \lambda \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

wo λ die abgekürzte Bezeichnung der als Zahlenwert bekannten rechten Seite ist; hieraus endlich

$$\lg n \left(\frac{p_0}{p_1}\right) = \lambda \lg n \left(\frac{p_0}{p_2}\right) = \lg n \left(\frac{p_0}{p_2}\right)^{\lambda}; \text{ oder } \frac{p_0}{p_1} = \left(\frac{p_0}{p_2}\right)^{\lambda} \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

Sind die Begrenzungszylinder koaxial, so bedeutet dies $\beta = 1$.

Ist also einer der Randdrücke p_1 oder p_2 bekannt, so kann der andere berechnet werden. Wären das sekundliche Gewicht und die Schaufeltiefe bekannt, so könnte man mit Hilfe der Gleichung der Stetigkeit beide Pressungen bestimmen. Doch ist die Lösung dieser Aufgabe rechnerisch viel zu umständlich.

2. Eine zweite passende Annahme bildet der Ansatz

$$\varrho = \frac{a\, \varrho_1}{a - x} \;\text{ mit } a = \frac{e\, \varrho_2}{\varrho_2 - \varrho_1} \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

Wir lösen Gl. (1) unter der einschränkenden Voraussetzung auf, daß man w über den Querschnitt unveränderlich ansehen dürfe. Dann erhält man

$$p_2 - p_1 = \mu w^2 \int\limits_0^e \frac{d x}{\varrho} = \frac{e}{2 \varrho_1} \left(1 + \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right) \mu w^2 \quad \ldots \ldots \quad (11a)$$

Diese Formel erlaubt den Übergang zum Grenzfall $\varrho_2 = \infty$ und liefert damit auch den Druckabfall beim Einströmen in eine Düse, deren engste Stelle einen Meridian mit dem Krümmungshalbmesser ϱ_1 besitzt. Man überzeugt sich leicht, daß die Differentialgleichung (1) auch für diesen Fall gültig ist, und erhält hiernach für den Druckunterschied in der Mitte und am Rande

$$p_2 - p_1 = \frac{\mu r w^2}{2 \varrho_1} \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

wo r den Halbmesser des engsten Querschnittes bedeutet.

Beispiel. Sei $\varrho_1 = 2r$; $\gamma = \mu g = 1$; $w = 200$ m/sek, dann ist $p_2 - p_1 \cong 1000$ kg/qm $= 0{,}1$ at. Schon bei $w = 400$ wird hiernach $p_2 - p_1 = 0{,}4$ at, ein wohl zu hoher Betrag, der darauf hinweist, daß die Bahnen der Dampffäden schon an der engsten Stelle die Krümmung des Einlaufes verlassen und in länger gestreckte übergehen.

45. Beobachtungen über die Druckverteilung in Schaufeln.

Die von uns benützte Versuchsvorrichtung ist in Abb. 137 und 138 dargestellt. Der Oberteil der Schaufelbegrenzung ist durch einen dicht aufgeschliffenen Bronzeschieber ersetzt, der durch Federn auf die Dichtungsflächen gepreßt wird und nach zwei zueinander senkrechten Richtungen durch Schrauben und Handräder bewegt werden kann. Auf diese Weise kann die Meßbohrung mit Manometeranzeige auf irgendeinen Punkt des Kanales hingeschoben und der Druckverlauf ebenso stetig beobachtet werden, wie wir das bei der Düse getan. Da die Strömung in parallelen Ebenen vor sich geht, gilt eine Druckablesung für alle Punkte in einer Vertikalen, was durch Probebohrungen in der unteren Schaufelwand direkt erwiesen wurde.

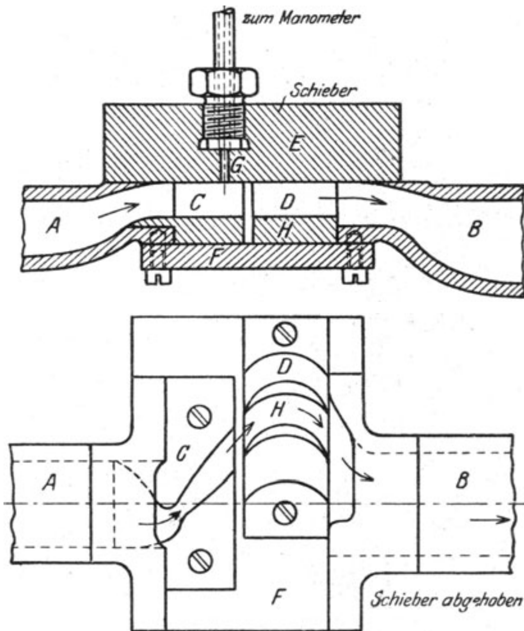


Abb. 137 u. 138.
Messung des Druckverlaufes in Schaufeln.

a) Nicht erweiterte Leitvorrichtungen (Schaufeln).

Abb. 139 stellt den Druckverlauf in einer Leitschaufel gewöhnlicher Art für einen über dem kritischen gelegenen Gegendruck dar. Im Aufriß (Mittelfigur) sind die Drücke in Schnitten aufgezeichnet, die der Ausströmungsfläche parallel gelegt und mit den Schnittlinien (47, 42, 37, 32 usw.) im Grundriß gleichnamig bezeichnet sind. Die seitlichen Aufrißfiguren stellen den Druck in den (römisch I—V numerierten) Normalschnitten dar und lassen erkennen, daß in der Tat nach der hohlen Seite eine, wenn auch schwache, Verdichtung vorhanden ist. Der Endschnitt Nr. 47 weist in Schaufel A, wie sein muß, atmosphärischen Druck auf. In Schaufel B ist am Rande ein Überdruck wahrnehmbar, der indessen in nicht ganz richtiger Einstellung seinen Grund haben dürfte. Da wir uns **unter der Schallgeschwindigkeit** befinden, kann in der Tat ein Druckunterschied in der Mündung gegen die Umgebung nicht bestehen.

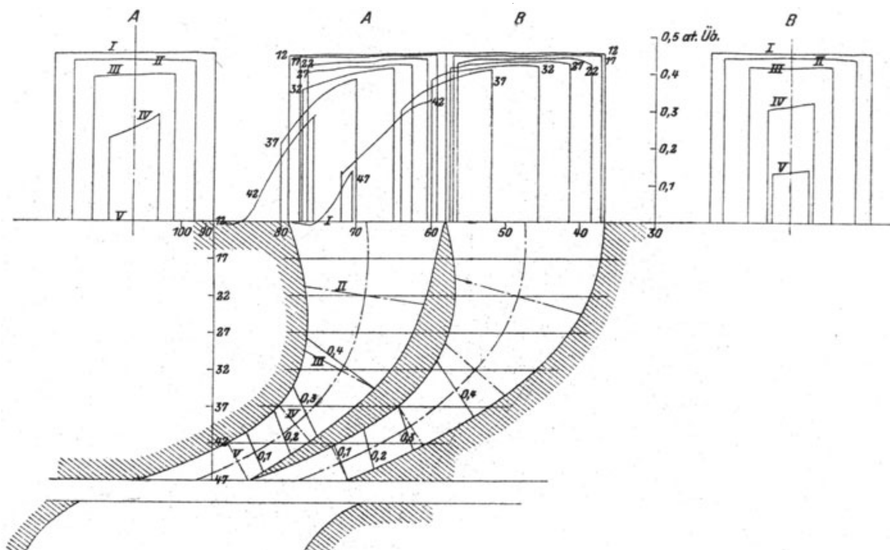


Abb. 139. Druckverlauf in nicht erweiterten Kanälen, freier Ausfluß.

Ganz anders ist das Bild, wenn das Ausströmen nicht in den freien Raum erfolgt wie oben, wenn vielmehr Laufschaufeln dem Leitrad gegenüberstehen. Wie in Abb. 140 erkennbar ist, expandiert der Dampf zu tief, obwohl die (nach zwei Seiten offene) Spaltweite 3 mm betragen hat, und obwohl auf der linken Seite der Strahl sogar gegen die Kante stößt. Der Spalt bildet also gewissermaßen eine Erweitung und veranlaßt eine Druckverminderung, die ein Ansaugen der Laufschaufel zur Folge hat, über die wir noch weiter unten zu berichten haben werden.

Im Grundriß der Abb. 139 sind wagerechte Schnitte durch den „Druckkörper", d. h. Linien gleichen Druckes (von 0,1, 0,2, 0,3, 0,4 at Überdruck), eingezeichnet, die das Sinken der Pressung besonders deutlich zu erkennen gestatten.

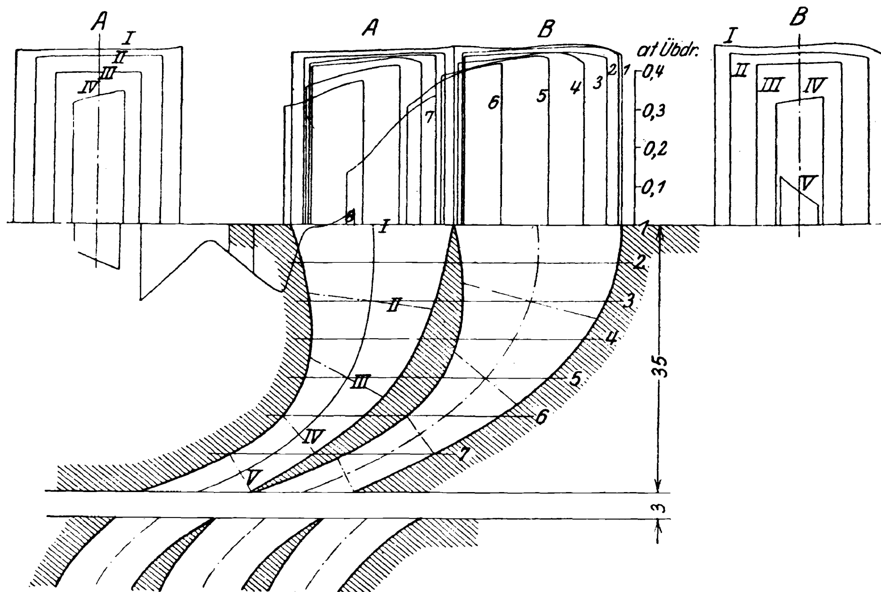


Abb. 140. Ausfluß aus der Leitschaufel bei vorgeschalteten Laufschaufeln.

Der Einfluß der Krümmung ist in den Schaulinien, Abb. 117, 118, stärker ausgeprägt, wo sich infolge des unvermittelten Überganges der Krümmung in die Gerade auf der konvexen Seite der Schaufel eine starke Drucksenkung geltend macht.

b) Erweiterte Leitvorrichtungen [Düsen] mit gekrümmtem Einlauf.

Die als Beispiel für die Ausdehnung im Schräg-Abschnitt schon oben mitgeteilten Abb. 119, 120 lassen erkennen, daß der gekrümmte Einlauf der erweiterten Düse eine starke Störung der Druckverteilung hervorruft, indem die Linien gleichen Druckes insbesondere in der Umgebung des kleinsten Querschnittes sich zur Düsenachse schräg stellen, wodurch wieder das Auftreten eines beträchtlichen Zentrifugaldruckes bekundet wird. Diese Schrägstellung hat eine Verminderung der durchströmenden Dampfmenge zur Folge, auf die wir noch zurückkommen.

c) Laufschaufeln für Überdruckturbinen.

In Abb. 141, 142, 143 ist der Druckverlauf für die von einer namhaften Firma verwendeten Überdruckschaufeln nach Anderhub[1]) dargestellt. Die Abmessungen können mit Hilfe des beigefügten Maßstabes ermittelt werden; die Versuchsbedingungen und die beobachteten Dampfmengen sind in nachfolgender Zahlentafel vereinigt.

Versuche von Anderhub.

Abb.	141	142	143
Anfangsdruck . . . . at abs	2,00	1,47	2,01
Anfangstemperatur . . . . t^0 C	220	220	220
Dampfgewicht . . . . kg/st	177	127	244
Lichte Kanalweite links . . . . . mm	5,72	5,72	5,53
„ „ rechts . . . . mm	6,07	6,07	9,35
Kanalhöhe . . . . mm		18,6	
Engster Querschnitt . . . . cm²		1,87	—
Ausströmungszahl χ	1,99	—	—

[1]) Untersuchung über die Dampfströmung im radialen Schaufelspalt. Dissert. Zürich 1912.

Die enge Schaufelstellung entspricht der Schaufelteilung an der Wurzel, die Weitstellung (Abb. 143) der Teilung an der Schaufelspitze. Wie ersichtlich, bildet in ersterem Falle das

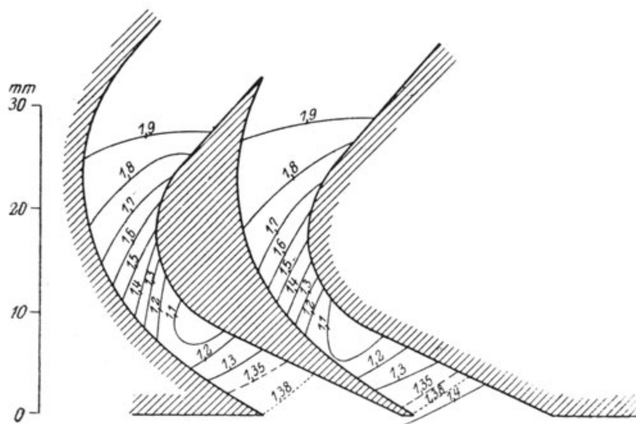


Abb. 141.

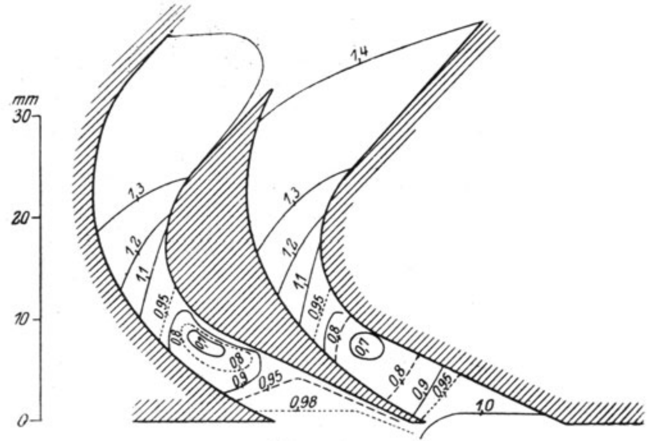


Abb. 142.

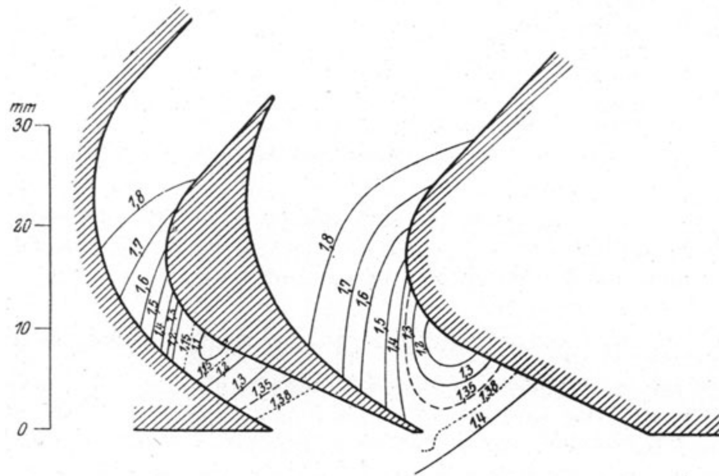


Abb. 143.

Abb. 141 bis 143. Druckverlauf in eingeschnürten Überdruckschaufeln nach Anderhub.

Schaufelende bereits eine erweiterte Düse. Der scharfe Zentrifugaldruck bewirkt auch hier eine verhältnismäßig tiefe Drucksenkung am Ende der Krümmung beim Übergang in die gerade Flanke mit entsprechender Zunahme der Geschwindigkeit und der Reibungsarbeit, die von Anderhub (a. a. O. S. 30) im Vergleich mit dem nicht eingeschnürten Kanal auf 10 v. H.

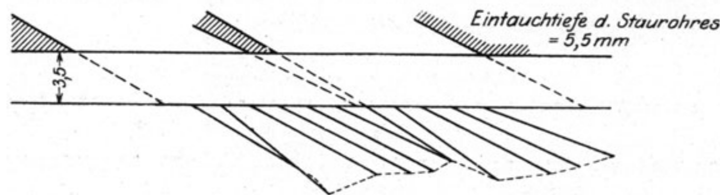


Abb. 144. Richtung der Austrittsgeschwindigkeit zu Abb. 141.

eingeschätzt wird. In Abb. 144 sind die durch ein Staurohr ermittelten Geschwindigkeiten nach Größe und Richtung in 3,5 mm Abstand vom Austrittsende der Schaufel dargestellt, und zwar für eine Ebene, die 5,5 mm von der oberen Seitenwand der Schaufel entfernt war. Man erkennt die starke Abnahme der Geschwindigkeit dem Schaufelende gegenüber und die Verschiedenheit der Geschwindigkeitsrichtung. Der Anfangsdruck war hierbei 2,0, der Gegendruck 1,4 at abs.

d) Schaufel für Gleichdruckturbinen.

Der Dampf strömt der Schaufel mit überall gleichmäßiger Geschwindigkeit und unter demselben Druck zu, der am Ausflußende herrscht. Man führt die Schaufel häufig als Kanal mit überall gleicher Weite aus, wobei die zentrifugale Verdichtung die Dampfbahnen an der

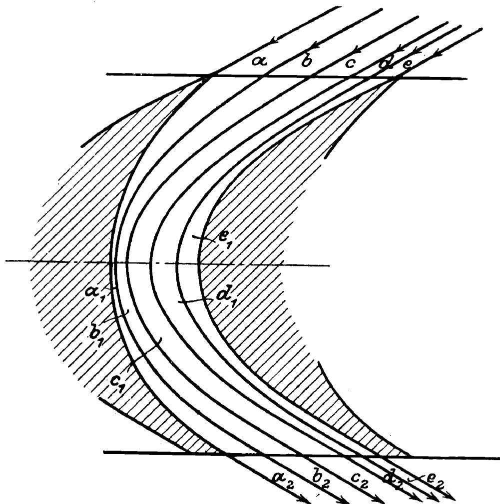


Abb. 145.

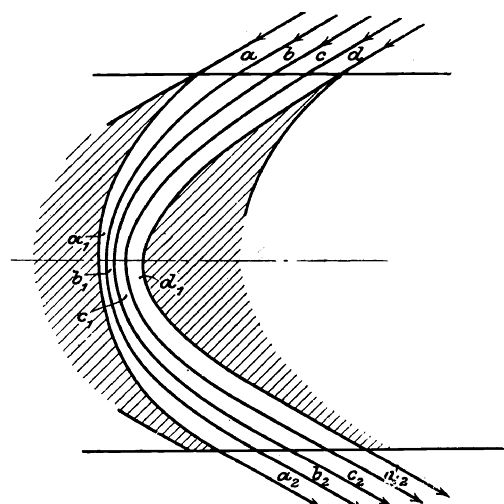


Abb. 145a.

Normale und „Grenz"schaufel.

hohlen Stelle stark zusammendrängt (Abb. 145), während bei e_1, d_1 wahrscheinlich eine Verdünnung stattfindet. Da man früher annahm, daß diese mit besonderen Verlusten verbunden ist, wurde die eingeschnürte Schaufelform Abb. 145a vorgeschlagen, ohne durch Versuch oder theoretisch einen Vorteil dieser „Grenzschaufel" erwiesen zu haben.

Wichtig ist vor allem das Einhalten des vorgeschriebenen Austrittswinkels. Müssen die Schaufeln aus Festigkeitsgründen kräftig ausgeführt werden, so empfiehlt sich[1]) die Anordnung Abb. 146 mit geradlinigem Ansatz am Ende, der dem verdichteten Dampf Gelegenheit zur Wiederentspannung bietet. Bei schroffem Auslauf nach Abb. 146a sind die Bahnen noch lange

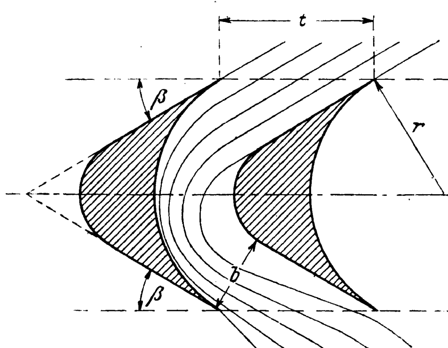


Abb. 146. Ausdehnung im Schaufelschrägende mit Strahlablenkung.

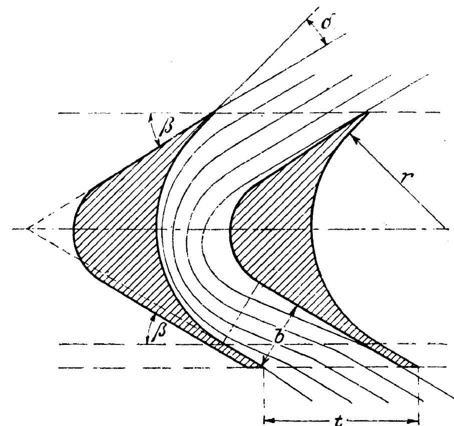


Abb. 146a. Raum am Austritt für Entspannung und parallele Schichtung.

nicht parallel, wie aus den unten besprochenen Versuchen von Löliger noch deutlicher hervorgeht. Für den Eintritt empfiehlt Wagner eher den „Stoßwinkel" δ zuzulassen, als den Schaufelrücken an die innere Krümmung tangential verlaufen zu lassen, wodurch eine der raschen Abnutzung unterworfene Kante entsteht, während der Stoß nach Abb. 146a infolge der allmählichen Ablenkung der aufeinander folgenden Schichten erfahrungsgemäß wenig schädlich wirkt. Wo die Festigkeit es zuläßt, behauptet sich die aus Blech von gleicher Dicke gebogene,

[1]) Nach Wagner, Der Wirkungsgrad von Dampfturbinen-Beschaufelungen. Berlin 1913. S. 23.

mit zugeschärftem Rand versehene Schaufel (Abb. 147) bei nicht zu hohen Umfangsgeschwindigkeiten, trotzdem sie in der Mitte eine Erweiterung aufweist. Obwohl es wahrscheinlich ist, daß sich der Dampfstrahl vom Schaufelrücken bei A loslöst und einen Wirbelraum bildet, so sind doch nach Mitteilungen von verschiedenen Seiten die Verluste dieser Schaufel, zumindest bei niederen Drucken (< 2 at), kleiner als bei der nach Abb. 145.

Arbeitet die Schaufel mit Unterschallgeschwindigkeit, so kann der Schaufelkanal selbstverständlich nicht mit überall gleichem Querschnitt ausgeführt werden, wenn man Überdruck vermeiden will. — Bei Überschallgeschwindigkeit würde Druckzunahme im Sinne der Strömung auftreten; am Schaufelende würde der Dampf auf den Druck der Umgebung expandieren. Im allgemeinen wird die Schaufel derart erweitert, daß sie ähnlich wirkt wie die früher beschriebene Düse für konstanten Druck, abgesehen natürlich von der unvermeidlichen Verdichtung auf der hohlen Seite; es soll sich der Druck der Umgebung von selbst noch innerhalb der Schaufel am Austritt einstellen.

Abb. 147. Blechschaufel mit Querschnittüberschuß.

Abb. 148. Umkehrschaufeln der „Elektra"-Turbine.

Abb. 149. Abb. 150.

Druckverlauf in den Umkehrschaufeln der „Elektra"-Turbine.

Was eine Schaufel mit unveränderlichem Querschnitt anbelangt, so war ich dank dem Entgegenkommen der Gesellschaft für elektrische Industrie in Karlsruhe schon im Jahre 1905 in der Lage, an einer in Betrieb befindlichen „Elektra"-Turbine die Druckverhältnisse bei Überschallgeschwindigkeit durch Beobachtung festzustellen.

Diese Turbine arbeitet mit Düsen, in denen der Dampf bis nahezu auf Kondensatorspannung expandiert. Nachdem er das Rad in radialer Richtung einmal durchströmt hat, wird er durch einen Umleitkanal ge-

faßt und wieder aufs Rad geleitet. Dies wiederholt sich dreimal, wie die schematische Abb. 148 zeigt. An den mit Punkten bezeichneten Stellen wurde der Druck mittels Quecksilbermanometer gemessen. Die Beobachtungen sind für „Überlast" in Abb. 149, für „schlechtes Vakuum" in Abb. 150 zusammengetragen. Durch Vermerke ist angegeben, ob sich die Spannungen auf die Mitte des Kanales, oder auf seine hohle Seite, oder auf den „Schaufelrücken" beziehen. Die Abszisse bildet die Länge des wirklichen Dampfweges Da, wo der Dampf die Laufschaufel durchsetzt, ist in der Figur eine Verdickung angebracht. Die Umleit kanäle haben je unveränderlichen Querschnitt.

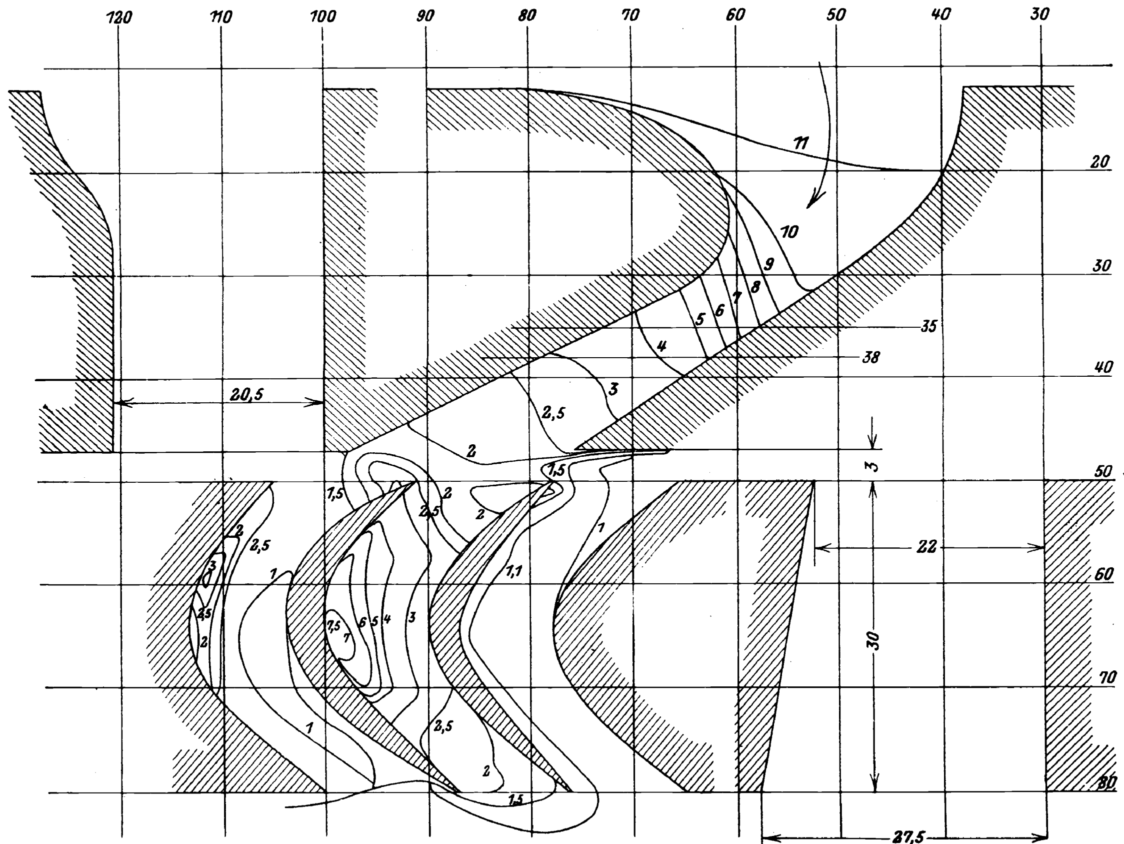


Abb. 151. Starke Verdichtung bei Überschallgeschwindigkeit.

Es zeigt sich, daß die von der Theorie geforderte Verdichtung nicht nur auf der hohlen Seite, sondern auch in Richtung der Strömung, soweit Überschallgeschwindigkeit herrschte, sich deutlich ausprägt. Beispielsweise expandierte man bei Überlast auf etwa 0,34 kg/qcm abs und erhielt am Ende des ersten Umleitkanales im ganzen Querschnitt rund 0,5 kg/qcm, auf der hohlen Kanalseite aber, in der stärksten Krümmung fast 0,7 kg/qcm. Im zweiten Kanal, in dem keine Überschallgeschwindigkeit mehr vorhanden ist, zeigt sich stetiger Abfall in Richtung der Strömung, indes Druckverschiedenheit auf der hohlen und der vollen Schaufelseite.

Der Druckverlauf bei Überschallgeschwindigkeit in einer normalen Schaufel wurde mit Hilfe der oben beschriebenen Vorrichtung in Verbindung mit der Überdruckdüse ermittelt und in Abb. 151 dargestellt. Von den drei mit mäßig verdicktem Steg ausgeführten Schaufelkanälen erhält der mittlere einen vollen Dampfstrahl, der linksstehende ist teilweise, der rechtsstehende gar nicht beaufschlagt. Der Druckverlauf im Innern der Düse erscheint gegenüber Abb. 119, wie zu erwarten, wenig verändert, und zwar besaß der Einlauf eine Hohlkehle wie bei X in Abb. 119, hingegen sind die Druckverhältnisse im Spalt wesentlich andere.

Im Inneren der mittleren Schaufel konnte mit jeden Zweifel ausschließender Sicherheit eine Verdichtung bis auf 7,5 kg/qcm abs. beobachtet werden, ein gewiß unerwartetes Resultat, das indes gestützt werden kann durch die theoretische Untersuchung des Verdichtungsbetrages. Der Anfangszustand des Versuches war $p_0 = 11$ kg/qcm abs., $t_0 = 220^0$ C. An einem Abklatsch der Schaufel fanden wir $\varrho_1 = 7{,}5$ mm, $\varrho_2 = 10{,}5$ mm, $e = 10$ mm. Ferner ist nach Beobachtung am Innenrand $p_1 = 2{,}5$ kg/qcm abs., $p_2 = 7{,}5$ kg/qcm abs: Wir erhalten dem-

nach gemäß Formel (10), Abschn. 44

$$\lambda = \frac{\lg (p_0/p_1)}{\lg (p_0/p_2)} = 3{,}86. \quad \text{Hieraus nach Gl. (9)} \quad \frac{2\varepsilon}{\beta} = \frac{\lg \lambda}{\lg (\varrho_2/\varrho_1)} = 4{,}02.$$

Da aber $\beta = (\varrho_2 - \varrho_1)/e = 0{,}30$ beträgt, so folgt der „Wirkungsgrad"

$$\varepsilon = 0{,}60.$$

Dies ist ein Wert, dem bei der sehr vereinfachten Zustandsgleichung, die wir vorausgesetzt haben, genügende Wahrscheinlichkeit zukommt.

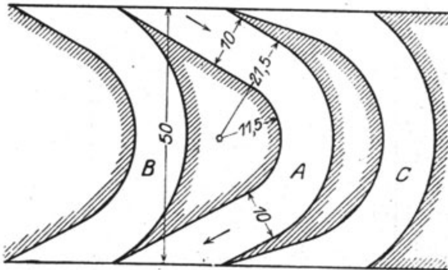


Abb. 152.

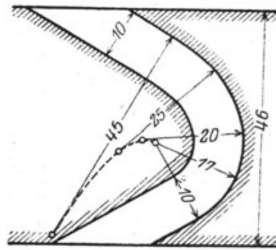


Abb. 153.

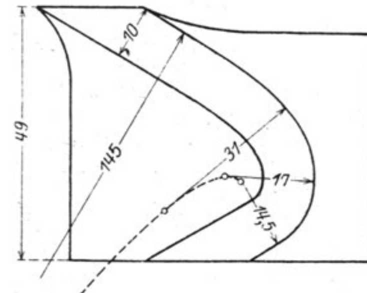


Abb. 154.

Von Löliger untersuchte Schaufelformen.

Rechnen wir nun nach Gl. (4), Abschn. 44, die Geschwindigkeiten aus, so ergibt sich mit $v_0 = 0{,}192$ cbm/kg an der Außenseite

$$w_a \simeq 310 \text{ m/sek},$$

an der Innenseite

$$w_i \simeq 610 \text{ m/sek}.$$

Infolge der starken Verdichtung erhalten wir daher **an der Innenseite eine doppelt so hohe Geschwindigkeit als an der Außenseite.** Dieser Unterschied der Geschwindigkeiten erzeugt

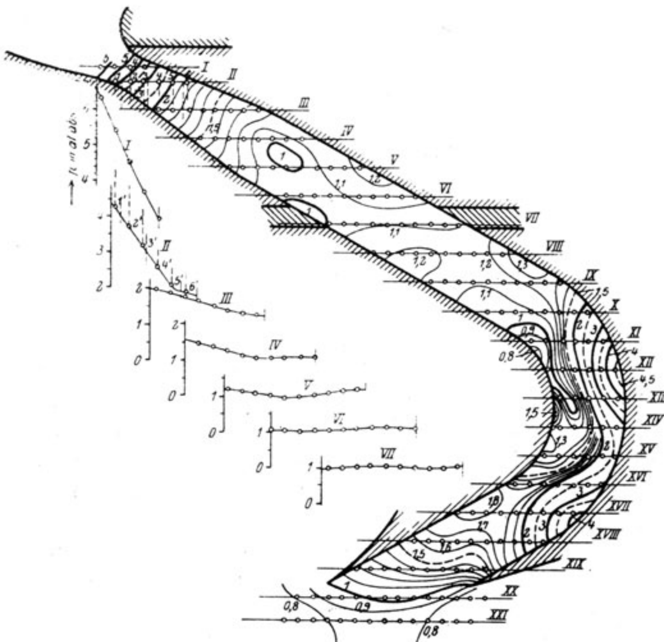


Abb. 152a.

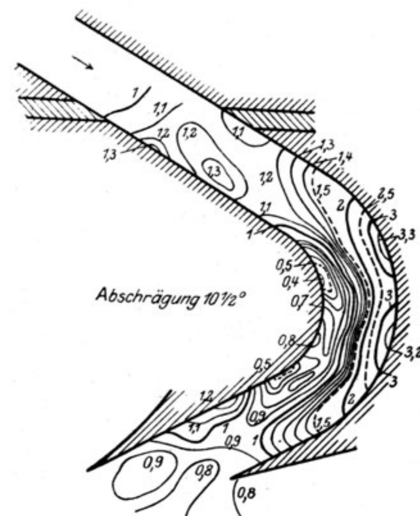


Abb. 152b.

Druckverlauf in Schaufel 152 ohne und mit $10^1/_2{}^0$ radialer Erweiterung.

in der ganzen Strahlmasse schärfste Wirbelung mit entsprechendem Verlust an kinetischer Energie. Hier ist wohl einer der Gründe für die bedeutende Größe der **„Schaufelreibung"**

zu suchen, und wir erkennen, wie sehr **die Krümmung der Schaufel der Dampfgeschwindigkeit angepaßt** sein sollte. In Abschn. 167c wird erläutert, wie theoretisch günstigere Schaufelformen für Überschallgeschwindigkeit ermittelt werden können.

Weitere Aufklärungsn bringt die sehr vollständige Untersuchung Löligers[1]) im Maschinen-Laboratorium der Eidg. Tech. Hochschule an einer Gleichdruckschaufel mit Überschallgeschwin-

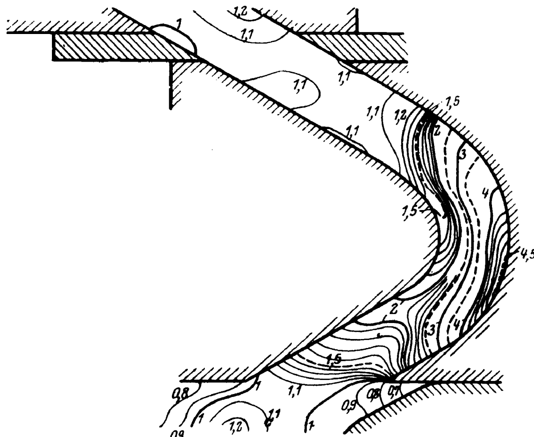


Abb. 153a.
Druckverlauf zu Schaufel 153.

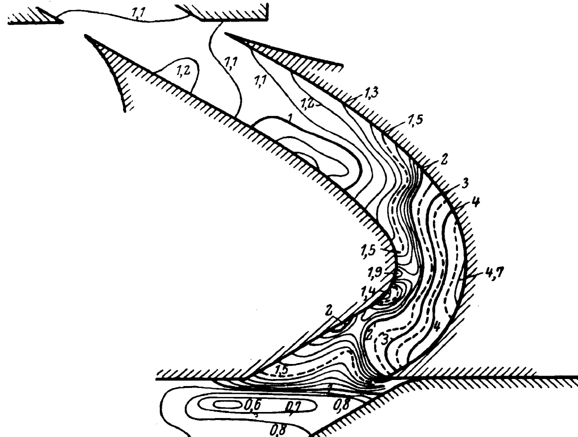


Abb. 154a.
Druckverlauf zu Schaufel 154.

digkeit. Das Hauptziel derselben war zunächst die Ermittelung des Einflusses einer gleichmäßigen oder einer gegen das Ende zunehmenden Kanalkrümmung, an den Modellen I, II, III, Abb. 152 bis 154, wobei die Seitenwände zunächst parallel ausgeführt, später mit wachsender Erweiterung nach Abb. 155 versehen waren. Abb. 152a bis 154a veranschaulichen den Druckverlauf. Der zwischen Düse und Schaufel ursprünglich vorgesehene Spalt wurde später, wie ersichtlich, um möglichst gleichmäßigen Eintritt zu erzielen, ausgefüllt.

In Abb. 152a ist auch die benützte Düse mit abgebildet. Der Anfangsdruck war bei allen Versuchen 10 at abs. Die Anfangstemperatur in der Reihenfolge der Abbildungen 245, 237, 233, 237° C, das sekundliche Dampfgewicht 0,117; 0,106; 0,119; 0,106 kg; wobei das vorletzte, wahrscheinlich wegen Schieberundichtheit aus der Reihe etwas herausfällt.

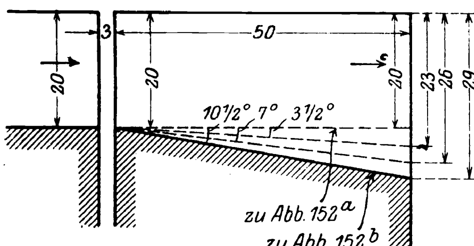


Abb. 155. Schaufelerweiterung.

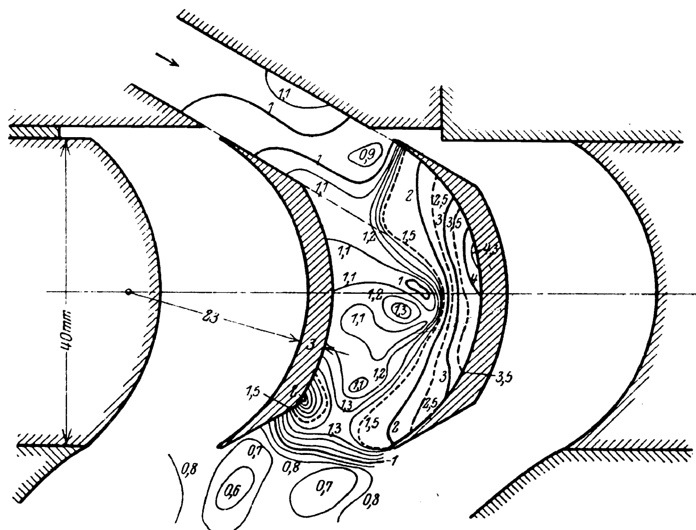


Abb. 156. Verdichtung bei Blechschaufeln.

Man erkennt, daß der Dampf in der gleich weiten Schaufel infolge des ersten, mit starker Verdichtung verbundenen Anpralles gewissermaßen zurückgeworfen wird, auf der Rückenseite der Schaufel einen kleinen Stau hervorzubringen imstande ist und auf der hohlen Seite eine zweitmalige starke Verdichtung erfahren muß, also in einem förmlichen Schwingungszustande sich befindet. Durch die Erweiterung der Schaufel

[1]) Untersuchung des Druck- und Strömungsverlaufs in Schaufeln. Dissert. Zürich 1913.

wird gemäß Abb. 152b die Größe der Verdichtung herabgesetzt, allein immer noch mit deutlicher Hin- und Herpendelung. Demgegenüber zeigt die mit allmählicher zunehmender Krümmung ausgeführte Schaufel, Abb. 153, gemäß Schaubild 153a, nur noch eine einzige Druckanschwellung, die bei der noch mehr elliptisch geformten Schaufel, Abb. 154, gemäß Schaubild 154a, auf einen noch kleineren Raum zusammengedrängt wird. Doch ist die Expansion an der Austrittskante im letzteren Falle eine offenbar zu rasche und würde wohl zu starker Strahlablenkung führen. Man sieht indessen, wie durch geeignete Schaufelformung der Verdichtungsvorgang beherrscht werden kann. Die zweimal hintereinander erfolgende Verdichtung im Modell I ist sicher mit Verlusten verbunden, wie auch die durch Löliger vorgenommene Reaktionsmessung bestätigt hat. Immerhin war der Unterschied ein ziemlich unerheblicher.

Sehr zum Nachdenken regt Schaubild 156 an, in dem Löliger die Druckverteilung einer ohne Rückenverdickung ausgeführten Schaufel bei 10 at abs. 248° C Anfangszustand, 0,115 kg sekundlichem Dampfgewicht darstellt. An der etwas vorstehenden Kante der Rückseite der Schaufel am Austritt stellt sich, wie ersichtlich, eine starke Verdichtung ein, die den austretenden Strahl offenbar so ablenken wird, daß von einem Einhalten des durch die Schaufelneigung vorgeschriebenen Winkels und damit auch von einem Erzielen der gewünschten Leistung keine Rede sein kann. Selbst eine bessere Abrundung jener Ecke, wodurch die Schaufel mit praktisch viel benutzten Formen in jeder Hinsicht zur Übereinstimmung käme, dürfte jene ungünstige Verdichtung kaum ganz beseitigen. Der starke Schwingungszustand des Dampfes im Ausströmungsraum wird durch die tiefen Drucksenkungsinseln hinter der Schaufel, die sich auf einer längeren Strecke weiter abwärts fortsetzen, anschaulich gemacht. Die Schaufel besaß eine unveränderliche Tiefe von 20 mm; leider gebrach es an der Zeit, den Druckverlauf auch in einer radial erweiterten Schaufel zu untersuchen.

Die Sekundärströmung in der Krümmung.

Die Arbeit von Löliger enthält auch eine sehr vollständige Untersuchung der „Sekundärströmungen" in Rohrkrümmungen. Bekanntlich entstehen Sekundärströmungen durch die Wirkung der Reibung an den Seitenflächen der Kanäle[1]).

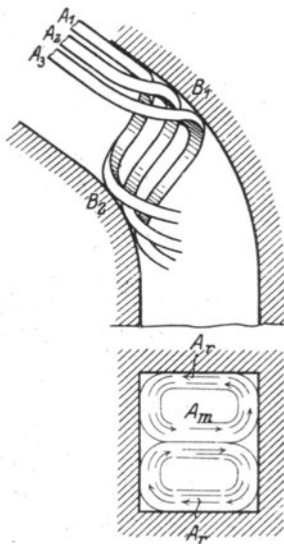


Abb. 157. Sekundärströmung in gekrümmten Kanälen.

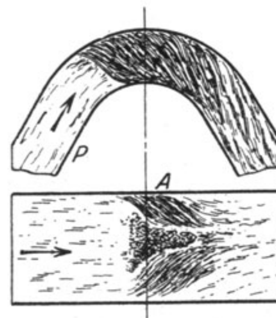


Abb. 157a. Strombahnen in Löligers Versuchen.

In Abb. 157 ist ein Längen- und ein Querschnitt durch die Strömung dargestellt. Stellen wir uns vor, daß in jeder zur Kanalächse senkrechten Ebene der gleiche Strömungszustand herrschte, so würden die von benachbarten Schichten aufeinander ausgeübten Pressungen im Gleichgewichte stehen. In Wirklichkeit jedoch wird die an die Wand A_r anliegende Schichte gegenüber der durch die Mittelebene A_m strömenden vermöge der Wandreibung verzögert. Der Zentrifugaldruck, den die mittlere Schichte auf die Außenwand in radialer Richtung ausübt, ist mithin größer als derjenige der Randschichte. Dieses gestörte Gleichgewicht führt zu einem Abströmen der mittleren Schichte nach der Seitenwand hin, wie die Pfeile andeuten. Insbesondere wird, im Aufriß gesehen, der ursprünglich der äußeren Krümmungsfläche entlang fließende Faden A_1 nach abwärts ausweichen und sich in geschlängelter Bahn gegen die innere Krümmungsfläche B_2 bewegen. Der von A_1 frei gemachte Raum wird durch einen zweiten Faden A_2 ausgefüllt, dem dasselbe Los beschieden ist, ähnlich dem weiteren Nachbar A_3 usf., die alle in der Gegend B_1 dem Rand entlang die Wendung nach B_2 antreten, um dort in die Mittelschichte zurück zu biegen. Daß diese Strömung auch im beobachteten Dampfkanal vorliegt, wird durch Abb. 157a erwiesen. Um die Strömungsrichtung kenntlich zu machen, wurden von Löliger die polierten Innenwände mit einem schwärzlichen Lack bedeckt, der durch die Dampfströmung

[1]) Die erste Andeutung über die Sekundärströmungen in der physikalischen Literatur stammen meines Wissens von J. J. Thomson, Proc. Royal Soc. 1076, Vol. 25, S. 5. Die lichtvollste Darstellung gab Isaachsen in einer bemerkenswerten Abhandlung (Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1911, S. 215), deren aufmerksames Studium jedem Ingenieur empfohlen sei, und die neben den Sekundärströmungen eine Fülle von andern wichtigen Strömungserscheinungen in vorbildlich anschaulicher Weise behandelt. Kurze Zeit hierauf erschien der Bericht von J. Eustice, Exper. on Stream Line motion in curved Pipes, Proc. Royal Soc. A, Vol. 85, 1911, S. 119, der die Sekundärströmung durch Einspritzen farbiger Strahlen unmittelbar sichtbar gemacht hat. Eine Art Abschluß bildet die große Dissertation von Lell: Beitrag z. Kenntn. d. Sekundärströmungen. Oldenbourg, 1913.

nach kurzer Frist zum Teil weggewaschen, ein treues Bild der Stromlinien darbietet. So ist denn die Bahn der in Abb. 157 skizzierten Stromfäden an der Seitenfläche mit voller Deutlichkeit sichtbar. Abb. 157a zeigt ferner die Ansicht (von oben) auf die innere (konvexe) Krümmungsfläche, die das Auftreffen der sekundären Stromzweige und ihren Zusammenfluß in einen mittleren Strom deutlich veranschaulicht. Durch sorgfältige und umständliche Messungen konnte Löliger die Geschwindigkeit der Stromfäden im einzelnen nachweisen und aus der räumlichen Verteilung des Stromes unter Einhaltung der Stetigkeitsbedingung auf eine Ablösung des Strahles an der Innenfläche schließen[1]).

Daß die Sekundärströmung die Wirbelung im Innern der Flüssigkeit und damit die Reibungsverluste in namhafter Weise vergrößern muß, liegt auf der Hand, obschon wir vorderhand nicht imstande sind, diesen Einfluß nach Zahl und Maß einzuschätzen.

Die Ausflußmenge bei gekrümmten Kanälen.

Der im gekrümmten Einlauf hervorgerufene Zentrifugaldruck bewirkt eine Verkleinerung der durchströmenden Dampfmenge, worauf in strenger Weise zuerst Forner[2]) hingewiesen hat. Es ist nämlich für die Sekunde:

$$G = \int df\, w \gamma \cos\alpha \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

wobei df ein Element des **engsten Querschnittes**, α den Winkel, den die Normale dieses Elementes mit der Strömungsrichtung einschließt, bedeuten. Tragen wir in Abb. 158 über f_m als der Abszisse die herrschenden Drücke auf, so besitzt, unter der Annahme, daß der kritische Druck p_m erreicht wird, das Produkt $w\gamma$ einen Höchstwert in dem Punkte, wo $p = p_m$ ist und nimmt ab sowohl für $p < p_m$ wie auch für $p > p_m$. Daher wird der Wert jenes graphisch zu bildenden Integrales kleiner sein als wenn im ganzen Querschnitt p_m herrschte, und zwar einerlei, ob eine rein adiabatische oder mit Reibung verbundene Strömung vorliegt. In letzterem Falle ist die Dampfmenge noch kleiner als ohne Verluste.

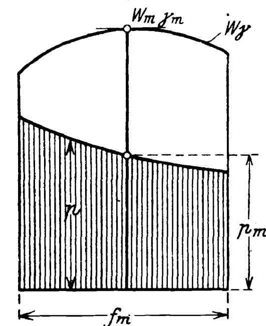


Abb. 158. Zustandsverlauf im engsten Querschnitt krummliniger Kanäle.

Auf dem Wege der Rechnung kann in angenäherter Weise die sekundliche Menge ermittelt werden, wenn man voraussetzt, daß der Druck im engsten Querschnitt linear von p_1 an der Innenkante, auf p_2 an der Außenkante zunimmt, und von p_m nur wenig verschieden ist. Bezeichnen G_1 die wirkliche zum Drucke p, G_{m1} die zum Drucke p_m gehörende sekundliche Menge für die Einheit des Querschnittes, so ist nach der Bendemannschen Ellipse

$$\frac{G_1}{G_{m1}} = \sqrt{1 - \left(\frac{p - p_m}{p_0 - p_m}\right)^2} \cong 1 - \frac{(p - p_m)^2}{2(p_0 - p_m)^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

wo p_0 den Druck vor der Mündung bedeutet. Für einen Rechteckquerschnitt ist nach (1) mit der Annäherung $\cos\alpha \cong 1$, wenn h die Höhe, b die Breite ist

$$G = \int G_1\, df = \int_0^b G_{m1} \left[1 - \frac{(p - p_m)^2}{2(p_0 - p_m)^2}\right] h\, dx \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Nun soll $p = p_1 + (p_2 - p_1)\, x/b$ sein, woraus $x = (p - p_1) b : (p_2 - p_1)$ folgt, und in (3) eingesetzt mit $G_m = f \cdot G_{m1}$ das Ergebnis

$$G = G_m \left[1 - \frac{(p_2 - p_m)^3 + (p_m - p_1)^3}{6(p_2 - p_1)(p_0 - p_m)^2}\right] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

liefert. Die Verminderung ist am geringsten, falls p_1, p_2 um gleich viel von p_m abweichen, so daß man $p_2 - p_m = p_m - p_1 = (p_2 - p_1)/2$ setzen darf. Dann wird

$$G = G_m \left[1 - \frac{1}{24}\left(\frac{p_2 - p_1}{p_0 - p_m}\right)^2\right] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Wären die Formeln des Abschn. 44 auf den Übergang vom gekrümmten Einlauf in die geradlinige Düsenfortsetzung anwendbar, so wäre $p_2 - p_1$ und damit G theoretisch festgelegt. An der Leitschaufel mit Parallel-

[1]) In der angezogenen Mitteilung von J. J. Thomson wird mit Hilfe dieser Theorie erklärt, warum in Flußkrümmern das äußere und nicht das innere Ufer abgetragen wird, obwohl wegen des zentrifugalen Staues die Geschwindigkeit außen geringer ist als innen. Der Grund ist eben die Sekundärströmung, die, wenn der Aufriß von 157 den Flußlauf bedeutet, das Flußbett, wie ersichtlich, so bearbeitet, daß Material von B_1 nach B_2 hinübergeschleppt wird.

[2]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1913, S. 1229.

austritt, Abb. 117, wo die starke Wirbelung auftritt, und an der Düse, Abb. 151, kann man leicht nachrechnen, daß die Druckänderung weit geringer ist als bei einer Schaufel mit gleichem Krümmungshalbmesser. Die Abnahme von G dürfte daher, soweit die Ungleichheit des Druckes im engsten Querschnitt allein in Betracht kommt, selten 1 v. H. erreichen. Was darüber hinausgeht, ist zu Lasten der Reibungswiderstände und der Meßfehler zu buchen.

Die praktischen Versuchsergebnisse, die vorliegen, sind ziemlich widersprechend, wie nachfolgende Zahlentafel zeigt.

Ausflußzahl χ bei krummlinigen Kanälen.

	Art des Kanales	Abb.	Engster Querschnitt Rechteckseiten		χ in Formel $G = \chi f_m \sqrt{\frac{p_1}{v_1}}$	Beobachter
			in Krümmungsebene mm	senkrecht dazu mm		
1	Leitvorrichtung mit Parallelaustritt .	127	10	18,5	1,82—1,88	Christlein
2	„ .	—	13,5	13	2,03—2,07	„
3	„ .	—	18	10	2,04—2,08	„
4	„ .	—	6,5	20	1,92	Loschge
5	Überdruckschaufel	141	5,9	18,6	1,99	Anderhub
6	Düse	—	10	18,3	1,96—1,99	Christlein
7	„	128	rund 11,5 Durchmesser		2,06	„
8	Düsen mit Erweiterungen v. 1,0—1,56	wie 127	11	17	2,00—2,02	Verfasser

Die unter (2), (3), (7) vorkommenden zu hohen Werte von χ können durch Meßfehler wegen der unbearbeiteten Kanalwände erklärt werden. Eigentümlich ist der Unterschied der mit gleichem Winkel $\alpha_1 = 21{,}6^0$ ausgeführten Leitkanäle (1) und (2), (3), wobei anscheinend im engen Kanal (1) der Einfluß des Zentrifugaldruckes am größten war. Die Düse Nr. 6 hatte einen scharf gekrümmten Einlauf mit etwa 26 mm Rundungshalbmesser des Schaufelrückens unmittelbar vor dem engsten Querschnitt. Bei Düse Nr. 7 liegt der engste Querschnitt ziemlich weit hinter der Krümmung. Die Leitkanäle 1 bis 3 zeigen in gleicher Reihenfolge ein größtes φ von 0,933; 0,932; 0,938 bei einer die Schallgrenze um 0,22; 0,13; 0,23 überschreitenden Geschwindigkeit. Darf man diesen praktischen Ergebnissen trauen, so würde **der Reibungsverlust bei krummen Kanälen in weitgehendem Maße von der Durchflußzahl unabhängig sein.**

Im übrigen wurde von Loschge festgestellt, daß auch hier bei veränderlichem Gegendruck angenähert das **Gesetz der Ellipse** gilt. Das Verhältnis p_m/p_1, von dem ab die Dampfmenge bei Abnahme des Gegendruckes sich nicht mehr ändert, ist jedoch merklich höher als bei der einfachen Mündung, und zwar müsse p_m/p_1 etwa $= 0{,}60$ gewählt werden.

46. Die Reibungsverluste in Schaufelkanälen.

Die auf die Größe des Reibungsverlustes Einfluß übenden Größen sind

1. die Form und die Abmessungen des Schaufelkanales, also die Länge, Breite und Dicke des Dampfstrahles, seine Krümmung und seine Erweiterung;
2. der Dampfzustand, d. h. der Druck oder das spezifische Gewicht und die Temperatur oder der Grad der Dampfnässe und die Dampfgeschwindigkeit.

Diese Aufzählung genügt, um begreiflich zu machen, daß wir von einer vollständigen Kenntnis der Verhältnisse noch weit entfernt sind. Daher weisen auch die nachfolgend besprochenen Versuchsergebnisse mannigfaltige Widersprüche auf.

Briling[1]) versucht in seiner unten angeführten Arbeit den Reibungsverlust zu trennen in

Kantenwiderstand, der der Wirbelbildung an der Kante beim Eintritt entspricht,
Reibungswiderstand, als Arbeit der Reibungskräfte den Kanalwänden entlang,
Krümmungswiderstand, der durch die Umlenkung der Strahlrichtung allein bedingt wäre.

[1]) Mitteil. über Forschungsarbeiten, Heft 68.

Bei Schaufeln, die im Verhältnis zur Kanalweite sehr lang sind, wo die Sekundärströmungen wieder zurücktreten, könnte die Reibungsarbeit für 1 kg der strömenden Flüssigkeit nach der Reibungsformel

$$R = \int \zeta \frac{U}{4F} \frac{w^2}{2g} dl,$$

wo F den Inhalt,
U den Umfang des Kanalquerschnittes,
l die Länge

bedeuten, beurteilt werden. Die Widerstandszahl ζ ist jedoch unbekannt, und würde sich sicher als eine sehr verwickelte Abhängige der Kanalform, der Abmessungen usw. darstellen.

Man hat sich daher bis jetzt mit einer Gesamtschätzung des Widerstandes begnügt, indem man die am Schaufelaustritt vorhandene kinetische Energie mit derjenigen vergleicht, die bei gleichem Druckgefälle und reibungsfreier adiabatischer Zustandsänderung in der Schaufel vorhanden wäre. Der Unterschied ist der „Energieverlust".

Bei Gleichstromturbinen hat sich ein noch einfacherer Wert: das Verhältnis der tatsächlichen Geschwindigkeit zur theoretischen oder die „Geschwindigkeitszahl" ψ eingebürgert; bei Überdruckturbinen macht man von der hydraulischen Widerstandszahl ζ Gebrauch.

Versuche über die Reibungsverluste in Schaufeln.

Die ersten systematischen Versuche über Schaufelreibung stammen wohl von Rateau her, der ein geradliniges Kranzstück in freier Luft an einer Wage befestigte und die durch einen Dampfstrahl ausgeübte, in die Richtung des Umfanges fallende Druckkomponente wog.

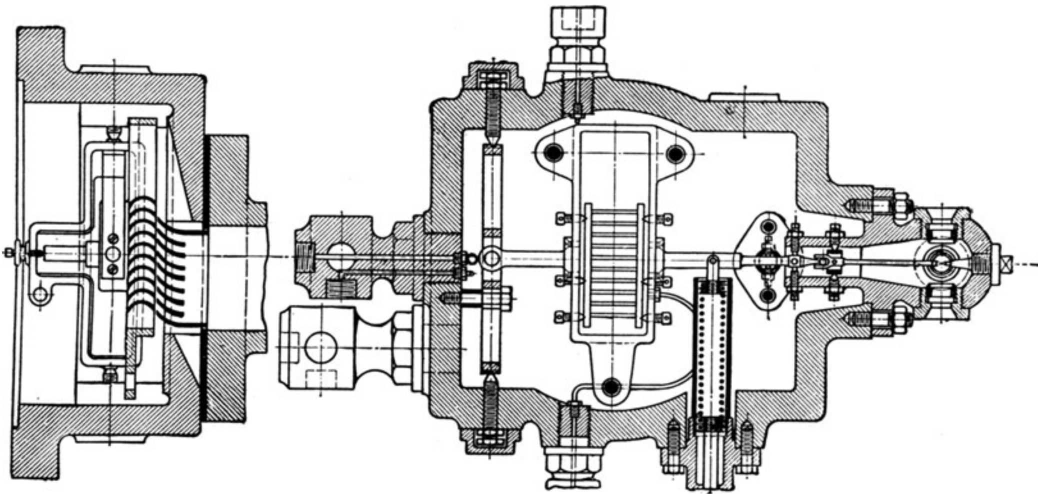


Abb. 159. Abb. 160.
Versuchsgerät zur Messung des axialen und tangentialen Schaufeldruckes.

Um bei beliebigen Dampfdrücken arbeiten zu können, benutzte der Verfasser die in Abb. 159/160 dargestellte Vorrichtung, die aus einem geschlossenen Hehlgefäß besteht, in dem zur Aufnahme der Laufschaufeln ein in kardanischer Aufhängung festgemachter Rahmen untergebracht ist. Die Reibung der Körnerspitzen wird durch die Erschütterungen unschädlich gemacht. Zweck der zwei zueinander senkrechten Drehachsen ist die gleichzeitige Ermittelung der Umfangskomponente und des Axialdruckes der Dampfreaktion. Zu diesem Behufe greifen am Rahmen eine senkrechte und eine wagerechte Federwage an. Der Rahmen bewegt einen leichten Zeiger, der jede Verschiebung mit 10facher Übersetzung anzeigt und mittels festgelegter Marke, die durch zwei Glasfenster beobachtet werden kann, den Rahmen sowohl in der Lot- wie in der Wagerechten auf genau denselben Punkt einzustellen gestattet. Nachdem die in der Nullstellung vorhandene Federspannung des unbelasteten Rahmens notiert ist, läßt man Dampf eintreten und führt den Rahmen in die Nullstellung zurück. Der Unterschied der Federspannungen gibt die ausgeübten Kräfte, und auf diese Weise werden die tangentiale und die axiale Komponente T und A der „Gesamtreaktion" des Dampfes gemessen (Abb. 161). Wegen der eintretenden **Erwärmung** sollten die **Federn**

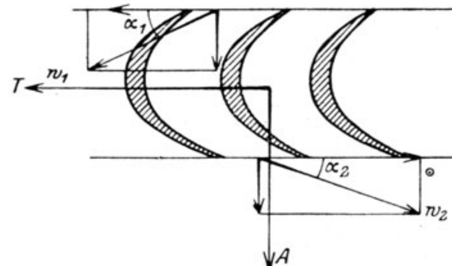


Abb. 161. Axiale und Umfangskraft.

nach außen verlegt werden, und der Hohlraum müßte im Verhältnis zur Schaufelgröße **um vieles geräumiger** sein, um eine **Rückwirkung des austretenden Strahles,** der heftige Wirbel erzeugt, zu verhindern.

Bei der Prüfung von Gleichdruckschaufeln, wo angenommen wird, daß bei genügender Spaltbreite die Pressung vor und nach der Schaufel die gleiche ist, läßt sich der Schaufelverlust wie folgt berechnen.

Aus der sekundlichen Dampfmasse M, die man beobachtet, und aus dem Dampfdruck vor und hinter der Leitschaufel kann mit der theoretischen Geschwindigkeit w_0 auch der „theoretische" Druck auf die Laufschaufel

$$P_0 = M w_0 (\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2) = 2 M w_0 \cos\alpha \quad \ldots \quad (1)$$

in tangentialer Richtung für die reibungslose Strömung berechnet werden, wobei α der in unseren Versuchen gleiche Ein- und Austrittswinkel an der Laufschaufel ist.

In Wirklichkeit ist die Geschwindigkeit am Austritt aus dem Leitrad

$$w_1 = \varphi w_0 \quad \ldots \quad (2)$$

und im Laufrad findet eine weitere Verminderung auf

$$w_2 = \psi w_1 \quad \ldots \quad (3)$$

statt, wo φ und ψ „Geschwindigkeitszahlen" bedeuten.

Der wirkliche Schaufeldruck wird hiernach

$$P = M(w_1 \cos\alpha_1 + w_2 \cos\alpha_2) = M(w_1 + w_2)\cos\alpha = M\varphi(1+\psi) w_0 \cos\alpha \quad \ldots \quad (4)$$

mithin erhalten wir durch Teilung von (4) und (1)

$$\frac{P}{P_0} = \frac{\varphi(1+\psi)}{2} \quad \ldots \quad (5)$$

Ist φ bekannt, so kann obige Gleichung zur Berechnung von ψ benutzt werden.

Wünscht man mit den Widerstandsziffern, wie sie die Hydraulik definiert, zu rechnen, so muß die Reibungsarbeit in Teilen der lebendigen Kraft am Austritt aus der Schaufel dargestellt werden. Statt der wirklichen Reibungsarbeit nehmen wir angenähert wie bei der Düse den kinetischen Energieverlust und schreiben für das Leitrad

$$\frac{w_0^2 - w_1^2}{2g} = \zeta_1 \frac{w_1^2}{2g}, \quad \text{woraus} \quad \zeta_1 = \frac{w_0^2 - w_1^2}{w_1^2} = \frac{1}{\varphi^2} - 1 \quad \ldots \quad (6)$$

folgt. Ähnlich gilt für das Laufrad

$$\frac{w_1^2 - w_2^2}{2g} = \zeta_2 \frac{w_2^2}{2g} \quad \text{und} \quad \zeta_2 = \frac{w_1^2 - w_2^2}{w_2^2} = \frac{1}{\psi^2} - 1 \quad \ldots \quad (7)$$

Rateau benützte später[1]) ein Verfahren, das die Messung der Dampfmenge entbehrlich macht. Man bestimmt zunächst P in der oben beschriebenen Anordnung. Hierauf wird die Laufschaufel mit der Leitvorrichtung fest verbunden und eine zweite, ganz gleiche Schaufelgruppe verkehrt aufgestellt, so daß der Dampf, der die feststehende Schaufel verläßt, stoßfrei in dieselbe eintritt. Der auf diese ausgeübte Umfangsdruck P' wird gewogen. Hier ist

$$P = M(w_1 + w_2)\cos\alpha = M(1+\psi) w_1 \cos\alpha,$$

$$P' = M(w_2 + w_3)\cos\alpha = M(1+\psi') w_2 \cos\alpha.$$

Rateau setzt $\psi' = \psi$, was für kleine Abweichungen wohl gestattet ist, und findet durch Division

$$\frac{P'}{P} = \frac{w_2}{w_1} = \psi \quad \ldots \quad (8)$$

Briling[2]) bestimmt nach Lewicki[3]) den Druck des aus der Leitvorrichtung tretenden Dampfstrahles auf eine senkrecht getroffene ebene Platte und rechnet hieraus und aus der sekundlichen Masse M die Geschwindigkeit w_1. Unter der Annahme, daß nach der Ablenkung am Scheibenrande die Geschwindigkeit in die Richtung der Scheibenebene fällt, und daß Saugwirkungen auf der Vorder- oder der Rückseite der Scheibe vermieden werden, ist

$$P = M w_1 \quad \ldots \quad (9)$$

Hierauf wird, nach Zwischenschaltung der Schaufel, die Platte in den abfließenden Dampfstrom gehalten, zur Bestimmung von w_2.

Bánki[4]) läßt den Umfangsdruck durch einen Indikator aufzeichnen (Abb. 162), und zwar zunächst für die normale Schaufel, so daß

$$P = M(w_1 + w_2)\cos\alpha = M(1+\psi) w_1 \cos\alpha$$

---

[1]) M. A. Rateau, Mode de calcul des turbines à vapeur, Paris, Gauthier-Villars. 1909.

[2]) Mitteil. über Forschungsarbeiten, Heft 68.

[3]) Mitteil. über Forschungsarbeiten, Heft 12.

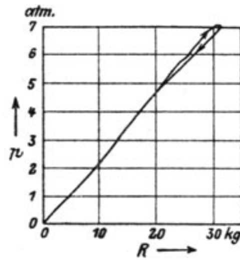
[4]) Zeitschr. f. d. ges. Turbinenwesen, 1906, S. 6.

wird; dann für die vordere Hälfte der entzweigeschnittenen Schaufel allein, was

$$P' = M w_1 \cos\alpha \quad \text{und durch Division} \quad \psi = \frac{P}{P'} - 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

ergibt. Die Umfangskraft der ruhenden Schaufel hängt von der Lage der Laufstege gegen die Leitstege ab und kann nach den Versuchen von Bánki (Abb. 163) um 30 v. H. verschiedene Werte ergeben.

Der einzige Weg, um richtige Mittelwerte des Verlustes zu ermitteln, ist der **Versuch mit bewegten Schaufeln,** und wohl alle größeren Turbinenbauanstalten sind mit den erforderlichen kostspieligen Vorrichtungen ausgestattet. Leider werden, wie begreiflich, die Ergebnisse geheim gehalten und es liegen in der Hauptsache nur Versuche mit festen Schaufeln vor, die immerhin als Vergleichszahlen Wert besitzen.



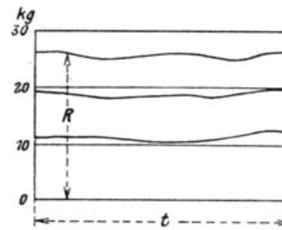


Abb. 162. Schaufeldruck nach Bánki. Abb. 163.

Bei zukünftigen Versuchen sollte der wichtigen Rolle, die der durch den Dampfstrahl aus dem Spalt in die Schaufel hineingerissene Dampf auf den Verlust ausübt, die gebührende Aufmerksamkeit gewidmet werden. Über die erhebliche Größe dieser Saugwirkung berichten wir in Abschn. 57 (3).

a) Leitradschaufeln.

Nach den Versuchen von Christlein, Flügel, Brown-Boveri & Co. und dem Verfasser, über die in Abschn. 43a berichtet worden ist, erreicht die Vorzahl φ die Werte

$$\varphi = 0{,}90 - 0{,}97 \text{ bei parallelem Austritt,}$$
$$\varphi = 0{,}95 - 0{,}97 \text{ bei erweitertem Austritt.}$$

Zeichnet man in Schaufeln, die nach Abb. 127 geformt, also nicht erweitert sind, die Stromlinien schätzungsweise ein, und bezeichnet man mit e die lichte Weite, mit a die in Richtung des Halbmessers gemessene Höhe des Querschnitts, so kann die Reibungsarbeit für 1 kg versuchsweise, da vorläufig das wahre Gesetz der Abhängigkeit nicht bekannt ist, nach der für gerade Kanäle geltenden Formel als

$$L_r = \int \zeta_r \frac{U}{4F} \frac{w^2}{2g} dL = \int \frac{\zeta_r}{2}\left(\frac{1}{e} + \frac{1}{a}\right)\frac{w^2}{2g} dL \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

dargestellt werden. Mit Rücksicht auf die Kleinheit der Verluste darf man für w die adiabatische Geschwindigkeit einsetzen, und kann im Überhitzungs-(also auch im Unterkühlungs-)gebiet unter Voraussetzung, daß ζ_r für je einen Fall unveränderlich ist, das Integral auf die Form

$$L_r = \frac{\zeta_r}{2}\left(\Phi_e \frac{L_0}{e_1} + \Phi_a \frac{L_0}{a_1}\right)\frac{w_e^2}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

bringen, wobei e_1 a_1 die Weite und Höhe der Schaufel, w_e die Geschwindigkeit **am Ende des Kanales,** L_0 die gestreckte Länge der mittleren Stromlinie von der Mitte des schrägen Mündungsquerschnittes bis zum Eintritt in den Kanal, und Φ_e Φ_a von der Kanalform und dem Ausdehnungsverhältnis, also von w_e abhängige Beiwerte bedeuten. Unter Voraussetzung eines unveränderlichen a, wie es bei mehrstufigen Turbinen oft vorkommt, erhält man

	Φ_e			Φ_a		
für $\alpha_1 =$	8	14	21	8	14	21
$w_e = 100$ m/sek . . .	0,375	0,420	0,485	0,422	0,476	0,556
$w_e = 300$ „ . . .	0,345	0,395	0,445	0,385	0,457	0,513
$w_e = 500$ „ . . .	0,322	0,355	0,400	0,342	0,390	0,435

Setzt man angenähert $L_r = \zeta \frac{w_e^2}{2g}$, wo ζ den kinetischen Energieverlust bedeutet, so folgt

$$\zeta_r = \frac{2\zeta}{\Phi_e \frac{L_0}{e_1} + \Phi_a \frac{L_0}{a_1}} \quad \text{. . . . . (12a)}$$

Hiernach **hängt die Reibungsziffer in verwickelter Weise von der Verlustziffer ζ ab.** Indem man die Φ-Werte graphisch interpoliert, kann ζ_r für jede Art von Leitschaufeln der üblichen Form leicht ermittelt werden.

b) Überdruckschaufeln.

Bei fest abgedichteten Überdruckschaufeln sind die Verluste gleich hoch einzuschätzen wie bei den Leitradschaufeln. Im allgemeinen sind jedoch die Verhältnisse infolge der Undichtheit durch den stets vorhandenen Spalt verwickelt und sollen bei der Besprechung der Überdruckturbine behandelt werden.

c) Gleichdruckschaufeln.

1. Verhältnis der Strahldicke zum Krümmungshalbmesser. Beste Teilung.

Ist die Strahldicke zu klein, so werden die Kantenstöße und die Reibung an den Wänden überwiegen und die Verluste erhöhen. Machen wir die Strahldicke zu groß, so werden die an der Schaufelrückseite vorbeiströmenden Dampfteilchen nicht vollständig abgelenkt, wir erreichen den gewollten Austrittswinkel nicht, und die Wirbelung an der hohlen Schaufelseite im Strahlinnern wird zu groß. Nach Briling treten die besten Verhältnisse auf, wenn die

Strahldicke gleich dem halben mittleren Krümmungshalbmesser

gemacht wird. Die von Briling benützten Schaufeln hatten die in Abb. 164 dargestellte Form, d. h. sie waren mit unveränderlicher Stegdicke ausgeführt, daher theoretisch der Krümmungsradius der Bahnen überall derselbe ist. Es wurden untersucht 4 Schaufeln mit $\alpha = 30^0$, $b = 10$, 15, 20, 25 mm und der Stegstärke $s = 2$, 2, 5; 3, 3 mm. Außerdem 4 Schaufeln mit gleichem $r = 11{,}6$ mm und $\alpha = 20$, 30, 40, 50^0. Leider war die **axiale Länge der Schaufeln überall 25 mm, während die Düsen runden Querschnitt und höchstens 12 mm Durchmesser**

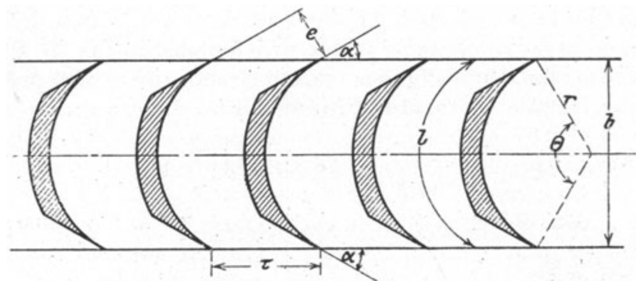


Abb. 164.
Schaufelform zu Brilings Versuchen.

besaßen. Der Dampfstrahl mußte daher in der Schaufel eine starke Verbreiterung erfahren, wie sie praktisch nie zugelassen wird. Ferner wurde bei verschieden großer Teilung ein bald kleinerer, bald größerer Teil des Düsenstrahles angeschnitten, was die Reibungsverluste in wechselnder Weise beeinflußt haben dürfte. Dies setzt den Wert dieser sonst sehr planmäßigen Versuche herab.

Wird der am Ein- und Austritt gleiche Schaufelwinkel, wie in der Abbildung, mit α bezeichnet, so ist die Teilung $\tau = e/\sin\alpha$; also folgt mit $e = r/2$ der Wert der **günstigsten Teilung**

$$\tau = \frac{r}{2\sin\alpha}.$$

Für die häufig vorkommende Schaufel mit 30^0 Neigungswinkel ergibt sich die einfache Regel

$$\tau = r.$$

Die in früheren Auflagen dieses Buches angegebenen praktischen Regeln für kurze Schaufeln $b = 8 - 10$ mm, $\tau = 5 - 6$ mm, woraus bei $\alpha = 30^0$; $r = b/2 \cos \alpha = 4{,}6 - 5{,}8$ mm, für lange Schaufeln $b = 25$; $\tau = 14 - 16$ mm, woraus $r = 14{,}5$ mm, stellen auch heute befolgte Mittelwerte dar, doch herrscht die Neigung vor, zu **größeren Breiten und Teilungen** überzugehen. Man darf etwa, mit l als Länge, $b = l/12$ und am Schaufelende $\tau = b$ setzen. Im übrigen haben die Versuche von Bánki[1]) (Abb. 165) ein bestes Ergebnis bei $\tau =$ bis $1{,}3\,r$ geliefert. Wie aus der Abbildung zu entnehmen, waren die Schaufeln teilweise mit unveränderlicher Stegdicke ausgeführt, teilweise mit Rückschaufeln versehen. Versuche des Verfassers führten umgekehrt bis auf $\tau = 0{,}7\,r$, bei $\alpha = 30^0$, so daß die Regel von Briling keine absolute Gültigkeit besitzt.

Wir machten die Beobachtung, daß bei sehr enger Teilung (von etwa 5 mm) der Laufschaufel und weiter Teilung (etwa 10 mm) der Leitschaufel die durchströmende Dampfmenge um etwa 5 v. H. abgenommen hatte, offenbar infolge des sich einstellenden Überdruckes im Spalte.

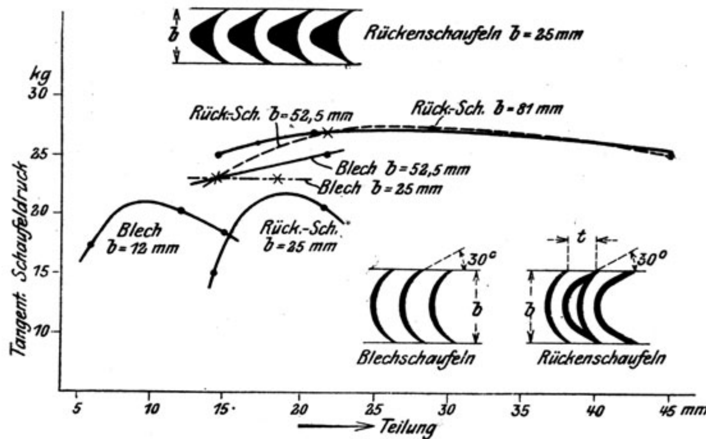


Abb. 165.

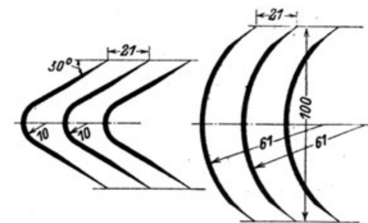


Abb. 166.

Schaufelformen zu Bánkis Versuchen.

2. Einfluß der absoluten Größe des Krümmungshalbmessers, also mittelbar der Schaufelbreite.

Bánki untersuchte a. a. O. dünne Blechschaufeln, deren Breite in gestrecktem Zustande immer die gleiche war, und die bei 30^0 Neigungswinkel der Reihe nach mit den Krümmungshalbmessern $r = 10$, 25, 50, 61 mm gebogen waren (Abb. 166). Die gemessenen Kraftkomponenten in Richtung des Umfanges sind als Abszissen zu den absoluten Drücken vor der Leitdüse (Ordinaten) in Abb. 167 aufgetragen und zeigen, in wie erheblichem Maße die scharfe Krümmung den Umfangsdruck herabsetzt. Obwohl Abb. 166 erkennen läßt, daß bei kleinem Halbmesser infolge der konstanten Blechdicke ein Sack entsteht, der das Ergebnis wohl beeinflußt hat und den man in praktischen Ausführungen nicht dulden würde, dürfte die Überlegenheit der sanften Krümmung doch hinlänglich erwiesen sein.

Dasselbe geht aus den Versuchen von Briling hervor, der für vier Schaufeln mit $\alpha = 30^0$ und $b = 10$, 15, 20, 25 mm Breite das Gesetz

$$\psi = \psi_0 + 0{,}08\,b$$

aufstellt, wobei b in Zentimetern einzusetzen ist und die Teilung jeweils den günstigsten Wert, hier $\tau = r = b/1{,}73$, besitzen muß. Das erste Glied hängt nur von der Geschwindigkeit ab und besitzt die Werte:

bei $w = 100$	200	300	400 m/sek	
$\psi_0 = 0{,}52$	0,53	0,55	0,54	

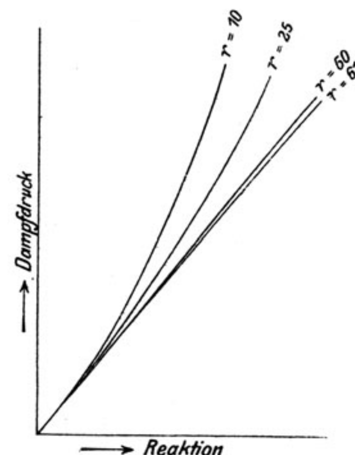


Abb. 167.
Abnahme der Umfangskraft bei scharfer Schaufelkrümmung.

[1]) Zeitschr. f. d. ges. Turbinenwesen, 1906, S. 6.

Zu ganz anderen Ergebnissen gelangt Rateau[1]), dessen Schaufeln in Abb. 168 abgebildet sind. Der Wert von ψ bei einer Geschwindigkeit von etwa 400 m/sek ist der folgende:

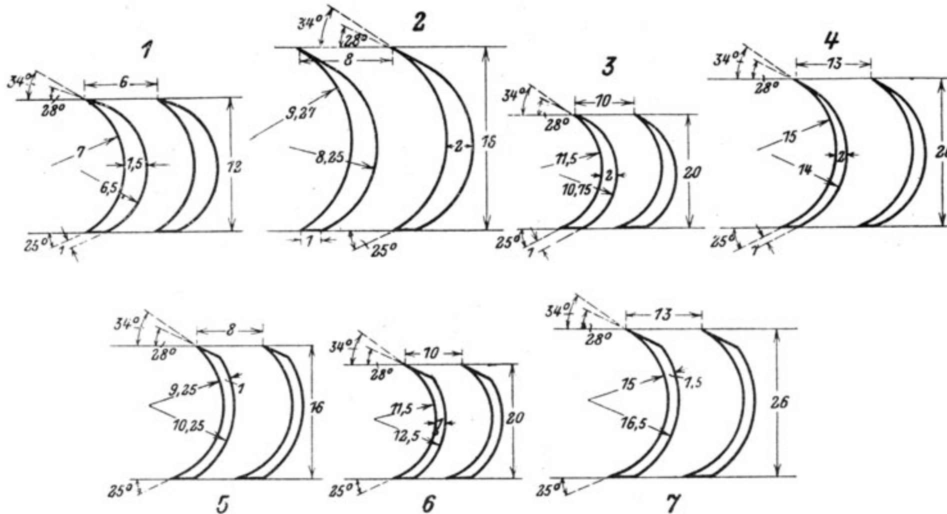


Abb. 168. Schaufelformen zu Versuchen von Rateau.

Schaufel Nr.	1	2	3	4	5	6	7
Schaufelbreite b	12	16	20	26	16	20	26 mm
ψ	0,8	0,72	0,78	0,66	0,78	0,76	0,65

Die Ergebnisse gleichartiger Schaufeln sind durch Klammern verbunden und zeigen eine **erhebliche Abnahme von ψ bei Vergrößerung der Breite.** Das Verhältnis der Teilung zur Breite war überall $= 1:2$. Auffallend ist nur der Sprung von Nr. 2 zu Nr. 3, die übrigen zur ein gleichartiges Verhalten.

Bei geometrisch ähnlichen Schaufeln bleibt das Verhältnis von Strahldicke zur Krümmung und zur Weglänge unverändert, und es herrscht vielfach die Meinung, daß die Widerstände solcher Schaufeln identisch sein müßten. Das liegt an der alten hydraulischen Formel, die für die Reibungsarbeit beispielsweise beim geraden zylindrischen Rohr nur das Verhältnsi l/d enthält und das Ähnlichkeitsgesetz bestätigt. Der Widerspruch der angeführten Versuche unter sich erlaubt es noch nicht, über diesen Satz endgültig zu urteilen, doch ist es wahrscheinlich, daß der Reibungsverlust für 1 kg Dampf in geometrisch ähnlichen Schaufelkanälen nicht gleich, sondern bei der breiteren Schaufel infolge sanfterer Krümmung kleiner ist, trotz längeren Dampfweges.

3. Einfluß des Umlenkungswinkels.

An vier Schaufeln mit unveränderlichem Halbmesser r und den Winkeln $\alpha = 20$, 30, 40 50°, wobei der Dampfstrahl um die Winkel $\vartheta = 140°$, 120°, 100°, 80° umgelenkt werden mußte und die Breite der Reihe nach $b = 21{,}7$, 20, 17,7 14,9 mm betrug, ergaben die Versuche von Briling

$$\psi = \psi_1 - 0{,}000432\,\vartheta^{\frac{4}{3}},$$

d. h. naturgemäß eine Abnahme mit steigender Umlenkung, wobei jedenfalls auch die zunehmende Verengung der Eintrittsstelle mitwirkte. Das erste Glied erweist sich nur von der Geschwindigkeit wie folgt abhängig:

bei $w =$	100	200	300	400 m/sek
$\psi_1 =$	0,916	0,946	0,965	0,967

4. Einfluß der relativen Dampfgeschwindigkeit.

Nach der Gesamtheit der Brilingschen Versuche nimmt bei unveränderlichem Umlenkungswinkel und veränderlichem Krümmungsradius, ebenso bei unveränderlichem Halbmesser

[1]) Mode de calcul des turbines à vapeur, Paris 1909.

und veränderlichem Winkel die Vorzahl ψ mit wachsender Geschwindigkeit bis zu einem Höchstwert zu, dann ab. Briling gibt freilich eine zweite Darstellung, die ein fortwährendes Steigen von ψ mit wachsender Geschwindigkeit bedingt, während die ursprünglichen Kurven mehrere deutliche Maxima erkennen lassen.

Rateau[1]) fand bei seinen Versuchen ψ meist unveränderlich oder mit der Geschwindigkeit nur in geringem Maße steigend, und zwar zwischen 0 und etwa 400 m/sek eine größte Zunahme bei Schaufel Nr. 5 um etwa $\Delta\psi = 0{,}08$.

Christlein[2]) verwendete einen Leitradabschnitt samt Schaufelkranzstück, die in Abb. 169 (maßstäblich) dargestellt sind. Der Halbmesser des Teilkreises betrug 750 mm. Das Kranzstück war in der Versuchsvorrichtung, auf die in Abb. 170 schematisch wiedergegebenen Art an einem Hebel von genanntem Halbmesser drehbar befestigt. Die Leitschaufeln waren fest. Der Spalt betrug einmal 2,1, das andere Mal 4,1 mm. Unter Annahme, daß der Dampfstrahl aus der Leitschaufel mit dem Neigungswinkel α_1, also mit Unterschallgeschwindigkeit austritt und die Laufschaufel mit der Neigung β_2 verläßt, ist der auf die Schaufel ausgeübte Rückdruck

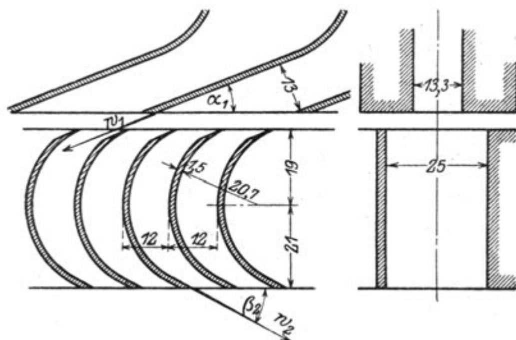


Abb. 169.
Schaufeln zu Christleins Versuchen.

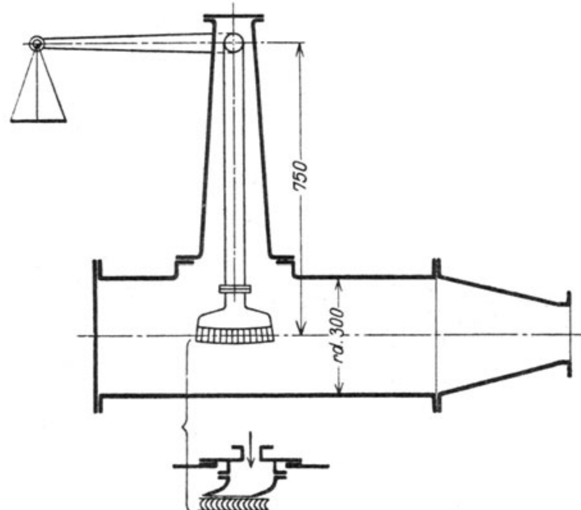


Abb. 170.
Schaufeldruckwage von Christlein.

$$P_2 = m\,(w_1 \cos\alpha_1 + w_2 \cos\beta_2) \qquad (1)$$

worin m die sekundliche Dampfmasse, w_1, w_2 die Eintritts- und die Austrittsgeschwindigkeiten bedeuten. Da nun die Geschwindigkeitszahl $\psi = w_2/w_1$ ist, so kann $w_2 = \psi w_1$ in Gl. (1) eingesetzt werden. Nun ist $m w_1 = P_1$ diejenige Gesamtreaktion, die der aus der Leitvorrichtung tretende Strahl auf dieselbe ausübt. Diese wurde von Christlein durch die in Abschn. 43a beschriebenen Versuche ermittelt, so daß man aus (1) durch Auflösung erhält:

$$\psi = \frac{1}{\cos\beta_2}\left[\frac{P_2}{P_1} - \cos\alpha_1\right] \qquad (2)$$

Die so ermittelten Werte sind für den Anfangszustand $p_1 = 3{,}03$ at abs.; $t_1 = 145^0$ C; $G_{sek} = 0{,}233$ kg/sek, und bei einer Leitvorrichtung, deren Vorzahl φ in Abb. 129 dargestellt ist, durch Abb. 171 veranschaulicht. Sie lassen erkennen, daß zwischen 200 und etwa 470 m/sek Geschwindigkeit die Zahl ψ von rund 0,74 auf rund 0,82 zunimmt. Damit dürfte endgültig entschieden sein, daß innerhalb der angegebenen Grenzen die Reibungswiderstände mit wachsender Strömungsgeschwindigkeit abnehmen.

Eigenartig ist das Verhalten bei Überschallgeschwindigkeit. In der Dissertation von Christlein wie im D. R. P. Nr. 290184 von Josse und Christlein sind hierüber Angaben enthalten, die in Abb. 171 bereits mit aufgenommen wurden. Die vollgezogene Linie im Gebiet zwischen 470 bis 700 m/sek Geschwindigkeit ist das nach Gl. (2) gerechnete Beobachtungsergebnis. Die gestrichelte Linie ist der nach Christlein zu erwartende wahrscheinliche Verlauf der Zahl ψ. Die Benutzung der Formel (2) ist nämlich, wie er selbst hervorhebt, für das über der Schallgrenze liegende Gebiet unstatthaft, da der Strahl beim Austritte aus der Leitschaufel eine Ablenkung erfährt, daher statt des Neigungswinkels α_1 ein Winkel $\alpha_1 + \vartheta$

[1]) A. a. O. [2]) Doktordissertation, Oldenbourg, 1911.

einzuführen wäre. Die, wie wir annehmen müssen, in diesem Sinne durch Christlein vorgenommene Berichtigung dürfte den als wahrscheinlich bezeichneten Verlauf ergeben haben. Hierzu ist in zweifacher Beziehung eine Bemerkung hinzuzufügen. 1. Wie in Abschn. 43a mitgeteilt wurde, ist die Bestimmung des Rückdruckes P_1 der Leitvorrichtung im Überschallgebiet unrichtig. Die Berücksichtigung des in Christleins Vorrichtung auftretenden Seitendruckes im Schrägabschnitt vergrößert den Wert von P_1. Anderseits wird durch das Vorschalten eines Schaufelsegmentes, wie Abb. 171a lehrt, P_1 verkleinert, um so mehr, als bei den Versuchen der Spalt kleiner war als 5 mm. 2. Die Strahlablenkung ist so erheblich, daß ein ausgesprochener Stoß auf den Schaufelrücken entsteht, wodurch der Wert der Vorzahl ψ, verglichen mit dem des stoßfreien Eintrittes, wie wir weiter unten nachweisen, erheblich herabgedrückt werden kann.

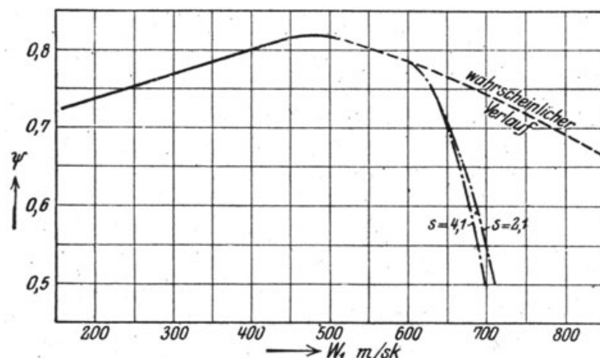


Abb. 171. Verhältniszahl ψ nach Christlein.

Die von Christlein als „wahrscheinlich“ bezeichneten Werte müssen mit Rücksicht hierauf berichtigt werden, oder besser, es wäre dringend erwünscht, wenn die Versuche, soweit die Überschallgeschwindigkeit in Frage kommt, mit stoßfreiem Eintritt wiederholt würden.

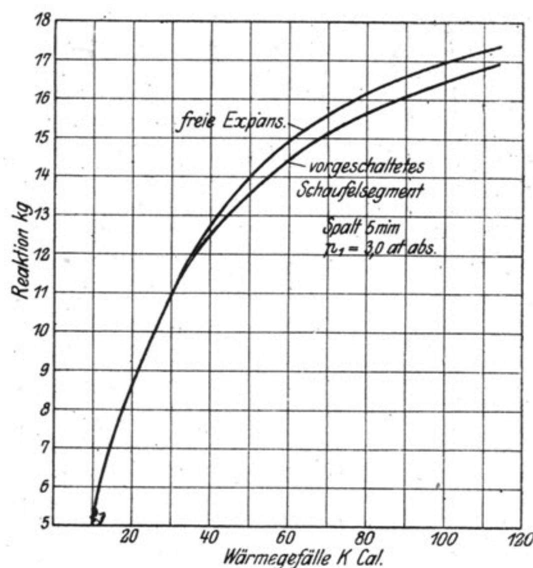


Abb. 171a. Einfluß der Schaufel auf den Rückdruck der Leitvorrichtung.

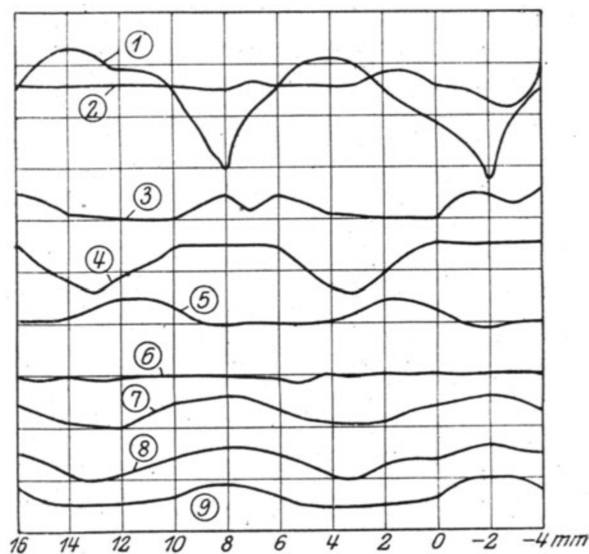


Abb. 171c. Veränderlichkeit der Rückdrücke innerhalb einer Teilung.

Versuche von Brown, Boveri & Cie., die mit den in Abschn. 43a beschriebenen Düsen und ebenfalls festgelagerten Laufschaufelgruppen durchgeführt wurden, weisen gemäß der Zusammenstellung Abb. 171b eine anfänglich rasche Zunahme von ψ mit wachsender Eintrittsgeschwindigkeit bis zu etwa $w_1 = 500$ m/sek auf. Dann sinkt ψ gemäß der strichpunktierten Linie, die als ungefähres Mittel der Beobachtungen gelten kann, aber in weit langsamerem Maße als bei Christlein. Die vor der Düse geltenden Anfangsdrücke sind die folgenden

Schaulinie	A	A_1	B	B_1	C	C_1	D	D_1	E	E_1
Anfangsdruck at abs.	1,95 2,42	2,83	2,84 3,94	3,05	4,94	6,93 8,98	5,96 10,8	9,02	12,75	9,00 10,77

Die den Düsen vorgesetzte Schaufelgruppe hatte 30° Ein- und Austrittswinkel, 15 mm Schaufellänge (bei rund 12 mm Düsenweite) und war mit 5 mm Spaltweite aufgestellt. Sie wurde um den Betrag einer Teilung hin- und hergeschoben, wobei sich die in Abb. 171c

dargestellte periodische Änderung des Rückdruckes ergab. Der Anfangsdruck war hierbei $p_1 = 2{,}92$ at abs. bei $t_1 = 147^0$ C, es wurde Düse A mit Parallelaustritt verwendet. Die Gegendrücke waren die folgenden:

Schaulinie	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Gegendruck p_3 at abs.	0,15	0,32	0,46	0,63	0,99	1,10	1,29	1,48	1,62

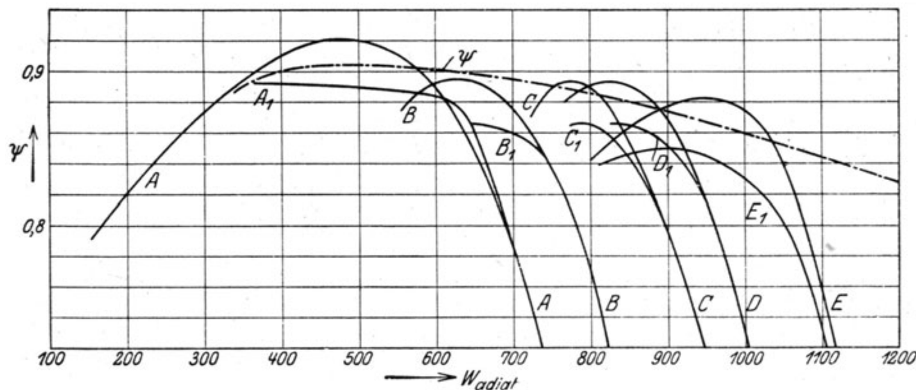


Abb. 171b. Verhältniszahl ψ nach Brown, Boveri & Cie.

Der Abstand zweier wagerechter Linien in Abb. 171c bedeutet 0,375 kg. Als wahrer Rückdruck wurde der Mittelwert betrachtet, was insofern ungünstig ist, als bei ununterbrochener Beaufschlagung eines längeren Bogens die durch die Teilung verursachten Unterschiede verschwinden werden, und als Rückdruck der Höchstwert der aufgenommenen Schaulinien gelten dürfte. Die Zahlen auf der Abszisse bedeuten die Verschiebung in Millimeter. Für Schaulinie 1 war der mittlere Rückdruck 5,65 kg; die größte Abweichung beträgt 0,56 kg, also 10 v. H. Bei Schaulinie 6 ist der Druck von der relativen Stellung der Schaufel eigentümlicherweise unabhängig. In diesem merkwürdigen Verhalten dürfte der Schwingungszustand des sich im Spalte scharf ausdehnenden Strahles zum Ausdruck kommen. Auf alle Fälle liegt hier zum ersten Male ein Anzeichen für dessen Einfluß vor. Es muß dahingestellt bleiben, ob die in Abb. 171b bei ein und derselben Düse und Schaufel zutage tretenden Unterschiede der ψ-Werte auch etwa auf diese Schwingungen oder auf Beobachtungsfehler zurückzuführen sind.

5. Einfluß des Rückenstoßes beim Eintritt.

Eine Gruppe von Gleichdruckschaufeln, Abb. 172, mit 30 mm (radialer) Länge, 22 mm Breite (in der Strömungsrichtung), 30⁰ Eintritts- und Austrittswinkel wurde von einem Luftstrahl[1]) unter Einstellung auf mehr oder weniger starken Rückenstoß beaufschlagt. Die höchste erzeugbare Luftpressung war 200 mm Wassersäule.

Als Leitvorrichtung wurde zunächst eine runde Mündung von 10 mm lichter Weite bei einer größten Länge von 75 mm mit $\alpha_1 = 26^0$ als Beaufschlagungswinkel benützt. Durch Abschneiden wurde der Winkel allmählich auf 90⁰ erhöht, und gleichzeitig die Länge auf 25 mm verringert. Das Geschwindigkeitsverhältnis φ der Düse ergab sich durch Wägung des Strahldruckes auf eine ebene, senkrecht zum Strahl stehende Platte zu rd. 0,96. Dann wurde eine Gruppe von drei rechtwinkeligen Leitkanälen mit rd. 9 mm lichter Weite, 12 mm (radialer) Höhe und 35 bis 60 mm Länge des prismatischen Teiles verwendet. Die Wägung ergab für φ einen auf 0,98 hinaufreichenden Betrag, der uns freilich zu hoch dünkt.

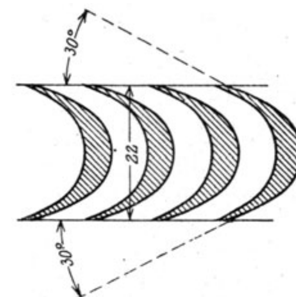


Abb. 172. Schaufeln zum Versuch über Rückenstoß.

Die Schaufelgruppe wurde senkrecht auf eine Wage aufgestellt und durch die Leitvorrichtung so beaufschlagt, daß der Druck nach unten wirkte. Die Luftmenge wurde aus dem Überdruck und dem Querschnitte der Leitkanäle zunächst ohne Rücksicht auf φ theoretisch berechnet. Daraus ergibt sich die Umfangskraft nach Gl. (4) Abschn. 46

$$P = m w_1 (\cos \alpha_1 + \psi \cos \beta_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

---

[1]) Da Dampf während des Krieges nicht zur Verfügung stand.

hieraus

$$\psi = \left(\frac{P}{m w_1} - \cos\alpha_1\right)\frac{1}{\cos\beta_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Mit dieser Formel wurde auch dann gerechnet, wenn sich durch die Beobachtung ergab, daß die Luft in Wirbeln durch den Spalt entweicht. In diesem Falle mißt ψ nicht die wirkliche Geschwindigkeitsabnahme; er kann jedoch trotzdem gemäß (3) zur Berechnung der wirklichen Umfangskraft benützt werden.

In Abb. 173 sind die Ergebnisse dargestellt. Die ungewöhnlich starke Abnahme des ψ mit der Spaltweite veranlaßte uns, deren Einfluß im einzelnen zu untersuchen. Die Ergebnisse sind für die runde Mündung in Abb. 173a für die rechteckige, die auf 15 mm achsiale Weite verbreitert wurde in Abb. 173b zusammengestellt. Die runde Mündung war in einen Bronzerundstab von 35 mm Durchmesser gebohrt, die rechteckige aus einem solchen von 53 mm Durchmesser ausgearbeitet. Der Seitenriß in Abb. 173a zeigt, in welchem Maße die Schaufeln durch die Mündung überdeckt waren.

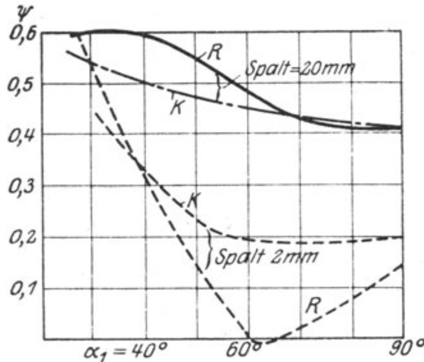


Abb. 173.

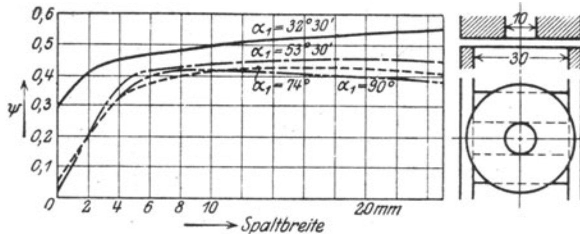


Abb. 173a.

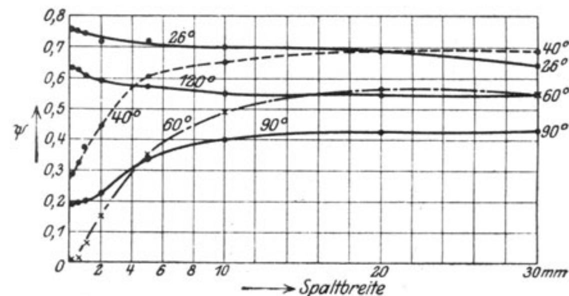


Abb. 173b.

Abb. 173, 173a u. b. Verhältniszahl ψ bei verschiedener Spaltbreite und wachsendem Stoßwinkel.

Der Stoßverlust Z_s ist der Überschuß des Gesamtverlustes über den Verlust Z_0, der bei stoßfreiem Eintritt vorkommt. Der Gesamtverlust Z bei einem Stoßwinkel

$$\vartheta = \alpha_1 - \beta_1' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

wo β_1' (etwas $< \beta_1$) den Winkel der Schaufelrückenfläche bedeutet, ist

$$Z_\vartheta = \frac{w_1^2 - w_2^2}{2g} = (1 - \psi_\vartheta^2)\frac{w_1^2}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

also ist der Stoßverlust

$$Z_s = Z_\vartheta - Z_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Es liegt nahe, ihn mit der kinetischen Energie der zum Schaufelrücken normalen Komponente w_n von w_1 zu vergleichen, d. h. den Beiwert $\varkappa$ im Ansatz

$$Z_s = \varkappa \frac{w_n^2}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

zu ermitteln. Für die Schaulinien mit 10—15 mm Spalt stellt sich dann heraus, daß bei kleinen Stoßwinkeln $\varkappa > 1$ ist; bei größeren aber rasch sinkt, so daß bei 30^0 Stoßwinkel $\varkappa$ bloß auf etwa $^1/_2$, bei 60^0 etwa auf $^1/_3$ zu schätzen ist.

Für kleine Spalte ist der Verlust, wie die Abbildungen zeigen, ein Vielfaches der obigen Werte. Die Erklärung für diese auffallende Erscheinung dürfte darin liegen, daß bei nahe anliegendem Leitkanal mit großem Stoßwinkel ϑ der Austrittsquerschnitt durch den schiefen Schaufelrücken zu stark gedrosselt wird, während bei großem Spalt der Strahl schon vorher Gelegenheit erhielt, auszuweichen.

Es wäre wünschbar, wenn diese Versuche in großem Maßstabe, mit den praktisch gebräuchlichen Geschwindigkeiten wiederholt würden.

7. Einfluß des Raumgewichtes.

Nach Versuchen von Hugenin[1]) nimmt ψ mit wachsendem spezifischen Gewicht ab. Ein gleiches fand Briling in einem vereinzelten Versuch. Diese Ergebnisse stehen in Widerspruch mit dem allgemeinen Reibungsgesetz, und bedürfen daher einer Bestätigung.

8. Einfluß der radialen Schaufellänge.

Ein Versuch in unserem Laboratorium mit Schaufeln von 2, 4 und 16 mm (radialer) Länge, bei 30° Ein- und Auslaßwinkel, ergab mit Leitschaufeln von jeweils gleicher Breite die in Abb. 174 aufgezeichneten Werte. Zwischen 4 und 16 mm Länge war die Veränderung von ψ klein, erst unter 4 mm fängt es an, rascher zu sinken. Dieser Versuch beweist, daß man noch weit kürzere Schaufeln, als heute üblich sind, mit Vorteil wird verwenden können, wenn nur die Zentrierung von Leit- und Laufrad eine vollkommene ist.

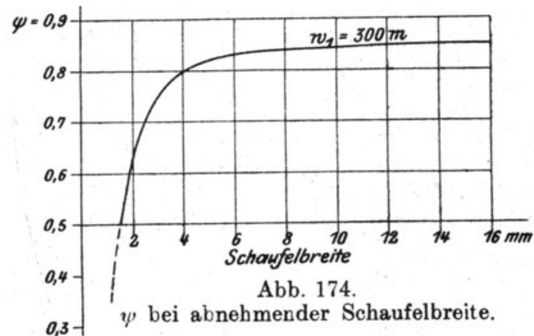


Abb. 174.
ψ bei abnehmender Schaufelbreite.

9. Die Saugwirkung.

Die obenerwähnte Ausdehnung des Dampfes im Spalt unter den Druck, der am Austritt des Laufrades herrscht, wird durch die an unserer Meßvorrichtung gewonnenen Schaulinien

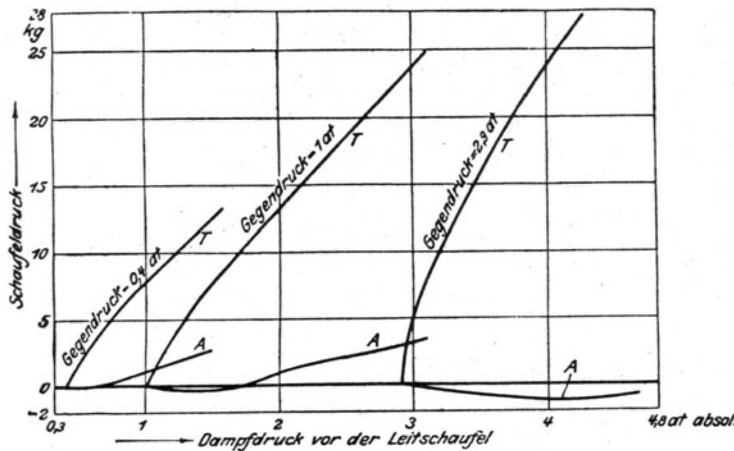


Abb. 175.

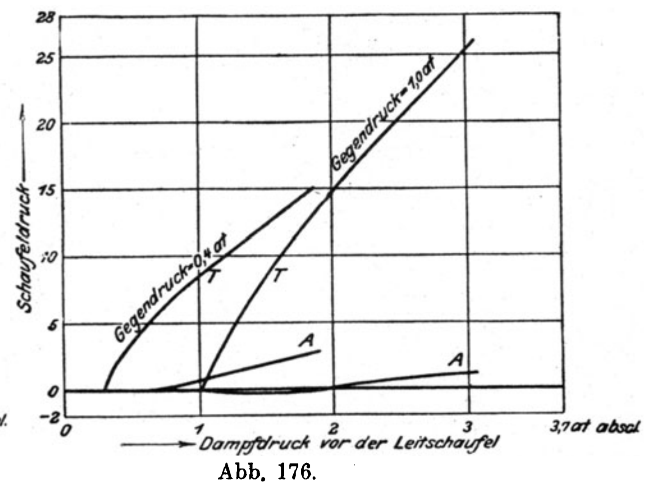


Abb. 176.

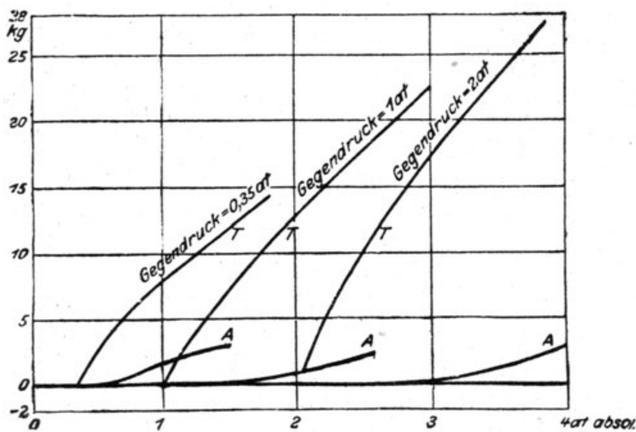


Abb. 177.

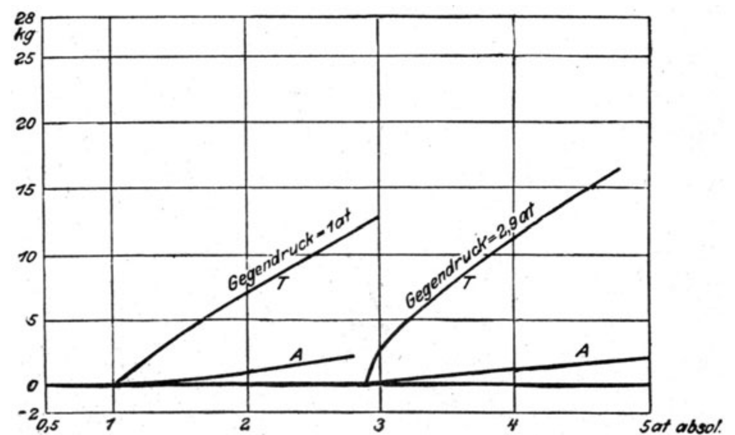


Abb. 178.

Abb. 175 bis 178. Schaufeldruck im Umfang (T) und in der Achsenrichtung (A).

---

[1]) Mitteil. d. Phys. Ges. Zürich, 1907.

(Abb. 175 bis 178) bewiesen. A und T bedeuteten darin die axiale, bzw. die tangentiale Komponente des Schaufeldruckes, und wie ersichtlich, ist erstere (ziemlich innerhalb des kritischen Druckverhältnisses) negativ, und zwar im zweiten Beispiel auch dann, wenn der Spalt 4,5 mm breit gemacht wurde. Die Winkel betrugen 30°, die sonstigen Abmessungen waren

in Abb.	175	176	177	178	
Breite der Leitschaufel	30	30	25	15,5	mm
„ „ Laufschaufel	30	30	30	30	„
Spaltweite	0,8	4,5	1	1	„

10. Andere Schaufelformen.

Im Anfange des Dampfturbinenbaues hat man auf gewisse Sonderformen der Schaufelkanäle große Hoffnungen gesetzt, die indessen den üblichen einfach gekrümmten Schaufelkanal in ihrer Wirkung nicht zu übertreffen vermochten.

Eine offene Schaufel Peltonscher Art ist beispielsweise in Abb. 179 und 180 dargestellt. Der Dampfstrahl tritt aus einer Düse von 7 × 12 mm Weite aus und verbreitert sich beim

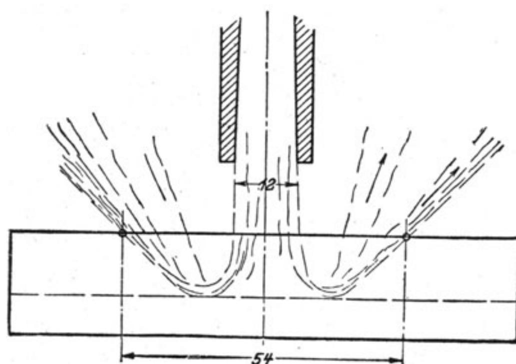


Abb. 179.

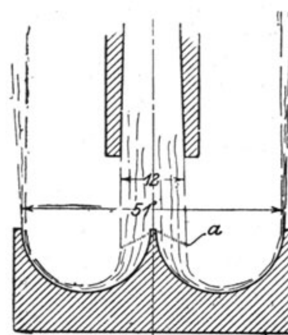


Abb. 180.

Streuung des Strahles bei einseitig offenen Peltonschaufeln.

Auftreffen auf die Schaufel in außerordentlichem Maße. Die etwas verdickten Ränder des Strahles verlassen die Schaufel auf einer Breite von rd. 54 mm, d. h. dem $4^1/_2$fachen des Düsendurchmessers. Eine kleinere Menge Dampf geht noch weiter auseinander. Der großen Ausbreitung entsprechend erscheint der Strahl in der Stirnansicht wie ein Schleier von fast Papierstärke. Bei a kann man einen Verdichtungsstreifen wahrnehmen, der offenbar durch das Auftreffen des Dampfes auf die Kante verursacht ist. Von dieser Schaufelform ist daher eine gute Wirkung nicht zu erwarten.

Ebenfalls eigenartige unerwartete Wirkungen treten auf, wenn der Strahl nicht allseitig begrenzt ist, wie die in der deutschen Patentschrift Nr. 152294[1]) angeführte Beobachtung

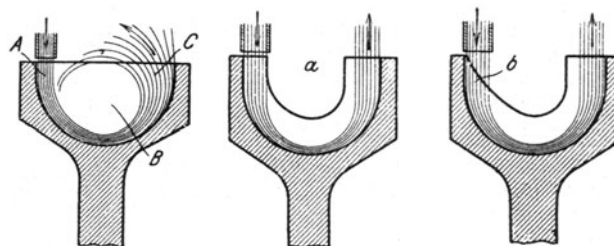


Abb. 181. Wirbelung in der Stumpf-Schaufel.

bestätigt. Der bei A (Abb. 181) in eine mit vollen Scheidewänden versehene Schaufel der Stumpfschen Form tretende Dampfstrahl bildet bei B eine Verdünnung und reißt Teile des austretenden Strahles bei C in den entstehenden Wirbel mit. Um diese Erscheinung zu bekämpfen, wird die Scheidewand nach a stark ausgenommen und nach b sogar die Eintrittskante abgeschrägt.

---

[1]) Von der Ges. zur Einführung von Erfindungen, G. m. b. H., in Berlin.

Zusammenfassung.

Der Hauptteil des Schaufelwiderstandes dürfte durch die Verdichtung und Wiederausdehnung in der Krümmung, sowie durch die Sekundärströmungen verursacht werden.

Die Abnahme der Reibungszahl, also die Zunahme der Vorzahlen φ, ψ mit wachsender Dampfgeschwindigkeit ist angesichts der Übereinstimmung der Versuchsergebnisse von Reynolds, Fritzsche, Blasius für gerade Kanäle und von Brilling, Josse und Christlein, Brown-Boveri & Co. für Schaufeln bis zur Schallgrenze als gesichert anzusehen. Allein das Maß der Zunahme ist bei den beiden letztgenannten auffallend hoch. Über der Schallgrenze nimmt φ in geraden und mäßig gekrümmten Leitkanälen zu, während in Schaufeln ψ abnimmt. Bei den Gleich- und Überdruckturbinen teilen wir Vorschläge über die zu wählende Größe von φ und ψ mit, die beim gegenwärtigen Stand der Forschung zum Gebrauch geeignet erscheinen.

47. Strömung durch Spalte und Labyrinthe.

a) Spalte.

Enge spaltförmige Hohlräume kommen bei den Abdichtungen (Stopfbüchsen) der Dampfturbinen vielfach vor. Aus den Untersuchungen von Becker[1]) geht hervor, daß man als Wert der **kritischen Geschwindigkeit** im Sinne von Reynolds

$$w_k = \frac{K' \eta_{tech}}{2 s \gamma} \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

ansehen kann, wenn s die Spaltbreite in m bezeichnet und technisches Maß benutzt wird. Dabei ist für Spalte von 0,2 bis 0,6 mm Weite

$K' = 27000$ für Wasser und Luft,

$K' = 17000-47000$ für anfänglich trocken gesättigten Dampf von 1,5 at abs. in dem Sinne, daß unterhalb der mit $K' = 17000$ gerechneten Geschwindigkeiten sicher das Poiseuillesche Gesetz, und oberhalb der mit $K' = 47000$ gerechneten sicher das Potenzgesetz für die Reibungsarbeit gelten.

Unter der kritischen Grenze gilt die[2]) Beziehung

$$p_1 - p_2 = 12 \, \eta_{tech} \frac{L w}{s^2} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Die aus den Versuchen ermittelten Werte von η_{tech} stimmen mit der Extrapolation der oben angeführten Beobachtungen befriedigend überein, so daß angenähert zu setzen wäre:

für $t =$	20	100	200	300° C
$10^6 \, \eta_{tech} =$	1	1,3	1,65	2,0

Oberhalb der kritischen Grenze erweist sich ζ_r für Dampf nahezu unveränderlich, und es muß der Druckabfall nach Formel

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma_m} = \zeta_r \frac{l}{2s} \frac{w_m^2}{2g} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

gerechnet werden, mit $\zeta_r = 0{,}033$ bis $0{,}040$ bei Spaltweiten von 0,2 bis 0,6 mm. Bei Luft erreichte w_m Beträge bis 110 m/sek bei Dampf bis 160 m/sek.

Nachfolgende Zahlentafel enthält eine Anzahl kritischer Werte für Dampf, gerechnet mit $K' = 25000$ und $\eta_{tech} = 1{,}6 \cdot 10^{-6}$.

Kritische Geschwindigkeiten nach Becker.

Spaltweite	$s =$	0,1	0,2	0,5	1,0 mm
Spez. Gew. $\gamma = 0{,}1$	$w_k =$	2000	1000	400	200 m/sek
„ „ $= 1{,}0$	„ $=$	200	100	40	20 „
„ „ $= 5{,}0$	„ $=$	40	20	8	4 „

[1]) Forschungsarbeiten, 1907, Heft 48.

[2]) Ähnlich wie Gl. (4) in Abschn. 27 abzuleiten.

Hieraus folgt, daß mit Ausnahme sehr tiefer Luftleere und sehr enger Spalte die Geschwindigkeit in der praktischen Anwendung über dem kritischen Werte gelegen sein wird. Um den Verlust für eine endliche Spaltlänge zu bestimmen, müßte man zu dem graphischen Integrationsverfahren greifen, das wir in Abschn. 27 erläutert haben. Da dies stets sehr umständlich ist, dürften die nachfolgend mitgeteilten Versuchsergebnisse in manchen Fällen nützliche Anhaltspunkte bilden.

Die Versuche wurden mit einem zylindrischen Rohr von 30 mm l. Weite und 100 mm Länge ausgeführt, in das man der Reihe nach glatte, ferner mit quadratischen und mit rhombischen Nuten versehene Bolzen, mit verschiedenem radialen Spiel einsetzte. Die Zahl der Nuten betrug 9. Die Versuchsbedingungen sind in der nachfolgenden Zahlentafel angeführt.

Bezeichnung	Welle	Anfangsdruck kg/qcm abs.	Temperatur mit d. Spiele wachsend °C	Enddruck kg/qcm abs.
a	glatt	10,5	184—209	0,95—0,67
b	,,	6,0	175—191	0,96—0,82
c	,,	4,0	162—175	0,96—0,87
d	9 gerade Rillen 5 × 5 mm	10,5—4,0	181—174	0,27—0,10
e	9 schräge Rillen 5 × 5 mm	10,5	182—211	0,96—0,76
f	,,	6,4	171—200	0,96—0,83
g	,,	4,0	150—198	0,96—0,87

Die Anfangstemperatur nahm mit wachsender Dampfmenge, d. h. größerem Spiele innerhalb der angegebenen Grenzen zu. Der Gegendruck konnte nicht konstant gehalten werden und nahm mit wachsendem Spiele ab. Die Auslaßtemperatur lag bei kleinem Spiel bis zu etwa 0,35 mm infolge der Abkühlung der Thermometerhülse durch das Gehäuse scheinbar unter dem Sättigungspunkt. Darüber hinaus wurde Überhitzung festgestellt, wie sein muß.

In einer späteren Versuchsreihe wurde der Gegendruck stufenweise gesteigert, bis er den Anfangsdruck nahezu erreichte, und es wurde festgestellt, daß die durchströmende Dampfmenge mit abnehmendem Gegendruck ähnlich wie beim Ausfluß durch die einfache Mündung nach angenähert elliptischem Gesetz zunimmt, bis der Gegendruck den kritischen Wert p_m erreicht hat. Von da ab bleibt bei Erniedrigung des Gegendruckes die sekundliche Dampfmenge unverändert. Bezeichnen wir diesen Höchstbetrag mit G_m, den Anfangsdruck mit p_1, den Gegendruck mit p, die ihm entsprechende sekundliche Dampfmenge mit G, so ist das Gesetz der Ellipse durch die Gleichung

$$\left(\frac{G}{G_m}\right)^2 + \left(\frac{p-p_m}{p_1-p_m}\right)^2 = 1$$

ausgedrückt. Führen wir das Verhältnis des kritischen Gegendruckes zum Anfangsdrucke

$$\beta = \frac{p_m}{p_1}$$

ein, so entsteht durch Auflösung

$$G = \frac{G_m}{1-\beta}\sqrt{1-2\beta\left(1-\frac{p}{p_1}\right)-\left(\frac{p}{p_1}\right)^2}.$$

Aus den Versuchen ergibt sich, daß der kritische Druck, wie zu vermuten, mit abnehmender Spaltweite s sinkt, und zwar innerhalb der Grenzen $s = 0{,}1$ bis $s = 0{,}5$ mm, ungefähr gemäß der empirischen Formel

$$\beta = \frac{p_m}{p_1} = 0{,}577 - \frac{0{,}098}{0{,}124+s}$$

wo s in mm einzusetzen ist.

Man kann die maximale sekundliche Dampfmenge G_m vergleichen mit der „theoretischen", die durch eine gut abgerundete Mündung bei gleichem Anfangsdruck (und einem unter der kritischen Grenze gelegenen Gegendruck) ausfließen würde, und nach Abschn. 40 durch Formel

$$G_0 = 2{,}03\, F\sqrt{\frac{p_1}{v_1}}$$

für kg/qm/sek als Einheiten bestimmt ist. Das Verhältnis

$$k = \frac{G_m}{G_0}$$

ist in Abb. 182 als Abhängige der Spaltweite für die in der Zahlentafel mit gleichen Buchstaben bezeichneten Versuche graphisch dargestellt. Als ganz ungefähre Näherung könnte die Formel $k = 0{,}792\sqrt[2]{s}$ benutzt werden, s in mm eingesetzt. Die Versuche beanspruchen keine hohe Genauigkeit, und die angeführten Formeln werden nur mit Vorbehalt wiedergegeben.

Wichtig ist, sich für die praktische Anwendung die nachstehenden Folgerungen vor Augen zu halten:

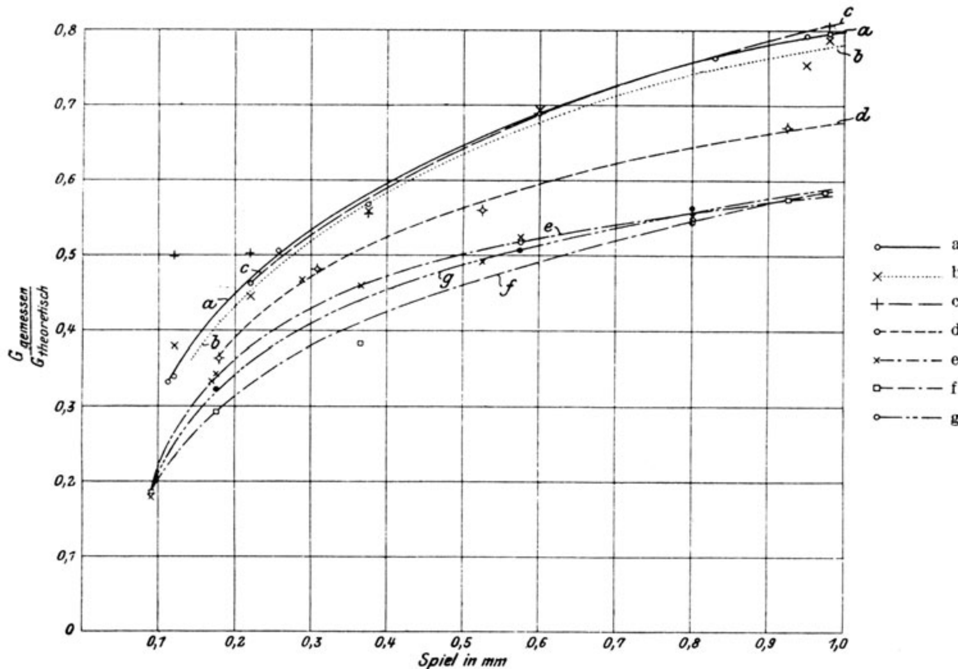


Abb. 182. Ausflußgewicht bei engen Spalten.

Ein 100 mm langer glatter Spalt läßt bei 1 mm Weite nur um etwa 20 v. H. weniger Dampf durch als die einfache Mündung. **Wo also Verminderung von Undichtheitsverlusten angestrebt wird, ist die angegebene Spaltweite zu groß.** Auch bei 0,2 mm Spaltweite, die als kleinstes praktisch erreichbares Maß für bewegte Teile gelten kann, ist die durchströmende Dampfmenge bei 100 mm Spaltlänge noch 30—50 v. H. der theoretischen.

Durch das Eindrehen von Rillen wird der Dampfverlust herabgesetzt, und zwar bei schrägen (die Spitze gegen den Strom richtenden) Rillen mehr als bei rechteckigen, indessen nur im Verhältnis von 1 zu etwa 0,75. Die Rillen wirken also nicht wie ein vollwertiges Labyrinth.

b) Labyrinthliderung.

Unter „Labyrinthliderung" versteht man im Dampfturbinenbau die Abdrosselung höher gespannten Dampfes auf niederen Druck durch viele hintereinander geschaltete Verengungen, etwa wie in Abb. 183 dargestellt. Der Spalt zwischen dem beweglichen und dem festen Teil geht bis auf 0,2 mm herab, wird aber auch wesentlich größer, und ist so kurz, daß der Reibungsverlust stets vernachlässigt werden kann. Die Erweiterungen sollen so groß und so geformt sein, daß die erlangte Geschwindigkeit w durch Wirbelung ganz vernichtet wird.

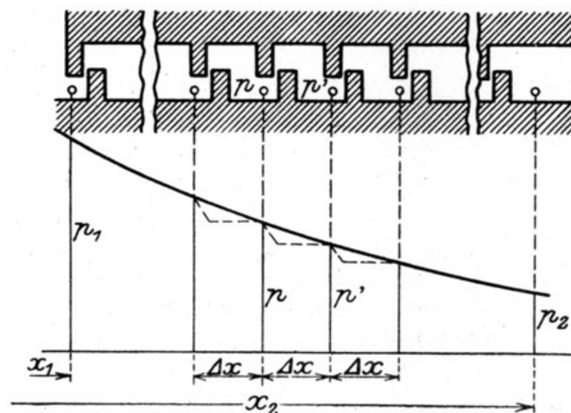


Abb. 183. Schema der Labyrinthstopfbüchse.

α) Angenäherte Theorie für kleine Druckunterschiede.

Setzen wir eine aus sehr vielen Labyrinthen bestehende Liderung voraus, so daß die Pressungen p, p' in zwei aufeinanderfolgenden Abteilungen nur wenig verschieden sind, und bezeichnet γ das mittlere (oder genau genug das zu p gehörige) Raumgewicht, so kann die Strömungsgeschwindigkeit

im Spalt nach der angenäherten Formel

$$w = \sqrt{2g\frac{p-p'}{\gamma}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

berechnet werden. Ist ferner f der Querschnitt des Spaltes, so erhalten wir als Undichtheitsverlust für die Sekunde

$$G_{sek} = f w \gamma = f\sqrt{2g(p-p')\gamma} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4a)$$

und umgekehrt, bei vorgeschriebenem G_{sek} den zulässigen Druckunterschied

$$(p-p')\gamma = \left(\frac{G_{sek}}{f}\right)^2 \frac{1}{2g} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4b)$$

Die aufeinanderfolgenden Zustände liegen auf der Drosselkurve $i =$ konst. und können angenähert durch die Gleichung

$$pv = \text{konst.} = 1/k, \text{ oder } \gamma = 1/v = kp \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

wobei k einen Mittelwert darstellt, ausgedrückt werden. Wir wollen die einzelnen Stufen auf einer Abszissenachse durch in gleichen Abständen Δx befindliche Punkte darstellen. Schreiben wir $p - p' = -\Delta p$, so kann Gl. (4b) auf die Form

$$-\frac{\Delta p}{\Delta x} p = \frac{G_{sek}^2}{2gkf^2\Delta x} = \frac{a}{\Delta x} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4c)$$

gebracht werden. Bei kleinen Differenzen ist $\frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{dp}{dx}$ und wir haben

$$-p\frac{dp}{dx} = \frac{a}{\Delta x} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4d)$$

woraus durch Integration mit p_1, p_2 und x_1, x_2 als Anfangs- und Endwerten

$$p_1^2 - p_2^2 = 2a\frac{(x_2 - x_1)}{\Delta x}$$

folgt. Allein es ist $\frac{x_2 - x_1}{\Delta x} = z$ gleich der Labyrinthen- oder Stufenzahl, also wird $p_1^2 - p_2^2 = 2az$. Wenn wir a aus Gl. (4c) einsetzen, so entsteht schließlich mit $1/k = p_1 v_1$

$$G_{sek} = f\sqrt{\frac{gk}{z}(p_1^2 - p_2^2)} = f\sqrt{\frac{g(p_1^2 - p_2^2)}{z p_1 v_1}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

worin p_1, p_2 in kg/qm, f in qm einzusetzen sind, und G kg/sek bedeutet.

Sind die **Labyrinthe radial hintereinander** angeordnet, was viel vorkommt, so ist in Gl. (4) der Querschnitt veränderlich

$$f = 2\pi x \delta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

wenn x den Halbmesser, δ die Breite des Spaltes bedeutet. Die Integration der neuen Gl. (4c) ist ebenso einfach zu erledigen und führt auf

$$G_{sek} = \sqrt{\frac{kg}{z}(p_1^2 - p_2^2) f_1 f_2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7a)$$

worin $f_1 = 2\pi x_1 \delta$ und $f_2 = 2\pi x_2 \delta$ den Anfangs- und den Endquerschnitt der Spalte bedeuten.

Endlich kann durch **graphische Integration** jedes beliebige Abhängigkeitsgesetz des f von x berücksichtigt werden.

β) Angenäherte Formel für den Fall, daß die Schallgeschwindigkeit erreicht wird.

Die Schallgeschwindigkeit kann bei stets gleichem Labyrinthquerschnitt nur in der letzten Stufe auftreten. Ob und wann dies der Fall ist, kann man durch eine Proberechnung entscheiden, indem man das durchströmende Gewicht vorläufig nach Formel 6, das spezifische

Volumen in der letzten Stufe nach der Zustandsgleichung $v_2 = p_1 v_1 / p_2$ und die Geschwindigkeit aus der Stetigkeitsbedingung $w_2 = G v_2 / f$ ermittelt. Ist dieser Wert größer als die Schallgeschwindigkeit

$$w_s = \sqrt{k_0 g\, p_2 v_2} \quad \ldots \quad (8)$$

wo k_0 den Exponenten der Adiabate bedeutet, so ist die Anwendung der Formel nicht mehr zulässig und es gilt folgende Ableitung.

Bezeichnet p_x den Druck, v_x das Volumen vor der letzten Verengung, so ist nach der Ausflußformel das sekundliche Gewicht

$$G_{sek} = \alpha f \sqrt{\frac{p_x}{v_x}} = \alpha f \sqrt{k\, p_x^2} \quad \ldots \quad (9)$$

wobei α im Mittel nach Bendemann für kg, m, sek als Einheiten gleich 2 gesetzt wird.

Für die vorgelagerten $z - 1$ Labyrinthe wird man Formel (6) mit genügender Annäherung benützen dürfen, und erhält daher

$$G_{sek} = f \sqrt{\frac{k g}{z-1}(p_1^2 - p_x^2)} \quad \ldots \quad (10)$$

Durch die Gleichsetzung von (9) und (10) entsteht

$$p_x^2 = \frac{g\, p_1^2}{\alpha^2 (z-1) + g} \quad \ldots \quad (11)$$

und dieses liefert in Gl. (9) eingeführt

$$G_{sek} = f \sqrt{\frac{k g\, p_1^2}{(z-1) + \frac{g}{\alpha^2}}},$$

oder wenn, um runde Zahlen zu erhalten, $g/\alpha^2 = 2{,}5$ und $k = 1/p_1 v_1$ angenommen wird

$$G_{sek} = f \sqrt{\frac{g}{z + 1{,}5}\left(\frac{p_1}{v_1}\right)} \quad \ldots \quad (12)$$

Bei größerer Labyrinthenzahl z darf die Konstante 1,5 vernachlässigt werden. und man erhält die einfache Formel

$$G_{sek} = f \sqrt{\frac{g\, p_1}{z\, v_1}} \quad \ldots \quad (13)$$

die man aus (6) hervorgegangen denken kann, wenn darin p_2^2 gegen p_1^2 vernachlässigt wird.

Den „kritischen" Betrag p_k des Gegendruckes können wir angenähert aus Gl. (11) ermitteln, indem wir wie für überhitzten Dampf $p_k = 0{,}54 p_x$ setzen, was auf die Formel

$$p_k = p_1 \frac{0{,}85}{\sqrt{z + 1{,}5}} \quad \ldots \quad (14)$$

Diese Pressung sinkt daher angenähert im umgekehrten Verhältnis zur Quadratwurzel aus der Stufenzahl.

Beispiel. Es sei der Undichtheitsverlust eines Parsonschen Entlastungskolbens von 1 m Durchmesser mit 36 Labyrinthnuten zu berechnen. Das Spiel an der engsten Stelle setzen wir zu 0,2 mm fest. Es sei $p_1 = 10$ kg/qcm, gesättigter Zustand $p_2 = 0{,}1$ kg/qcm. Als Mittel von k wählen wir

$$k = 5{,}1 \cdot 10^{-5}$$

(wenn p in kg/qm verstanden ist). Der Querschnitt f ist rund $6{,}28 \cdot 10^{-4}$ qm, und der kritische Druck nach Gl. (14) ist $p_k = 1{,}4$ kg/qcm. Wir müssen daher Formel (12) anwenden, die

$$G = 0{,}229 \text{ kg/sek oder } 825 \text{ kg/st}$$

liefert. Da nun eine Turbine mit dem angegebenen Entlastungskolben leicht 30000 kg Dampf in der Stunde verbraucht, so beträgt die Undichtheit bloß

$$\frac{825}{30000}, \text{ d. h. } \sim 2{,}8 \text{ v. H.}$$

Hätte der Kolben 200 mm Durchmesser, so wäre der Verlust bei sonst gleichen Verhältnissen $^1/_5$, d. h. 165 kg, und da die zugehörige Turbine für etwa 3000 kg Dampf in der Stunde geeignet ist, so hätten wir

$$\frac{165}{3000}, \text{ d. h. } \sim 5{,}5 \text{ v. H. Verlust.}$$

Ist das Spiel im warmen Zustand der Turbine größer, so wächst der Dampfverlust selbstverständlich in gleichem Maße.

γ) Genaueres Verfahren für unveränderlichen Spaltquerschnitt.

Der Querschnitt f aller Spalte sei gleich groß und bekannt, die in den einzelnen Abteilungen herrschenden Pressungen seien $p_1, p_2, p_3 \ldots$. Das in der Sekunde durchfließende Dampfgewicht kann als Funktion des Druckunterschiedes durch Kurve a in Abb. 184 dargestellt werden und nimmt, wie früher bewiesen wurde, bis zum kritischen Druck zu. Bei einem bestimmten Undichtheitsverlust werden wir auf Kurve a bis zum Punkte A_1 gelangen. Nachdem die erlangte lebendige Kraft durch Wirbel vernichtet worden ist, gilt p_2 als der Anfangsdruck für die mit $w = 0$ beginnende weitere Strömung, und man kann G als Funktion von $p_2 - p_3$ durch Kurve b darstellen, auf der wir bis zu B_1, d. h. bis $B_1 C = G$ geworden ist, fortrücken. Hierbei ist zu

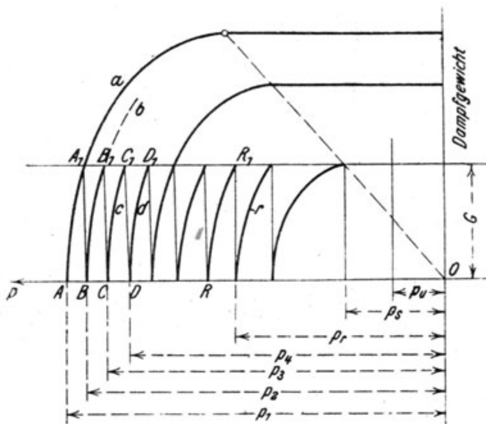


Abb. 184. Ausflußgrenze bei Labyrinthen.

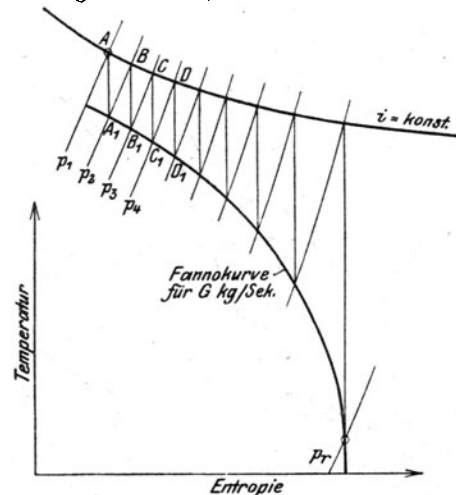


Abb. 185. Zustände in Labyrinthen.

beachten, daß wegen Abwesenheit äußerer Arbeitsleistung (und Wärmeabgabe) der Wärmeinhalt für Punkt B derselbe ist wie bei A, der Dampfzustand also im Entropiediagramm als Schnittpunkt der Linie $i =$ konst. und $p_2 =$ konst. erscheint. Hinter dem zweiten Spalt wiederholt sich dasselbe, und so schreitet die Schaulinie in Zacken fort, bis bei der letzten Stufe der gegebene Außendruck p_r erreicht ist. Bei vorgeschriebener Zahl der Labyrinthe muß G versuchsweise so lange verändert werden, bis der letzte Schnittpunkt R_1 auf die Druckordinate p_r fällt. Es wird vorkommen, daß bei kleinen Gegendrucken, z. B. p_s, die Gewichtslinie die Parallele G berührt; dann bleibt die Stufenzahl auch für den noch beliebig kleineren Druck p_u dieselbe.

Die Übertragung ins Entropiediagramm liefert Abb. 185, in der die gleichartigen Punkte mit gleichen Buchstaben bezeichnet sind wie oben. $A, B, C, \ldots$ liegen wie bemerkt auf der Linie $i =$ konst. Der geometrische Ort der Punkte $A_1, B_1, C_1, \ldots$ aber ist nichts anderes als die Fannolinie, die der Kontinuitätsgleichung $Gv = fw$ und der Energiegleichung $Aw^2/2g = i - i_x$ entspricht[1]). Diese Kurve kann daher von vornhinein entworfen werden und liefert durch die Zickzacklinie zwischen Anfangs- und Enddruck die Zahl der Labyrinthe. Ist eine der Adiabaten Tangente an die Fannolinie geworden, so bedeutet dies Eintritt der Schallgeschwindigkeit, und eine Fortsetzung der Labyrinthe wäre überflüssig. Schneidet die Adiabate die Fannolinie nicht mehr, so ist die Ausdehnung auf den gewünschten Druck unmöglich.

δ) Allgemeines Verfahren für veränderlichen Querschnitt.

Mit Hilfe einer graphischen Tafel der v-Quadrate kann die Untersuchung, auch bei veränderlichem Querschnitt, leicht erledigt werden (s. Abschn. 30b). Es sei in Abb. 186 $\overline{OO_1} = i_0$ der anfängliche Wärmeinhalt, A_1 der Ausgangspunkt mit dem Drucke p_1. Die Ausdehnung durch den ersten Spalt mit dem Querschnitt f_1 führt auf das adiabatische Volumen $\overline{B_1 C_1}^2$, das von dem unter der Neigung

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{(f_1/G)^2}{(A/2g)}$$

---

[1]) Diese Eigenschaft wurde erstmals von den Herren Baumann, Faber und Pochobradski in ihren Diplomarbeiten an der Eidgen. Techn. Hochschule abgeleitet.

von O_1 aus gezogenen Strahl herausgeschnitten wird. Die lebendige Kraft wird bei unveränderlichem Druck auf der Linie $B_1 A_2$ in Wärme umgewandelt, bis wieder der anfängliche Wärmeinhalt i_0 erreicht wird. Die Ausdehnung zum zweiten Spalt mit dem Querschnitt f_2 erfolgt nach der durch A_2 gehenden Adiabate bis zum Schnitt mit dem unter der Neigung

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{(f_2/G)^2}{(A/2g)}$$

gezogenen Strahl, die Rückverwandlung in Wärme nach $B_2 A_3$ usw. Die Wärmewerte der in den Spalten erreichten Geschwindigkeitshöhen sind durch die Strecken $O_1 C_1$, $O_1 C_2$ .... dargestellt.

Das Eintreten der Schallgeschwindigkeit wird dadurch angezeigt, daß die φ-Linie die v^2-Kurve berührt; geht sie daran vorbei, so ist die Strömung unmöglich.

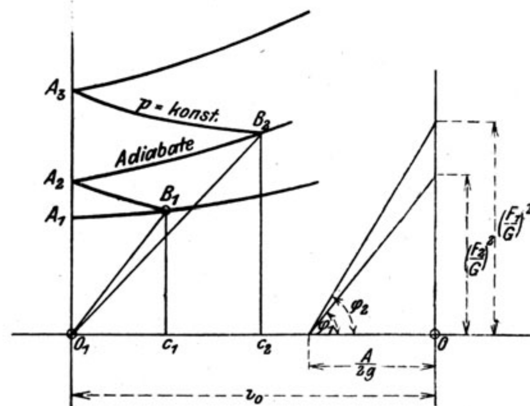


Abb. 186. Strömung in Labyrinthen nach dem v^2-Verfahren.

c) Versuche über Labyrinthverluste.

Das in Abb. 187a dargestellte Labyrinth wurde in der Ruhelage, d. h. ohne Drehung des Bolzens, die nur geringen Einfluß haben kann, untersucht, und es sind folgende Ergebnisse erzielt worden:

Labyrinth nach Abb. 187a. 10 Stufen.

p_1 kg/cm²	t_1^0	p_2 kg/cm²	Spiel[1]) mm	f m²	G kg/st nach Versuch	G kg/st berechnet	Nach Formel für
3	175°	1,1	0,14	$1{,}65 \cdot 10^{-5}$	11	12,5	unter Schallgeschwindigkeit
6	185°	1,16	0,14	$1{,}65 \cdot 10^{-5}$	24	24	über „
10	180°	1,7	0,14	$1{,}65 \cdot 10^{-5}$	44	40	„ „
3	160°	1,1	0,212	$2{,}5 \cdot 10^{-5}$	18,5	19	unter Schallgeschwindigkeit
6	190°	1,3	0,212	$2{,}5 \cdot 10^{-5}$	39	36	über „
10	195°	1,7	0,212	$2{,}5 \cdot 10^{-5}$	64	58	„ „
3	175°	1,2	0,38	$4{,}5 \cdot 10^{-5}$	30	33,5	unter Schallgeschwindigkeit
6	180°	1,6	0,38	$4{,}5 \cdot 10^{-5}$	63	65	über „
10	190°	2,4	0,38	$4{,}5 \cdot 10^{-5}$	108	108	„ „

Die Ausführung nach Abb. 187b wurde bei 10 Nuten als Labyrinth mit 20 Stufen gerechnet, da in jeder Nute zwei Verengungen vorkommen.

Labyrinth nach Abb. 187b. $z = 20$.

p_1 kg/cm² abs.	t_1	p_2 kg/cm² abs.	Spiel mm	f m²	Stündliches Dampfgewicht berechnet	Stündliches Dampfgewicht nach Versuch
3	180°	1,2	0,5	$5{,}9 \cdot 10^{-5}$	29	25,8
6	190°	1,5	0,5	$5{,}9 \cdot 10^{-5}$	61	54,3
10	200°	2,2	0,5	$5{,}9 \cdot 10^{-5}$	102	91,4

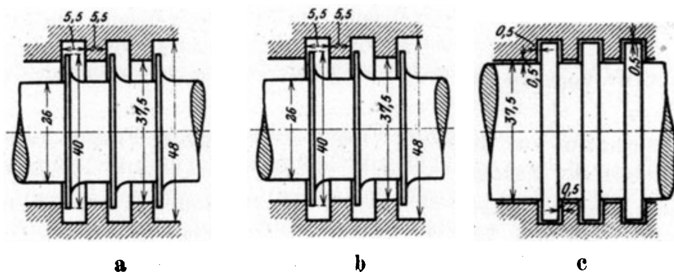


Abb. 187. Versuche mit Labyrinthen.

[1]) Fehlergrenze in der Bestimmung des Spieles 0,015 mm.

Endlich schien es interessant, die Ausführung 187c, die eigentlich einen fortlaufenden gebrochenen engen Spalt bildet, mit 187b zu vergleichen. Die stündlich durchgeströmten Dampfmengen bei gleichem Anfangs- und Endzustand und gleichem Spiel wie für 187b ergaben sich zu

18, 38, 67 kg.

Die Übereinstimmung der Ergebnisse mit den angenäherten Formeln (5) bzw. (12) ist hiernach beim normalen Labyrinth *a* eine ganz befriedigende, und es wird sich der Gebrauch der genaueren Verfahren nur bei sehr wichtigen Ausführungen lohnen. In der Ausführung Abb. 187b ist der Verlust in Wirklichkeit kleiner als nach der Theorie, was sich durch die Annahme einer Strahleinschnürung erklären ließe. Die Ausführung *c* als gebrochener Spalt weist endlich die kleinsten Verluste auf; doch wird ihre allgemeine Verwendung auf Dichtungen mit großem Spiel beschränkt werden müssen, da andernfalls die Gefahr des Einreibens zu groß wäre.

48. Dampfreibung und Ventilationsarbeit der Turbinen-Laufräder.

Der Widerstand den ein sich im Dampfe drehendes Turbinenlaufrad erfährt, kann in den Anteil getrennt werden, der von der im allgemeinen glatten Scheibe und in den, der von den Schaufeln herrührt. Der erstere ist der eigentliche Reibungswiderstand, der letztere wird in der Hauptsache durch die Ventilationsarbeit der Schaufeln gebildet.

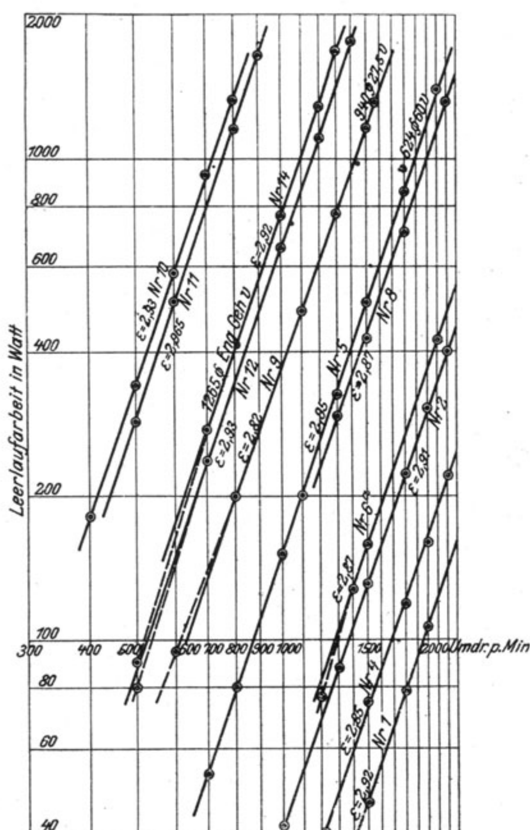


Abb. 188. Radreibungsarbeit, logarithmisch aufgetragen.

Für die Beobachtung der Luftströmung an einem frei aufgestellten Rad eignet sich als einfachste Vorrichtung eine ganz kleine Quaste, die mittels kurzen Fadens an einem Draht befestigt ist. Es zeigt sich, daß der Scheibe entlang und bis auf etwa $^2/_3$ der Schaufellänge die Geschwindigkeit sehr klein bleibt mit allmählich stärkerer Neigung nach der Richtung des Umfanges hin. Erst aus dem letzten Drittel wird die Luft mit nahezu tangentialer Richtung herausgeschleudert, um teilweise in regelmäßigen Bahnen zum Rade zurückzukehren.

Es liegt auf der Hand, daß ein in freier Luft (unverhüllt) aufgestelltes Rad eine bedeutend größere Leerlaufarbeit aufzehrt, als ein Rad mit eng anschließendem Gehäuse, da in letzterem Falle die Luft an der freien Zirkulation behindert ist.

Die Ventilationsarbeit rechnerisch zu verfolgen, wäre fruchtlos, denn wir besitzen keine festen Führungen des Luft- (oder Dampf-) Stromes und können die Größe des Querschnittes nicht angeben. Sind die Winkel am Ein- und am Austritt des Rades ungleich, dann tritt, wie die Beobachtung zeigt, der Effekt der axialen Turbinenpumpe auf, d. h. es bildet sich, ohne daß die gewöhnliche Ventilation aufhörte, ein durch das Rad hindurchgehender Luftstrom aus, der die Leerlaufarbeit vergrößert. Noch weniger kann uns die Rechnung Aufschluß über die Reibung der glatten Scheibe geben. Zwar liegen ausgedehnte Versuche von Physikern über die „Gasreibung" vor, doch sind diese alle unter der „kritischen" Geschwindigkeit angestellt, wo noch die Reibung der Geschwindigkeit verhältnisgleich ist, was für die Turbinenräder nicht zutrifft.

Der Verfasser unternahm zur Klärung der einschlägigen Fragen eine Anzahl von Versuchen, deren Ergebnisse in der Zahlentafel 1 und den Abb. 188 und 189 niedergelegt sind.

Benutzt wurden eine glatte umbearbeitete Scheibe aus Kesselblech von 537 mm Durchmesser und fünf Turbinenräder von bzw. 545, 624, 722, 940, 1265 mm Außendurchmesser. Abb. 188 enthält die Darstellung der Logarithmen des Kraftverbrauchs W in Watt als Abhängige der Logarithmen der minutlichen Umdrehungszahl n. Die erhaltenen Punkte liegen für jeden Versuch auf ziemliche Ausdehnung fast genau in einer Geraden, die durch die Gleichung

$$\lg W = \lg W_0 + \varepsilon \lg n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

dargestellt werden kann. Die Größe ε ist die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels gegen die Abszisse. Aus Gl. (1) folgt

$$W = W_0 n^{\varepsilon} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

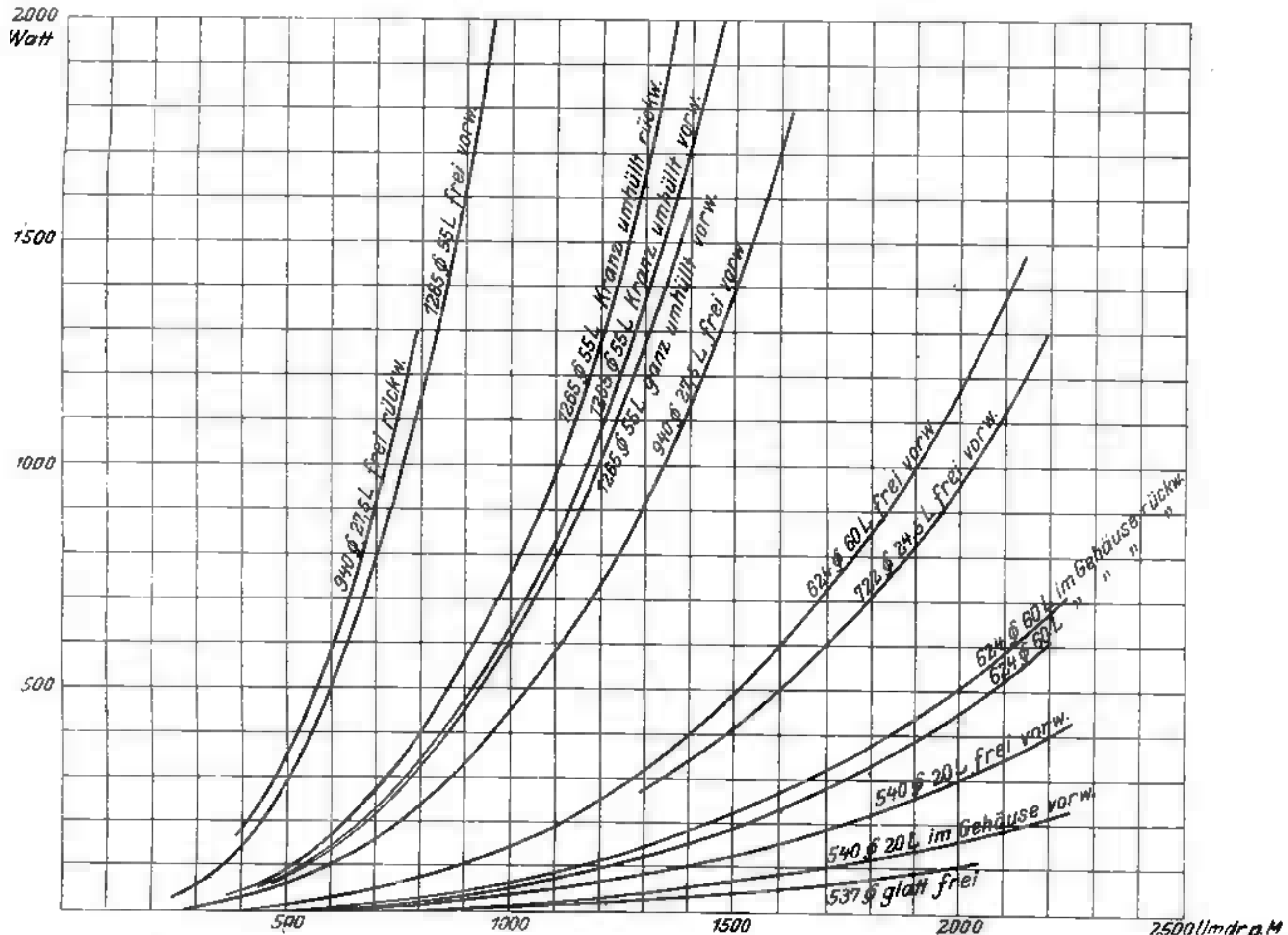


Abb. 189. **Radreibungsarbeit.**

Die Werte von ε sind in der Figur eingetragen und liefern **als Mittelwert 2,90,** also eine nahe **Übereinstimmung mit dem Reynoldsschen Exponenten für die Flüssigkeitsreibung.** Wir begnügen uns indessen mit der Abrundung

$$\varepsilon = 3,$$

wodurch auch die Rechnungen bedeutetend vereinfacht werden, und sprechen das Ergebnis im folgenden Gesetz aus:

Die Leerlaufarbeit der in freier Luft oder in einem Gehäuse umlaufenden Räder und Scheiben wächst angenähert mit der dritten Potenz der Umlaufzahl.

Es genügt mithin, von jeder bei verschiedenen Umlaufzahlen unter sonst gleichen Umständen durchgeführten Versuchsreihe einen einzelnen Punkt anzugeben. In Zahlentafel 1 sind die jeweiligen Höchstwerte zusammengestellt, und es bezieht sich die Bezeichnung „Vorwärtsgang“ auf die gewöhnliche Drehrichtung, bei der die konvexe Schaufelseite vorausgeht. Der Widerstand des Rückwärtsganges wurde bei mehreren Rädern bestimmt, da die Kenntnis desselben für die Schiffsturbinen, die in beiden Richtungen umlaufen müssen, Wichtigkeit besitzt. Das Gehäuse bestand bei den kleinen Scheiben aus Blech, bei den großen aus Holz.

Das angegebene Spiel bezieht sich auf den Abstand der Gehäusewand von der Schaufel.

Der große Einfluß der Schaufellänge geht aus diesen Angaben klar hervor. Wie sehr weiterhin die Ventilationsarbeit von der Freiheit der Luftzirkulation abhängt, zeigt der Vergleich der Werte für freie Luft und für eingeschlossene Räder. Wegen des besseren Lufteinlaufes in die Schaufel ist die Arbeit beim Rückwärtslauf des unverhüllten Rades fünf- bis

sechsmal größer als im Vorwärtslauf. Wird das Rad aber eingehüllt, so schrumpft das Verhältnis auf etwa 1,2 zusammen. Versuche 12 und 14 zeigen ferner die wichtige Tatsache, daß das Einhüllen des Kranzes allein den Hauptteil des Widerstandes beseitigt, und durch das Umschließen des ganzen Rades nur noch wenig gewonnen werden kann.

Zahlentafel 1.

Nr.	Art des Versuches	Vorwärts- oder Rückwärtslauf	Außendurchmesser mm	Schaufel			Höchste Umlaufzahl i. d. Min.	Zugehörige Umfangsgeschw. m/sek	Kraftverbrauch		β
				Länge (radial) mm	Breite (axial) mm	Teilung mm			Watt	PS	
1	Glatte Scheibe 4 mm dick frei in Luft	vorw.	537	—	—	—	2000	56,3	110	0,149	6,38
2	Laufrad *A* frei in Luft	vorw.	545	20	20	12,3	2200	62,8	400	0,544	6,38
3	„ „ „ „ „	rückw.	545	20	20	12,3	2100	59,9	1880	2,554	34,42
4	„ „ im Gehäuse mit 4 mm seitl. Spiel	vorw.	545	20	20	12,3	2200	62,8	218	0,296	3,48
5	Laufrad *B* frei in Luft	vorw.	624	60	20	13,7	2100	68,6	1380	1,875	12,86
6	„ „ im Gehäuse mit 4 mm seitl. Spiel	„	624	60	20	13,7	2100	68,6	525	0,713	4,89
7	Laufrad *B* im Gehäuse mit 4 mm seitl. Spiel	rückw.	624	60	20	13,7	2200	71,9	680	0,924	5,51
8	Laufrad *C* frei in Luft	vorw.	722	24,5	20	12,6	2200	83,2	1315	1,787	5,13
9	Laufrad *D* frei in Luft	vorw.	940	27,5	25	16,3	1600	78,7	1720	2,336	4,67
10	„ „ „ „ „	rückw.	940	27,5	25	16,3	750	36,9	1120	1,522	9,34
11	Laufrad *E* frei in Luft	vorw.	1265	55	25	12	980	64,9	2160	2,935	5,77
12	„ „ Kranz auf 160 mm Breite eingehüllt, rd. 6,5 mm seitl. Spiel	„	1265	55	25	12	1650	109,3	2870	3,901	1,61
13	Laufrad *E* Kranz auf 160 mm Breite eingehüllt, rd. 6,5 mm seitl. Spiel	rückw.	1265	55	25	12	1400	92,7	2290	3,110	2,10
14	Laufrad *E* ganz im Gehäuse, 6,5 mm seitl. Spiel	vorw.	1265	55	25	12	1400	92,7	1590	2,16	1,48

Zum Zwecke des ungefähren Vergleiches stellen wir für die Reibungsarbeit N_r in PS die Formel auf

$$N_r = \frac{\beta}{10^6} D^2 u^3 \gamma \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

worin D der Außendurchmesser des Rades in m,
u die äußerste Umfangsgeschwindigkeit in m/sek,
γ das spezifische Gewicht der Gasart in kg/cbm ist, in der das Rad rotiert.

Die Werte der Vorzahlen β sind in der Zahlentafel 1 für die untersuchten Räder mit angegeben. Die Abhängigkeit dieser Zahl von Durchmesser und Schaufellänge wird weiter unten untersucht.

a) Reibung der Radscheibe allein (ohne Schaufeln). Um die Reibungsarbeit aus ihren Elementen zu berechnen, können wir von den Versuchen von A. F. Zahm[1]) ausgehen, der die **Luftreibung langer Platten,** die einem geradlinigen Luftstrom in geschlossenen Kanälen ausgesetzt waren, untersuchte. Die Reibungskraft in kg, die eine Platte von l m Länge, 1 m Breite, bei u m/sek Luftgeschwindigkeit auf einer Seite erfährt, soll hiernach durch die Formel

$$K_r = 0{,}000124\, l^{0,93} u^{1,85} \quad \ldots \ldots \quad (3a)$$

für den gewöhnlichen Zustand der Atmosphäre ausdrückbar sein.

Mit Hilfe der Zahmschen Formel kann man die Reibungsarbeit ausrechnen, die eine umlaufende Scheibe erfahren würde, wenn man annimmt, daß in jedem Punkte der Scheibe die Reibung genau so groß ist, als wenn die Luft in der Umgebung ruhen würde.

Der Einfachheit halber setzen wir den Exponenten der Länge $=1$ und erhalten auf einen durch die Halbmesser r und $r + dr$ begrenzten Ring eine Reibungsarbeit $u\,dK_r = 2\pi r dr a (r\omega)^{2,85}$, wenn mit a der Beiwert in Formel (3a) bezeichnet wird. Durch Integration von 0 bis r und Vermehrung mit 2 (d. h. für zwei Seiten der Scheibe), sowie Division durch 75 erhalten wir die Reibungsarbeit der ganzen Scheibe in PS

$$N_r = \frac{1{,}07}{10^6} D^2 u^{2,85} \quad \ldots \ldots \quad (3b)$$

[1]) Philosophical Magazine 1904, Bd. 43, S. 62.

Der Exponent von u stimmt mit dem von uns für die Turbinenräder experimental gefundenen gut überein und rechtfertigt die Form der Gl. (3). Das Ergebnis kann mit den Versuchen von Odell über die **Reibung glatter Räder** verglichen werden, der vier Scheiben aus Karton und Zeichenpapier mit Durchmessern von bzw. 381, 559, 686 und 1194 mm untersucht hat. Ferner ist in Zahlentafel 2 ein Versuch des Verfassers mit einer schmiedeeisernen glatten Scheibe aufgenommen.

Da der Kraftbedarf der glatten Scheibe an sich gering ist, empfiehlt es sich, solange keine genaueren Versuche vorliegen, deren Leerlaufarbeit in PS durch eine Formel von der Form der Gl. (3b) indes mit der Vereinfachung, daß man als Exponenten die Zahl 3 wählt, d. h. durch den Ansatz

$$N_r' = \frac{\beta_1}{10^6} D_1^{\,2} u_1^{\,3} \gamma \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

wiederzugeben, in der

D_1 den Durchmesser der Scheibe in m,
u_1 die Umfangsgeschwindigkeit der Scheibe in m/sek,
γ das spezifische Gewicht des umgebenden Mittels in kg/cbm

bedeuten. Man erhält für β_1 die in Zahlentafel 2 mit den Versuchsergebnissen zuasmmengestellten Werte, wobei für Odell $\gamma = 1{,}16$ vorausgesetzt wurde, während es in meinem Versuche 1,12 betrug. Die Versuche von Odell ergeben einen höheren Kraftverbrauch, als nach der Zahmschen Formel zu erwarten gewesen wäre. Bei Versuch 6 mußte die Scheibe wegen der Auswuchtung mit zwei Löchern versehen werden, die merkliche Mehrventilation verursachten.

Zahlentafel 2.

Versuche von Odell (Nr. 1—5) und vom Verfasser (Nr. 6).

Nr. der Versuche	1	2	3	4	5	6
Durchmesser der Scheibe . . . . mm	381	559	686	1194	1194	537
Höchste Umlaufzahl . . . . . . i. d. Min.	2000	850	525	530	740	2000
Entspr. Umlaufgeschwindigkeit . . m/sek	39,9	24,9	18,8	33,1	46,2	56,2
Kraftverbrauch . . . . Watt	17,7	8,14	5,56	101,3	229,1	110
„ . . . . PS	0,0240	0,0111	0,00755	0,138	0,309	0,149
Vorzahl β_1 in Formel (4)	2,24	1,98	2,06	2,28	1,90	2,59

b) Die Abhängigkeit der Reibungsarbeit von der Dichte der umgebenden Dampfatmosphäre geht aus den in Abb. 190 graphisch zusammengefaßten Ergebnissen hervor, die der

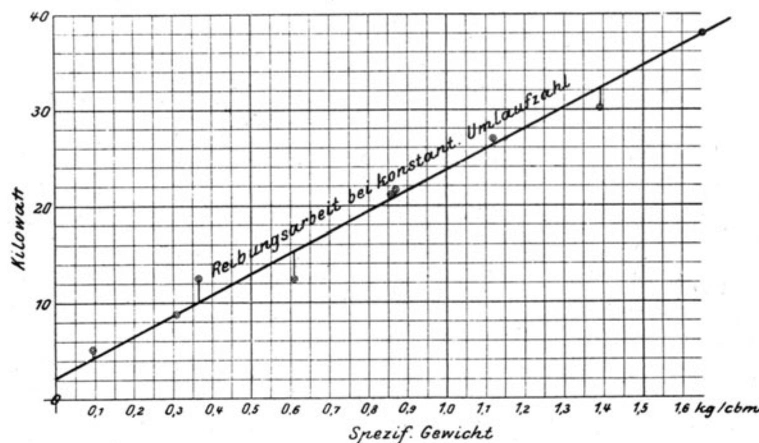


Abb. 190. Radreibungsarbeit, mit γ verhältnisgleich.

Verfasser an einer mehrstufigen Gleichdruckturbine ermittelt hat. Die Turbinenwelle mit allen Laufrädern wurde hierbei in stagnierendem Dampfe durch einen Gleichstrommotor angetrieben. Der Arbeitsverbrauch nimmt augenscheinlich mit dem spezifischen Gewicht des Dampfes linear zu.

Daß der Verbrauch bei der Dichte Null nicht verschwindet, ist in der Lagerreibung begründet. Da der Dampf gesättigt war, besteht angenäherte Proportionalität mit dem absoluten Druck.

c) Über die Abhängigkeit der Reibungsarbeit von der Dampfüberhitzung geben die wertvollen Versuche von Lewicki[1]) Aufschluß. Das Laufrad der von ihm untersuchten Lavalturbine besaß 220 mm Außendurchmesser und 20 mm Schaufellänge, 10 mm Schaufelbreite, rund 6 mm Teilung und lief abwechselnd in Luft, gesättigtem und überhitztem Dampfe. Die Pressung wechselte zwischen 1 kg/qcm bis 0,36 kg/qcm absolut. Zahlentafel 3 enthält eine Zusammenstellung der Ergebnisse für die unveränderliche Umlaufzahl des Rades von 20000 i. d. Min.

Zahlentafel 3.

Das Rad lief mit 20000 Umdrehungen per Min. in	Temperatur °C	Gesamte Leerlaufarbeit der Turbine bei atm. Druck PS	Radwiderstand allein: bei atm. Druck PS	bei atm. Druck β	im Vakuum von 0,36 at abs. PS	im Vakuum von 0,36 at abs. β
Luft	30	6,8	4,6	6,84	—	—
gesättigtem Dampf	—	5,5	3,3	9,40	1,5	11,35
überhitztem Dampf	123	5,10	2,85	8,67	0,95	8,28
	184	4,55	2,25	8,04	—	—
	244	4,30	2,05	8,20	—	—
	300	4,15	1,88	8,36	0,60	7,60

Die Reibungsarbeit nimmt mithin unter sonst gleichen Umständen mit wachsender Überhitzung ab.

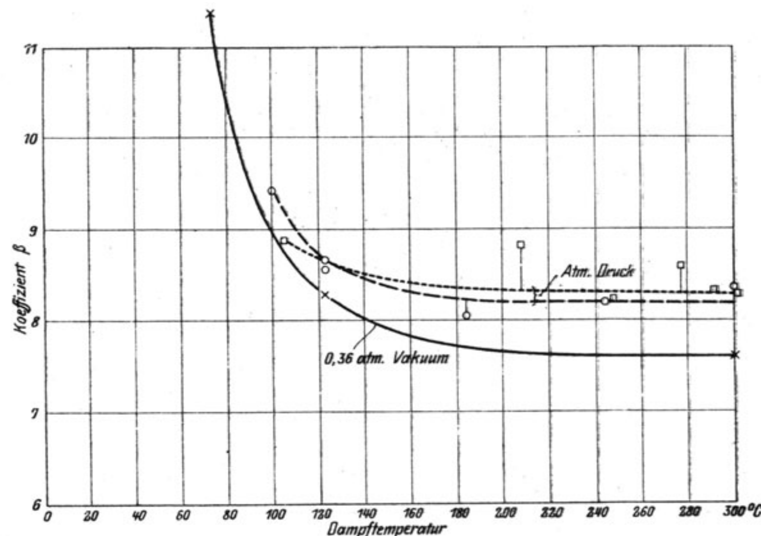


Abb. 191. Abnahme der Radreibung mit wachsender Überhitzung.

Die Werte der Vorzahl β sind mit einer dritten Versuchsreihe vereint in Abb. 191 zusammengestellt. Das erhebliche Wachsen beim Erreichen des Sättigungszustandes führt Lewicki neuerdings auf Tropfenbildung im Inneren des Gehäuses zurück.

d) Abnahme der Radreibung bei vermehrter Beaufschlagung. Den Hauptteil des Radwiderstandes macht die Ventilation der Schaufeln aus; wenn also durch die Beaufschlagung, d. h. den die Schaufeln durchströmenden Dampfstrahl selbst eine Ventilation unmöglich gemacht wird, muß der Widerstand abnehmen. Versuche über diese Frage sind von der Allgemeinen Elektrizitäts-Gesellschaft in Berlin im Jahre 1903 veranstaltet worden, welche ein Laufrad von 900 mm Durchmesser, das mit zwei Laufkränzen der Stumpfschen Art für tangentiale Beaufschlagung versehen war, untersuchen ließ. Wegen dieser heute wenig mehr gebrauchten Schaufelform beschränken wir uns auf die Mitteilung, daß das Laufrad auf der Hälfte des Umfanges von Düsen und Umkehrschaufeln beaufschlagt, während die andere

[1]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1903 u. Mitteil. über Forschungsarbeiten, Heft 12.

Hälfte durch einen breiten Ring mit etwa 1,5 mm radialem Spiel abgedeckt war. Die Messungen wurden teils mit, teils ohne Deckring ausgeführt, der großen Einfluß ausübt.

Berechnet man aus den Beobachtungen, die ich der Freundlichkeit des Herrn Direktor Dr. Lasche verdanke, die Vorzahl β unserer Überschlagsformel (3), so ergibt sich folgende Tabelle:

	Mit halbem Deckring			Ohne Deckring		
Umdrehungen in der Minute . . . n	2500	3000	3500	2500	3000	3500
I. Keine Düse offen						
Vorzahl . . . . β	1,42	1,85	2,00	3,18	3,18	3,15
II. 24 Düsen offen						
Vorzahl . . . . β	0,531	0,512	0,451	2,66	2,20	1,87

Diese Werte fügen sich recht gut in die vom Verfasser bei axialen Rädern gefundenen Vorzahlen ein. Nur bei voller Beaufschlagung und Deckring erscheint β ausnahmsweise klein.

Jasinsky[1]) stellt als Wert der Ventilationsarbeit einer 50 PS-Lavalturbine, soweit dieser von den Schaufeln allein herrührt, die Formel

$$H_v = H_z \varepsilon (\varepsilon^{-a} - 1) \text{ in kCal}$$

auf, worin

ε das Verhältnis der beaufschlagten Bogenlänge zum ganzen Umfang,
H_z den gesamten Energieverlust der Turbine bei Vollbeaufschlagung in kCal.
$a = 1{,}8 \cdot 10^{-6} u^2$ und u die Umfangsgeschwindigkeit in m/sek bedeuten.

e) Zusammenfassende Formel für die Reibungsarbeit. Wir nehmen an, daß die ganze Reibungsarbeit sich als Summe eines Gliedes, das der glatten Radscheibe entspricht, und für das Formel (4) wenigstens der Form nach maßgebend ist, darstellt und aus einem Gliede, das von den Schaufelabmessungen allein abhängt, wobei wir aber nur die Schaufellänge in die Rechnung einführen. Es zeigt sich die Form

$$N_r = (\beta_1 D^2 + \beta_2 D L^{1,5}) \frac{u^3}{10^6} \gamma \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

gut verwendbar. Hierin bedeutet

N_r die Reibungsarbeit in PS für das unverhüllte Rad in Luft,
D den mittleren Schaufeldurchmesser in m,
L die Schaufellänge in cm,
u die mittlere Umfangsgeschwindigkeit in m/sek,
γ das spezifische Gewicht der Luft in kg/cbm.

Die Vorzahlen erhalten die Werte

$$\beta_1 = 1{,}46 \qquad \beta_2 = 0{,}83.$$

Der Übergang zum eingeschlossenen Rade ergibt bedeutend herabgesetzte Reibungsarbeiten zu deren Vergleich untereinander die vereinfachte Formel (3) dienen kann. Bei 0,5 m Durchmesser ist der Kraftverbrauch der eingeschlossenen Räder nur etwa die Hälfte, bei 1 m Durchmesser nur etwa ein Viertel desjenigen in freier Luft.

Will man die Reibungsarbeit in Dampf berechnen, so ist man auf eine Umrechnung im Verhältnisse der von Lewicki gefundenen Werte angewiesen, aus dessen in Tabelle 3 mitgeteilten Zahlen die Folgerung zu ziehen wäre, daß die Reibungsarbeit in gesättigtem Dampf bei gleichem spezifischen Gewicht, gleicher Radgröße und Geschwindigkeit das 1,3 bis 1,5fache; in überhitztem Dampfe von Atmosphärendruck im Mittel das 1,2fache derjenigen in Luft; bei sehr hoher Überhitzung (300°) und Vakuum gleich groß wie in Luft ist.

Moyer empfiehlt[2]) eine Formel vollkommen gleicher Bauart, indes mit dem Ersatz von $(u/100)^3$ durch $(u/100)^{2,8}$ und den Werten $\beta_1 = 1{,}5$; $\beta_2 = 0{,}42$ für in trockenem Dampf umlaufende Räder. Das Gültigkeitsbereich unserer Formel ist $u = 60$ bis 100 m/sek. Bei letzterer Geschwindigkeit erhält Moyer nur etwa halb so große Reibungsarbeiten als wir.

Für überhitzten Dampf soll nach Moyer das betreffende spezifische Gewicht eingesetzt werden. Für nassen Dampf mit y Prozent Feuchtigkeit soll hingegen die für trockenen Dampf gültige Reibungsarbeit mit dem Beiwert $k = 1 + \frac{1}{4}\left(\frac{y}{10}\right)^2$ vermehrt werden. Daher wird beispielsweise bei $y = 20$ v. H., $k = 2$ und die Reibung verdoppelt sich.

---

[1]) Mitteil. über Forschungsarbeiten, Berlin 1908, Heft 67.

[2]) The Steam Turbine, New York 1908, ohne die Formel des Verfassers, die im Jahre 1904 aufgestellt wurde, zu erwähnen.

In welchem Maße die Leerlaufarbeit abnimmt, wenn das Rad mehr und mehr voll beaufschlagt arbeitet, muß nach den Versuchen von Lasche und Jasinsky beurteilt werden. Jedenfalls ist zu beachten, daß die in Wirbelung versetzte Dampfumgebung den in das Rad eintretenden und noch mehr den das Rad verlassenden Dampfstrom stören und Verluste verursachen wird.

Man wird daher, wenn ε der Beaufschlagungsgrad ist, das von der Schaufellänge abhängige Glied mit $(1-\varepsilon)$ vermehrt in die Gleichung einfügen, und erhält

$$N_r = \lambda[\beta_1 D^2 + \beta_2 (1-\varepsilon) D L^{1,5}] \frac{u^3}{10^6}\gamma,$$

worin λ für Heißdampf und Luft $= 1$, für Naßdampf $= 1{,}3$ ist. Bei eingehüllten Rädern kommt noch, wie erwähnt, ein Faktor $= 0{,}5$ bis $0{,}25$ hinzu.

Buckingham[1]) schlägt die Formel

$$N_r = 4{,}12\left[1 + 590\left(\frac{L}{D_1}\right)^2\right] D_1^{\,2}\frac{u_1^{\,3}}{10^6}\gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

für unverhüllte Räder vor, wo D_1 den Durchmesser an der Schaufelwurzel in m, L die Schaufellänge in m, u_1 die zu D_1 gehörende Geschwindigkeit in m/sek bedeuten.

Die Formel gibt die Versuchsergebnisse des Verfassers (Zahlentafel 1) gut wieder, bis auf Rad A, für welches N_r um 18 v. H. zu groß herauskommt. Sie hat den Vorteil, physikalisch homogen zu sein, so daß die Beiwerte zu reinen Zahlen gemacht werden können, wenn man mit $g = 9{,}81$ m/sek² vermehrt und teilt, und wenn man $N_r = 75\ L_r$ setzt, wo L_r die sekundliche Reibungsarbeit in mkg bedeutet, wodurch die Formel die Gestalt $L_r = C D_1^{\,5} n^3 \gamma/g$ annimmt. Geht man z. B. von den Einheiten kg/m/sek zu kg/cm/sek über, so erscheint L_r richtig in kg/cm/sek, statt in kg/m/sek.

Über die Reibung mehrkränziger Räder sind von der Allgem. Elektr.-Ges. Berlin Versuche veranstaltet worden. Forner faßt die Reibungsarbeit in PS für ein unbeaufschlagtes unverhülltes Rad in Dampf in die Formel

$$N_r = \beta\, 10^{-10} D_m^4 n^3 L_m \gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

zusammen, hierin bedeutet

D_m den Teilkreisdurchmesser in m	$\beta = 2{,}4$ für einkränzige Räder
L_m die mittlere Schaufellänge in cm	$= 2{,}8$,, zwei ,, ,,
n die Umlaufzahl/Min	$= 3{,}8$,, drei ,, ,,
γ das spezifische Gewicht des Dampfes in kg/cbm	$= 5{,}8$,, vier ,, ,,

Die Formel gilt für $L = 1{,}0 - 10{,}0$ cm. Sie liefert im allgemeinen kleinere Werte als unsere Formel, empfiehlt sich aber durch ihre Einfachheit [2]).

Kerr[3]) folgert aus Versuchen an einem dreikränzigen Curtisrad, daß Formel (5) den Versuch gut wiedergibt, wenn man am zweiten Glied den Faktor 1,8 anbringt.

Heinrich[4]) gibt für die Ventilationsarbeit eines unverhüllten Riemenschwungrades von 4000 mm Durchmesser 570 mm Kranzbreite die Formel

$$N_r = 19 D^2 \left(\frac{u}{100}\right)^3 \gamma \text{ in PS} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Alles in allem geht aus der Gesamtheit dieser Versuche hervor, daß die Ventilationsarbeit bei weitem nicht so bedeutend ist als man früher anzunehmen geneigt war. Sie spielt nur bei ganz kleinen Einheiten eine wesentliche Rolle. Bei Leistungen von über 1000 PS darf sie füglich ganz vernachlässigt werden.

---

[1]) Bulletin of the Bureau of Standards, Washington, vol. 10, 1913. Windage Resistance of Steam turb. Wheals.

[2]) In der 4. Aufl. wurde D_m in der 1. statt in der 4. Potenz angeführt, was an einem Schreibfehler in der mir von der A.E.G. brieflich gemachten Mitteilung der Formel lag.

[3]) Trans. Scient. Soc. Royal. Techn. College Glasgow 1912.

[4]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1913.

IV. Der Energieumsatz in der Dampfturbine.

A. Allgemeine Beziehungen.

49. Feststellung der „Wirkungsgrade".

a) Thermodynamischer Wirkungsgrad; Wärme und Brennstoffwirkungsgrad.

Man vergleicht die tatsächliche (auch „äußere" oder „effektive") Arbeit L_e, die von einer Turbine für 1 kg Dampf mit Rücksicht auf die Dampf- und Lagerreibung für einen bestimmten Anfangszustand des Dampfes und einen gegebenen Kondensatordruck erhältlich ist, mit der Arbeit L_0 einer idealen Turbine, in der keine Reibungen herrschen und in der die Energie des Dampfes vollständig, d. h. so, daß die Austrittsgeschwindigkeit bis auf Null herabsinkt, ausgenutzt wird. Dieselbe Arbeit liefert 1 kg Dampf in einer reibungslosen Kolbenmaschine ohne Drosselungen mit wärmedichten Zylindern, verschwindend kleinem schädlichen Raume und Entspannung bis auf den Kondensatordruck.

Das Verhältnis

$$\eta_e = \frac{L_e}{L_0} \text{ zugleich } = \frac{N_e}{N_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

wo unter N die Leistung in PS verstanden wird, nennen wir den thermodynamischen Wirkungsgrad, bezogen auf die effektive Leistung.

Wenn der Wärmeinhalt des Anfangszustandes mit i_0, derjenige der adiabatischen Ausdehnung auf den Kondensatordruck mit i_k' bezeichnet wird, so ist nach früherem die theoretische Arbeit in kcal für 1 kg Dampf

$$AL_0 = (i_0 - i_k') \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1a)$$

Bezeichnet G_e den Dampfverbrauch für die effektive Pferdekraft und Stunde, G_0 ebenso für die ideale Maschine, so ist, da eine Pferdekraft eine Stunde wirkend 270000 mkg oder mit $A = 1/427$ gerechnet 632,3 kcal leistet,

$$G_0 = \frac{632}{A\,L_0}, \qquad G_e = \frac{632}{A\,L_e},$$

somit ist auch

$$\eta_e = \frac{G_0}{G_e} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Der gesamte Wärmeaufwand Q_0 für 1 kg Dampf ist wesentlich größer als $A\,L_0$. Als Wärmeinhalt, der dem Dampfe einverleibt worden ist, reicht Q_0 je nach Speisewassertemperatur mehr oder weniger an i_0 heran. Der **thermische** oder besser der **„Wärmenutzungsgrad"** ist das Verhältnis

$$\eta_0 = \frac{AL}{Q_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Versteht man unter Q_b insbesondere den Heizwert der Brennstoffmenge, die für eine eff. PS/st aufgewendet worden ist, so heiße

$$\eta_b = \frac{A\,L_e}{Q_b}$$

der **„Brennstoffnutzungsgrad"**. Man bezieht den Dampf- oder den Wärmeverbrauch häufig auf die an den Klemmen des von der Turbine angetriebenen Stromerzeugers abgegebene elektrische Leistung in Kilowatt. Oder man kann gemäß den neueren Vereinbarungen die

Leistung in **„Großpferden"**, d. h. in kW zu 102 mkg/sek rechnen. Im ersten Fall unterscheiden wir alle Größen durch das Fußzeichen „*el*" und erhalten die Formeln[1])

$$G_{0\,el} = \frac{859{,}4}{A L_0}\,;\quad G_{el} = \frac{859{,}4}{A L_{el}}\,;\quad L_{el} = \eta_{dyn} L_e\,;\quad \eta_{el} = \frac{G_{0\,el}}{G_{el}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2\text{a})$$

wo η_{dyn} den Wirkungsgrad des Stromerzeugers bedeutet.

Die Bestimmung von L_0 ist mit Hilfe der Entropietafeln leicht möglich; Rateau (Annales des Mines 1897) und Mollier haben für den Dampfverbrauch (Z. 1898 und „Hütte") empirische Formeln gegeben.

b) Die „innere" Leistung. Innerer und mechanischer Wirkungsgrad.

Der Dampf liefert die Arbeit zunächst an die Turbinenschaufel gewissermaßen als „Roh"-arbeit ab, von der alle übrigen Leistungen bestritten werden müssen. Von dieser „Arbeit bzw. Leistung am Radumfang" (L_u in mkg für 1 kg Dampf, N_u in PS), wie wir sie auch nennen wollen, wird sofort die Dampfreibungsarbeit (L_r, N_r) der Räder, Trommeln und aller im Dampf bewegten Teile abgezogen. Die Reibungsarbeit wird fast ebenso unmittelbar in Wärme umgewandelt, die dem Dampfe einverleibt und so zum Teil abermals in Arbeit umgesetzt werden kann. Vielfach kann die Reibungsarbeit nicht berechnet, daher die Leistung am Radumfang nicht für sich abgetrennt werden. Den verbleibenden Arbeitsrest nennen wir, weil im Inneren der Turbine erzeugt,

„innere Dampfarbeit und Leistung" (L_i, N_i)

im Gegensatz zur effektiven Arbeit. (Die Bezeichnung Leistung am Wellenumfang würde die Lagerreibung nicht ebenso klar ausschließen wie die obige; noch besser wäre es, „innere" und „äußere" Arbeit zu unterscheiden. Vielfach hat sich leider die Bezeichnung **„indizierte"** statt innere Arbeit eingebürgert, die jedoch bei einer Turbine keine Daseinsberechtigung hat.) Hiernach ist

$$\eta_i = \frac{L_i}{L_0} = \frac{N_i}{N_0}$$

der **thermodynamische Wirkungsgrad der inneren Leistung** (kurz innerer Wirkungsgrad).

Ziehen wir von L_i, N_i

a) die Lagerreibungsarbeit,
b) die Arbeit zum Antrieb der Luftpumpe, des Reglers und anderer Zubehöre, die zur Turbine gehören,

ab, so erhalten wir die effektive, äußere, oder Nutzarbeit bzw. Leistung L_e, N_e. Da in obigen Arbeitsverlusten im großen ganzen die mechanischen Nebenleistungen und Unvollkommenheiten der Turbine zum Ausdruck kommen, nennen wir

$$\eta_{mech} = \frac{L_e}{L_i} = \frac{N_e}{N_i}$$

den **mechanischen Wirkungsgrad.**

50. Gleichung der Gesamtenergie. Ermittelung der inneren Leistung und des thermodynamischen Wirkungsgrades aus dem Dampfzustand vor dem Abschließungsventil und im Abdampfrohr.

Wir betrachten den Dampfzustand beim Eintritt (vor dem Abschließungsventil) und dem Austritt im Abdampfrohr. Die zwischen diesen Zuständen in der Turbine geleistete Arbeit ist offenbar identisch mit der oben definierten „inneren" Arbeit. Wenn man die im Abdampf-

[1]) Bei der Messung des Dampfverbrauches liefert sowohl die Wägung wie die oft bequemere Raumbestimmung letzten Endes die Maße, da die Gewichtsteine alle Vielfache des Urkilogrammes sind. In Übereinstimmung hiermit müßte man in allen Formeln der kinetischen Energie $c^2/2\,g$ immer $g = 9{,}81$ m/sek² setzen, ob die Turbine am Äquator oder am Pol arbeitet. Für diese Grenzlagen ist übrigens $g = 9{,}782$ bzw. 9,832, also nur um 0,5 v. H. verschieden. Für Berlin, München, Zürich ergibt sich mit Rücksicht auf die Breite und Meereshöhe g der Reihe nach $= 9{,}8131$; 9,8078; 9,8075, also sowieso praktisch unmerklich verschieden, insbesondere neben den Beobachtungsfehlern, für die als Grenze verträglich mindestens $= \pm 3$ v. H. vereinbart zu werden pflegt.

rohr noch vorhandene kinetische Energie, sowie Wärmeverluste nach außen in Betracht zieht, so läßt sich aus dem Energiesatz die Beziehung zwischen Wärmeinhalt und innerer Arbeit unmittelbar aufstellen.

Als Übungsbeispiel wird im nachfolgenden eine ins einzelne gehende Ableitung mitgeteilt, in der eine für Beharrungsströmungen häufig anwendbare Methode benützt wird.

Es seien in Abb. 192 A_1 und A_2 die Querschnitte des Dampfstromes einer im Beharrungszustande arbeitenden Turbine am Ein- und Austritt, mit den Zustandsgrößen p_1, v_1, u_1, w_1 und p_2, v_2, u_2, w_2 und F_1, F_2 die Querschnittsinhalte. Während des Zeitelementes dt werde zwischen den Stellen A_1 und A_2 die nach außen abgeleitete Arbeit $GLdt$ geleistet und die Wärmemenge $GQ_s dt$ (durch Leitung und Strahlung) nach außen verloren. Die Querschnitte $A_1 A_2$ verschieben sich während dieser Zeit nach $B_1 B_2$ und es strömt ein Dampfgewicht von Gdt kg durch sie hindurch. Die Gesamtenergie zu Beginn des Zeitelementes der zwischen $A_1 A_2$ eingeschlossenen Dampfmenge findet sich vor in der Gesamtenergie zu Ende des Zeitelementes und in der nach außen abgegebenen Arbeit sowie der abgeleiteten Wärmemenge. Die Gesamtenergie der zwischen A_2 und B_1 eingeschlossenen Dampfmenge ist zu Beginn und zu Ende gleich groß und fällt aus der Gleichung heraus. Indem wir zur Nutzarbeit noch diejenigen Anteile hinzufügen, die der Oberflächendruck in den sich verschiebenden Querschnitten A_1, A_2 positiv bzw. negativ geleistet hat, erhalten wir unter Vernachlässigung der auch bei vorhandenen Höhenunterschieden stets geringfügigen Arbeit der Schwerkräfte, da $A_1 B_1 = w_1 dt$; $A_2 B_2 = w_2 dt$, die Gleichung

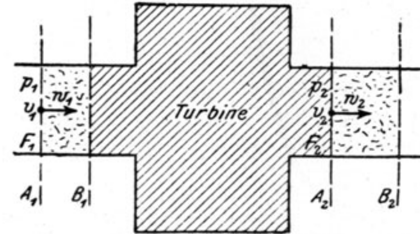


Abb. 192. Energiewandlung zwischen Zuleitung und Abdampfleitung.

$$Gdtu_1 + A\frac{G}{g}\frac{w_1^2}{2}dt = AGLdt + GQ_s dt + Gdtu_2 + A\frac{G}{g}\frac{w_2^2}{2}dt + AF_2 p_2 w_2 dt - AF_1 p_1 w_1 dt.$$

Beachtet man, daß $G = \frac{F_1 w_1}{v_1} = \frac{F_2 w_2}{v_2}$ ist und ersetzt man $F_1 w_1$, $F_2 w_2$ aus diesen Gleichungen, so folgt:

$$(u_1 + Ap_1 v_1) - (u_2 + Ap_2 v_2) = AL + Q_s + A\left(\frac{w_2^2}{2g} - \frac{w_1^2}{2g}\right)$$

oder

$$i_1 - i_2 = AL + Q_s + A\left(\frac{w_2^2}{2g} - \frac{w_1^2}{2g}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

d. h. in Worten:

Die Abnahme des Wärmeinhalts ist dem Betrage nach gleich dem Wärmewert der gewonnenen Arbeit, zuzüglich der nach außen abgeleiteten Wärme, und der Zunahme der kinetischen Energie für ein Kilogramm Dampf.

Da wir die Lagerreibung usw. nicht berücksichtigt haben, so ist diese Arbeit die innere Arbeit.

Wird der Dampfzustand durch Beobachtung von $p_1 T_1 (x_1)$ und $p_2 T_2 (x_2)$ experimentell bestimmt, $i_1 i_2$ aus diesen Angaben berechnet, Q_s, was fast immer zulässig ist, vernachlässigt, endlich $w_1 w_2$ aus G und $F_1 F_2$ bestimmt, so kann ohne jede Kraftmessung die innere Arbeit für ein Kilogramm Dampf angegeben werden.

In vielen Fällen kann auch die kinetische Energie vernachlässigt werden, und man erhält angenähert

$$AL_i = i_1 - i_2,$$

wobei, falls Überhitzung vorhanden ist und noch im Abdampfrohr anhält, zur Bestimmung von L_i die Beobachtung von zwei Manometern und zwei Thermometern hinreicht.

51. Bestimmung des Endzustandes, wenn Dampfverbrauch und Leistung bekannt sind.

Wir fügen zur effektiven Leistung N_e die Lagerreibung, den Verbrauch des Luftpumpenantriebes und anderer Zubehöre hinzu, um die innere Leistung N_i zu erhalten. War $G_e = G_{st} : N_e$ der Dampfverbrauch für die effektive PS-st, so wird

$$G_i = G_e \frac{N_e}{N_i}$$

der Verbrauch für die innere PS-st. Ist L_i die innere Arbeit, die 1 kg Dampf liefert, so haben G_i kg $G_i L_i$ mkg in der Stunde geleistet, und dies muß gleichwertig sein mit der Arbeit von 1 PS

während 1 Stunde, d. h. mit 632 kcal, daher

$$A G_i L_i = 632 \qquad \text{oder} \qquad A L_i = \frac{632}{G_i}.$$

Hiernach erhalten wir aus der Energiegleichung mit $Q_s = 0$

$$i_2 = i_1 - A L_i - A\left(\frac{w_2^2}{2g} - \frac{w_1^2}{2g}\right).$$

Die Geschwindigkeit w_2 im Abflußrohr ist indes noch unbekannt, weil vom Rauminhalt v_2 abhängig. Streng genommen muß man daher diese Gleichung versuchsweise lösen. Doch ist das letzte Glied im allgemeinen klein und darf häufig vernachlässigt werden. Bedeutet w_2 die Austrittsgeschwindigkeit aus dem letzten Laufrad, so bezieht sich auch i_2 auf denselben Ort. In jedem einzelnen Falle ist genau anzugeben, ob die Geschwindigkeit im Abdampfrohr oder am Austritt aus dem Laufrad gemeint ist.

52. Der Satz vom Antrieb („Impuls").

Neben der Gleichung der Gesamtenergie kann zur Berechnung der gewonnenen Arbeit die mechanische Grundgleichung von der Beschleunigung mit Vorteil verwendet werden. Die hierfür geeignete Form derselben ist der Satz vom Antrieb (von der Bewegungsgröße, oder wie die Physiker sagen vom „Impuls").

a) Axialturbinen.

Bei der Axialturbine treten nirgends radiale Geschwindigkeiten auf, daher findet die Kraftübertragung auf das Rad nur durch die Änderung der Umfangskomponente c_u der absoluten Geschwindigkeit statt.

Wir teilen den Inhalt eines Schaufelkanals durch zur Radachse senkrechte Schnittebenen[1]) in eine Anzahl unendlich kleiner Teile und bezeichnen die Masse eines davon mit δm (Abb. 193). Die auf dies Element wirkende Umfangskomponente des Schaufeldruckes bezeichnen wir mit dP und wenden auf die Beschleungiung (bzw. Verzögerung) desselben die Grundgleichung

$$\delta m \frac{dc_u}{dt} = \delta P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

oder

$$\delta m \cdot dc_u = \delta P \cdot dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

an. Summieren wir die gleichgeformten Ausdrücke über den Inhalt des ganzen Kanals, so kann dt als gemeinsamer Faktor heraustreten und $\Sigma \delta P$ ist $= P$ gleich dem ganzen Umfangsdrucke, den die Schaufel auf den Dampf ausübt, d. h. das Negative der die Schaufel treibenden Umfangskraft

$$-P dt = \Sigma \delta m dc_u \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Es sei nun c_u' der Wert, den c_u nach Verlauf der Zeit dt in der nächst benachbarten Lage des Elementes annimmt, so daß $dc_u = c_u' - c_u$ ist und Gl. (3) die Form

$$-P dt = \Sigma \delta m c_u' - \Sigma \delta m c_u \quad . \quad (4)$$

erhält. Auf der linken Seite steht der sog. „Antrieb" der Kraft P während der Zeit dt; auf der rechten Seite der Wert, um den die Bewegungsgröße (der Impuls) des Schaufelinhaltes während dt zugenommen hat. Während der Zeit dt verschiebt sich dieser Inhalt von AB nach $A'B'$ (Abb. 193). Die Bewegungsgröße der zwischen A' und B enthaltenen Masse ist im Beharrungszustande unverändert, eine Zunahme bedeutet das Element BB' und zwar um den Betrag dmc_{2u}. Eine Abnahme bedeutet das verschwundene Element AA' um den Betrag dmc_{1u}, wobei c_{1u}, c_{2u} sich auf den Ein- und Austritt beziehen. Man hat also

Abb. 193. Entstehung des „Antriebes"

$$\Sigma \delta m c_u' - \Sigma \delta m c_u = dm (c_{2u} - c_{1u}).$$

---

[1]) Vgl. Brauer, Turbinentheorie, S. 10.

Gl. (4) liefert hiernach

$$P = \frac{dm}{dt}(c_{1u} - c_{2u}) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

welche Formel im Beharrungszustand allgemein, unabhängig davon, ob mit Gleichdruck oder Überdruck gearbeitet wird und insbesondere unabhängig von der Schaufelform (Länge usw.) gilt. Ist M die in der Zeiteinheit durchströmende Dampfmasse, so wird

$$dm = M dt \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

welches, in Gl. (5) eingesetzt, schließlich

$$P = M(c_{1u} - c_{2u}) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

liefert. Diese Beziehung dehnen wir auf sämtliche Schaufeln aus, so daß in Formel (7) den Buchstabengrößen folgende Bedeutung beigelegt werden kann:

P die gesamte Umfangskraft,
M die gesamte in der Sekunde durchströmende Dampfmasse $= G_s/g$,
c_{1u}; c_{2u} die Werte der Umfangskomponenten der absoluten Geschwindigkeit beim Ein- und Austritt in das Laufrad bzw. aus demselben, algebraisch aufgefaßt, d. h. mit entgegengesetztem Vorzeichen eingeführt, falls sie entgegengesetzte Richtung haben.

Bedeuten w_{1u}, w_{2u} die Umfangskomponenten der relativen Geschwindigkeit, so gilt wenn man auch diese Geschwindigkeiten algebraisch einführt,

$$w_{1u} = c_{1u} - u; \qquad w_{2u} = c_{2u} - u,$$

wo u die Umfangsgeschwindigkeit bezeichnet. Man erhält

$$P = M(w_{1u} - w_{2u}) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7a)$$

kann also die Umfangskraft bei Axialturbinen nach Belieben aus den absoluten oder den relativen Geschwindigkeiten rechnen (nicht aber bei Radialturbinen).

Sind c_{1u}, c_{2u} entgegengesetzt gerichtet, was die Regel bildet, so ist in der Klammer die Summe der Absolutbeträge zu entnehmen, d. h. zu setzen

$$P = M([c_{1u}] + [c_{2u}]) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7b)$$

Die sekundliche Leistung in mkg erhalten wir als Produkt der Umfangskraft und Umfangsgeschwindigkeit

$$Pu = M(c_{1u} - c_{2u})\, u \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

Betrachten wir die Wirkung auf 1 kg des durchströmenden Dampfgewichtes, so ist

$$M = \frac{1}{g}$$

und Pu wird identisch mit der inneren Arbeit für ein Kilogramm, d. h. man erhält

$$L_i = \frac{1}{g}(c_{1u} - c_{2u})\, u \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

b) Radialturbinen.

Wir teilen den Schaufelkanal durch mit der Welle gleichachsige Zylinderflächen (Abb. 194), bezeichnen die Hebelarme der absoluten Geschwindigkeiten mit a_1, a, a_2, und erinnern an den Satz vom „Impulsmoment" oder „Drall"

$$\frac{d}{dt}(\delta m c a) = \delta \mathfrak{M} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

wo $\delta \mathfrak{M}$ das Moment der gesamten auf das Massenelement δm wirkenden Kräfte mit Bezug auf das Wellenmittel ist.

Es ist dringend zu raten, sich die einfache Herleitung dieses Satzes gegenwärtig zu halten. Es sei c in Abb. 195 die Geschwindigkeit eines Massenpunktes m, der in der Zeit Δt den Weg AA' in Richtung von c zurücklegt. In A' sei die Geschwindigkeit c', daher Δc der Zuwachs, in dessen Richtung die Resultierende K aller Kräfte wirkt, und nach dem Grundgesetz von Newton, der Formel $K = \lim\limits_{\Delta t = 0} \frac{m \cdot \Delta c}{\Delta t}$ genügt. Nun

ist c' die Resultierende von c und Δc, daher gilt wie bei Kräften die Momentengleichung

$$a'c' = ac + a_0 \Delta c \quad \text{und hieraus} \quad \frac{ma'c' - mac}{\Delta t} = a_0 m \frac{\Delta c}{\Delta t}.$$

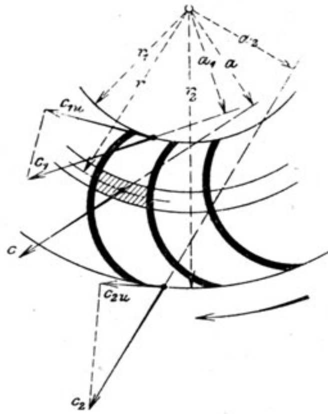


Abb. 194.

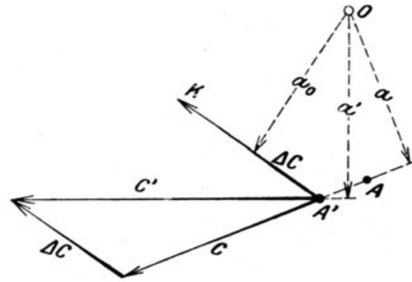


Abb. 195.

Das „Impulsmoment".

Gehen wir zur Grenze $\Delta t = 0$ über, so erhalten wir

$$\frac{d}{dt}(mca) = a_0 K$$

oder in Worten: die Zunahme des Impulsmomentes (d. h. des Momentes der Bewegungsgröße mc) ist gleich dem Moment der resultierenden Kraft.

Gl. (10) schreiben wir in der Form

$$d(\delta mca) = \delta \mathfrak{M} dt$$

und summieren erstens über den Inhalt eines Schaufelkanales und dann über sämtliche Kanäle des Rades. Durch ähnliche Überlegungen wie unter a) gelangen wir bei Beharrungszustand zur Formel

$$\frac{dm}{dt}(c_1 a_1 - c_2 a_2) = \mathfrak{M} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

worin jetzt $\mathfrak{M}$ das von dem gesamten im Rade enthaltenen Flüssigkeitsinhalt auf das Rad ausgeübte Drehmoment, dm die in das ganze Rad während der Zeit dt eintretende (und austretende) Flüssigkeitsmasse bedeuten.

Es sei wieder M die sekundliche Masse, so ist $dm = M\,dt$, und indem wir 1 kg sekundlich durchfließendes Gewicht betrachten, $M = 1/g$. Ferner können wir statt des Momentes der ganzen Geschwindigkeit dasjenige ihrer Umfangskomponente setzen (weil das Moment der Radialkomponente für den Mittelpunkt verschwindet) und erhalten

$$\mathfrak{M} = (r_1 c_{1u} - r_2 c_{2u}) \frac{1}{g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

hieraus die sekundliche Leistung gleich $\mathfrak{M}\omega$, identisch mit der absoluten Arbeit für 1 kg durchströmendes Dampfgewicht

$$L_i = \mathfrak{M}\omega,$$

wo ω die Winkelgeschwindigkeit bezeichnet. Oder endlich mit $u_1 = r_1 \omega$, $u_2 = r_2 \omega$ als Umfangsgeschwindigkeiten

$$L_i = \mathfrak{M}\omega = \frac{1}{g}(u_1 c_{1u} - u_2 c_{2u}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

die Geschwindigkeiten algebraisch, d. h. in gleichem Umfangssinn positiv gerechnet. Hier ist ein Ersatz der absoluten durch die relativen Geschwindigkeiten nicht zulässig.

Formel (13) gilt auch für beliebig gegen die Achse verschränkte Strömungsrichtungen, da die axialen Geschwindigkeiten keinen Einfluß auf die Umfangskraft besitzen.

53. Der axiale Druck.

Es bezeichne für ein beliebiges Turbinensystem (Abb. 196) c_{1a} die nach der Achsenrichtung gemessene Komponente der absoluten Eintrittsgeschwindigkeit ins Laufrad; c_{2a} dasselbe für den Austritt. Ferner p_1, p_2 ebendort den absoluten Druck; f_{1a}, f_{2a} die Projektion der Eintritts und Austrittsfläche am Laufrad auf eine zur Achse senkrechte Ebene. Die Kraft, die von den Laufschaufeln auf den Laufradinhalt in der Richtung von c_{1a} ausgeübt wird, heiße P_a'. Durch ähnliche Betrachtungen wie oben finden wir als Zunahme der Bewegungsgröße im Beharrungszustand

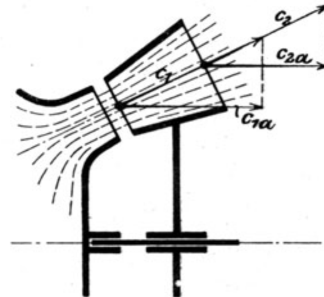


Abb. 196. Rückdruck bei schrägem Austritt.

$$P_a' + f_{1a}p_1 - f_{2a}p_2 = \frac{dm}{dt}(c_{2a} - c_{1a}).$$

Der Druck, den die Strömung auf das Laufrad ausübt, ist die Gegenkraft von P_a'. Wünschen wir die axiale Laufradbelastung im Sinne von c_{1a} zu kennen, so ist diese $P_a = - P_a'$. Daher wird mit $dm/dt = M =$ der unveränderlichen sekundlichen Masse

$$P_a = f_{1a}p_1 - f_{2a}p_2 - M(c_{2a} - c_{1a}).$$

War die Änderung der axialen Geschwindigkeit klein, so hängt P_a in der Hauptsache vom Überdruck im Spalt ab. Für die Gleichdruckturbine ist der Überdruck $= 0$, und das zweite Glied meist ohne Bedeutung, daher P_a klein.

Bei der **Überdruckturbine** kommt als Hauptteil des Achsendruckes diejenige Kraft in Betracht, die der Dampf auf die **freien Ringflächen** beim Übergang von einem Trommelabsatz zum anderen und auf eventuell freiliegende Trommelstirnflächen ausübt. Um diesen Druck aufzuheben, versieht man die Überdruckturbine mit **Entlastungskolben**, die später besprochen werden. Die Berechnung derselben ist, sobald man über ihre Anordnung schlüssig geworden ist, sehr einfach, weil, wie wir später begründen, die Pressung in irgendeinem Punkte des Turbineninnern bei der allgemein üblichen Regelung der Leistung durch Drosselung dem Anfangsdrucke ungefähr verhältnisgleich ist. Wir berechnen die Flächeninhalte der Kolben so, daß bei der Normalleistung die axialen Kräfte sich das Gleichgewicht halten; aus obigem Satz folgt, daß **dieses Gleichgewicht bei allen Belastungsgrößen erhalten bleibt.** Kleine Unterschiede (die beispielsweise schon deshalb auftauchen müssen, weil wir das Vakuum nicht der Belastung proportional ändern, noch mehr also bei Auspuffturbinen) werden durch Kammlager oder Spurlager mit Drucköl aufgehoben.

Welches Drehmoment beansprucht den Rahmen einer Turbine?

In Abb. 197 ist schematisch ein Turbinengehäuse mit Düsen, ein Laufrad und eine Dynamomaschine mit Polanker dargestellt. Auf das Laufrad werde im ganzen die Umfangskraft P_u ausgeübt; auf das Gehäuse der Turbine wirke P_u', auf den Dynamoanker Q_u, auf den Polring Q_u'.

Es gibt viele Turbinen, deren Rahmen ohne Befestigung auf dem Fundamente aufruht; ist also eine Befestigung überhaupt überflüssig? Man würde die Frage bejahen, wenn man sich den Zusammenhang zwischen P_u, P_u' als gleich vorstellte wie den zwischen Q_u, Q_u'.

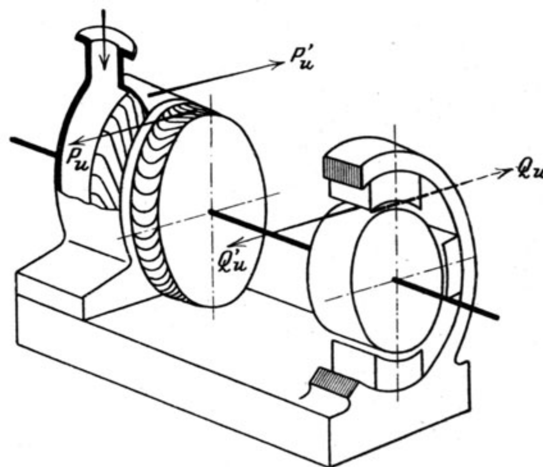


Abb. 197. Auf das Fundament wirkende Kräfte.

Die letzteren Kräfte sind unbedingt entgegengesetzt gleich, weil im Sinne Newtons die eine die „Aktion", die andere die „Reaktion" bildet; nicht aber $P_u P_u'$. Um dies einzusehen, braucht man nur zu überlegen, was geschähe, wenn alle Laufschaufeln brechen: P_u, Q_u, Q_u' verschwinden, P_u' bleibt.

Daß dann die Turbine (wenn sie zu leicht ist) kippen müßte, ist noch keine ausgemachte Sache, sondern hängt davon ab, ob der Drall $M c_{1u} r$ (mit r als Radhalbmesser), den der Dampf erlangt hat, in einem angeschlossenen Kondensator **vernichtet**, wird, oder durch ein kurzes weites Auspuffrohr **ins Freie entweichen** kann. Im ersteren Falle wird die heftig rotierende Dampfmenge einen Teil ihres Dralles zunächst durch die Reibung gegen die Gehäusewand, sodann aber, und auch den letzten Rest im Innern des Kondensators

durch die Reibung gegen die Rohrwände wie auch nach der Verflüssigung durch das zähe Anhaften der Flüssigkeit an den kondensierenden Wänden abgeben.

So wird schließlich der erzeugte Drall vollkommen an Konstruktionsteile, die mit dem Gestell fest verbunden zu sein pflegen, als Drehmoment abgesetzt und ein Gleichgewicht der inneren Kräfte hergestellt, das eine Befestigung des Rahmens theoretisch überflüssig macht. Wenn hingegen eine kurze und weite Auspuffleitung ins Freie vorhanden ist, so bleibt nur die Wandreibung als gegenwirkendes Moment übrig. Es sind Fälle denkbar, wo der größere Teil des Dralles in die freie Atmosphäre entweicht und erst in dieser durch Wirbelerzeugung vernichtet wird. Dann wäre der Rahmen unter Umständen einem erheblichen Kippmoment ausgesetzt.

54. Die relative Bewegung[1]).

Ein materieller Punkt A (Abb. 198) sei durch einen Kanal gezwungen, sich auf der „relativen Bahn" AC' zu bewegen und soll im Zeitelement dt bei ruhendem Kanal, falls die relative Geschwindigkeit unverändert bliebe, nach C' gelangen. Der Kanal selbst erhält eine translatorische Bewegung, die ihn in der Zeit dt nach B_2C_2 führt, und eine Drehung um die „Momentanachse", die ihn in die Lage B_2C_3 schwenkt.

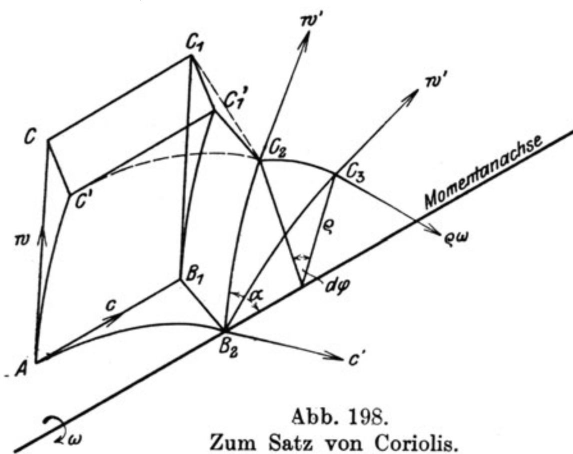


Abb. 198.
Zum Satz von Coriolis.

Wenn c die absolute Geschwindigkeit des mit A zur Zeit $t = 0$ zusammenfallenden „System"-, d. h. Kanalpunktes,

w die Geschwindigkeit der relativen Bewegung,

ω die Winkelgeschwindigkeit der Drehung bedeuten, so ist

$ds = AC' = B_2C_2 = w\,dt$ der im Zeitelemente dt zurückgelegte relative Weg,

$d\varphi = \omega\,dt$ die Verdrehung des Kanales.

B_1B_2 und CC' stellen die Abweichungen je der absoluten, bzw. der relativen Bewegung von den dem Beharrungsvermögen entsprechenden geradlinigen Bahnen dar. Jede dieser Abweichungen ist der elementare Weg, den unser Punkt mit dem Mittelwert der während dt herrschenden Beschleunigung in ihrer Richtung zurückgelegt hat, also = Beschl. $\times\, dt^2/2$. Durch paralleles Verschieben des Kanals in die Lage B_1C_1' überzeugt man sich, daß die der translatorischen Bewegung entsprechende Gesamtabweichung C_1C_2 die (geometrische) Resultierende aus den Einzelverschiebungen B_1B_2 und $C_1C_1' = CC'$ ist. Demnach gilt der Satz:

Die Gesamtbeschleunigung, die der translatorischen Bewegung entspricht, ist die geometrische Summe der absoluten Beschleunigung des mit dem bewegten Punkte momentan zusammenfallenden „System-" d. h. Kanalraumpunktes und der relativen Beschleunigung (d. h. derjenigen Beschleunigung, die der Punkt bei gleicher relativer Bahn und Geschwindigkeit im ruhenden Kanal besitzen würde).

Infolge der Drehung tritt hierauf noch das Wegelement C_2C_3 hinzu, dessen Länge $= \varrho\,d\varphi = w\,dt \sin\alpha \cdot \omega\,dt$ ist, und das einer Beschleunigung p_ω entspricht, die sich nach Gleichung

$$p_\omega \frac{dt^2}{2} = w\,dt \sin\alpha\,\omega\,dt \qquad \text{zu} \qquad p_\omega = 2w\,\omega \sin\alpha$$

berechnet und „Coriolisbeschleunigung" genannt wird. $w \sin\alpha$ ist die Projektion der relativen Geschwindigkeit auf eine zur Momentanachse senkrechte Ebene. Bezeichnen wir sie mit w'', so wird die Richtung von p_ω gewonnen, indem wir w'' im Sinne von ω um 90^0 verdrehen.

Es wird für den Studierenden Interesse haben, zu bemerken, daß die Coriolisbeschleunigung zu gleichen Teilen aus zwei gänzlich verschiedenen Quellen stammt. Die relative Geschwindigkeit in der Lage C_2 ist nämlich w', in C_3 ebenfalls w', allein um einen gewissen Winkel verdreht, was den ersten Geschwindigkeits-

[1]) Das Theorem über die relative Beschleunigung ist für den Turbinenkonstrukteur sehr wichtig. Die Darstellung im Text lehnt sich an A. Ritters Analytische Mechanik an, welches Buch seiner anschaulichen Methoden wegen auch heute empfohlen werden darf.

zuwachs ergibt; als zweiter tritt noch die absolute Komponente $\varrho\omega$ hinzu. Tragen wir diese Geschwindigkeiten vom Punkte 0 (Abb. 199) samt der Momentanachse parallel ab, so ist der geometrische Zuwachs von w':

$$\Delta w' = w' \sin\alpha \cdot d\varphi = w' \sin\alpha \cdot \omega dt\,,$$

und für $\varrho\omega$ gilt:

$$\varrho\omega = w dt \sin\alpha \cdot \omega = w \sin\alpha \cdot \omega dt.$$

Beim Grenzübergang fallen w und w' zusammen und die Beschleunigung $(\Delta w' + \varrho\omega):dt$ stimmt überein mit $p\omega$, das hiernach **einerseits durch die Drehung der Relativgeschwindigkeit, anderseits durch das hinzutretende Element der Drehungsgeschwindigkeit erzeugt wird.**

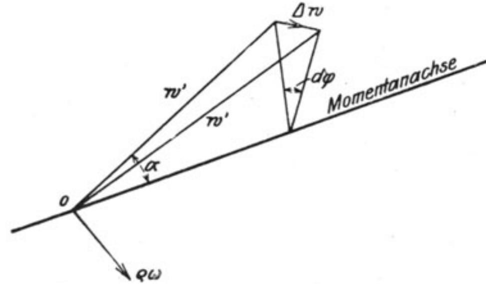


Abb. 199. Herkunft der Coriolis-Kraft.

Bezeichnen wir die relative Beschleunigung mit p_r, die absolute Beschleunigung des „Systempunktes" A mit p_s, und die absolute Beschleunigung des Massenpunktes mit p_a, so gilt die Formel

$$p_a = \text{Result.}\,(p_r, p_s, p_\omega),$$

aus der p_r, wie man leicht einsieht, als

$$p_r = \text{Result.}\,(p_a, -p_s, -p_\omega)$$

gewonnen wird. Die resultierende aller auf den Massenpunkt wirkende Kräfte muß nach dem Grundgesetz der Bewegung $= mp_a$ sein und in die Richtung von p_a fallen. Multiplizieren wir alle Glieder im Ausdruck von p_r mit m, so entsteht

$$m p_r = \text{Result.}\,(m p_a; -m p_s; -m p_\omega)\,.$$

Hierin kann man auch den Produkten $-mp_s$; $-mp_w$ den Sinn von Kräften unterlegen, darf aber nicht vergessen, daß es sich dann nur um scheinbare Kräfte handelt. mp_r wäre eine Kraft, die im ruhenden Raum dem freien Massenpunkte dieselbe Beschleunigung erteilt, die ihm durch den Kanal als relative Beschleunigung aufgezwungen wird. Diese Kraft erhält man gemäß der aufgestellten Beziehung, indem man zur wirklichen Gesamtkraft mp_a die scheinbaren Kräfte $-mp_s$ und $-mp_\omega$ hinzufügt. Denkt man sich diese **„Zusatzkräfte" der relativen Bewegung** in der Tat angebracht, so **kann man die relative Bewegung so behandeln, als ob sie eine absolute wäre.**

Auf der anderen Seite können diese scheinbaren Kräfte benutzt werden, um die sehr realen Drücke zu ermitteln, welche die den Massenpunkt führenden Kanalwände erleiden. Die Gesamtkraft mp_a ist ebensogut die Resultierende aus mp_r, mp_s, mp_ω, als wie die Resultierende aus den gegebenen äußeren Kräften (z. B. der Schwere) und den Gegendrücken der Führungen. Bezeichnen wir die Resultierende der äußeren Kräfte mit P_a, die der inneren mit P_i, so ist mithin

$$m p_a = \text{Result.}\,(P_a, P_i).$$

Da aber der auf die Führungen ausgeübte Druck das Negative von P_i ist, so erhalten wir

$$-P_i = \text{Result.}\,(P_a, -m p_a) = \text{Result.}\,(P_a, -m p_r, -m p_s, -m p_\omega).$$

Betrachten wir die relative Bewegung eines freien Massenpunktes, so gibt es keine Führungen, also auch kein P_i, dann ist eben $(P_a) = (m p_a)$.

Man kann auf die relative Bewegung auch den Energiesatz anwenden, und hat dabei zu beachten, daß die „Wärmegleichung" unverändert gültig bleibt, während bei der lebendigen Kraft die Arbeiten der Zusatzkräfte zu berücksichtigen sind. Aus diesen beiden geht dann der Satz für die Gesamtenergie in folgender besonderen Form hervor:

Die Zunahme der inneren und der kinetischen Energie der relativen Bewegung ist gleich der zugeführten Wärme und der (mit den relativen Verschiebungen gerechneten) Arbeit der wirklichen Kräfte und der scheinbaren (Zusatz-)Kräfte.

Von den letzteren steht $-mp_\omega$ stets senkrecht auf der relativen Bahn, daher ist ihre Arbeit stets $= 0$.

Bei gleichförmiger Drehung ist $-mp_s = -mr\omega^2$ gleich der nach außen gerichteten Zentripetalkraft, die wir Fliehkraft nennen. Für die im Beharrungszustand arbeitende Turbine ist daher nur die (scheinbare) Arbeit der Fliehkräfte für die relative Bewegung in Betracht zu ziehen.

Wenn unser System (der Kanal) mit unveränderlicher Geschwindigkeit geradlinig fortschreitet, so sind die Zusatzkräfte gleich Null.

Endlich haben wir den wichtigen Satz:

Findet ein Verlust, d. h. Umwandlung von relativer kinetischer Energie in Wärme statt, so ist dieser Verlust zugleich absolut, denn es ist ein Teil einer geordneten Bewegung in ungeordnete übergegangen, die ungeordnet bleibt, ob wir sie auf ein bewegliches oder festes Koordinatensystem beziehen.

55. Die hauptsächlichen Turbinenabarten.

Wir können die Turbinensysteme in verschiedene Arten einteilen, je nach dem Vorherrschen folgender Hauptmerkmale:

a) Nach der Strömungsrichtung des Dampfes

1. Axialturbinen, wenn die Strömung auf mit der Welle koaxialen Zylinderflächen oder auf von diesen wenig abweichenden Umdrehungsflächen vor sich geht.
2. Radialturbinen, wenn die Strömung in zur Achse senkrechten Ebenen oder auf von diesen wenig abweichenden Umdrehungsflächen vor sich geht.
3. Gemischte Systeme, wenn die Strömung auf allgemeineren Umdrehungsflächen vor sich geht.

b) Nach der Größe des Druckes im „Spalt“ zwischen Leit- und Laufrad

1. Überdruckturbinen, wenn der Druck im Spalt größer ist als beim Austritt aus dem Laufrade.
2. Gleichdruckturbinen, wenn beide Drucke gleich sind. Sofern man hierbei Laufkanäle mit stetsgleichem Querschnitt anwendet, muß die Eintrittsgeschwindigkeit über

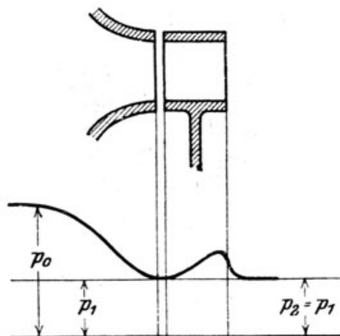


Abb. 200. Gleichdruckturbine.

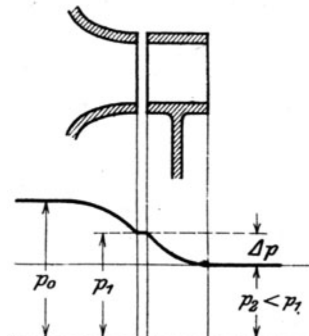


Abb. 201. Überdruckturbine.

der Schallgeschwindigkeit liegen, und man erhält eine im Sinne der Strömung zunehmende Verdichtung bis an das Schaufelende (Abb. 200). Bei Unterschallgeschwindigkeit muß der Querschnitt zunehmen; bleibt er unveränderlich, so würde sich ein Überdruck einstellen (Abb. 201). Ist dieser genügend klein, so reihen wir die Turbine dennoch unter die Gleichdruckturbinen ein.

Wird die Schaufel vom Strahl nicht ganz ausgefüllt, d. h. löst sich der Strahl ab, so könnte man von **„Freistrahl“**turbinen sprechen, die aber in diesem Sinne beim Dampfturbinenbau nicht vorkommen, denn sie wären unökonomisch. Bei Schaufeln von überall gleichem Querschnitt spricht man wohl auch von „Grenzturbinen“, die aber mit den hydraulischen Turbinen gleichen Namens nichts gemein haben.

3. Unterdruckturbinen, wenn der Spaltdruck kleiner ist als der Druck am Austritt aus dem Laufrade, daher Verdichtung in der Laufschaufel.

Prof. Escher, Zürich, schlägt die Bezeichnungen „Stauturbine“ und „staufreie Turbine“ an Stelle von 1. und 2. vor, die für hydraulische Turbinen durch ihre Kürze sympathisch erscheinen, bei Dampfturbinen indes für Klasse 3 versagen.

Verfehlt ist der Vorschlag von Gentsch, 1. und 2. durch „Spannungs-“ und „Geschwindigkeitsturbinen“ zu ersetzen, denn auch die Überdruckturbine wirkt teilweise durch den Geschwindigkeits-Ablenkungsdruck.

c) Nach dem Verhältnis der beaufschlagten Bogenlänge zum ganzen Umfang.
   1. Voll beaufschlagte Turbinen.
   2. Teilweise (partiell) beaufschlagte Turbinen.

d) Nach der Zahl der hintereinander geschalteten Turbinen
   1. Einstufige Turbinen.
   2. Mehr- oder vielstufige Turbinen, je nachdem bloß einige oder viele Räder vorhanden sind.

e) Falls der Druck von Turbine zu Turbine in Stufen abnimmt, entsteht
   1. die Druckstufenturbine.
   Falls die Pressung (soweit erreichbar) unverändert bleibt und die Strömungsenergie in Stufen ausgenutzt wird:
   2. die Turbine mit Geschwindigkeitsstufen.

f) Die mehrstufigen Turbinen können so gebaut sein, daß die Auslaßgeschwindigkeit eines Laufrades (durch Wirbelung) verloren gegeben wird oder nicht. In letzterem Fall kann die Zustandsänderung im nächstbenachbarten Leitrad unter stetiger Druckabnahme erfolgen, oder man kann die kinetische Austrittsenergie durch Zwischenschaltung eines Diffusors wieder in Druckenergie umsetzen. Eine besondere Bezeichnung haben diese Bauarten nicht erhalten; die letzterwähnte könnte „Turbine mit Zwischenverdichtung" genannt werden.

g) Da der Dampf auf das Leitrad einen Ablenkungs- (oder Reaktions-) Druck ausübt, genau wie auf das Laufrad, sind Vorschläge gemacht worden, das Leitrad ebenfalls umlaufen zu lassen, selbstverständlich im entgegengesetzten Sinne. Die Dampfausnutzung hängt nur von der relativen Geschwindigkeit zwischen Leit- und Laufrad ab; daher könnte in diesem Fall die absolute Umfangsgeschwindigkeit ermäßigt werden. Diese Bauart nennen wir „Gegenlaufturbine".

h) Eine beliebige Verbindung der unter a) bis g) aufgeführten Arbeitsverfahren und Bauarten kann in einer Turbine vereinigt werden. So entstehen die ungewöhnlich mannigfaltigen gemischten Systeme, deren Hauptvertreter im praktischen Teil besprochen werden sollen.

56. Bezeichnungen; Gleichung der Stetigkeit, bezogen auf den axialen (oder „Meridian"-) Reinquerschnitt. Theoretische und wirkliche Schaufellänge.

Es bezeichnet im folgenden[1])

α_1 den Austrittswinkel der Leitschaufel,
c_1 die absolute Austrittsgeschwindigkeit aus der Leitschaufel,
β_1 den Eintrittswinkel in die Laufschaufel,
w_1 die relative Eintrittsgeschwindigkeit in die Laufschaufel,
β_2 den Austrittswinkel der Laufschaufel,
w_2 die relative Austrittsgeschwindigkeit der Laufschaufel,
c_2 die absolute Austrittsgeschwindigkeit der Laufschaufel,
$u_1 u_2$ die Umfangsgeschwindigkeit am Ein- und Austritt der Laufschaufel,
$r_1 r_2$ die Halbmesser der Laufschaufel,
$c_u c_a c_r$ die rechtwinkligen Komponenten der absoluten Geschwindigkeit in Richtung des Umfanges, der Achse und des Halbmessers,
$w_u w_a w_r$ dasselbe für die relative Geschwindigkeit.

Liegt die Stromlinie eines Teilchens auf einer allgemeineren Umdrehungsfläche, deren Gestalt durch ihren Meridian bestimmt ist, so findet eine Zerlegung Anwendung in

$c_u c_m c_n$ die rechtwinkligen Komponenten nach dem Umfang (d. h. u) der Tangente und der Normale an den Meridian.

Die Schaufelkanäle werden bei der radialen Turbine durch Zylinderflächen mit zur Achse parallelen Erzeugenden begrenzt. Bei der axialen Turbine sind es streng genommen Regelflächen mit zur Achse senk-

[1]) Gemäß den Vereinbarungen in Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1906, S. 1993.

rechten Erzeugenden, in der praktischen Ausführung meist auch Zylinderflächen, von welchen etwa die Austrittskante radial gestellt wird.

Die Schaufellänge a bedeutet bei radialen Turbinen die zur Achse parallele Abmessung des Kanals, bei axialen die radiale Länge.

Die Strömungsquerschnitte werden als Normalflächen der nach Schätzung eingezeichneten Stromlinien gerechnet. Für die Radialturbine machen wir die Annahme, daß der Strahl überall unter gleichem Winkel austritt. Daher wäre in Abb. 202 die gesamte Weite des dargestellten Kanals $e = \Sigma \delta e$ oder $= t_1 \sin \alpha_1$. Somit ist der Querschnitt für einen Kanal $= t_1 \sin \alpha_1 \cdot a$ und für das ganze Rad

$$F_1 = \Sigma a t_1 \sin \alpha_1 = a \sin \alpha_1 \Sigma t_1 = a \sin \alpha_1 \, 2\pi r_1 \, (t_1/t),$$

wo t_1 die nutzbare, t die gesamte Teilung bedeutet.

Abb. 202. Querschnittberechnung.

Ist die Schaufel in eine scharfe Kante ausgezogen, so wird $t_1 = t$.

Statt mit der wirklichen Länge, rechnet man mit Vorteil mit der theoretischen, die unendlich dünnen Schaufeln entspricht. Die wirkliche Schaufellänge a ist dann im Verhältnisse von t/t_1 größer als die theoretische a', damit derselbe Querschnitt entstehe. Ist also beispielsweise F_1 gegeben, so setzt man zunächst die Gleichung

$$F_1 = 2\pi r_1 a_1' \sin \alpha_1$$

an und berechnet hieraus die theoretische Schaufellänge a_1'. Nachdem über die Schaufeldicke konstruktiv entschieden worden ist, erhält die wirkliche Schaufel die Länge

$$a_1 = a_1' \frac{t}{t_1}.$$

In gleicher Weise werden behandelt die Querschnitte

F am Eintritt ins Leitrad,
F_1' „ „ „ Laufrad,
F_2 „ Austritt aus dem Laufrad.

Empfehlenswert ist die Benutzung des „axialen", bzw. „radialen" Reinquerschnitts, deren Bedeutung durch folgendes erklärt wird:

Für den in Abb. 202 beispielsweise dargestellten Austritt aus einem radialen Leitrad sei F_1 bestimmt worden durch Angabe des sekundlichen Gewichtes G_{sek}, des spezifischen Volumens v und der Geschwindigkeit c_1 mittels der Durchflußgleichung

$$G_{sek} v = F_1 c_1.$$

Bilden wir die radiale Komponente $c_{r1} = c_1 \sin \alpha_1$, so wird $f_1 c_1 = f_1 c_{r1} / \sin \alpha_1$. Bei unendlich dünnen Schaufeln ist aber

$$\frac{F_1}{\sin \alpha} = 2\pi r_1 a_1' = F_r,$$

und diese Größe nennen wir den radialen Reinquerschnitt (genauer: die Summe der Querschnitts-Projektionen auf einen Zylindermantel vom Halbmesser r_1). Mit dieser Bezeichnung lautet lautet die Gleichung der Stetigkeit

$$G_{sek} v = F_{1r} c_{1r}.$$

Für die axiale Turbine wird ganz ähnlich

$$F_{1a} = 2\pi r a_1' \quad \text{und} \quad c_{1a} = c_1 \sin \alpha_1,$$

wobei r den mittleren Halbmesser des Kanals bedeutet, und es gilt

$$G_{sek} v = F_{1a} c_{1a},$$

oder in Worten:

Die Gleichung der Stetigkeit kann entweder auf die wirklichen Querschnitte und die wirklichen Geschwindigkeiten, oder auf den axialen bzw. radialen Reinquerschnitt und die axiale bzw. radiale Geschwindigkeitskomponente bezogen werden.

Im allgemeinsten Fall würde man die Meridiangeschwindigkeit und die Projektion des Kanalquerschnitts auf den Normalenkegel längs eines Breitenkreises nehmen.

Aus der so umgeformten Kontinuitätsgleichung wird zunächst f_{1a} oder f_{1r}, und aus diesen wieder die theoretische Schaufellänge berechnet und korrigiert wie oben.

Teilweise Beaufschlagung.

Ist die Turbine teilweise beaufschlagt, so wird bei einem Neuentwurf zunächst so gerechnet, als ob sie voll beaufschlagt wäre. Dann verlängert man die Schaufeln auf ein praktisch befriedigendes Maß und verkleinert im umgekehrten Verhältnis den Beaufschlagungsgrad. Wenn also die Vollbeaufschlagung z. B. 5 mm Schaufellänge liefert und wir aus praktischen Gründen 15 fordern, so wird $^1/_3$ des Umfanges beaufschlagt, usf.

B. Axialturbinen.

Im folgenden betrachten wir alle Fragen, die mit dem Energieumsatz zusammenhängen, in erster Linie mit Rücksicht auf den Neuentwurf einer Turbine. Für diesen wird meist die Leistung N_e sowie der Anfangszustand $p_1 v_1 T_1$ (x_1) und der Kondensatordruck p_k vorgeschrieben sein. Konstruktive und wirtschaftliche Erwägungen führen, wie wir später erörtern, zur Wahl der Umlaufzahl n (i. d. Min.). und es handelt sich um die Ermittelung der übrigen Abmessungen, wie auch des voraussichtlichen Dampfverbrauches.

Die umgekehrte Aufgabe, auf dem Wege der Rechnung anzugeben, wie sich unter bestimmten Verhältnissen eine schon ausgeführte Turbine verhalten, wie groß ihr Dampfverbrauch sein werde, ist wesentlich schwieriger und wird unter D. behandelt werden.

57. Die einstufige Gleichdruckturbine.

1. Die Leitvorrichtung.

Liegt das Druckverhältnis unter dem kritischen, so verwenden wir erweiterte Kanäle oder eigentliche „Düsen", die nach dem früher erläuterten Verfahren für die zunächst schätzungsweise angenommene Dampfmenge berechnet werden. Düsen mit rechteckigem Endquerschnitt werden bevorzugt und in Gruppen mit soweit als möglich zusammenhängendem Dampfstrahl dicht zusammengestellt. Die Höhe der Endquerschnitte ist durch die Schaufellänge gegeben, die auch bedingen wird, ob wir volle oder teilweise Beaufschlagung anwenden.

Je kleiner der Neigungswinkel α_1, um so besser ist der Wirkungsgrad, so daß nur konstruktive Gründe, der rasch zunehmende Einfluß der Schaufelstärke, uns eine Grenze setzen. Wir finden α_1 bis auf 10° verkleinert; im allgemeinen indessen liegt sein Wert zwischen etwa 14 und 25°.

Ist $i_0 - i_k' = A L_0$ das theoretische Wärmegefälle, so ist mit vernachlässigter Anfangsgeschwindigkeit

$$c_{th} = \sqrt{2 g L_0} \quad \dots \dots \dots \dots \quad (1)$$

die theoretische Ausflußgeschwindigkeit. Der kinetische Verlust ist nach früherem

$$A Z_1 = \zeta_1 (i_0 - i_k') = \zeta_1 A L_0 \quad \dots \dots \dots \dots \quad (2)$$

und die wirkliche Ausflußgeschwindigkeit

$$c_1 = \sqrt{\frac{2g}{A}(1-\zeta_1)(i_0 - i_k')} \quad \text{oder} = \varphi c_{th},$$

wobei

$$\varphi = 0{,}975 - 0{,}92; \qquad \zeta_1 = 0{,}05 - 0{,}15$$

für kurze bzw. lange Düsen zu setzen ist.

Der kinetische Energieverlust in der Leitschaufel kann auch in der Form

$$Z_1 = \frac{c_{th}^2 - c_1^2}{2g} = (1-\varphi^2)\frac{c_{th}^2}{2g} = \zeta_1 \frac{c_{th}^2}{2g} \quad \dots \dots \dots \quad (2a)$$

geschrieben werden.

Nun bilden wir die relative Eintrittsgeschwindigkeit ins Laufrad w_1, und zwar als Resultierende aus $+c_1$ und $-u$ (Abb. 206) (statt der nur für Anfänger anschaulichereren „Zerlegung" von c_1 in u und w_1), und beachten, daß diese die Relativbewegung des Dampfes in dem Zustande, in dem er sich in der Düsenmündung befindet, angibt.

2. Übertritt vom Leitrad ins Laufrad; Saugwirkung.

Tritt der Dampfstrahl aus der Leitvorrichtung ins Freie, so bleibt, wie der Augenschein lehrt, zwischen je zwei Strahlen ein milchigweißer, der Schaufeldicke entsprechender Zwischenraum. Ist ein Laufrad vorgeschaltet, so würde die Schaufel A (Abb. 203), indem sie in die Stellungen B, C fortrückt, die Bildung des punktiert angedeuteten Hohlraumes D veranlassen, der vom Spalte aus der Drehung folgend, mit entsprechender Geschwindigkeit ausgefüllt werden müßte. Dies bedingt aber **Nachsaugen von Dampf aus dem Spalte.** Ist w_1 kleiner als die Schallgeschwindigkeit, so wird vor der Laufschaufelkante ein Wirbelraum x in Abb. 204 entstehen.

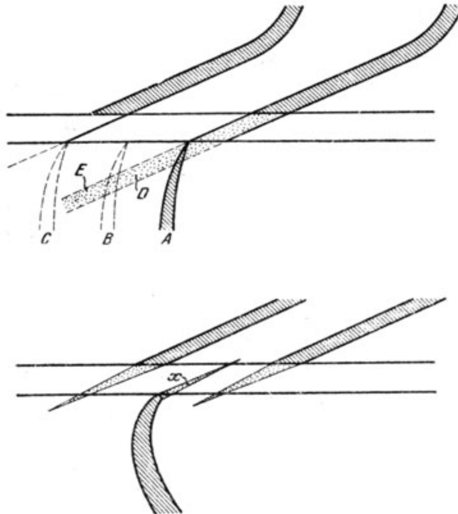


Abb. 203 u. 204. Saugwirkung im Spalt.

Noch intensiver ist die Saugwirkung bei teilweise beaufschlagten Turbinen, indem nach Abb. 205 der sich entleerende Schaufelkanal A mit Dampf aus dem Spalt nachgefüllt werden muß. Um das Nachfüllen zu erleichtern, sieht Elling eine Erweiterung B hinter der letzten Leitschaufel vor, die nach seinen Versuchen Arbeitsgewinn ergeben hat. Bei ganz engem Spalt würde der abfließende Dampfrest in Kanal A gehemmt, was Arbeitsverlust bedeutet.

Endlich wird das Saugen hauptsächlich dadurch unterstützt, daß die Laufschaufel am Einlauf mit Rücksicht auf Ausführungsfehler um etwas länger gemacht wird als die Leitschaufel, daher die Reibung den Dampf mitreißt.

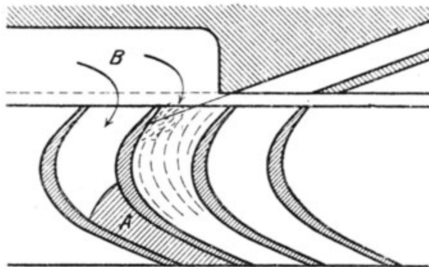


Abb. 205. Erleichterung der Schaufelentleerung.

3. Die Größe des Saugens

wurde zahlenmäßig in unserem Laboratorium durch einen Versuch an einem Schaufelsegment von 21 mm axialer Schaufellänge 42 mm Umfangslänge mit rund 27° Eintritts- und Austrittswinkel ermittelt, das von einer rechteckigen unerweiterten Düse von 17 mm axialer Höhe, 15 mm Weite mit ebenfalls 27° Schrägwinkel beaufschlagt war. Die Veränderung des Spaltes in den Grenzen von 1—4 mm verursachte keinen Unterschied in den Ergebnissen. Der Spalt war durch ein Gehäuse so umschlossen, daß die mitgerissene, von außen eindringende Luftmenge durch Meßdüse und Wassermanometer ermittelt werden konnte. Die Austrittsgeschwindigkeit c_1 wurde theoretisch aus dem vorhandenen Druckgefälle des anfangs gesättigten Dampfes ermittelt. Als wirksamer Querschnitt wurde der Unterschied zwischen der Projektion des gesamten Schaufeleintritt-Querschnittes senkrecht zur Düsenachse und dem Düsenquerschnitt angesehen. Das auf den Quadratmeter dieser Fläche in der Sekunde angesaugte Luftgewicht kann durch die Formel

$$\frac{G_{sek}}{f} = 0{,}21\,\gamma\,c_1 - 0{,}05\,(p_a - p_s) \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

dargestellt werden. Darin bedeutet

γ das spezifische Gewicht des Dampfes in kg/cbm,

c_1 die Eintrittsgeschwindigkeit in m/sek,

$p_a - p_s$ den Druckunterschied zwischen der Atmosphäre und der Spaltumgebung in kg/qcm.

Wird nicht Luft, sondern wie in der Wirklichkeit Dampf der Umgebung angesaugt, so dürfte nach gewissen Erfahrungen zu schließen, die man an Strahlvorrichtungen gemacht hat, das angesaugte Gewicht trotz der Verschiedenheit der spezifischen Raumenthalte unverändert bleiben. Durch Nullsetzen von G erhält man den erzielbar größten Unterdruck. Dieser überschreitet gemäß Formel

$$p_a - p_s = 4{,}2\,\gamma\,c_1 \quad \ldots \ldots \quad (3\,\mathrm{a})$$

auch bei 500 m Geschwindigkeit kaum einige Zehntel Atmosphären. Trotzdem könnten auf diese Weise bei mehreren hintereinander geschalteten Turbinen infolge der Größe der Scheibenflächen **gewaltige Gesamtdrücke erzeugt** werden, die in der Tat im Anfange des Turbinenbaues von den Konstrukteuren nicht früh genug erkannt, Ursache der allergrößten Schwierigkeiten wurden. **Heißlauf der Spurlager, sogar Verbiegungen der Laufräder waren die Folgen.** Zur Abhilfe muß man entweder eine genügende Zahl von **Löchern in den Scheiben** vorsehen, oder, bei teilweiser Beaufschlagung, Verbindungswege um den Kranz herum frei machen. Wollte man sich über deren Wirkung rechnerisch aufklären, so müßte wohl zunächst

Gl. (3) im großen nachgeprüft werden. Schriebe man dann den zulässigen Saugunterdruck $p_a - p_s$ vor, so lieferte Gl. (3) das angesaugte Dampfgewicht. Die Durchflußgeschwindigkeit w_s darf man angenähert $= \sqrt{2g\,(p_a - p_s)/\gamma}$ setzen und erhält den erforderlichen Durchflußquerschnitt $f_0 = G/w_s\gamma$. Da w_s axial gerichtet ist, bildet zwar die relative Zuflußgeschwindigkeit einen spitzen Winkel mit der Radebene; bezogen auf deren axiale Komponente ist f_0 gleichwohl der richtige axiale Reinquerschnitt.

Eine reichliche Entlastung der Laufräder durch Bohrungen ist ratsam, da es nicht ausgeschlossen ist, daß das Ansaugen die Scheibe auch in eine Schwingung zu versetzen vermag. Freilich muß eine große nutzlos angesaugte Dampfmenge in den Kauf genommen werden, die sich mit der Arbeitsmenge mischt, und den Wirkungsgrad merklich herabsetzt. Theoretisch wäre eine Labyrinthliderung über und unter der Leitschaufel das Gegenmittel; da dies jedoch praktisch nicht angeht, wird man sich auf tunliche Verringerung des Kranzabstandes von der Leitvorrichtung beschränken, um den Durchflußquerschnitt der Ansaugmenge herabzusetzen. Hier schreibt jedoch die Rücksicht auf das Streifen der Räder infolge ungleicher Wärmeausdehnung der Welle und des Gehäuses, wie auch wegen dem Flattern der Scheiben eine untere Grenze vor, als die man etwa 3—5 mm für Räder von 1000 mm Durchmesser nach aufwärts ansetzen kann. Den Spalt größer zu machen ist wegen der Strahlzerstreuung ungünstig. Die aus den einzelnen Leitzellen tretenden Strahlen behalten nämlich die ursprüngliche Richtung bei und bilden so Erzeugende eines Rotationshyperboloides, dessen Schnitt mit der Radebene die Stellen angibt, wo die Strahlen das Rad treffen. Infolge der Divergenz dieser Erzeugenden wird der Dampfstrahl in die äußere Ecke der Laufschaufel gedrängt, was nicht günstig ist.

Ob die Laufschaufeln auf die Strömung zurückwirken, hängt davon ab, ob w_1 kleiner oder größer ist als die Schallgeschwindigkeit des betreffenden Zustandes. In letzterem Fall findet eine Rückwirkung nicht statt, statt dessen müssen wir auf schiefe Verdichtungsstöße gefaßt sein, die am Einlauf der Schaufel ähnliche, aber wegen der schrägen Kantenlage verschobene Verdichtungsfiguren ergeben dürften, wie in den Düsenversuchen von Prandtl.

Ist w_1 kleiner als die Schallgeschwindigkeit, so wird sich von der Schaufelkante aus, die nie mathematisch scharf sein kann, wie schon erwähnt ein gewisser Stau ausbreiten, und es könnte die Ausflußmenge durch Verengung der Leitkanäle verkleinert werden. Für die übliche Schaufelausführung haben Huguenins Versuche die Abwesenheit der Stauwirkung erwiesen; bei enger Teilung hingegen haben wir einen Stau beobachtet.

Im allgemeinen beachtet man diese verwickelten Vorgänge nicht weiter, bezieht vielmehr die Querschnitte F_1 und F_1' auf c_1 und w_1, die, wie bemerkt, dem Dampfzustand im Düsenendquerschnitt entsprechen. Für diesen ist das spezifische Volumen v_1 bekannt, daher gilt $G_{sek}\,v_1 = F_1\,c_1 = F_1'\,w_1$ oder auf die axialen Querschnitte und Geschwindigkeiten bezogen

$$= F_{1a}\,c_{1a} = F_1'{}_a\,w_{1a}.$$

Da aber $c_{1a} = w_{1a}$, so folgt auch $F_{1a} = F'_{1a}$, also bei unendlich dünnen Schaufeln Gleichheit der Schaufellängen. Wegen den Ungenauigkeiten der Zentrierung führen wir, wie erwähnt, die Laufschaufel praktisch um 1—2 mm länger aus als die Leitschaufel, was am Eintritt infolge der gut zugeschärften Laufkanten notwendigerweise einen Überschuß gegenüber der theoretischen Größe und die unerwünschte aber unvermeidliche Saugwirkung ergibt.

4. Strömung in der Laufschaufel.

Wir vereinigen die absoluten und relativen Geschwindigkeiten in einen „Geschwindigkeitsplan“, indem wir c_1 und w_1 von einem Punkte 0 aus (Abb. 206) als Polstrahlen auftragen. Im Laufrad wird w_1 auf w_2 verkleinert gemäß Beziehung $w_2 = \psi w_1$. Die für gute Ausführungen zulässigen Grenzwerte für ψ sind in Abb. 217 dargestellt. Im allgemeinen ist ψ etwa $= 0{,}8\ldots 0{,}85$, scheint aber auch höhere Werte erreichen zu können. Die Zusammensetzung von $+w_2$ mit $+u$ liefert die absolute Austrittsgeschwindigkeit c_2. Die Neigung von w_1 und w_2 bestimmt die Winkel der Schaufelelemente am Eintritt und Austritt.

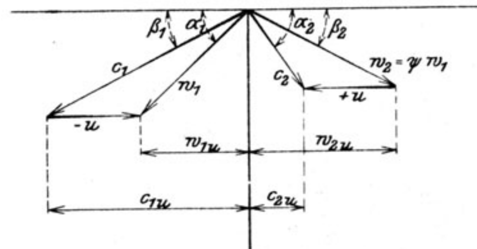


Abb. 206. Geschwindigkeitsplan.

Der Dampfzustand wird im Entropiediagramm wie folgt dargestellt (Abb. 207). A_0 bedeutet den Anfangspunkt vor der Düse ($p_0 v_0 T_0 [x_0]$), A_k' den Endpunkt der adiabatischen reibungsfreien Ausdehnung, A_{k1} den Endpunkt

der wirklichen Expansion. Demnach ist $i_{k1} = i_k' + AZ_1$, und zugleich Fläche $A_k' A_{k1} A_1' A_0' = AZ_1$ der **kinetische** Verlust in der Düse. In der Laufschaufel findet (bei angenähert unveränderlichem Drucke) ein kinetischer Verlust von

$$Z_2 = \frac{1}{2g}(w_1^2 - w_2^2) = \frac{1}{2g}(1 - \psi^2)\, w_1^2 = \zeta_2 \frac{w_1^2}{2g} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

m/kg statt, der den Wärmeinhalt auf

$$i_{k2} = i_{k1} + AZ_2$$

vergrößert und durch Aufsuchen des i_{k2} den Punkt A_{k2} ergibt. Dann ist zugleich

$$\text{Fläche } A_{k1} A_{k2} A_2' A_1' = \text{kinet. Verl. } AZ_2.$$

Lassen wir c_2 durch Wirbelung (in einem sehr weiten Auspuffrohr) vernichten, so wird weiterhin

$$i_{k3} = i_{k2} + A\frac{c_2^2}{2g}$$

und gleicherweise

$$\text{Fläche } A_{k2} A_{k3} A_3' A_2' = \text{kinet. Auslaßverlust} = A\frac{c_2^2}{2g} = AZ_3 \quad . \; . \; . \; . \quad (4a)$$

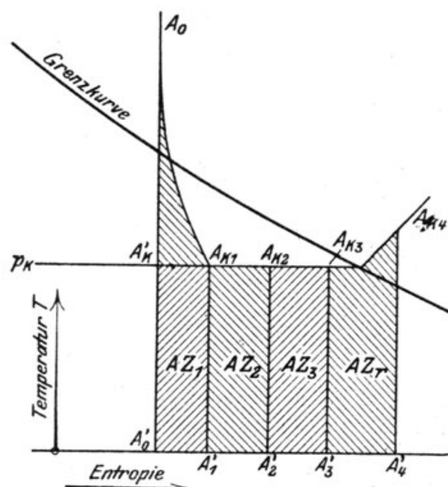


Abb. 207. Dampfzustände im Entropieschaubild.

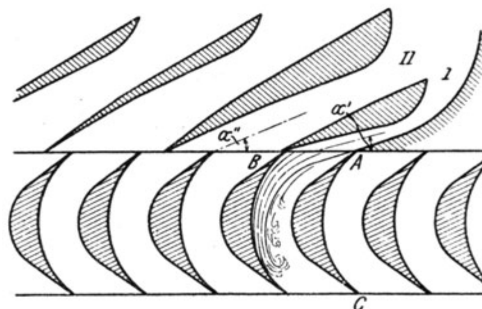


Abb. 208. Vorschlag von Elling.

Die teilweise beaufschlagte Turbine gibt, wie wir schon erwähnt haben, zu besonderen Verlusten Veranlassung beim Entleeren eines aus dem Bereich der Leitzellen tretenden und ebenso beim „Ausfüllen" eines Laufkanales, der gerade vor die Leitvorrichtung tritt. Der Dampfstrahl wird sich, wie Abb. 208 zeigt, an die hohle Schaufelseite anlegen und den stagnierenden Inhalt des Kanales wie ein Keil vor sich hinschieben, wobei Wirbel, also Verluste entstehen.

Elling hofft die Verluste durch Anwendung der „Beschleunigungsdüsen" Nr. I und II in Abb. 208, herabzusetzen, deren Winkel $\alpha' \alpha''$ kleiner gewählt werden als bei den übrigen. Wenn die gezeichnete Schaufel einer Lavalturbine angehört mit z. B. 400 m Umfangsgeschwindigkeit und etwa 800 m Relativgeschwindigkeit im Rad, so wird der Schaufeleintritt AB schon ganz angefüllt sein, während die äußerste Spitze des Dampfkeiles noch das Schaufelende C nicht erreicht hat. Die Wirbelung an dem freien Stirnende des Strahles ist also unvermeidbar. Durch Versuche an einem freilich sehr kleinen Modell soll sich immerhin eine Wirksamkeit dieser Maßregel haben nachweisen lassen.

5. Die Leistung am Radumfang.

Die Gleichung der Gesamtenergie lautet, auf die Zustände A_0 und A_{k3} bezogen,

$$i_0 = AL_u + i_{k3}.$$

Oder anders geschrieben

$$AL_u = i_0 - i_{k3} = (i_0 - i_k') + (i_k' - i_{k1}) + (i_{k1} - i_{k2}) + (i_{k2} - i_{k3}).$$

Der erste Klammerausdruck ist das theoretische Gefälle, die übrigen sind die Verluste. Wir haben also

$$L_u = \frac{c_{th}^2}{2g} - Z_1 - Z_2 - Z_3 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

d. h. wir erhalten die Arbeit für 1 kg Dampf am Radumfang, indem wir von der theoretischen Arbeit die kinetischen Verluste in der Düse, im Laufrad und den Auslaßverlust abziehen.

Die Summe der Verluste ist aber nichts anderes als das Produkt aus der Entropievermehrung und der tiefsten (d. h.: Kondensator-) Temperatur, daher auch Gleichung

$$A L_u = A L_0 - \Delta S \cdot T_k \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5\text{a})$$

benutzt werden kann, wo $\Delta S = A'_0 A'_3$ ist.

Eine andere Ausdrucksform der Arbeit liefert der Satz vom Antrieb. Nach Abb. 206 sind die Umfangskomponenten der Geschwindigkeit:

$$c_{1u} = c_1 \cos \alpha_1; \qquad c_{2u} = -(w_2 \cos \beta_2 - u),$$

daher wird

$$L_u = \frac{u}{g}(c_1 \cos \alpha_1 + w_2 \cos \beta_2 - u) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Dieser Ausdruck vereinfacht sich ganz besonders für die „gleichwinklige" Laufschaufel, d. h. für die Annahme

$$\beta_1 = \beta_2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Dann ist mit $w_2 = \psi w_1$ auch

$$w_2 \cos \beta_2 = \psi w_1 \cos \beta_1 = \psi (c_1 \cos \alpha_1 - u)$$

und

$$L_u = \frac{u}{g}(1 + \psi)(c_1 \cos \alpha_1 - u) \quad \ldots \quad (7\text{a})$$

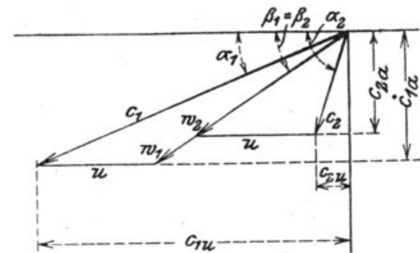


Abb. 209.
Umgeklapptes Auslaßdreieck.

Die Dreiecke des Geschwindigkeitsplanes können in diesem Falle auf die in Abb. 209 angegebene Weise zusammengelegt werden.

Die Identität der Ausdrücke (5) und (6) wird sofort nachgewiesen, wenn wir (5) vollkommen ausschreiben

$$2 g L_u = c_0^2 - (c_0^2 - c_1^2) - (w_1^2 - w_2^2) - c_2^2 = (c_1^2 - w_1^2) + (w_2^2 - c_2^2).$$

Nach dem Kosinussatz ist aber laut Abb. 206

$$w_1^2 = c_1^2 + u^2 - 2 u c_1 \cos \alpha_1,$$
$$c_2^2 = w_2^2 + u^2 - 2 u w_2 \cos \beta_2,$$

welche Werte eingesetzt in der Tat den Ausdruck (6) ergeben.

6. Der Wirkungsgrad am Radumfang.

Der thermodynamische Wirkungsgrad der auf den Radumfang bezogenen Leistung ist nach Definition das Verhältnis der gewonnenen zur verfügbaren Arbeit,

$$\eta_u = \frac{L_u}{L_0} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

Die Änderung von η_u mit der Umfangsgeschwindigkeit kann bei der gleichwinkeligen Laufschaufel sehr leicht überblickt werden, wie zuerst Bánki gezeigt hat. Wir erhalten mit $L_0 = c_{th}^2/2g = c_1^2/\varphi^2\, 2g$, und indem wir für L_u den Wert (7a) einführen,

$$\eta_u = 2\varphi^2 (1 + \psi)\left(\cos \alpha_1 - \frac{u}{c_1}\right)\frac{u}{c_1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

Diese wichtige Formel lehrt, **daß der Wirkungsgrad nur vom Verhältnisse $u : c_1$ und nicht einzeln von den Werten der Geschwindigkeiten abhängt.** Im folgenden wird häufig

$$\frac{u}{c_1} = \xi$$

gesetzt. Setzen wir voraus, daß c_1, φ, ψ und α_1 unverändert bleiben, hingegen u sich ändert, wobei wir β_1 stets auf stoßfreien Eintritt umgestellt denken und $\beta_2 = \beta_1$ machen, damit immer Formel (9) anwendbar bleibt, so folgt der Satz:

Der Wirkungsgrad ändert sich mit der Umfangsgeschwindigkeit nach einem parabolischen Gesetz.

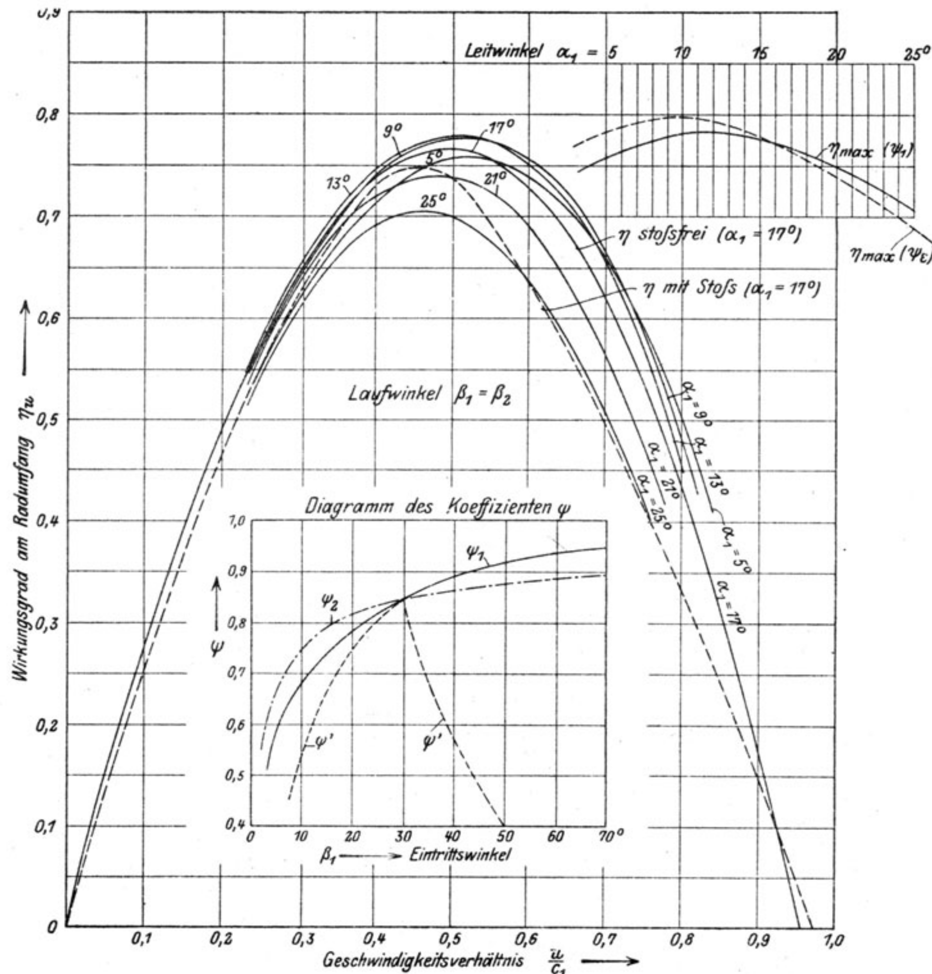


Abb. 210. Wirkungsgrade und ψ-Werte.

Wir bestimmen den Höchstwert, indem wir die Ableitung von η_u nach u gleich Null setzen, und finden

$$\cos \alpha_1 - 2\frac{u_m}{c_1} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{u_m}{c_1} = \frac{\cos \alpha_1}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

Bei kleinem Leitwinkel α_1 erreichen wir den Höchstwert von η_u, wenn die Umfangsgeschwindigkeit nahezu gleich der Hälfte der Dampfgeschwindigkeit c_1 ist.

Der Zahlenwert des Höchstwertes ist

$$\eta_{um} = \frac{1}{2}\varphi^2(1+\psi)\cos^2\alpha_1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10a)$$

Der beste Wirkungsgrad ist bei unveränderlichem ψ um so höher, je kleiner der Eintrittswinkel α_1 gewählt wurde.

Sobald aber ψ von dem Ablenkungswinkel abhängt, darf α_1 nicht mehr unbegrenzt verkleinert werden. Der günstigste Wert von α_1 wird unten graphisch ermittelt.

Ersetzen wir φ und ψ vorübergehend durch die in Gl. (2a) und (4) definierten Verlustziffern $\zeta_1 = 1 - \varphi^2$; $\zeta_2 = 1 - \psi^2$ und setzen wir angenähert, falls ζ_2 klein ist,

$$\psi = \sqrt{1 - \zeta_2} = 1 - \zeta_2/2,$$

so wird

$$\eta_{um} = (1 - \zeta_1)\left(1 - \frac{\zeta_2}{4}\right)\cos^2\alpha_1,$$

d. h. **der Einfluß des Energieverlustes im Leitrade macht sich verhältnismäßig nahezu viermal so stark fühlbar, wie derjenige des Energieverlustes im Laufrad.** Letzterer bleibt praktisch dennoch ausschlaggebend, weil wesentlich größer als der Verlust im Leitrade.

Ähnliche Gesetze gelten auch bei beliebigen Winkeln, doch hängt η_u nicht mehr in so einfacher Weise von u ab.

Beispiel. In Abb. 210 sind die Wirkungsgrade am Radumfang für die Annahme $\beta_1 = \beta_2$ und stets stoßfreien Eintritt bei verschiedenen Winkeln α_1 entworfen, indem man φ konstant $= 0{,}95$, hingegen ψ veränderlich, aber nur vom Umlenkungswinkel abhängig annahm. Da letzterer bei $\beta_1 = \beta_2$ durch die Formel $180 - 2\beta_1$ gegeben ist, wurde ψ als Funktion von β_1 im mittleren Diagramm der Abb. 210 graphisch dargestellt, wobei naturgemäß ψ mit β_1 zunehmen, bei 90° ein Maximum erreichen muß. Bei $\beta_1 = 0$ darf für die axiale Beaufschlagung mit Rücksicht auf die endliche Dicke nicht bloß der Leitschaufeln, sondern auch der Laufschaufelkante auch $\psi = 0$ gesetzt werden. Wie rasch der Wert von da ab zunimmt, ist noch nicht ermittelt, daher sind in der Figur zwei wahrscheinliche Annahmen gemacht und mit ψ_1 bzw. ψ_2 bezeichnet worden. Für den häufig vorkommenden Wert $\beta_1 = 30°$ ist $\psi = 0{,}85$ angesetzt worden, ein Wert, der von erstklassigen Ausführungen mit Sicherheit erreicht und heute schon überboten wird.

Die zunächst mit dem Werte ψ_1 berechneten Schaulinien der Wirkungsgrade haben eine parabelähnliche Form und erreichen alle in der Gegend $u = 0{,}5_{c_1}$ ihren Höchstwert. Rechts oben ist dies Maximum in Funktion von α_1 aufgetragen. Man erkennt, daß eine Verkleinerung dieses Winkels bis zu etwa 12° einen Gewinn bringt, darüber hinaus wieder Verlust. Hierauf wurde die Rechnung mit dem Werte ψ_2 wiederholt, von den Ergebnissen indessen bloß das jeweilige Maximum in der Figur rechts oben dargestellt. Man erkennt, daß nun der Wirkungsgrad bis zu etwa $\alpha_1 = 10°$ zunimmt und 80 v. H. erreicht. Die praktische Erfahrung hat dargetan, daß es in der Tat vorteilhaft ist, α_1 unter die bis dahin üblichen Grenzen (d. h. etwa 17°) zu verkleinern. Die endgültige Entscheidung können nur Versuche im großen herbeiführen.

7. Veränderung des Wirkungsgrades mit der Umlaufzahl für eine gegebene Turbine.

Oben wurde der Wirkungsgrad unter der Annahme berechnet, daß die Schaufelwinkel bei jeder Umfangsgeschwindigkeit auf stoßfreien Eintritt umgestellt und stets $\beta_2 = \beta_1$ gemacht wird. Nun wollen wir eine ausgeführte Turbine mit **festen Winkeln** α_1 und $\beta_1 = \beta_2$ gegeben denken und den Wirkungsgrad bei verschiedenen Umfangsgeschwindigkeiten ermitteln.

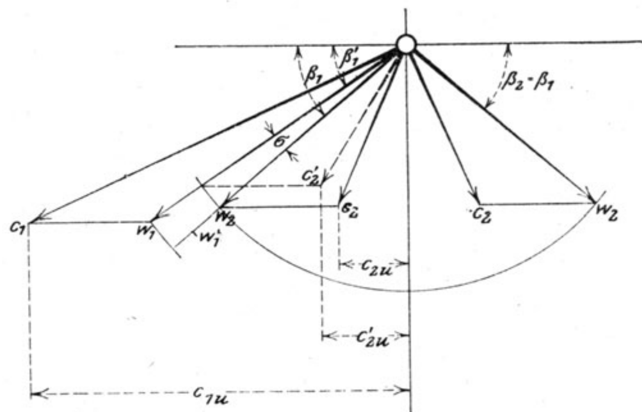


Abb. 211. Eintritt mit Stoß.

Die aus c_1 und $-u$ gebildete Eintrittsgeschwindigkeit w_1 muß im allgemeinen Fall um den „Stoßwinkel“ (Abb. 211) abgelenkt werden, um die Neigung β_1 zu erhalten, wobei sie wegen des Stoßverlustes auf den kleineren Wert w_1' sinkt. In der Schaufel findet eine weitere Herabsetzung auf w_2 statt, woraus c_2 gewonnen und mittels den Umfangskomponenten c_{1u}, c_{2u} die Leistung und der Wirkungsgrad wie oben berechnet werden können.

Vielfach wird die zu w_1' lotrechte Komponente von w_1 als Stoßverlust angesehen, was indes zu ungünstig gerechnet sein dürfte, solange der Stoß auf der hohlen Schaufelseite stattfindet. Auf alle Fälle kann man

$$w_2 = \psi' w_1$$

setzen, wobei Stoß und Reibung berücksichtigt sind und ψ' vorläufig nach den in Abschn. 46 unter 6 mitgeteilten Ergebnissen gewählt werden kann. Infolge Zeitmangels konnten diese hier nicht mehr berücksichtigt werden, und so ist als Beispiel in Abb. 210 punktiert der

Wirkungsgrad bei unveränderlichem Winkel $\beta_1 = \beta_2 = 30^0$ unter der Annahme eingetragen, daß ψ' gemäß der punktierten Linie der Mittelfigur beim Stoß auf der hohlen Seite langsamer, beim Stoß auf dem Schaufelrücken rascher abnimmt. Man sieht, welch bedeutenden Einfluß unsere vielleicht etwas übertriebene Schätzung[1]) (zu scharfe Spitze der ψ' Kurve) auf den Wirkungsgrad der „wirklichen" Turbine ausübt, wie stark dieser besonders jenseits des Höchstwertes fällt.

7a. Umfangsgeschwindigkeit beim „Durchgehen" oder „Freilauf" der Turbine.

Wenn der normale und der Sicherheitsregler der Turbine versagen, nimmt die Turbine eine hohe Umfangsgeschwindigkeit an, deren Kenntnis wegen der Gefahr des Sprengens der Räder von Wichtigkeit ist.

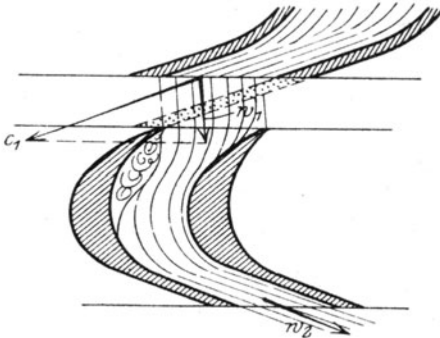


Abb. 211a. Turbine im „Freilauf".

Von Lager und Radreibung abgesehen wird dann $\eta_u = 0$; allein der aus Gl. (9) sich ergebende Wert

$$u_{max} = c_1 \cos \alpha_1$$

entspricht der Annahme, daß $\beta_1 = \beta$ und β_1 stets auf stoßfreien Eintritt eingestellt ist. Bedeutet also, daß die Turbine mit geraden, in axiale Ebenen fallenden Schaufeln versehen wäre. An der wirklichen Schaufel ergibt sich ein Strömungsbild (als relative Strömung gegen die stehende Schaufel aufgefaßt) wie Abb. 211a und ein Geschwindigkeitsplan wie Abb. 211b. Soll nämlich $L_u = 0$, so muß $c_{1u} = c_{2u}$ sein. Durch c_1 ist $c_{1a} = w_{1a}$ gegeben, und da wegen Gleichheit der u auch $w_{1u} = w_{2u}$ und $w_{2a} = \psi w_{1a}$ sein muß, kann man letzteres auftragen; die so bestimmte Lage des u liefert im Schnittpunkt mit der Richtung von w_2 die Größe von w_2. Es bestehen dann die Beziehungen $w_{2a} = \psi c_{1a} = w_2 \sin \beta_2$, woraus $w_2 = \psi c_1 \sin \alpha_1 / \sin \beta_2$ und $w_{2u} = w_2 \cos \beta_2$. Daraus würde folgen

$$u_{max} = c_{1u} + w_{2u} = c_1 \cos \alpha_1 \left[1 + \psi \frac{tg\, \alpha_1}{tg\, \beta_2}\right] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (11\,b)$$

und es wäre u_{max} merklich größer als $c_1 \cos \alpha_1$. Allein da für ψ ein dem starken Rückenstoß entsprechender niedriger Wert zu wählen ist, wird der Dampf bei normalen (geschlossenen) Kanälen den zum Abströmen erforderlichen Querschnitt nicht vorfinden, es entsteht ein Stau, und ein Teil des Dampfes wird durch den Spalt abströmen. Dies und die Rad-, Lager- und sonstigen Reibungen setzen den Wert von u_{max} herab.

7b. Überdruck und Achsenschub bei Gleichdruckturbinen, insbesondere im Leerlauf.

Wird die Schaufellänge der Gleichdruckturbine der Normalleistung, wie üblich, genau angepaßt, so entsteht bei abnehmender Belastung ein, **wenn auch unbedeutender Überdruck**[2]), dessen Entstehung man sich wie folgt veranschaulichen kann.

Es sei in Abb. 211c OAB das normale Eintrittsdreieck, und es sei die Schaufel mit einem langen parallen Einlauf (mit β_1 als Neigung) versehen. Wird c_1 verkleinert, während u bleibt, so daß sich w_1 als relative Geschwindigkeit im Spalt ergibt, und setzen wir verlustfreie Strömung bei kleinen Unterschieden der Rauminhalte voraus, so muß sich im Einlauf schließlich die tatsächliche Geschwindigkeit w_{1e} ausbilden, weil die Stetigkeit gleich große axiale Komponenten von c_1 und w_{1e} fordert. Nun ist $w_{1e} > w_1$, also wird ein Überdruck auftreten, der die erforderliche Beschleunigung bewirkt. Ist $u = c_1 \cos \alpha_1$ geworden, so ist der Unterschied von w_1 und w_{1e} am größten, und man kann den Überdruck aus der Gleichung der kinetischen Energie

$$v\, \Delta p = \frac{w_{1e}^2 - w_1^2}{2g} = \frac{1}{2g}\left(\frac{c_{1a}^2}{\sin^2 \beta_1} - c_{1a}^2\right) = \frac{1}{2g}\left(\frac{1}{\sin^2 \beta_1} - 1\right) u^2 \operatorname{tg}^2 \alpha_1 \quad \ldots \ldots \quad (11\,c)$$

ermitteln. In der Wirklichkeit sind noch Widerstände zu überwinden, und der Überdruck wächst. Für den Fall des widerstandsfreien **Leerlaufes** der Turbine kann die Rechnung wie folgt erledigt werden. Gemäß Abb. 211b gilt infolge von $c_{1u} = c_{2u}$

$$c_1 \cos \alpha_1 + w_2 \cos \beta_2 = u \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (11\,d)$$

---

[1]) Selbstverständlich sollte der durch ψ' bedingte Schaufelverlust nicht die Größe der vorhin bezeichneten Normalkomponente von w_1 erreichen. Unsere Abbildung soll den Einfluß des Stoßes nur qualitativ zum Ausdruck bringen.

[2]) Hierauf hat in der Literatur wohl als Erster nachdrücklich Fürstenau, Techn. Blätter 1920, Heft 17 u. f., hingewiesen.

Die theoretische Geschwindigkeit am Austritt ist $w_{th2}^2 = w_1^2 + 2 g v_m \Delta p$; die wirkliche wird man unter Benützung der Verhältniszahlen ψ in Abschn. 46 unter 6, als $w_2 = \psi_s w_{th2}$ ansetzen. Schiebt man w_1^2 aus dem Eintrittsdreieck ein, so folgt

$$w_2^2 = \psi_s^2 [c_1^2 + u^2 - 2 c_1 u \cos\alpha_1 + 2 g v_m \Delta p] \quad \text{(11e)}$$

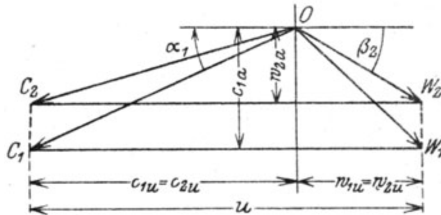


Abb. 211 b.
Geschwindigkeitsplan im Freilauf.

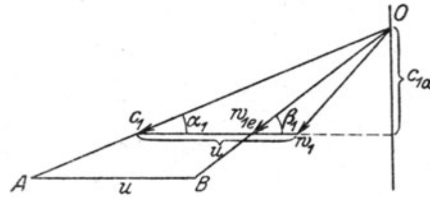


Abb. 211 c.
Überdruck bei abnehmender Belastung.

Die Durchflußgleichung liefert $\frac{f_2 w_2}{f_1 c_1} = \frac{v_2}{v_1}$. Im Normalbetrieb lautet diese Gleichung $\frac{v_{2n}}{v_{1n}} = \frac{f_2 w_{2n}}{f_1 c_{1n}}$ oder, da $c_{1n} \sin\alpha_1 = w_{1n} \sin\beta_1$ und $w_{2n} = \psi_n w_{1n}$ ist auch $\frac{v_{2n}}{v_{1n}} = \frac{f_2 \sin\alpha_1}{f_1 \sin\beta_1} \psi_n$. Indem man f_2/f_1 hieraus in die Durchflußgleichung einsetzt, erhält man mit der Bezeichnung

$$\frac{v_2}{v_1} \frac{v_{1n}}{v_{2n}} \frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} \psi_n = \lambda_1 \quad \text{den Ausdruck} \quad w_2 = \lambda_1 c_1 .$$

Dies in (11d) eingesetzt, liefert die erforderliche Eintrittsgeschwindigkeit

$$c_1 = u \lambda_2 \quad \text{mit} \quad \lambda_2 = \frac{1}{\cos\alpha_1 + \lambda_1 \cos\beta_2} .$$

Aus (11e) folgt

$$2 g v_m \Delta p = \left[\left(\frac{\lambda_1 \lambda_2}{\psi_s} \right)^2 - \lambda_2^2 + 2 \lambda_2 \cos\alpha_1 - 1 \right] u^2 . \quad \text{(11f)}$$

Das Verhältnis v_2/v_1 würde man vorgängig einzuschätzen haben, und kann es nachher aus Δp genauer ermitteln. Es zeigt sich, daß Δp **nur einige Hundertstel des in einer Stufe bei Normalbetrieb ausgenützten Druckgefälles ausmacht.** Der plötzliche Übergang von Vollast zum Leerlauf kann daher nur dann gefährlich werden, falls sich der Inhalt an hochgespanntem Dampf zwischen Laufrad und vorderem Deckel **nicht rasch genug durch den Spalt** und die Ausgleichsbohrungen in der Scheibe **entleeren** kann. Dann ist **die ganze Scheibenfläche** einem **Druckunterschied ausgesetzt,** der **bedeutende Achsenschübe** ergeben kann.

8. Einfluß des im Spalt angesaugten Dampfes auf den Wirkungsgrad.

Die vom Dampfstrahl im Spalte angesaugte Dampfmenge setzt die tatsächliche Eintrittsgeschwindigkeit herab. Die Mischung der beiden Dampfmengen wollen wir angenähert als unelastischen Stoß behandeln. Ist $m c_1$ die sekundliche Bewegungsgröße des nützlichen Dampfstrahles, $m' c'$ die der angesaugten Menge, so besteht dann die Gleichung

$$m c_1 + m' c' = (m + m') c_1' \quad \text{(12)}$$

aus der die tatsächliche Eintrittsgeschwindigkeit c'_1 gerechnet werden kann. Bei Schaufeln von 20 mm Länge und 2 mm beiderseitigem Sicherheitsspiel ergibt Gl. (3) eine Undichtheitsmenge, die mehr als 10 v. H. der Arbeitsmenge ausmachen kann, und da die in die Richtung von c_1 fallende Zuflußgeschwindigkeit c' im Spalte $= 0$ ist, so würde c_1' etwa gleich sein $0{,}9 c_1$; allgemein ist

$$c_1' = \frac{m}{m + m'} c_1 = \frac{c_1}{\lambda} \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{m + m'}{m} . \quad \text{(12a)}$$

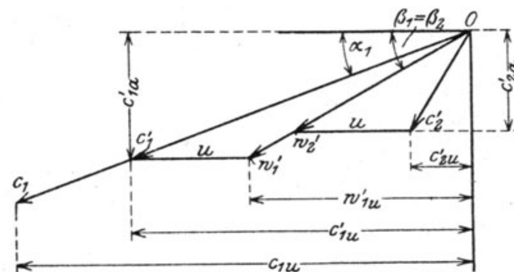


Abb. 211 d. Einfluß der im Spalt angesaugten Dampfmenge.

Die neue relative Eintrittsgeschwindigkeit wird w_1' Abb. 211 d. Aus dieser entsteht $w_2' = \psi_0 w_1'$ durch Vermehrung mit einem vom alten ψ, in dem die Mischung mit einberechnet war, verschiedenem, größerem Beiwert. Machen wir die (etwas gezwungene) Annahme, daß β_1 jedesmal auf stoßfreien Eintritt eingestellt und $\beta_2 = \beta_1$ gemacht wird, so ist nach dem Satz vom Antrieb die durch die beiden sekundlichen Massen m und m' vereint ausgeübte Umfangskraft, durch die Absolutwerte der Umfangskomponenten der Geschwindig-

keit ausgedrückt $m([c_{1u}]+[c'_{2u}])+m'([c'_u]+[c'_{2u}])$. Hieraus folgt mit $c_u'=0$, die sekundlich auf 1 kg des nutzbaren Dampfgewichtes mg entfallende Arbeit

$$L_u=\frac{u}{mg}\left\{m[c_{1u}]+(m+m')[c_2'{}_u]\right\}=\frac{u}{g}\left\{[c_{1u}]+\lambda[c_2'{}_u]\right\} \quad \text{(12b)}$$

Der Wirkungsgrad ist nach wie vor $L_u:(c_{th}^2/2g)$. Indem wir $c_1=\varphi c_{th}$; $c_1'{}_u=c_{1u}/\lambda$; $w_1'{}_u=c_1'{}_u-u$; $w_2'{}_u=\psi_0 w_1'{}_u$; $c_2'{}_u=w_2'{}_u-u$ einführen, erhalten wir

$$\eta_u=2\varphi^2(1+\psi_0)\left[\cos\alpha_1-\lambda\frac{u}{c_1}\right]\frac{u}{c_1} \quad \text{(13)}$$

ψ_0 ist hierin ein Höchstwert, der durch Messungen an sehr langen Schaufeln zu bestimmen wäre. Für solche ist $\lambda \simeq 1$, und man kann nach Gl. (13) beurteilen, wie stark η_u für kurze Schaufeln abnimmt. Sobald sich angesaugter Dampf mit dem Arbeitsdampf mischt, geht sicher auch ψ_0 herab, während ohne Beimischung, wie in Abschn. 46 unter d erörtert wurde, sein Wert sich bis zu sehr kleinen Längen nicht wesentlich verändert.

Beispiel. Mit $\varphi=0{,}95$; $\psi_0=0{,}9$; $u/c_1=0{,}45$; $\alpha_1=17^0$ erhält man ohne Beimischung $\eta_{u0}=0{,}78$; mit Beimischung sei $\varphi=0{,}95$; $\psi_0=0{,}9$; $\lambda=1{,}10$; $u/c_1=0{,}45$; $\alpha_1=17^0$; man erhält $\eta_{mu}=0{,}70$. Diese große Einbuße legt es nahe, nach Lösungen zu suchen, um das Mitreißen des Dampfes im Spalt zu verhindern. Wie schon einleitend bemerkt, ist jedoch praktisch nichts zu erreichen, und auch wenn eine vollkommene (etwa Labyrinth-) Abdichtung denkbar wäre, so würde der Strahl im Spalt einen Unterdruck erzeugen und die Wiederverdichtung auf den Austrittsdruck würde unter Wirbelung, d. h. mit Verlusten, vor sich gehen. Es bleibt demnach nichts übrig, als die Anwendung starrer Wellen mit kleiner Durchbiegung äußerst genau zentrische Herstellung des Leitradkranzes, so daß die Zugabe der Schaufellänge im Laufkranz klein gehalten werden kann.

9. Der Einfluß der Radreibung

ist nur von Bedeutung bei Turbinen sehr kleiner Leistung oder bei schwach beaufschlagten Rädern, die in hochgespanntem Dampf arbeiten (Gegendruckturbinen). Die durch Radreibung verlorene Arbeit kann, wie wir gesehen haben, abkürzend in PS als

$$N_r=\beta_r D^2 u^3\gamma$$

ausgedrückt werden. In der Sekunde beträgt die Reibungsarbeit $75N_r$ mkg, und für 1 kg Dampf

$$Z_r=\frac{75N_r}{G_{sek}}.$$

Trägt man den Wärmewert dieser Arbeit im Entropiediagramm (Abb. 207) ab, so erhält man in A_{k4} den wahren Endzustand des Dampfes. Die innere Arbeit aber ist nach Definition

$$L_i=L_u-Z_r,$$

und der innere Wirkungsgrad

$$\eta_i=\frac{L_i}{L_0}=\frac{L_u}{L_0}-\frac{Z_r}{L_0}=\eta_u-\zeta_r \quad \text{(12)}$$

Durch graphisches Abtragen kann in jedem Falle leicht sowohl $\eta_{i\,max}$ als auch die günstigste Umfangsgeschwindigkeit ermittelt werden.

Im Falle der gleichwinkligen Laufschaufel ($\beta_1=\beta_2$) kann die Veränderlichkeit von η_i auch auf dem Wege der Rechnung übersehen werden, indem man η_u nach Formel (9) und

$$\zeta_r=\frac{75N_r}{G_{sek}L_0}=\frac{75\cdot 2g\beta_0 D^2u^3\gamma}{G_{sek}c_{th}^2}$$

einsetzt.

Betrachten wir den praktisch wichtigsten Fall, daß die Umlaufzahl, also auch die Winkelgeschwindigkeit ω, festgelegt sind, und suchen wir die günstigste Umfangsgeschwindigkeit und den Durchmesser. Zunächst gilt $D=\frac{2u}{\omega}$, welches eingesetzt, mit der Bezeichnung

$$\xi=\frac{u}{c_1};\qquad \varrho=\frac{600g\beta_0\varphi^2\gamma c_1^3}{G_{sek}\omega^2} \quad \text{(12a)}$$

$\zeta_r=\varrho\xi^5$ liefert. Es wird also

$$\eta_i=2\varphi^2(1+\psi)(\cos\alpha_1-\xi)\xi-\varrho\xi^5 \quad \text{(13)}$$

Um den Höchstwert von η_i zu finden, bilden wir

$$\frac{d\eta_i}{d\xi}=2\varphi^2(1+\psi)(\cos\alpha_1-2\xi_m)-5\varrho\xi_m^4=0 \quad \text{(14)}$$

und lösen diese Gleichung nach ξ_m in Zahlen, oder noch einfacher graphisch auf. Zu letzterem Behufe tragen wir in Abb. 212 η_u und ζ_r als Funktion von ξ auf. Die wagerechte Tangente an die resultierende Kurve η_i liefert η_m und ξ_m im Punkte C_m.

Sofern die Radreibung sehr klein ist, kann eine angenäherte analytische Lösung an Hand der Abb. 212 leicht angegeben werden. Das Maximum von η_i findet statt, wo die Tangenten an die Kurven η_u, ξ_r parallel sind, in den Punkten C, C_1. Schreiben wir abkürzend $\eta_u = a(2\xi_0 - \xi)\xi$ mit $a = 2\varphi^2(1+\psi)$; $2\xi_0 = \cos\alpha_1 = 2OA_0$, so ist

$$\frac{d\eta_u}{d\xi} = 2a(\xi_0 - \xi), \qquad \frac{d\zeta_r}{d\xi} = 5\varrho\xi^4 \quad . \quad (15)$$

Den Wert dieser letzteren Ableitung können wir angenähert, falls die Bedingungen der Fußnote[1]) erfüllt sind, durch den Wert in Punkt A_1, d. h. $5\varrho\xi_0$, ersetzen und dann folgt

$$\xi_0 - \xi_m = \frac{5\varrho\xi_0^4}{2a}.$$

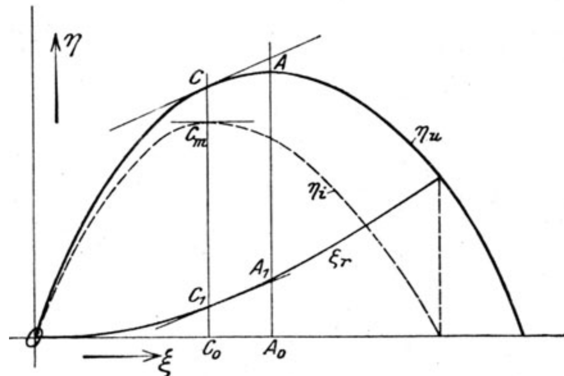


Abb. 212. Einfluß der Radreibung.

Um diesen Betrag ist das günstigste Verhältnis u_m/c_1 kleiner, als wenn keine Radreibung vorhanden wäre[1]).

Der Höchstwert von η_i ist selbstverständlich immer kleiner als $\eta_{u\,\max}$, bei großen Einheiten ist der Unterschied jedoch vernachlässigbar.

10. Bestimmung der Verlustzahlen aus der Kurve des Wirkungsgrades.

Ist der Wirkungsgrad η_i für eine vorliegende Turbine auf dem Wege des Versuches bestimmt worden, so liefert der rechnungsmäßige Ausdruck desselben das Mittel, eine der Verlustzahlen zu bestimmen. Auf diese Weise würde man genauen Aufschluß über dessen Wert bei der in Bewegung befindlichen Schaufel und über den Einfluß eines Stoßes beim Eintritt erhalten können.

11. Der Dampfverbrauch.

Ist die effektive Pferdekraft N_e vorgeschrieben, so müssen die Lagerreibung, Luftpumpenleistung (bei direktem Antrieb) usw. abgeschätzt und hinzugefügt werden, um die innere Leistung in der Form $N_i = N_e/\eta_{mech}$ zu erhalten. Unter 100 PS wird man bei guter Luftleere $\eta_{mech} \leqq 0{,}90$, über 1000 PS zu etwa 0,95 ansetzen dürfen. Nun wird auch G_{sek} probeweise angenommen, um das nebensächliche Z_r rechnen zu können. Die Rücksicht auf die Anlagekosten wird entscheiden, ob man mit dem günstigsten Werte von u, d. h. mit bestem Dampfverbrauch, aber hohen Anlagekosten rechnen will. Das gewählte u liefert mit der anderweitig bedingten Umlaufzahl n (i. d. Min.) den Durchmesser gemäß Formel

$$u = \frac{\pi D n}{60} = \frac{D n}{19{,}096} \quad \text{und} \quad D = \frac{19{,}096\,u}{n}.$$

Mit Hilfe des durch Rechnung festgelegten η_i finden wir

$$L_e = \eta_m \eta_i L_0$$

und hieraus den effektiven Dampfverbrauch

$$G_e = \frac{632}{L_e}\ \text{kg/PS-st.}$$

---

[1]) Schreiben wir Gl. (14) mit den Bezeichnungen der Gl. (15) in der Form

$$\xi_0 - \xi = \frac{5\varrho}{2a}\xi^4 \quad \text{oder} \quad \xi = \xi_0 - f(\xi),$$

deren genaue Auflösung $\xi = \xi_m$ ist, so wird eine erste angenäherte Auflösung $\xi_1 = \xi_0$ sein, die um das kleine Fehlerglied Δ von ξ_m abweicht, so daß $\xi_0 = \xi_m + \Delta$ ist. Setzen wir ξ_1 in $f(\xi)$ ein, so bildet $\xi_2 = \xi_0 - f(\xi_1)$ nur dann eine bessere Annäherung, falls $df(\xi)/d\xi < 1$ ist für $\xi = \xi_m$. Denn es ist entwickelt $\xi_2 = \xi_0 - f(\xi_m + \Delta) = (\xi_0 - f[\xi_m]) - \Delta f'(\xi_m + \delta\Delta) = \xi_m - \Delta f'(\xi_m + \delta\Delta)$, wo $\delta < 1$. Daher wird in der Tat ξ_2 näher an ξ_m gelegen sein als ξ_1, falls $f' < 1$ ist, sonst aber nicht! Zahlenbeispiele zeigen, daß dies der Fall ist bei großen Leistungen oder bei sehr kleinen Werten des spezifischen Gewichtes, d. h. bei im Vakuum laufenden Rädern.

Nur selten wird es nötig sein hierauf G_{sek} und L_v, daher auch η_i zu berichtigen und den genaueren Wert von G_e zu ermitteln.

12. Die axialen Reinquerschnitte

werden gemäß Abschn. 56 mit $G_{sek} = G_e N_e / 3600$ wie folgt gerechnet:

$$\text{Leitradaustritt} \quad F_{1a} = \pi D a_1' = \frac{G_{sek} v_1}{c_{1a}},$$

$$\text{Laufradeintritt} \quad F_{1a} = F_{1z},$$

$$\text{Laufradaustritt} \quad F_{2a} = \pi D a_2' = \frac{G_{sek} v_2}{w_{2a}}.$$

Die theoretischen Längen $a_1' a_2'$ werden im umgekehrten Verhältnis zur Verkleinerung des Umfanges durch die Dicken der Schaufelstege vergrößert. Bezeichnen wir das Verhältnis der lichten Breite zur Gesamtbreite (im Umfang gemessen) mit τ_1 und τ_2, so wird $a_1 = a_1' / \tau_1$; $a_2 = a_2' / \tau_2$ und es entsteht das Verhältnis

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{v_2}{v_1} \frac{c_{1a}}{w_{2a}} \frac{\tau_1}{\tau_2}.$$

Ist die Teilung am Leitrad sehr groß gegenüber der Teilung am Laufrad, so muß der dem vollen Strom ausgesetzte Teil der Laufschaufeln eine Dampfmenge bewältigen, als ob $\tau_1 = 1$ wäre; man ist dann berechtigt, a_2 aus der letzten Gleichung mit dem Wert $\tau_1 = 1$ zu rechnen.

Eine Rückwirkung der Laufschaufeln auf den Austritt aus dem Leitrad ist, wie schon früher erwähnt, im allgemeinen bei Spalten von mehr als 3 mm Weite praktisch kaum zu beobachten.

13. Zahlenbeispiel.

Es sei eine einstufige de Lavalturbine zu entwerfen für 500 PS_e Leistung bei 10 kg/qcm abs. Eintritts-, 0,08 kg/qcm abs. Kondensatordruck, 300° Dampftemperatur. Wir wählen $\eta_{mech} = 0,95$ und erhalten

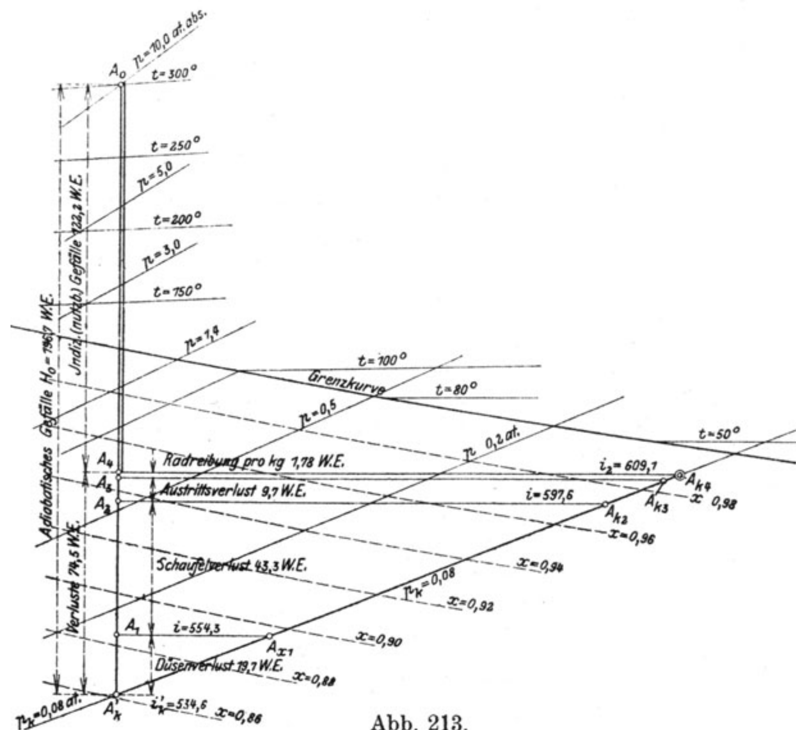


Abb. 213.
Zum Beispiel einer de Laval-Turbine.

$N_i = 500/0,95 = 526$ PS. Der Ausgangspunkt im Mollierdiagramm[1]), Abb. 213, ist als Schnittpunkt der Linien $p_1 = 10$ at und $t_1 = 300°$ C gegeben $= A_0$. Die Senkrechte bis auf den Druck $p_k = 0,08$ at ist

[1]) Mit Benutzung der Mollierschen Tafel vom J. 1906, aus der IV. Aufl. übernommen.

die adiabatische Expansionslinie und liefert in der Strecke $A_0 A_k'$ das adiabatische Gefälle $H_0 = 196{,}7$ k cal (auf der J-S-Tafel ist mm abzulesen), sowie den **theoretischen Dampfverbrauch** $G_0 = 632/196{,}7 = 3{,}21$ kg für die PS-st. Wir nehmen 10 v. H. Energieverlust in der Düse an und erhalten $\zeta H_0 = 0{,}1\ H_0 = 19{,}7$ k cal, die als Strecke $A_k' A_1$ vom Gesamtgefälle abgezogen und wagerecht auf die Linie p_k projiziert in A_{k1} den Dampfzustand am Ende der Düse ergeben. Aus dem Gefälle $A_0 A_1 = 177$ k cal folgt die Geschwindigkeit $c_1 = 91{,}5 \sqrt{177} = 1219$ m/sek. Nun ist die Umfangsgeschwindigkeit festzusetzen, wofür die angestrebte Höhe des Wirkungsgrades maßgebend ist. Wählen wir $\alpha_1 = 17^0$ und $\beta_1 = \beta_2$, während für ψ der aus der Erfahrung genommene Wert $\psi = 0{,}7$ gelten soll, so würde nach Gl. (10) $u_m = c_1 \cos \alpha_1/2 = 583$ m/sek folgen, was indes praktisch mit Rücksicht auf die Festigkeit der Radscheibe nicht ausführbar ist. Wir können vielmehr höchstens $u = 400$ m/sek erreichen, was mit $n = 10000$ als minutl. Umdrehungszahl des Rades einen Durchmesser $D = 764$ mm ergibt. Gl. (9) liefert nun (mit $\varphi^2 = 0{,}90$) einen **Wirkungsgrad am Radumfang** $\eta_u = 0{,}630$, mithin einen Verlust von $H_0 (1 - \eta_u) = 72{,}7$ kcal, den man auch einzeln aus dem Geschwindigkeitsplan berechnen kann. Man findet als

Düsenverlust ζH_0	19,7 kcal
Schaufelverlust $A(w_1^2 - w_2^2)/2g$ . . .	43,3 „
Auslaßverlust $A c_2^2/2g$	9,7 „
Insgesamt	72,7 kcal

Dürfte man die Radreibung vernachlässigen, so könnten das sekundliche **Dampfgewicht** und die **Schaufellänge** sofort ermittelt werden. Denn dann wäre η_u der innere Wirkungsgrad; man hätte $\eta_e = \eta_{mech} \cdot \eta_i = 0{,}95 \cdot 0{,}63 \simeq 0{,}60$ und der Dampfverbrauch für die eff. PS-st wäre $= G_0/\eta_e = 3{,}21/0{,}60 = 5{,}03$ kg, im ganzen also $G_{sek} = 500 \cdot 5{,}03/3600 = 0{,}698$ kg/sek. Nun liest man für den Zustandspunkt A_{k1} am Austritt aus der Düse den spezifischen Dampfinhalt $x_1 = 0{,}896$ ab, und da nach den Dampftabellen der Rauminhalt des trocken gesättigten Dampfes bei 0,08 kg/qcm = 18,4 cbm/kg ist, erhält man $v_1 = 18{,}4 \cdot 0{,}896 = 16{,}5$ cbm/kg. Die axiale Komponente von c_1 ist $c_{1a} = 360$ m, daher der axiale Reinquerschnitt $F_{1a} = G_{sek} v_1 / c_{1a} = 0{,}698 \cdot 16{,}5/360 = 0{,}0320$ qm $= 320 = \pi D a$, woraus die theoretische Schaufellänge bei Vollbeaufschlagung $a = 1{,}33$ cm. Den vollen Umfang mit den in der Herstellung teueren Düsen zu besetzen, wäre nicht wirtschaftlich, und wir entscheiden uns für die effektive Schaufellänge von 27 mm. Der gesamte axiale Düsenaustrittsquerschnitt würde bei unendlich dünnen Stegen und 25 mm Höhe den 13,3 : 25 = 0,532sten Teil des Umfanges einnehmen, infolge der Stegdicke entsprechend mehr, was bei der Konstruktion der Düse zu entscheiden ist.

Nun prüfen wir, ob die **Radreibung** einen bedeutenden Einfluß ausübt. Für den Zustandspunkt A_{k3} finden wir $v_3 = 17{,}8$ cbm/kg, also $\gamma_3 = 0{,}056$ kg/cbm, und indem wir 0,6 des Umfanges beaufschlagt voraussetzen, liefert unsere Radreibungsformel $N_r = 7{,}1$ PS, woraus die Reibungsarbeit für 1 kg Dampf $= (7{,}1 \cdot 75) : (427 \cdot 0{,}698) = 1{,}78$ kcal folgt und als $A_3 A_4$ im Mollierdiagramm aufgetragen ist. In Teilen des adiabatischen Gefälles macht hiernach die Radreibung 1,78 : 196,7 = rd. 0,9 v. H. aus, welch geringfügiger Betrag uns kaum veranlassen dürfte, die Schaufellängen zu berichtigen. Der innere Wirkungsgrad ist nun

$$\eta_i = \frac{196{,}7 - (72{,}7 + 1{,}78)}{196{,}7} = 0{,}621.$$

14. Die teilweise beaufschlagte Turbine.

Sobald die Rechnung bei der Vollbeaufschlagung zu kurze Schaufeln ergibt, geht man zur teilweisen Beaufschlagung über. Die Grenze der Schaufellänge ist nicht genau festgelegt und hängt von der Größe der Gesamtleistung ab, so daß bei 100 PS etwa 4 bis 6, bei 1000 PS etwa 10 bis 15, bei 10000 PS etwa 20 bis 25 mm als kleinste Länge gelten werden.

Wäre die Abhängigkeit der Schaufelreibung von der Länge und die der Ventilationsarbeit vom Beaufschlagungsgrade bekannt, so würde man die günstigsten Werte dieser Veränderlichen durch Rechnung bestimmen können. Diese Aufgabe ist heute noch unlösbar. Soweit der Beaufschlagungsgrad allein in Frage kommt, verweisen wir auf die in Abschn. 48 zitierte Untersuchung von Jasinsky[1]).

Neben der gewöhnlichen Ventilation tritt ein Sonderverlust der teilweisen Beaufschlagung durch die **Wirbelung beim Anfüllen einer leeren vor die Düsen tretenden Schaufel, und beim Entleeren der austretenden Schaufel auf.** So lange keine weiteren Versuche vorliegen, kann dieser so berücksichtigt werden, daß man für jede Schaufel am Anfang und Ende des beaufschlagten Leitradbogens einen Ausfall von etwa 10 bis 15 v. H. der auf diese Schaufeln entfallenden inneren Arbeit rechnet.

---

[1]) Mitt. üb. Forscharb., Berlin 1908, Heft 67.

58. Einstufige Druckturbine mit mehreren Geschwindigkeitsstufen.

a) Mit reiner Gleichdruckwirkung.

Hier wird durch eine einzige Entspannung die Dampfwärme in kinetische Energie umgesetzt und unter Einhaltung stets desselben Spaltdruckes in zwei oder mehr Laufkränzen nacheinander in mechanische Arbeit verwandelt, s. Abb. 214.

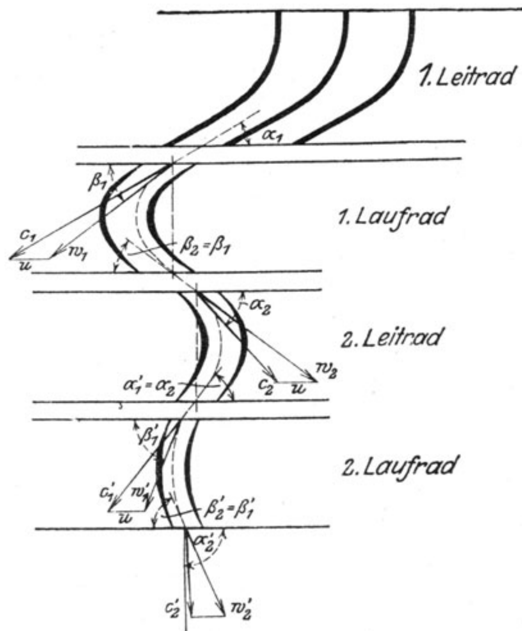


Abb. 214. Geschwindigkeitsstufen.

Die Vorgänge bis zum Austritt aus dem ersten Laufkranze bleiben unverändert wie bei der einfachen Druckstufe. Mit der Geschwindigkeit c_2 tritt der Dampf in die dicht neben dem Laufrad angeordnete 2. Leitschaufelreihe für die, wie auch für das 2. Laufrad, alle Größen durch die gleichen, aber mit einem Strich versehenen Buchstaben bezeichnet werden sollen. Der Winkel α_2 am Eintritt ist durch die Richtung von c_2 bestimmt. Sind die übrigen Winkel gewählt, so erhalten wir demnach, wenn man für die 2. Leit- und Laufschaufel die Widerstandszahl mit ψ' bezeichnet,

$$c_1' = \psi' c_2; \qquad w_1' = \text{Result. aus } [c_1' \text{ und } - u];$$
$$w_2' = \psi' w_1'; \qquad c_2' = \text{Result. aus } [w_2' \text{ und } + u]$$

$$\text{Verlust im Leitrad } Z_1' = (1 - \psi'^2)\frac{c_2^2}{2g}$$

$$\text{Verlust im Laufrad } Z_2' = (1 - \psi'^2)\frac{w_1'^2}{2g}.$$

Die Verluste müssen im Entropieschaubild in gleicher Weise eingetragen werden, wie diejenigen der ersten Stufe, und liefern dadurch auf der Linie p_k neue Zustandspunkte, an denen wir die spezifischen Rauminhalte v_1', v_2' ablesen. Zum Schluß würde man den Auslaßverlust Z_3' und die Radreibungsarbeit Z_r wie vorhin hinzuzufügen haben. Ganz gleichartig würden wir vorgehen bei einer dritten und vierten Stufe.

Leistung am Radumfang.

Bei zwei Geschwindigkeitsstufen ist

$$L_u = L_0 - Z_1 - Z_2 - Z_1' - Z_2' - Z_3$$

oder nach dem Satz vom Antrieb mit von selbst klaren Bezeichnungen

$$L_u = \frac{u}{g}\left[(c_{1u} - c_{2u}) + (c_{1u}' - c_{2u}')\right],$$

wobei die Umfangskomponenten algebraisch, d. h. mit dem richtigen Vorzeichen einzusetzen sind.

Wahl der Winkel. Der Wirkungsgrad am Radumfang.

Der Wirkungsgrad hängt unter sonst gleichen Umständen in weitgehendem Maße von der Wahl der Winkel ab. Wir können folgende Grenzfälle unterscheiden:

a) Gleichwinkelige Schaufeln, in dem Sinne, daß Ein- und Austritt unter gleichem Winkel erfolgen. Dies bedeutet nach Abb. 214

$$\beta_2 = \beta_1 \qquad \alpha_1' = \alpha_2 \qquad \beta_2' = \beta_1'.$$

Indem wir alle Geschwindigkeitsdreiecke um die Polsenkrechte auf eine Seite umklappen, entsteht Abb. 215.

Bei dieser Anordnung nimmt die Leistung der letzten Kränze stark ab. Günstiger in dieser Hinsicht ist die

b) Verkleinerung aller Auslaßwinkel und zwar im äußersten Grenzfalle bis auf den Wert von α_1, d. h.

$$\beta_2 = \alpha_1' = \beta_2' = \alpha_1,$$

während die Einlaßwinkel auf stoßfreien Eintritt eingestellt werden. Die Umklappung wie bei a) liefert Abb. 216. Infolge der Umklappung ist in diesen Abbildungen das Vorzeichen von c_{2u}, c_{2u}' schon umgekehrt, daher wird man in der Antriebsformel die Summe aller c_u nehmen, sofern alle auf dieselbe Seite der Senkrechten durch O zu liegen kommen.

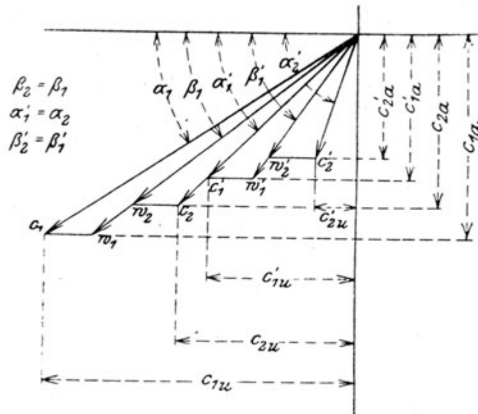


Abb. 215. Geschwindigkeitsplan bei winkelgleichen Schaufeln, d. h. $\beta_2 = \beta_1$.

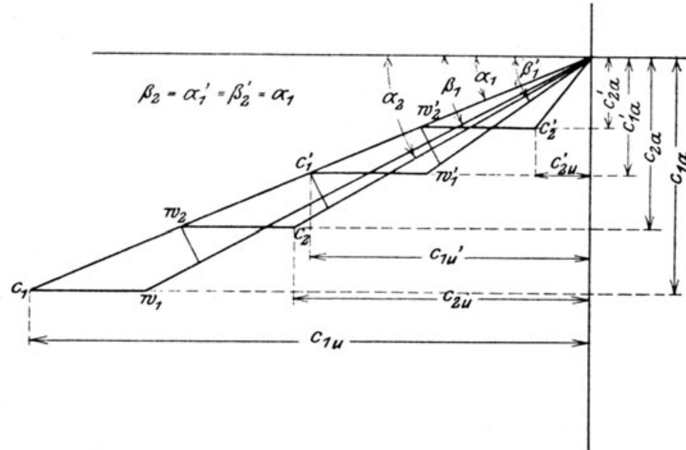


Abb. 216. Geschwindigkeitsplan bei verkleinerten Auslaßwinkeln.

Anordnung b) ergibt einen besseren Wirkungsgrad, allein im allgemeinen unausführbar starke Schaufelerweiterungen (s. u.).

Den Wirkungsgrad können wir für den Fall a) rechnerisch darstellen. In der Tat ist

$$\begin{aligned}
c_{1u} &= c_1 \cos \alpha_1 \\
c_{2u} &= w_2 \cos \beta_2 - u = \psi w_1 \cos \beta_1 - u = \psi (c_1 \cos \alpha_1 - u) - u = \psi (c_{1u} - u) - u \\
c_{1u}' &= c_1' \cos \alpha_1' = \varphi' c_2 \cos \alpha_2' = \varphi' c_{2u} \\
c_{2u}' &= \psi' (c_{1u}' - u) - u \\
&\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Hieraus entsteht durch schrittweises Einsetzen in die Antriebsformel

$$L_u = \frac{u}{g} [A c_1 \cos \alpha_1 - B u],$$

worin A und B von den Vorzahlen φ, ψ . . . abhängen. Ferner ist

$$\eta_u = \frac{L_u}{L_0} = 2 \left(\frac{c_1}{c_{th}}\right)^2 \left[A \cos \alpha_1 - B \frac{u}{c_1}\right] \left(\frac{u}{c_1}\right). \quad \dots\dots \quad (1)$$

So ist beispielsweise für zwei Geschwindigkeitsstufen, falls wir die Geschwindigkeitszahlen für die 1. Lauf-, für die 2. Leit- und die 2. Laufschaufel überall gleich, $= \psi$ voraussetzen

$$\eta_u = 2 \varphi^2 (1 + \psi) \left[(1 + \psi^2) \left(\cos \alpha_1 - \frac{u}{c_1}\right) - (1 + \psi) \frac{u}{c_1}\right] \frac{u}{c_1} \quad \dots\dots \quad (2)$$

Dieser Ausdruck erreicht einen Höchstwert bei

$$\frac{u}{c_1} = \frac{1 + \psi^2}{2 (2 + \psi + \psi^2)} \cos \alpha_1 \text{ und zwar ist } \eta_{max} = \frac{\varphi^2 (1 + \psi)(1 + \psi^2)^2}{2 (2 + \psi + \psi^2)} \cos^2 \alpha_1. \quad \dots \quad (3)$$

Schaulinien für ψ.

Da ψ von der Geschwindigkeit, jedenfalls von der Krümmung abhängt und in der 2. Stufe infolge kleinerer Umlenkungswinkel bessere Werte besitzen muß, ist für genauere Vergleiche die Annahme eines unveränderlichen ψ unzulässig und es bleibt nur der Weg der graphischen Rechnung übrig. Diese ermöglicht die Berücksichtigung eines noch so

verwickelten Gesetzes der Schaufelreibung. In Abb. 217 ist die Vorzahl ψ als in der Hauptsache vom Ablenkungswinkel $\vartheta = 180^0 - (\beta_1 + \beta_2)$ abhängig dargestellt, und zwar entspricht die mittlere Linie der in der IV. Auflage dieses Buches gemachten Annahme, die seither von Wagner[1]) innerhalb der Grenzen $\psi = 0{,}8 - 0{,}9$ bestätigt wurde. Die obere Linie ist eine Ergänzung der Wagnerschen Annahme für Überdruckschaufeln, und die untere eine zum Vergleich herangezogene Kurve mit ungünstigen Werten von ψ, die kleinen Dampfgeschwindigkeiten oder kurzen Schaufeln entsprechen könnte.

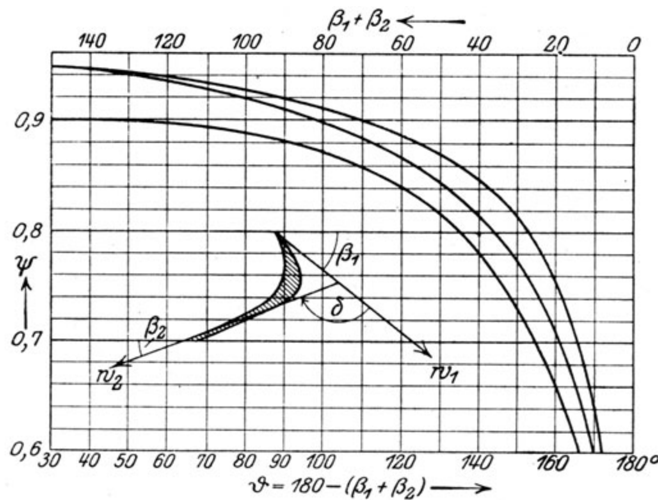


Abb. 217. Angenommene Abhängigkeit des ψ vom Umlenkungswinkel.

In Abschn. 61 bringen wir Schaulinien für ψ, die dem Einfluß der Ablenkung und der Strömungsgeschwindigkeit Rechnung tragen.

Um eine erste Übersicht über die Veränderlichkeit des Wirkungsgrades zu erhalten, sehen wir vom Einfluß der Geschwindigkeit vorläufig ab. Abb. 218 stellt die Wirkungsgrade mit Benutzung der mittleren Schaulinie in Abb. 217 dar, unter der Bedingung, daß $\varphi = 0{,}95$ unveränderlich ist, und daß alle Winkel jeweils auf stoßfreien Eintritt eingestellt werden, ferner daß man in

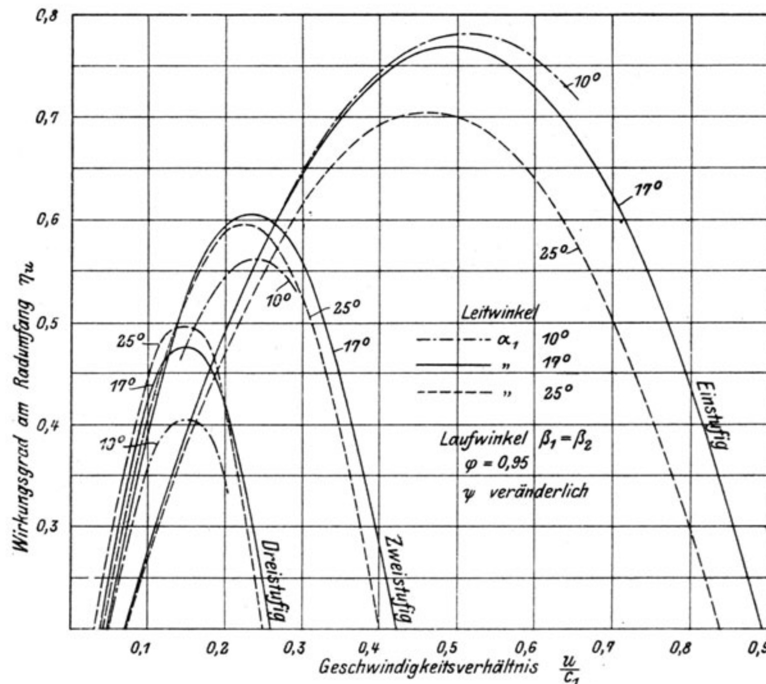


Abb. 218. Wirkungsgrade bei gleichgroßen Ein- und Austrittswinkeln $\beta_2 = \beta_1$.

Leit- und Laufrad Ein- und Austrittswinkel gleich macht, d. h. daß $\beta_1 = \beta_2$ $\alpha_1' = \alpha_2$; $\beta_2' = \beta_1'$ usf. sind. Diese Winkel nehmen, wie Abb. 215 zeigt, rasch zu. Der Winkel der 1. Leitschaufel wurde der Reihe nach $= 10, 17, 25^0$ gesetzt und beeinflußt die Wirkungsgrade erheblich. Besonders auffällig ist das Sinken des Wirkungsgrades mit zunehmender Stufenzahl.

---

[1]) Wirkungsgrade von Dampfturbinenbeschaufelungen. Berlin 1913.

Eine überraschende Besserung der Verhältnisse ergibt sich, wenn man im Sinne der **Abb.** 216 die Austrittswinkel passend verkleinert, wie zuerst Wagner a. a. O. gezeigt hat. Die in Abb. 219 veranschaulichten Kurven entsprechen folgenden Annahmen.

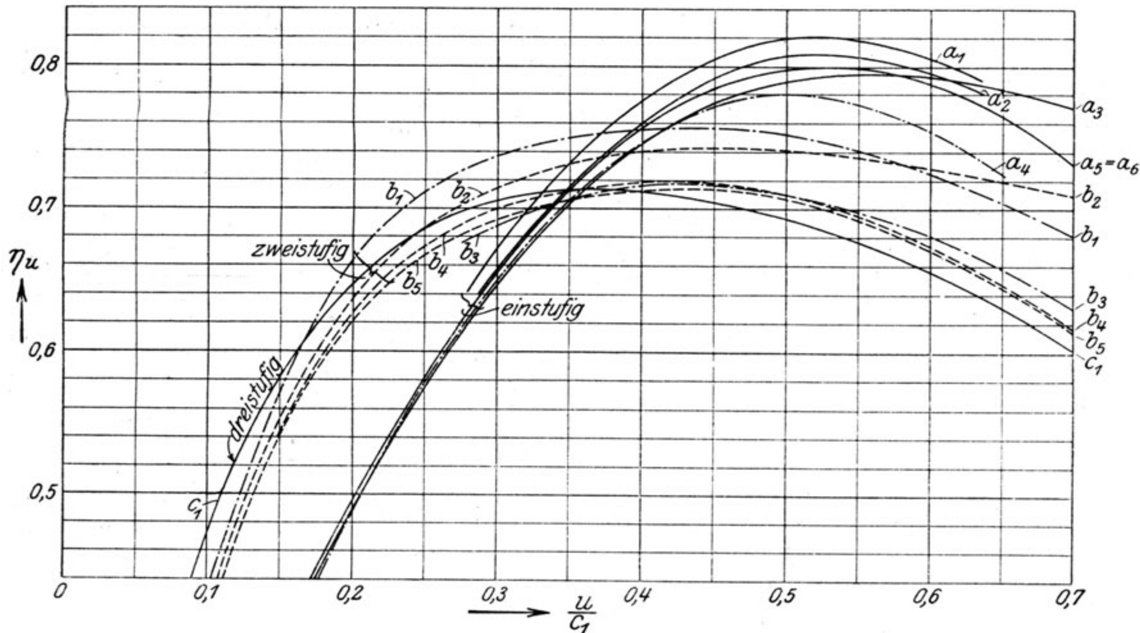


Abb. 219. Wirkungsgrade bei verkleinerten fest eingestellten Austrittswinkeln β_2.

Eine Geschwindigkeitsstufe.

Schaulinie	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
Leitradaustritt α_1	16° 42	16° 42	22°	10°	19° 18	16° 42
" tg α_1	0,300	0,300	0,404	0,176	0,350	0,300
Laufradaustritt β_2	16	16	26,07	$\beta_2 = \beta_1$	24° 14	21° 48
" tg β_2 . . .	0,287	0,287	0,490	—	0,450	0,400
Verwendete ψ-Kurve Abb. 217	obere	mittlere	mittlere	mittlere	mittlere	mittlere

Zwei Geschwindigkeitsstufen.

Schaulinie	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
Erster Leitradaustritt α_1 . . .	22	22	22	19° 18	16° 42
" " tg α_1 . .	0,404	0,404	0,404	0,350	0,300
" Laufradaustritt β_2 . . .	26° 07	26° 07	26° 07	24° 14	21° 48
" " tg β_2 . .	0,490	0,490	0,490	0,450	0,400
Zweiter Leitradaustritt α_1' . . .	36° 08	30° 08	30° 08	33° 03	31° —
" " tg α_1' . .	0,580	0,580	0,580	0,651	0,601
" Laufradaustritt β_2' . .	34° 13	34° 13	34° 13	45°	45°
" " tg β_2' . .	0,680	0,680	0,680	1,000	1,000
Verwendete ψ-Kurve Abb. 217	obere	mittlere	untere	mittlere	mittlere

Schaulinie c_1 entspricht drei Geschwindigkeitsstufen mit folgenden Winkeln:

$\alpha_1 = 22^0$ $\beta_2 = 26^0\,07$ $\alpha_1' = 30^0\,08$; $\beta_2' = 34^0\,13$ $\alpha_1'' = 40^0$ $\beta_2' = 45^0$.

In allen Schaulinien sind auch hier die Eintrittswinkel auf stoßfreien Eintritt eingestellt vorausgesetzt; die **Austrittswinkel bleiben** (mit Ausnahme von a_4) **unverändert.** Bemerkenswert ist der flache Verlauf der Kuppe an den Schaulinien b und c und der hohe Wirkungsgrad insbesondere bei b_1 und b_2. Der Unterschied dieser beiden lehrt, wie empfindlich der Wirkungsgrad gegen kleine Änderungen der Vorzahl ψ ist.

Daß die hier ermittelten Wirkungsgrade auch praktisch erreichbar sind, wird durch Forner[1]) bestätigt, der aus Messungen des Märkischen Überwachungsvereins an einer Gegendruckturbine der Allgem. Elektriz.-Gesellsch. mit einem zweikränzigen Rad für $c_{th} = 761$ m/sek $u = 168$ m/sek, auf 126° Überhitzung umgerechnet, bei 10,5 v. H. elektrischen und mechanischen Verlusten (einschließlich Radreibung in Dampf von 4,02 at abs. Druck) einen Wirkungsgrad von 70,5 v. H. am Radumfang feststellt. Mit einem $\varphi = 0{,}95$ entspricht dies dem Verhältnis $u/c_1 = 0{,}23$, und der Punkt übertrifft sogar noch den zugehörigen Wert der Schaulinie b_1.

Wenn die Abbildungen auch beweisen, daß der höchst erreichbare Wirkungsgrad bei Geschwindigkeitsstufen geringer ist als bei reinen Druckstufen, so kommen doch ihre Vorteile voll zur Geltung, wenn man große Gefälle mit kleinen Umfangsgeschwindigkeiten bewältigen muß, wie z. B. bei der Schiffsturbine. Bei einem Verhältnis $u : c_1 = 0{,}2$ liefert beispielsweise die reine Druckstufe ein η von 0,5, während mit zwei Geschwindigkeitsstufen 0,66 erreichbar ist. Auch sonst gibt es Fälle besonderer Art, wo Vorteile konstruktiver oder betriebstechnischer Art die Nachteile der schlechteren Dampfausnützung durch die Geschwindigkeitsstufen aufheben, wie wir später zu besprechen haben werden.

Der Dampfverbrauch

ist ähnlich zu beurteilen, wie bei der einfachen Druckstufenturbine.

Die Querschnitte

oder die Schaufellängen folgen aus der Durchflußgleichung, und zwar für die axialen Komponenten und axialen Reinquerschnitte

$$G_{sek} = \frac{F_{1a} c_{1a}}{v_1} = \frac{F_{2a} w_{2a}}{v_2} = \frac{F'_{1a} c'_{1a}}{v_1'} = \frac{F'_{2a} w'_{2a}}{v_2'} = \ldots$$

oder

$$\frac{a_1 c_{1a}}{v_1} = \frac{a_2 w_{2a}}{v_2} = \frac{a_1' c'_{1a}}{v_1'} = \frac{a_2' w'_{2a}}{v_2'} .$$

Aus diesen theoretischen Längen a_1, a_2, a_1', a_2' erhält man wie üblich die wirklichen Längen.

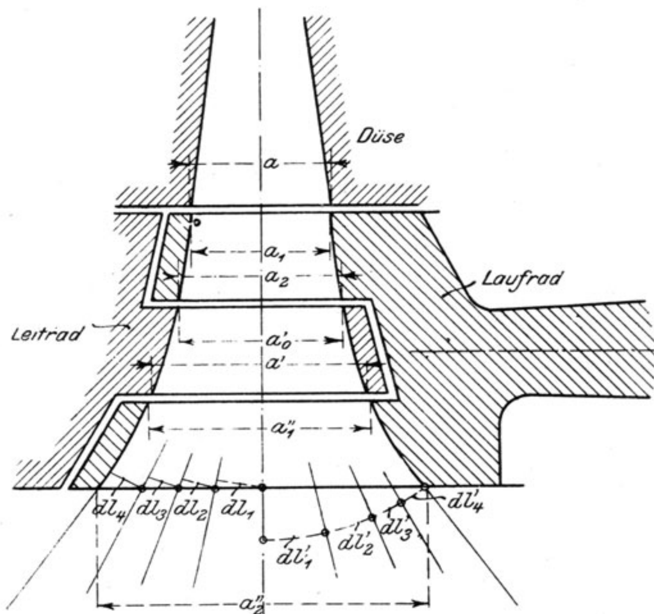


Abb. 220. Grenzen für die Schaufelerweiterung.

Die Strömung in stark erweiterten Schaufeln wie Abb. 220 ist ein verwickelter Vorgang, da infolge der Krümmung der Bahnen im mittleren Faden ein höherer Druck herrschen muß als seitlich. Allein bei Unterschallgeschwindigkeit muß der Druck an der Austrittskante überall auf den der Umgebung sinken. Die Stromfäden sind dort daher geradlinig, aber in der Abwicklung eines zylindrischen Schnittes nicht parallel, wie bei der gewöhnlichen Schaufel. Wären sie parallel, so müßte wegen der divergenten Seitenwände eine Ausdehnung wie in einer Düse mit darauffolgendem Verdichtungsstoß eintreten. Da aber am Austritt wohl ausnahmslos Unterschallgeschwindigkeit herrscht, sind Stöße oder Schwingungen ausgeschlossen. Der Strahl muß sich vom Schaufelrücken ablösen und derart konvergent verlaufen, daß der Einfluß der seitlichen Divergenz aufgehoben wird.

Für die Berechnung der Querschnitte wird es zulässig sein, w_2 überall gleich vorauszusetzen und die Größe der elementaren Strahlbreiten dl_1, dl_2 ... (Abb. 220) als „Schaufellänge" anzunehmen. Der „Normalquerschnitt" $dl_1'\, dl_2'$ ... müßte dasselbe ergeben, wenn die richtige Strahldicke eingesetzt wird.

In besonders wichtigen Fällen müßte auch der kinetische Auslaßverlust durch Summation über alle Elementarstrahlen gebildet werden. Man zerlegt nach Abb. 220a die am Rande das

[1]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1919, S. 78.

Schaufelprofil tangierende Geschwindigkeit c_1 beim Eintritt in die Laufschaufel in die Komponenten c_{1t}, die in der Tangentialebene eines Zylinderschnittes gelegen ist, und in die radiale Komponente c_{1r}.

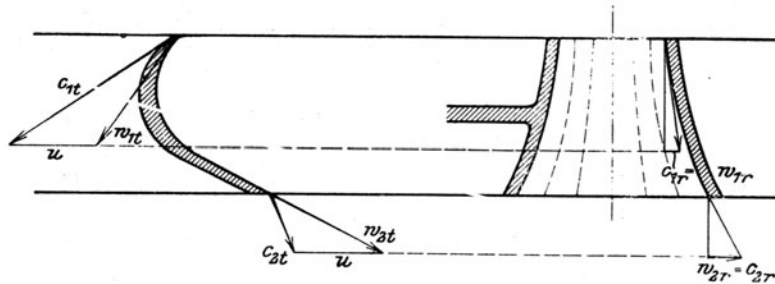


Abb. 220a. Zusätzliche Verluste bei starker Schaufelerweiterung.

Hierauf erhält man w_{1t} = Result. $(c_{1t}, -u)$ und $w_{1r} = c_{1r}$, somit $w_1^2 = w^2_{1t} + w^2_{1r}$. Nun ist $w_2 = \psi w_1$ mit den Komponenten w_{2t} und w_{2r}, also c_{2t} = Result. $(w_{2t}, + u)$ und $c_{2r} = w_{2r}$, somit schließlich $c_2^2 = c^2_{2t} + c^2_{2r}$, und ähnlich für die übrigen Stromfäden.

b) Mit leichter Überdruckwirkung.

Die soeben geschilderte Schwierigkeit, daß die Abnahme der axialen Geschwindigkeitskomponente eine starke Erweiterung der Schaufeln bedingt, führt von selbst dazu, den Dampf nicht gleich bis auf den Gegendruck zu entspannen, sondern ihn mit leichtem Überdruck in den ersten oder einen folgenden Radkranz eintreten zu lassen, um in den Schaufeln eine Beschleunigung zu erhalten und deren Länge zu vermindern. Selbstverständlich wird infolge des Überdruckes ein Undichtheitsverlust durch die Spalte auftreten, also ist die Maßnahme ein zweischneidiges Schwert. Da indes anderseits die relativen Geschwindigkeiten, mithin die Reibungsverluste in den ersten Stufen ermäßigt werden, kann, wie Versuche (s. u.) zeigen, ein Reingewinn erzielt werden.

In Ermangelung von Versuchsunterlagen kann der Undichtheitsverlust durch die Rechnung nur mit roher Annäherung veranschlagt werden. Es seien p_1 p_2 p_3 . . . die zunächst willkürlich festgelegten Pressungen in den aufeinanderfolgenden Spalten, p_k der Druck in der Umgebung des Rades. Die Düse möge den Dampf vom Anfangsdruck p_0 genau auf p_1 entspannen. Da die Schaufel wegen des Sicherheitsspieles immer breiter sein muß als die Düse, wird der Strahl gemäß Abb. 221 zunächst ganz in die erste Laufschaufel hineintreten. Der durch Undichtheit abströmende Teil wird, wie angedeutet, erst nach mehrfachen Richtungsänderungen mit Wirbelung in den Spalt f' eintreten, den wir sowohl nach unten wie nach oben frei voraussetzen. Die Undichtheitsmenge, die verloren geht, kann jedoch offenbar nicht so gerechnet werden, als ob der Dampf mit dem Überdruck $p_1 - p_k$ frei abströmen würde. Es wird vielmehr nur ein Bruchteil des Höchstwertes, den wir vielleicht auf $^1/_2$, $^1/_3$, ja $^1/_5$ schätzen dürfen, verloren gehen. Die übrigbleibende Menge wird von der relativen Eintrittsgeschwindigkeit w_1 auf die Geschwindigkeit w_2 beschleunigt, die wir im Einklang mit der Behandlung der Gleichdruckschaufeln wie folgt ermitteln können. In der Laufschaufel entspricht dem Druckgefälle $p_1 - p_2$ ein aus der Entropietafel zu entnehmendes adiabatisches Gefälle von h kg/cal; die theoretische Ausflußgeschwindigkeit müßte somit der Gleichung

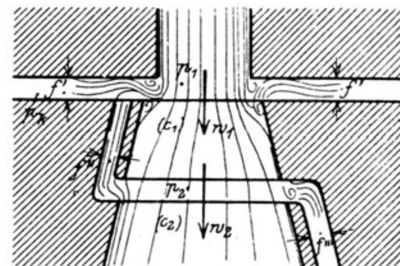


Abb. 221. Verhältnisse bei leichtem Überdruck.

$$A\,\frac{w^2_{th}}{2g} = A\,\frac{w_1^2}{2g} + h$$

genügen. Wäre $h = 0$, so läge eine Gleichdruckschaufel vor, bei der mithin theoretisch $w_{2th} = w_1$ wäre, während man in der Wirklichkeit nur $w_2 = \psi w_1 = \psi w_{th}$ erreicht. In gleicher Weise werden wir auch bei Überdruck $w_2 = \psi w_{th}$ setzen. Dann ist der kinetische Energieverlust $(w_{th}^2 - w_2^2)/2g = (1 - \psi^2)\, w_{th}^2/2g$, und wir werden, da wegen der Kleinheit von h die Geschwindigkeiten gegenüber der Gleichdruckschaufel nicht wesentlich verschieden sind, auch für die Beizahl ψ denselben Wert anwenden dürfen wie dort. Aus w_2 ergibt sich der Austrittsquerschnitt und die absolute Austrittsgeschwindigkeit c_2, mit der der Dampf in die nächstfolgende Leitschaufel eintritt. Hier erleidet er eine Störung, da eine gewisse Undichtheitsmenge durch das Spiel zwischen Laufkranzdeckring und dem Gehäuse, das einen Querschnitt f'' ausmachen möge, hinzuströmt und weil durch den Querschnitt f''' Abb. 221 eine gewisse Menge abströmt. Man müßte die Betrachtungen, die wir für den Eintritt in die Laufschaufel gemacht

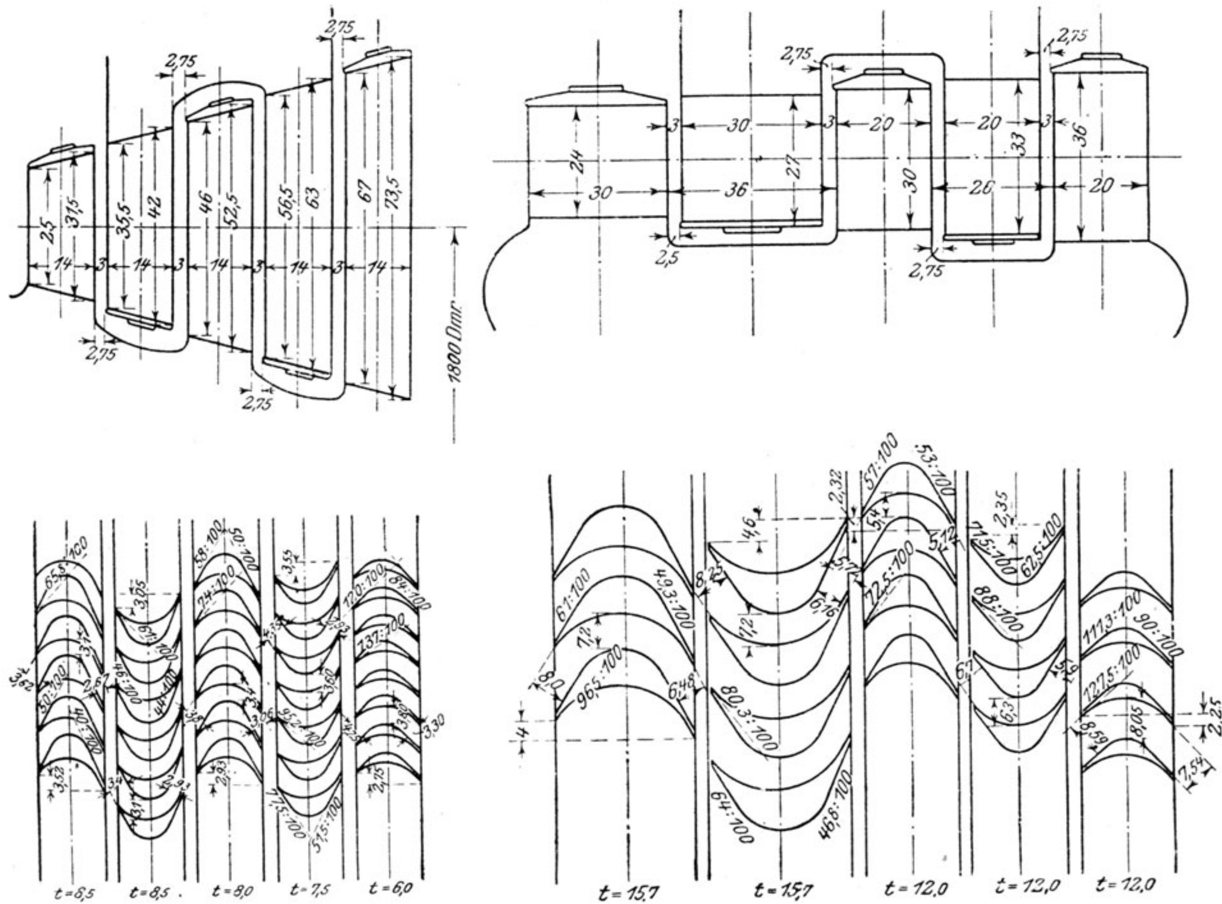


Abb. 222 u. 223. Abb. 224 u. 225.

Schaufelung der A.E.G.-Versuchsturbinen.

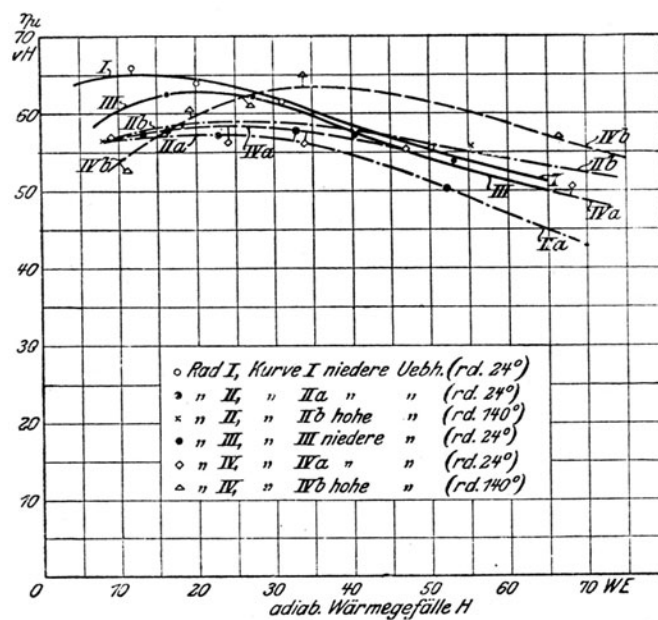


Abb. 226. Versuchsergebnisse der dreikränzigen A.E.G.-Räder

haben, sinngemäß wiederholen und die Rechnung auf derselben Grundlage weiterführen. Augenscheinlich wird sich diese zeitraubende Arbeit nur bei den ersten Versuchsausführungen lohnen, während man sich für die laufende Herstellung mit auf Grund der Erfahrung gewonnenen **gröberen Schätzungen begnügen wird.**

Versuche über das Verhalten von mehrkränzigen Rädern wurden von der Allgem. Elektriz.-Gesellsch. i. J. 1907 veranstaltet. Über die wertvollen Ergebnisse berichtet Baer[1]).

Der mittlere Schaufeldurchmesser war 1800 mm. Die Paralleldüsen des ersten Leitrades beaufschlagten 88 v. H. des ganzen Umfanges und hatten 20,2 mm radiale Höhe bei $\mathrm{tg}\,\alpha_1 = 0{,}36$.

Rad Nr. I besaß von 30 auf 20 mm abnehmende (axiale) Schaufelbreite und von 24 auf 70 mm zunehmende Schaufellänge. Bei Rad Nr. II war die Breite durchweg 14 mm, die Länge 25 bis 37,5 mm. Die Beschaufelung des Rades III ist in Abb. 222 und 223 diejenige des Rades IV in Abb. 224 und 225 dargestellt. Der Anfangsdruck war stets 0,61 at abs., die Anfangstemperatur ist in Abb. 226 eingeschrieben. Die stündlich durchströmende Dampfmenge war bei kleiner Überhitzung 10800 kg, bei großer Überhitzung 9300 kg, sofern der Gegendruck unter dem kritischen Werte lag.

In Abb. 226 ist der Wirkungsgrad am Radumfang als Abhängige des Wärmegefälles dargestellt, und zwar je für das Verhältnis $u/c_0 = 1/_8$, wo c_0 die adiabatische Geschwindigkeit bedeutet. Dem kritischen Gegendruck entspricht ein Wärmegefälle von rd. 30 kg/cal., bei darunter liegenden Gefällen wird die Leitvorrichtung schlecht ausgenützt. Das beste Ergebnis muß daher Rad Nr. IV bei hoher Überhitzung zugesprochen werden, welches insbesondere bei **die Schallgrenze weit überschreitenden Gefällen einen lange hoch bleibenden Wirkungsgrad** aufweist. Bei kleinerem Verhältnis u/c_0 nimmt der Wirkungsgrund allgemein ab.

Durch nähere Untersuchung der Zustandsänderung des Dampfes in den Rädern überzeugt man sich leicht, daß Rad I und III ziemlich mit Gleichdruck, Rad II und IV mit ausgesprochenem Überdruck gearbeitet haben. Nach Abb. 226 wäre letzteres für hohe Überhitzung das weitaus Vorteilhaftere. Warum aber bei kleiner Überhitzung der Gewinn in das Gegenteil umschlägt, ist nicht leicht anzugeben. Eine gründliche Durcharbeitung dieser Versuche, die mit einem großen Aufwand an Mitteln durchgeführt wurden, wäre dringend zu wünschen, stellt aber eine ungemein zeitraubende Arbeit dar.

59. Mehrstufige Gleichdruckturbine.

Die Ausführbarkeit einer Turbine mit bloß einmaliger Entspannung findet eine Grenze in der Höhe der erforderlichen Umfangsgeschwindigkeit und der Größe der Scheibendurchmesser. Eine Turbine, die beispielsweise mit 12 at abs. Anfangsdruck, 300° C Anfangstemperatur und 0,05 at abs. Enddruck arbeiten soll, würde eine theoretische Endgeschwindigkeit von rd. 1340 m/sek aufweisen, demgemäß müßte, um den besten Wirkungsgrad zu erreichen, das Laufrad etwa 600 m/sek Umfangsgeschwindigkeit erhalten. Ein derartiges Rad ist aber praktisch schlechterdings unausführbar. Die bei Umlaufgeschwindigkeiten von dieser Höhe entwickelten Fliehkräfte sind in der Tat so gewaltig, daß wir bis heute trotz der Benutzung vorzüglicher Baustoffe, die ungemein hohe Beanspruchungen zulassen, kaum über 400 m/sek Umfangsschnelle hinausgekommen sind. Wählen wir aber Geschwindigkeitsabstufung, so sinkt der Wirkungsgrad erheblich.

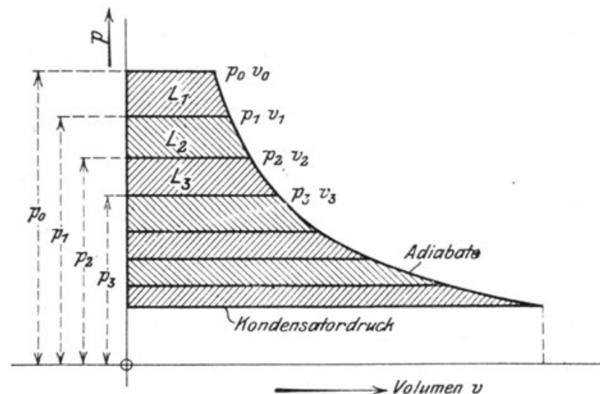


Abb. 227. Aufteilung der adiabatischen Arbeitsfläche auf mehrere Stufen.

Daraus folgt, daß eine Turbine dieser Art den Energieinhalt des Dampfes nur bei mäßigeren Expansionsgrenzen wirtschaftlich gut auszunützen vermag. Auch dann tritt noch der Nachteil außerordentlich hoher Umlaufzahlen oder bedeutender Raddurchmesser auf So erhalten wir, um bei 1500 Umläufen in der Minute 400 m/sek Umfangsgeschwindigkeit zu erreichen, einen Durchmesser von

$$60 \cdot 400 : 1500 \cdot 3{,}14 = \text{rd. } 5{,}1 \text{ m},$$

was bei dem gewaltigen Gewicht des Rades auch bei 5000 PS-Leistung wirtschaftlich unzulässig wäre. Wollten wir umgekehrt, bei kleineren Kräften, ein Rad von bloß 1 m zulassen, so müßte die Umlaufzahl auf $60 \cdot 400 : 3{,}14 =$ rd. 7600 in der Minute erhöht werden, und diese ist nicht unmittelbar verwendbar.

[1]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1916, S. 669.

Diese Schwierigkeiten werden umgangen, indem man das gesamte Gefälle in „Stufen“ zerlegt, und jede Stufe durch eine besondere, aber auf derselben Achse befindliche Turbine bewältigt.

Wie das gesamte Druckgefälle auf die einzelnen Turbinen aufgeteilt werden soll, hängt von Umständen ab, die erst bei den einzelnen Turbinensystemen besprochen werden können. Ist hierüber entschieden, so kann man sich nach Abb. 227 die auf die einzelnen Stufen entfallenden verfügbaren Arbeiten L_1, L_2, L_3 usw. anschaulich als Flächen darstellen

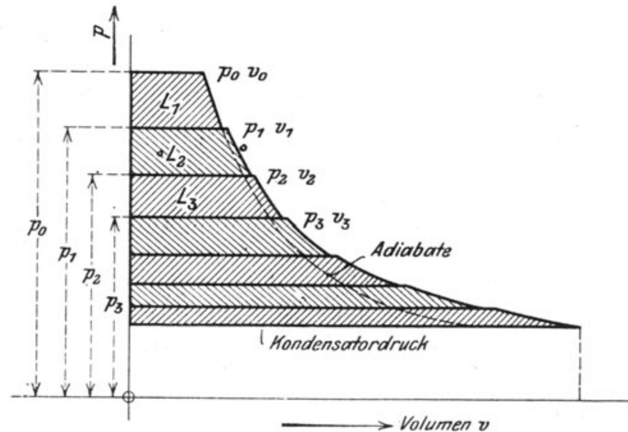


Abb. 228. Raumzunahme infolge der Reibungswärme.

Die Berechnung der einzelnen Turbinen gestaltet sich besonders einfach, wenn jede Turbine in einem eigenen Gehäuse oder einer Kammer so eingeschlossen ist, daß die Auslaßgeschwindigkeit beim Übergang des Dampfes zur nächsten Kammer infolge Wirbelung vernichtet wird. Dabei muß in der Zustandskurve die Vergrößerung des Rauminhaltes in Betracht gezogen werden, welche die in Wärme rückverwandelte Auslaßenergie hervorruft, wie in Abb. 228 durch die aufeinanderfolgenden Sprünge angedeutet wurde.

Bequemer als im p-v-Diagramm werden jedoch die Rechnungen im Entropiebild erledigt, zu dem wir nun übergehen.

a) Die Zustandsdarstellung.

Wir betrachten zunächst eine A n o r d n u n g, b e i d e r d i e A b f l u ß g e s c h w i n d i g k e i t c_2 i r g e n d e i n e s R a d e s d u r c h W i r b e l u n g n a h e z u v o l l k o m m e n v e r n i c h t e t w i r d.

Der Anfangsdruck vor dem ersten Leitrad sei p_1; die Zwischendrucke, auf die der Dampf in den einzelnen Stufen entspannt wird, p_2, p_3, p_4 . . .

Das Rad der ersten Stufe wird entworfen, wie in den vorigen Abschnitten erläutert wurde. Die gesamte in Wärme umgewandelte Verlustgröße ist

$$Z = \frac{c_{th}^2 - c_1^2}{2g} + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2g} + \frac{c_2^2}{2g} + Z_r \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

wenn wieder c_{th} die theoretische Geschwindigkeit bezeichnet. Suchen wir im Entropiebild (Abb. 229) auf der Linie $p_2 =$ konst. den Punkt A_2, dessen Wärmeinhalt

$$i_2 = i_2' + AZ \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

ist, wobei i_2' der verlustfreien Ausdehnung (A_2') entspricht, so erhalten wir den Endzustand der ersten Stufe. Die Verlustwärme wird durch die Fläche

$$A_2' A_2 B_2 B_2' = AZ = Q_z$$

dargestellt. Z_1 i s t n i c h t i m g a n z e n v e r l o r e n, weil der Dampf noch in den nachfolgenden Rädern arbeitet. Durch die Umwandlung der Widerstandsarbeit in Wärme hat die Entropie für 1 kg Dampf eine Steigerung um den Betrag $\Delta s = B_2' B_2$ erfahren. Ist $C_2 B_2 = T_k$ die Temperatur, die dem Kondensatordruck entspricht, so stellt nur $\Delta s \cdot T_k =$ Fläche $C_2' C_2 B_2 B_2'$ d e n A r b e i t s v e r l u s t AZ_1 in kcal dar, den die beschriebene nicht umkehrbare Verwandlung verursacht hat.

Die durch das erste Rad in innere Arbeit umgewandelte Wärmemenge für 1 kg Dampf ist

$$h_{1i} = i_1 - i_2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

Die verfügbare Arbeit ist

$$h_{10} = i_1 - i_2' \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

Das Verhältnis

$$\eta_{1i} = \frac{h_{1i}}{h_{10}} = \frac{i_1 - i_2}{i_1 - i_2'} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (5)$$

bildet alsdann, wie wir sagen können, den inneren Einzelwirkungsgrad dieser ersten Stufe, für den man auch die bei der einstufigen Turbine entwickelten Ausdrücke verwenden kann. A_2 bildet den Ausgangspunkt für die zweite Stufe, mit der wir ähnlich verfahren.

Hat man auf diese Weise alle Räder durchgerechnet, so wird der Dampfzustand beim Kondensatordruck ermittelt, so zwar, daß man die Austrittsenergie $c_2^2 : 2g$ auch in Wärme verwandelt denkt. Ist der entsprechende Wärmeinhalt i_k, so wurde im ganzen für ein kg Dampf eine innere Arbeit

$$L_i = \frac{1}{A}(i_1 - i_k) \quad \ldots \ldots (6)$$

gewonnen. Hieraus folgt

$$N_i = \frac{G_{sek} L_i}{75} \quad \ldots \ldots (7)$$

Sei i_k' der Wärmeinhalt bei adiabatischer Expansion auf den Kondensatordruck (Punkt C_2' in Abb. 229), so ist $i_1 - i_k'$ das gesamte verfügbare Arbeitsvermögen, $i_1 - i_k$ aber die gewonnene Arbeit, somit

$$\eta_i = \frac{i_1 - i_k}{i_1 - i_k'} \quad \ldots \ldots (8)$$

der innere Wirkungsgrad der ganzen Turbine.

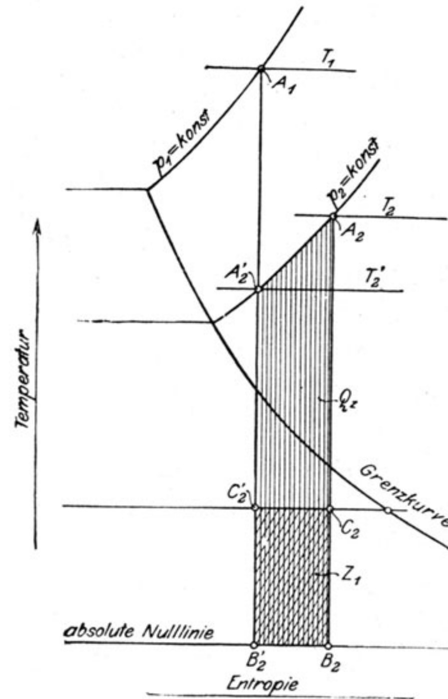


Abb. 229. Zustände im Entropieschaubild bei mehrstufiger Ausdehnung.

Die effektive Arbeit ist

$$L_e = \eta_{mech} L_i \quad \text{und} \quad N_e = \eta_{mech} N_i \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (9)$$

und der Dampfverbrauch in kg für die PS_e-st

$$G_e = \frac{632}{A L_e} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (10)$$

b) Betrag der rückgewinnbaren Reibungswärme.

Von der Verlustwärme AZ der ersten Stufe wird, wie oben bemerkt (s. Abb. 229), der Betrag $A_2' A_2 C_2 C_2'$ in den folgenden Stufen ausgenützt, ein Wiedergewinn, der bei hydraulischen Stufenturbinen nicht vorkommt, weil die Erwärmung das Wasser zur Leistung einer Expansionsarbeit nicht befähigt. Dieser Wiedergewinn hat die bemerkenswerte Folge, **daß eine Turbine, deren Stufen alle mit demselben Einzelwirkungsgrade entworfen sind, einen besseren Gesamtwirkungsgrad ergibt als die einzelne Stufe.**

Die Größe dieses Unterschiedes zu kennen ist für Überschlagsentwürfe wichtig, deshalb wurde derselbe für den Anfangsdruck von 12 at abs. einmal bei Sättigungs-, dann bei 304° Überhitzungstemperatur und 0,1 at abs. Vakuumdruck für Stufenzahlen von 1—12 ermittelt. In Abb. 230 ist die Ordinate die Zahl der Hundertstel, um die der Gesamtwirkungsgrad zunimmt, als Funktion der Einzelwirkungsgrade bei 12 Stufen dargestellt, und wir bemerken, daß bis zu einer gewissen Grenze die Zunahme um so größer ist, je

schlechter man den Dampf in der Einzelstufe ausnützt, was darin seine Erklärung findet, daß mehr Verlustwärme zur nachträglichen Arbeit herangezogen wird. Der Wert Null ist

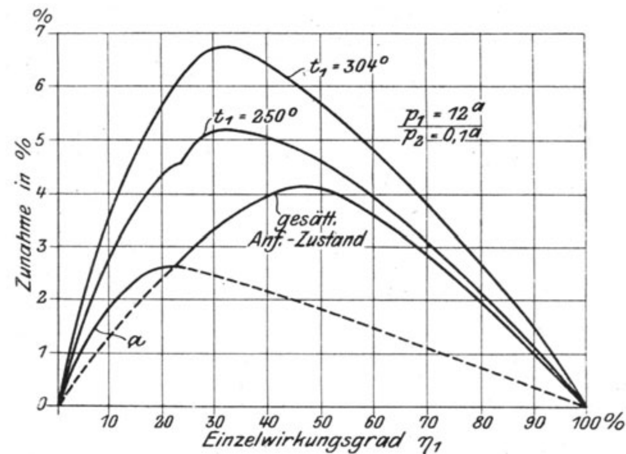
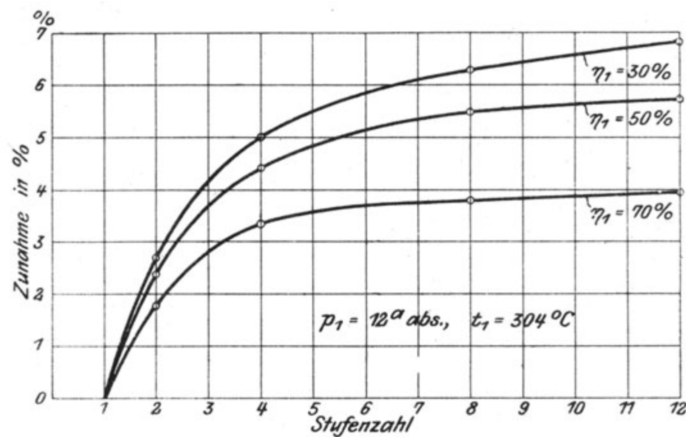


Abb. 230. Verbesserung des Wirkungsgrades durch die rückgewinnbare Reibungswärme.

hingegen beiden gemeinsam. Bei Überhitzung ist der Unterschied größer, da das Temperaturgefälle der Expansion größer ist. Für den Kurvenzweig a verläuft die Zustandskurve trotz



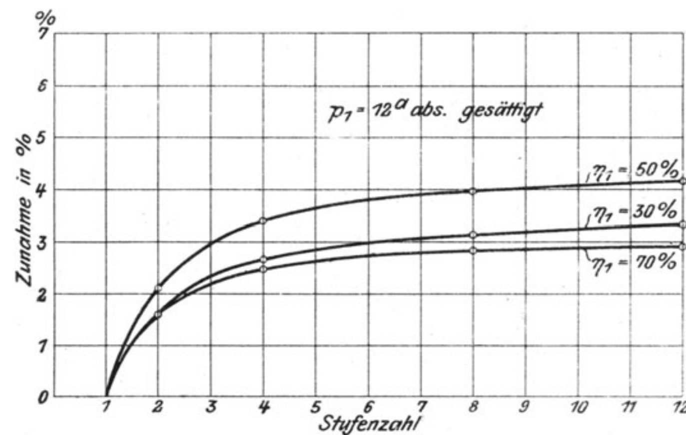


Abb. 231. Verbesserung des Wirkungsgrades durch rückgewonnene Reibungswärme.

gesättigten Anfangszustandes im Überhitzungsgebiet, daher der Knick bei 22 v. H. In Abb. 231 ist die Zunahme in Abhängigkeit von der Zahl der Stufen, einmal mit, einmal ohne Überhitzung dargestellt. Naturgemäß wächst die Ausnützung mit vergrößerter Stufenzahl.

In Abb. 232 stellt die schief schraffierte Fläche q_0 das ursprüngliche adiabatische Gefälle einer einzelnen Zwischenstufe dar; q' (senkrecht schraffiert) ist der hinzutretende verfügbare Anteil von der Verlustwärme der vorhergehenden Stufen, $q_0 + q'$ ist daher das verfügbare, d. h. adiabatische Einzelgefälle, das mit η_{i1} multipliziert die nutzbare Einzelleistung

$$AL_{i1} = \eta_{i1}(q_0 + q') \quad . \quad . \ (1)$$

ergibt. Setzen wir η_{i1} unveränderlich voraus, so ergibt die Summation über alle Stufen

$$AL_{it} = \eta_{i1}\Sigma(q_0 + q') = \eta_{i1}(Q_0 + Q') \quad . \quad . \ (2)$$

worin nun L_{it} die gesamte innere Arbeit, Q_0 das ursprüngliche adiabatische Gesamtgefälle, Q' die gesamte rückgewinnbare Wärme bedeutet. Sofern η_{it} den inneren Gesamtwirkungsgrad bezeichnet, muß aber

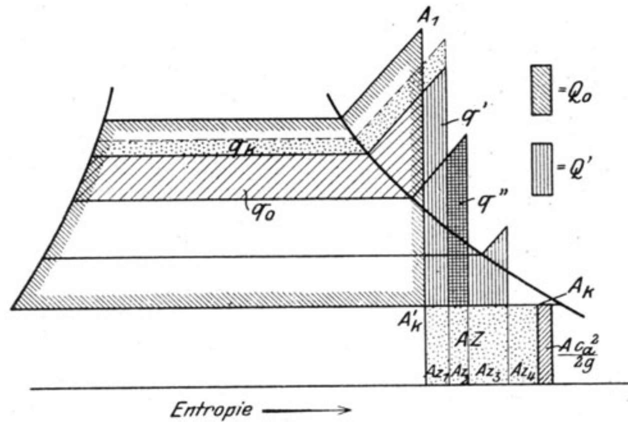


Abb. 232. Die rückgewinnbare Reibungswärme.

$$AL_{it} = \eta_{it}Q_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \ (3)$$

sein, und wir erhalten aus (2) und (3)

$$\eta_{it} = \eta_{i1}\left(1 + \frac{Q'}{Q_0}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \ (4)$$

Es ist zweckmäßig, sich Gl. (2) wie folgt in Worten auszusprechen: Die Summe der adiabatischen Einzelgefälle ist um den Betrag der rückgewinnbaren Wärme größer als das ursprüngliche adiabatische Gesamtgefälle. Dies ist übrigens an sich klar, da die Verlustwärme irgendeiner Stufe für die nächstfolgende dieselbe Rolle spielt, als wäre sie umkehrbar dem Dampfe von außen zugeführt worden.

Nachdem, wie wir gesehen haben, der Unterschied nur wenige Hundertteile ausmacht, so könnte für Näherungsrechnungen die Summe der adiabatischen Einzelgefälle dem Gesamtgefälle gleichgesetzt werden.

c) Einfluß der Radreibung.

Untersucht man die Veränderung des bei der einstufigen Turbine (Abschn. 57) entwickelten Ausdruckes für den Verlust an Wirkungsgrad infolge der Radreibung

$$\zeta_r = \varrho\xi^5 \quad \text{mit} \quad \varrho = \frac{600\,g\,\beta_0\,\varphi^2\,\gamma\,c_1^{\,3}}{G_{sek}\,\omega^2}$$

und hält man einen bestimmten Anfangszustand fest, während der Gegendruck, also c_1 und γ, verschiedene Werte annehmen, so zeigt sich, daß mit steigendem c_1 der Verlust wächst (bis der Enddruck etwa auf ein Fünftel des Anfangsdruckes gesunken ist) und dann wieder abnimmt. Wir haben also den Satz: Die Einbuße an Wirkungsgrad, die die Radreibung bei unveränderlich gehaltenem Verhältnis $u:c_1 = \xi$ verursacht, ist klein, wenn man c_1 entweder ganz klein oder ganz groß wählt. Die Einbuße wäre Null bei der unendlich vielstufigen Turbine.

Die letzte, etwas befremdlich klingende Folgerung wird begreiflich, wenn man erwägt, daß mit unendlich zunehmender Stufenzahl c_1 also auch u, mithin bei gegebener Umlaufzahl auch D sich dem Werte Null nähern. Um das Bedenken zu beheben, daß die Summe der zwar unendlich kleinen, aber unendlich vielen Radreibungsarbeiten endlich und sogar groß sein könnte, nehmen wir an, die Turbine arbeite mit durchweg gleichem u und c_1, so daß $u:c_1 = \xi =$ konst. ist. Die Stufenzahl findet man angenähert zu $z = (i_1 - i_k):(A c_{th}^2/2g)$ und hieraus $c_{th} =$ konst. $\sqrt{1/z}$.

Die gesamte Radreibungsarbeit ist

$$N_r = \Sigma\beta_0 D^2 u^3\gamma = \Sigma\frac{4\,\beta_0\,u^5\gamma}{\omega^2} = \Sigma\frac{4\,\beta_0\,\xi^5\,\gamma}{\omega_2}\,c_1^{\,5} = \frac{4\,\beta_0\,\xi^5 c_1^{\,5}}{\omega^2}\,\Sigma\gamma\,.$$

Die auf alle Räder auszudehnende Summe $\Sigma\gamma$ kann jedenfalls als Produkt $= z\gamma_m$ der Stufenzahl z und eines Mittelwertes γ_m von γ dargestellt werden. Mithin wird $N_r =$ konst. $c_1{}^5 z =$ konst. $\varphi^5 c_{th}{}^5 z$. Setzen wir hier den Wert von c_{th} ein, so folgt $N_r =$ konst. $1/\sqrt{z^3}$, also in der Tat $= 0$, wenn $z = \infty$ ist, da der konstante Faktor stets endlich bleibt.

Die Meinung, daß bei sehr großer Stufenzahl auch die Reibungsarbeit wegen der vielen Räder groß würde, trifft also nicht zu. Vom Standpunkte der Radreibung allein ist die Wahl sehr vieler Stufen empfehlenswert. Dieser Satz muß heute wesentlich eingeschränkt werden, da es sich bestätigt hat, daß die Widerstandszahl der Schaufelreibung mit wachsender Dampfgeschwindigkeit abnimmt. Denn nun **gibt es eine gewisse beste Mitte zwischen dem Einfluß der Rad- und der Schaufelreibung, die durch Probieren zu ermitteln wäre.** Diese Mitte wird aber **noch nicht die praktisch beste Lösung** sein, für die ebensosehr die **Rücksicht auf das Gewicht,** auf die **Herstellung,** auf das **Verhalten** im **Betriebe maßgebend** sind.

d) Einfluß der Undichtheit.

Die auf einer Welle aneinander gereihten Räder werden in der Regel durch Scheidewände getrennt, welche die Welle mit etwas Spiel umgeben (Abb. 233). An dieser Stelle findet ein von Stufe zu Stufe fortgesetzter Undichtheitsverlust statt, **dem bei kleinen Einheiten entscheidende Wichtigkeit** zukommt.

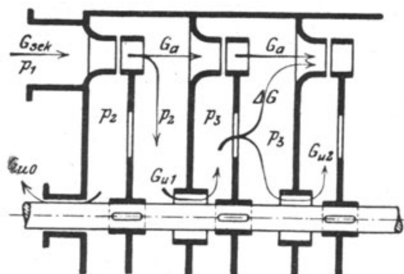


Abb. 233. Einfluß der Undichtheit.

Das durchströmende Gewicht kann, angenähert so gerechnet werden, als ob der Ringspalt zwischen Welle und Scheidewand eine einfache Mündung bildete; man wird also die Formel von Bendemann benützen. Das gesamte sekundliche Dampfgewicht G_{sek} ist nun für jedes Rad in das Arbeitsgewicht G_a und den Undichtheitsverlust G_u zu trennen

$$G_{sek} = G_a + G_u.$$

Angenommen, durch die vordere Stopfbüchse ströme G_{u0}; durch den ersten Ringspalt G_{u1}, durch den zweiten $G_{u2} < G_{u1}$, so wird sich der Unterschied $G_{u1} - G_{u2} = \Delta G_u$ mit dem Arbeitsdampf G_{a2} des zweiten Rades im Leitapparat von dem dritten Rad mischen, und man muß den Mischungszustand im Entropiediagramm festlegen.

Es sei im Entropieschaubild Abb. 234 A_2 (p_2, i_2) der Zustand hinter dem ersten Rade. Der Undichtheitsdampf wird in das Gehäuse des zweiten Rades herübergedrosselt und nimmt beim Drucke p_3 in Punkt $A_2{}^*$ den gleichen Wärmeinhalt i_2 an wie vorhin. Der Arbeitsdampf gelange in den Zustand A_3 (p_3, i_3). Die Mischung erfolgt, da wir die kinetischen Energien als klein vernachlässigen, nach der Formel

$$\Delta G i_2 + G_a i_3 = (G_a + \Delta G)\, i_3{}^*$$

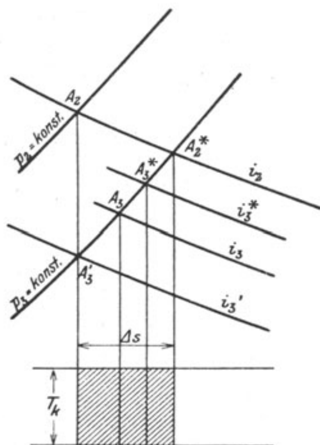


Abb. 234. Undichtheitsverluste.

und liefert mit $i_3{}^*$ den Punkt $A_3{}^*$ auf $p_3 =$ konst. als Ausgangspunkt der Expansion zum dritten Rade. Der Verlust infolge der nicht umkehrbaren Undichtheit und Mischung ist im ganzen für die erste Stufe als Produkt der Entropievermehrung und der Kondensatortemperatur wie folgt zu ermitteln. Es bedeute Δs die Entropiezunahme zwischen den Zuständen A_2 und $A_2{}^*$; $\Delta s'$ diejenige zwischen A_2 und $A_3{}^*$; $\Delta s''$ diejenige zwischen A_3 und $A_3{}^*$. Die erste kommt der Menge G_{u2}, die zweite der Menge ΔG, die dritte der Menge G_a infolge der Mischung zu. Der Verlust ist also

$$\Delta Z = (G_{u2}\, \Delta s + \Delta G\, \Delta s' + G_a\, \Delta s'')\, T_k.$$

Man kann leicht einsehen, daß bei günstigster Gefällsverteilung das Gefälle einer Stufe kleiner sein müßte, als dem Maximum des Wirkungsgrades am Radumfang entspricht. In der Nachbarschaft des Wertes $\eta_{u\,max}$ ändert sich der Wirkungsgrad bei kleinen Änderungen des Gefälles unmerklich; je kleiner das Gefälle, desto kleiner der Undichtheitsverlust, ein desto größerer Teil der Gesamtdampfmenge wird zur Arbeit im Rade herangezogen, wir erzielen Arbeitsgewinn trotz kleiner Abnahme des Wirkungsgrades. Auch die Undichtheit würde uns also für eine möglichst ökonomische Turbine veranlassen, große Stufenzahlen zu wählen, soweit das mit den Gestehungskosten vereinbar ist.

Wären die Scheiben nicht mit Löchern versehen, so müßte der ganze Undichtheitsverlust durch den Spalt zwischen Leit- und Laufrad hindurchströmen und würde den ins Laufrad tretenden Dampfstrom empfindlich stören. Die Einbeziehung der in den Spalten angesaugten Dampfmengen verwickelt den Fall vollends schier unübersehbar. Mit Hilfe der hier und in Abschn. 57 (8) gemachten Andeutungen würde indessen die Lösung, wenn es durchaus sein müßte, doch gelingen.

Die Arbeit für 1 kg Dampf ist in den aufeinanderfolgenden Rädern:

$$L_{i1} = i_1 - i_2, \quad L_{i2} = i_2 - i_3, \quad L_{i3} = i_3 - i_4 \quad \text{usw.}$$

Die Gesamtleistung in der Sekunde erhalten wir entweder als Summe der Einzelleistungen $\Sigma G_a L_{i1}$, oder in einem Posten, indem wir auch den Wärmeinhalt $i_k{}^*$ der Mischung von Arbeits- und Undichtheitsdampf nach Verlassen des letzten Laufrades ermitteln, wo wieder die ganze Menge G_{sek} beisammen ist, und wenn die kinetische Energie im Abdampfrohr klein ist, als Gesamtleistung

$$G_{sek} L_i = G_{sek} (i_1 - i_k{}^*)$$

und als inneren Wirkungsgrad

$$\eta_i = \frac{i_1 - i_k{}^*}{i_1 - i_k{}'}$$

ergibt.

60. Turbine mit Verwertung der Auslaßenergie.

a) Zustandskurve.

Bei voller, d. h. lückenloser Beaufschlagung, wie man sie an modernen Turbinen allgemein anstrebt, wird die Auslaßenergie von selbst ausgenützt, selbstverständlich nicht ohne einigen Verlust. Bei teilweiser Beaufschlagung sucht man das gleiche durch eine geeignete Führung des Dampfes zu erreichen[1]).

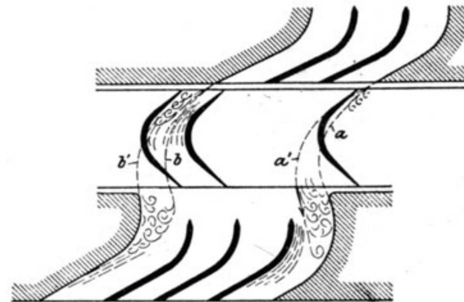


Abb. 235.
Streuung des austretenden Strahles.

Beim gewöhnlichen Verfahren werden die Schaufellängen der aufeinanderfolgenden Räder wenig verschieden gemacht, hingegen nimmt die Beaufschlagungsbreite zu, was zur Folge hat, daß die Dampfbahnen unter Wirbelbildung aus der ursprünglich parallelen Richtung auf die größere Breite auseinandergezogen werden. Um dies zu vermeiden, müßten die Endkanten der äußersten Leitschaufeln stets in die Richtung des absoluten Dampfweges fallen, was indes in voller Strenge nicht erreichbar ist. In der Tat werden die in eine frische Schaufel zuerst eintretenden Elemente wegen stärkerer Reibung länger im Rade verbleiben und gestrecktere Bahnen a' (Abb. 235) beschreiben, während die zuletzt eingetretenen die Bahn a einhalten, zwischen denen im Leitrad ein Wirbelraum verbleibt. Ein gleiches ist am Austritte mit den Bahnen b und b' der Fall. Daher ist vollkommen stoßfreies Auffangen des abfließenden Dampfstromes unmöglich.

Der Verlauf der Zustandsänderung wird ähnlich verfolgt wie vorhin. Bis zum Austritt aus dem ersten Laufrade ändert sich nichts; als Verlust gilt aber bloß

$$Z_1 = \frac{c_{th}{}^2 - c_1{}^2}{2g} + \frac{w_1{}^2 - w_2{}^2}{2g} + Z_r,$$

wo Z_r die Radreibung bedeutet, und wir erhalten durch die Beziehung

$$i_2 = i_2{}' + A Z_1$$

auf der Drucklinie $p_2 =$ konst. den Zustandspunkt für das Ende der Laufschaufel. Der Ausdehnung im nachfolgenden Leitrad steht nun das Gefälle $i_2 - i_3{}'$ zur Verfügung, so daß die theoretische Ausflußgeschwindigkeit $c_{th}{}'$ gemäß Formel

$$A \frac{c_{th}{}'^2 - c_2{}^2}{2g} = i_2 - i_3{}'$$

[1]) Siehe die Beschreibung der Turbine von Oerlikon.

zu rechnen ist. Die wahre Geschwindigkeit c_1' wird als

$$c_1' = \varphi c_{th}'$$

angesetzt, wobei in φ Rücksicht auf die mehr oder minder vollkommene Führung zu nehmen ist. Verfügt man über genauere Angaben, so kann auch die bei der Überdruckturbine zu beschreibende Methode der Widerstandszahlen benützt werden.

Die Verlustwärme ist nun

$$AZ_2 = A\frac{c_{th}'^2 - c_1'^2}{2g} + A\frac{w_1'^2 - w_2'^2}{2g} + AZ_r'$$

und liefert den Endpunkt der Zustandslinie auf $p_3 =$ konst.

$$i_3 = i_3' + AZ_2.$$

Die weitere Rechnung ist eine Wiederholung des gleichen Verfahrens.

Will man den Einfluß der Undichtheit berücksichtigen, so ist wieder die Mischungsregel zu benutzen und außerdem der eintretende Stoßverlust zu berücksichtigen.

Da wir es bei Vollbeaufschlagung entweder mit Niederdruckrädern oder mit den Hochdruckrädern sehr großer Turbinen zu tun haben, tritt die Wirkung der Undichtheit etwas zurück.

b) Der gewöhnliche und der „Schaufelwirkungsgrad".

Wenn man den Satz über die rückgewinnbare Reibungswärme bei Turbinen mit Verwertung der Anlaßenergie klarlegen will, so wird man zur Einführung eines von dem gewöhnlichen Wirkungsgrade abweichenden Begriffes, den wir **„Schaufelwirkungsgrad"** nennen wollen, gedrängt.

Als Wirkungsgrad irgendeiner Stufe müssen wir nach feststehendem Gebrauch das Verhältnis der gewonnenen inneren Arbeit L_{1i} zur verfügbaren Arbeit rechnen. Letztere ist hier die Summe des adiabatischen Gefälles $i_1 - i_2' = AL_{01}$ und der kinetischen Energie beim Eintritt $Ac_0^2/2g$, (wo c_0 gleich der Auslaßgeschwindigkeit c_2 des vorhergehenden Rades) die durch den punktierten Flächenstreifen q_k in Abb. 232 darstellbar ist. Daher ist der Einzelwirkungsgrad $\eta_{1i} = L_{i1} : (L_{01} + c_0^2/2g)$.

Während also die „verfügbare" Arbeit durch den Betrag $c_0^2/2g$ belastet wird, muß anderseits bei der Berechnung von L_{i1} die Auslaßenergie $c_2^2/2g$ für jede Stufe als verloren abgezogen werden. In Wahrheit wird $c_2^2/2g$ in der nächsten Stufe nutzbar verwertet und geht nur einmal, nämlich beim letzten Rad, wirklich verloren. Je größer c_0 und c_2, desto schlechter wird η_{i2}. Es kann die eigentümliche Erscheinung auftreten, daß bei ganz schlechten Einzelwirkungsgraden der Gesamtwirkungsgrad dennoch ein ganz guter ist. Dies ist mit Rücksicht auf den Transport der kinetischen Auslaßenergie wohl verständlich, zeigt aber, daß der gewöhnliche Wirkungsgrad nicht der geeignete Maßstab für die Beurteilung der Verhältnisse der vielfachen Turbine ist.

Einen passenden Ersatz liefert folgende Überlegung: Die Reibungsarbeit in einer Stufe ist, wie wir früher festgestellt haben, um so genauer dem Verlustwerte

$$AZ = i_2 - i_2'$$

gleich, je mehr Stufen vorhanden sind. Wir bezeichnen nun das Verhältnis der Verlustwärme zum adiabatischen Gefälle

$$\zeta_s = \frac{AZ}{i_1 - i_2'} = \frac{i_2 - i_2'}{i_1 - i_2'} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

als **„Schaufelverlustzahl"** und dementsprechend $\eta_s = 1 - \zeta_s = \frac{i_1 - i_2}{i_1 - i_2'}$ als **„Schaufelwirkungsgrad"**, der mit dem gewöhnlichen übereinstimmen würde, wenn man die kinetische Energie beim Ein- und Austritt in der betreffenden Stufe $= 0$ machen könnte. In diesem Wirkungsgrad kommt also, was wohl zu beachten ist, nur der Verlust durch die Schaufelreibung einer Stufe zum Ausdruck. Sind die Geschwindigkeiten c_0 am Eintritt in eine Stufe und c_2 am Austritt derselben einander gleich, so bedeutet überdies $i_1 - i_2$ die innere Arbeit für 1 kg Dampf in dieser Stufe und der **Schaufelwirkungsgrad** stellt sich in sehr anschaulicher Weise auch als das **Verhältnis der inneren Arbeit zum reinen adiabatischen Wärmegefälle der Stufe (ohne Hinzurechnung der Eintrittsenergie $Ac_0^2/2g$) dar.**

Bezeichnen wir mit η_s den Schaufelwirkungsgrad, mit $c_2, c_3, c_4, \ldots, c_n$ die Abflußgeschwindigkeiten der aufeinanderfolgenden Stufen, so ist für die erste Stufe nach dem Energiesatz:

$$AL_1 = i_1 - i_2 + A\frac{c_0^2 - c_2^2}{2g} = \eta_{s1}(q_{01} + q_1') + A\frac{c_0^2 - c_2^2}{2g}$$

ähnlich

$$AL_2 = \qquad = \eta_{s2}(q_{02} + q_2') + A\frac{c_2^2 - c_3^2}{2g}$$

. . . .

$$AL_n = \qquad = \eta_{sn}(q_{0n} + q_n') + A\frac{c_n^2 - c_{n+1}^2}{2g},$$

wobei wieder die Größen q_0 das der ursprünglichen Adiabate entsprechenden Gefälle, q' den Zuwachs aus den Verlustwärmen der vorhergehenden Stufen bedeuten. Diese Größen sind in Abb. 232 durch schräge und lotrechte Schraffur hervorgehoben. Außerdem ist die Zuflußenergie punktiert als Fläche q_k eingetragen. Setzen wir alle η_s als gleich voraus, so ergibt die Summation

$$A(L_1 + L_2 + \ldots) = AL_{ig} = \eta_s(Q_0 + Q') + A\frac{c_0^2 - c_{n+1}^2}{2g},$$

worin Q_0 das unmittelbare adiabatische „Reingefälle", Q' die im ganzen wiedergewonnene Reibungswärme bedeuten. Führen wir die Bezeichnungen:

$\varrho = Q'/Q_0$ Bruchanteil der wiedergewonnenen Wärme,

$1 + \varrho =$ „Gefällsvermehrung",

$\zeta_a = A\frac{c_{n+1}^2}{2g} : Q_0$ „Auslaßverlust" (Bruchzahl)

ein und vernachlässigen wir die zufließende Energie $Ac_0^2/2g$, so ergibt sich (nach Teilung mit Q_0) der gesamte innere Wirkungsgrad:

$$\eta_{ig} = \frac{AL_{it}}{Q_0} = \eta_s(1 + \varrho) - \zeta_a \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Man pflegt in neuerer Zeit das erste Glied der rechten Seite wohl „Gesamt-Schaufelwirkungsgrad" zu nennen; wählen wir dafür das Zeichen η_{sg}, so wird

$$\eta_{ig} = \eta_{sg} - \zeta_a \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2a)$$

Auch die Benennung „Zwischenwirkungsgrad" wäre für η_s angemessen[1]), um anzudeuten, daß nur eine Zwischenumwandlung der Dampfenergie in Frage kommt. Wir halten uns vorwiegend an die erstgewählte Bezeichnung und sprechen Gl. (2) in Worten wie folgt aus:

Der gesamte innere Wirkungsgrad der Turbine unterscheidet sich vom Schaufelwirkungsgrad η_s der einzelnen Stufe durch den Betrag der wiedergewinnbaren Verlustwärme und den letzten Auslaßverlust. Der Unterschied erreicht im allgemeinen nur wenige Hundertteile.

Dieser Lehrsatz befähigt uns, einen Vergleich zu ziehen zwischen dem Gesamtwirkungsgrad der Turbine mit verloren gegebener Auslaßgeschwindigkeit η_{verl} und demjenigen mit Verwertung desselben η_{verw} (ohne Rücksicht auf Radreibung), indem wir den letzten Auslaßverlust als klein voraussetzen, und für die Zwischenwirkungsgrade gleichartige Ausdrücke aufstellen. Bei der ersten Turbinenart ist der Zwischenwirkungsgrad zugleich der wirkliche, und wir haben wie bei der einstufigen Turbine

$$\eta_{verl} = \frac{c_1^2 - c_2^2 + w_2^2 - w_1^2}{c_{th}^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Bei der zweiten Art ist

$$\eta_{verw} = \eta_s = (i_1 - i_2) : (i_1 - i_2') \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3c)$$

---

[1]) In der IV. Auflage habe ich η_s den „scheinbaren" Wirkungsgrad genannt; „Schaufel"wirkungsgrad dürfte anschaulicher sein.

und hierin ist der Zähler die Summe der inneren Arbeit $[c_1^2 - c_2^2 - (w_1^2 - w_2^2)]\,A/2g$ und der Zunnahme der kinetischen Energie $A(c_2^2 - c_0^2)/2g$; der Nenner aber ist das adiabatische Wärmegefälle, also gleich dem Unterschied zwischen der theoretischen Gesamtenergie $Ac_{th}^2/2g$ und der angelieferten Energie $Ac_0^2/2g$. Daher wird

$$\eta_{verw} = \frac{c_1^2 - c_0^2 + w_2^2 - w_1^2}{c_{th}^2 - c_0^2} = \frac{c_1^2 - c_0^2 + w_2^2 - w_1^2}{c_{th}^2}\,\frac{c_{th}^2}{c_{th}^2 - c_0^2} \quad . \; . \; . \quad (4)$$

Wir können und wollen Turbinen vergleichen, die mit gleich großen Dampfgeschwindigkeiten arbeiten, so daß c_1, c_2 usw. in beiden Fällen dieselben Werte darstellen. Wenn dann angenähert $c_0 = c_2$ gesetzt wird, so ist

$$\eta_{verw} = \eta_{verl}\,\frac{c_{th}^2}{c_{th}^2 - c_0^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Wir erkennen also, daß — vom Auslaßverlust in der letzten Stufe abgesehen — der Wirkungsgrad bei Verwertung der Auslaßenergie und gleichen Dampfgeschwindigkeiten stets höher ist als bei Vernichtung der Auslaßenergie.

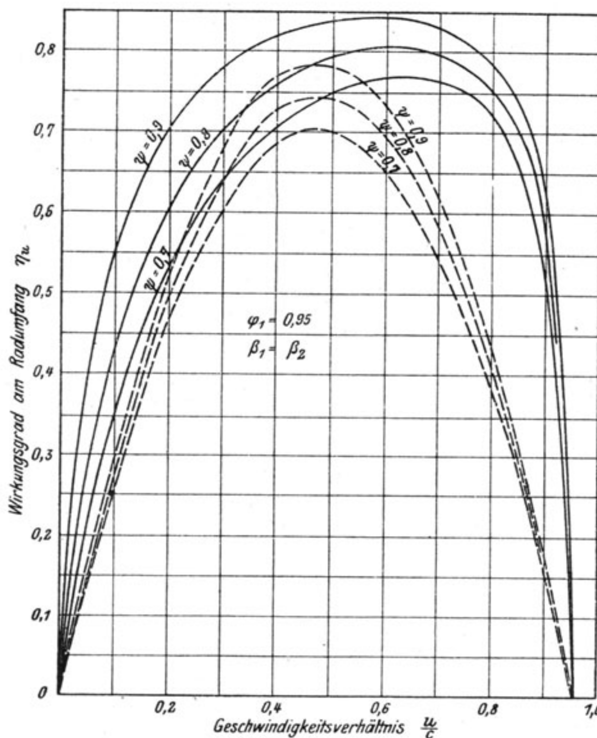


Abb. 236. Schaufelwirkungsgrad bei stets gleichwinkligen Schaufeln $\beta_2 = \beta_1$.

Selbstverständlich darf man nicht glauben, daß c_0 möglichst nahe $= c_{th}$ gemacht werden soll, damit η_{verw} groß werde, denn mit der Vergrößerung von c_0, d. h. der Auslaßgeschwindigkeit des vorhergehenden Rades wird das Verhältnis u/c_1 ein kleines und der Faktor η_{verl} nimmt wesentlich ab.

In Abb. 236 sind die Zwischenwirkungsgrade für die Annahmen $\varphi = 0{,}95$; $\psi = 0{,}7$; $0{,}8$; $0{,}9$, $\alpha_1 = 17^0$ und $\beta_1 = \beta_2$ (gleichwinklige Schaufel), $c_2 = c_0$ als Abhängige des Verhältnisses u/c_1 graphisch ermittelt und aufgetragen worden. Der Einfachheit halber wurde von einer Veränderlichkeit des ψ abgesehen. Der Eintritt in die Laufschaufel ist durch entsprechende Änderung von β_1 stets stoßfrei gedacht. Die parabelförmigen gestrichelten Kurven entstehen, wenn c_2 verloren, die sanfter gewölbten, wenn c_2 verwertet wird. Man erkennt, daß im zweiten Fall der beste Wirkungsgrad bei einer Umfangsgeschwindigkeit $u = 0{,}6\ c_1$ erreicht wird, und bei gleichem ψ um etwa 6 v. H. besser ist; da aber der Auslaßverlust der letzten Stufe abgezogen werden muß, so erweist sich eigentümlicherweise der unter gleichen Umständen erreichbare Bestwert im zweiten Fall nicht so hoch als man erwartet hätte.

Fest eingestellter Austrittswinkel β_2.

Da die Annahme $\beta_1 = \beta_2$ sich bei der Turbine mit Geschwindigkeitsstufen als ungünstig herausgestellt hat, wurden die Wirkungsgrade auch bei einem als unveränderlich festgesetzten Winkel $\beta_2 = 16^0$ bei $\alpha_1 = 16^0 42'$ graphisch ermittelt und für die festen Werte $\psi = 0{,}7$; $0{,}8$; $0{,}9$ in Abb. 236a, als Abhängige des Verhältnisses u/c_1, aufgetragen. Dabei ist $\varphi = 0{,}95$ und $0{,}975$. Der allgemeine Verlauf weicht von dem in Abb. 236 wenig ab; die Einführung des verhältnismäßig kleinen Winkels $\beta = 16^0$ verbessert den Wirkungsgrad nicht im gleichen Verhältnis wie bei Geschwindigkeitsabstufung. Die Annahme $\beta_2 = \beta_1$ wird daher bei der mehrstufigen Turbine eher in Betracht kommen als bei einstufigen; man findet sogar $\beta_2 > \beta_1$, um die Schaufelerweiterug am Austritt in gewollten Grenzen zu halten, und dies rechtfertigt die Aufstellung eines rechnerischen Ausdrucks für den Wirkungsgrad.

c) Rechnerische Darstellung von η_s als abhängige von $\xi = u/c_1$ bei $\beta_1 = \beta_2$.

Unter der Annahme, daß in allen Stufen die Geschwindigkeiten $c_1\, w_1\, w_2\, c_2$ gleich groß sind, wird bei Verwertung von c_2 der Schaufelwirkungsgrad $\eta_s = (i_1 - i_2) : (i_1 - i'_2) = A\, L_u : A\,(c_{th}^2 - c_2^2)/2g$. Hierin ist, wie in Abschn. 57 (6) abgeleitet $L_u = (c_{1u} - c_{2u})u/g = [c_{1u} + (w_{2u} - u)]\,u/g = (c_{1u} + \psi\, w_{1u} - u)\,u/g = [c_{1u} - \psi\,(c_{1u} - u) + u]\,u/g = (1 + \psi)\,(c_1 \cos \alpha_1 - u)\,u/g$. Somit wird mit $c_{th} = c_1/\varphi$

$$\eta_s = \frac{2\varphi^2 (1+\psi)(\cos \alpha_1 - \xi)\,\xi}{1 - \varphi^2 \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

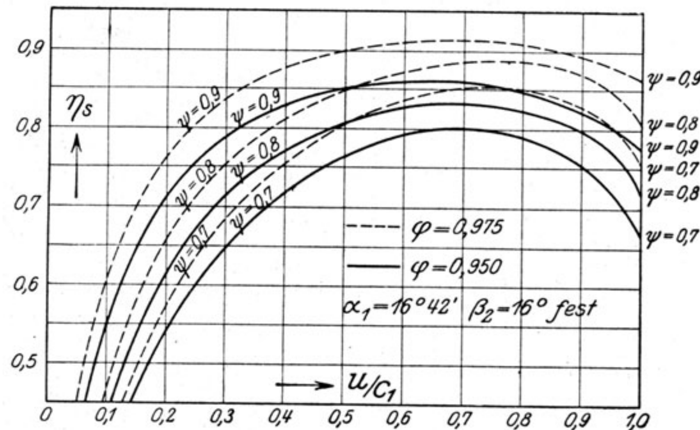


Abb. 236a. Wirkungsgrad bei fest eingestelltem Winkel β_2 in Abhängigkeit von c/u_1.

An Hand von Abb. 209 erhält man $c_2^2 = c_{2u}^2 + c_{2a}^2 = (w_{2u} - u)^2 + c_{2a}^2 = (\psi\, w_{1u} - u)^2 + \psi^2 c_{1a}^2 = [\psi\,(c_{1u} - u) - u]^2 + \psi^2 c_{1a}^2 = \psi^2 c_{1u}^2 - 2\psi\,(1+\psi)\, c_{1u} u + (1+\psi)^2 u^2 + \psi^2 c_{1a}^2$. Hieraus folgt mit $\xi = u/c_1$

$$\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 = \psi^2 - 2\psi\,(1+\psi) \cos \alpha_1\, \xi + (1+\psi)^2 \xi^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

dessen Einsetzung in (6) auf die gesuchte Abhängigkeit des η_s von ξ führt.

Teilweise verlorene Auslaßenergie

Oft wird von vornherein angenommen, daß von der Auslaßgeschwindigkeit c_2 nur ein Teil $\varphi_2 c_2 = c_0$ als Einlaufgeschwindigkeit, in die Leitschaufel übrig bleibt. Ist h' das adiabatische Gefälle, so wird man in diesem Fall zwei theoretische Geschwindigkeiten

$$c_{th}^2 = 2g\,\frac{h'}{A} + c_2^2 \text{ und } c_{th1}^2 = 2g\,\frac{h'}{A} + c_0^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

und entsprechend zwei Geschwindigkeitsverhältnisse

$$\varphi = \frac{c_1}{c_{th}};\ \varphi_1 = \frac{c_1}{c_{th1}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

unterscheiden, welch letztere dadurch zusammenhängen, daß nach (8) $c_{th}^2 = c_{th1}^2 + c_2^2 - c_0^2$ sein muß. Durch Einschieben von (9) in diese Gleichuug erhält man $c_1^2/\varphi^2 = c_1^2/\varphi_1^2 + (1 - \varphi_2^2)\, c_2^2$ oder

$$\varphi^2 = \frac{\varphi_1^2}{1 + \varphi_1^2 (1 - \varphi_2^2)\,(c_2/c_1)^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

Dieser Wert in (6) eingesetzt bringt die Wirkung von φ_2 zum Ausdruck; doch bildet die Abschätzung von φ_1 noch einen Punkt der Ungewißheit. Bleibt von c_2 wenig übrig, so wird man φ_1 wie für die normale Leitschaufel annehmen dürfen. Im andern Fall sind die Strömungsgeschwindigkeiten in der Leitschaufel von Anfang an groß, was eine Vermehrung der Verluste bedingt. Man wird dann statt mit φ mit den gleichen Werten von ψ rechnen, wie bei Überdruckturbinen.

d) Abhängigkeit des Schaufelwirkungsgrades vom Verhältnis $\xi_0 = u/c$.

Wir führen an Stelle der Geschwindigkeit c_1, die sich bei gleichbleibendem Stufengefälle mit der Umfangsgeschwindigkeit ändert, diejenige (unveränderliche) Grundgeschwindigkeit c ein, die entstehen würde, wenn der Dampf durch das reine adiabatische Stufen-

gefälle $h' = i_1 - i_2'$ von der Ruhe aus beschleunigt würde. Dies bedeutet, daß

$$A\frac{c^2}{2g} = h' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

ist, woraus für η_s, wenn wieder $c_0 = c_2$; $\beta_1 = \beta_2$ ist, der Ausdruck

$$\eta_s = \frac{i_1 - i_2}{i_1 - i_2'} = \frac{A L_u}{h'} = 2(1+\psi)\left(\frac{c_1}{c}\frac{u}{c}\cos\alpha_1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

folgt. Das Verhältnis c_1/c bestimmt sich aus der Beziehung

$$h' = \frac{A}{2g}(c_{th}^2 - c_0^2) = \frac{A}{2g}\left(\frac{c_1^2}{\varphi^2} - c_2^2\right),$$

wobei nach (7)

$$c_2^2 = \psi^2 c_1^2 - 2\psi(1+\psi)c_1 u\cos\alpha_1 + (1+\psi)^2 u^2,$$

also mit (11) und

$$\xi_0 = u/c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12\text{a})$$

$$\left(\frac{c_1}{c}\right)^2\left(\frac{1}{\varphi^2} - \psi^2\right) + 2\psi(1+\psi)\cos\alpha_1\,\xi_0\left(\frac{c_1}{c}\right) - [(1+\psi)^2\xi_0^2 + 1] = 0 \quad \ldots \quad (13)$$

die Bestimmungsgleichung für c_1/c ergibt. Wir schreiben die weitschweifige Auflösung nicht hin, sondern empfehlen, Gl. (13) in den jeweils gegebenen Zahlenwerten aufzulösen und die (positive) Wurzel c_1/c in (12) einzuschieben. Die so gerechneten Werte von η_s müssen mit denjenigen aus Gl. (6) selbstverständlich übereinstimmen, falls man für ξ_0 den Wert nimmt, der dem ξ entspricht. Dieses ξ_0 gewinnt man ebenfalls aus (c_1/c), da man $= (c_1/u):(c/u) = 1/\xi : 1/\xi_0 = (c_1/c)$ schreiben kann, woraus

$$\xi_0 = \left(\frac{c_1}{c}\right)\xi \quad \ldots \quad (14)$$

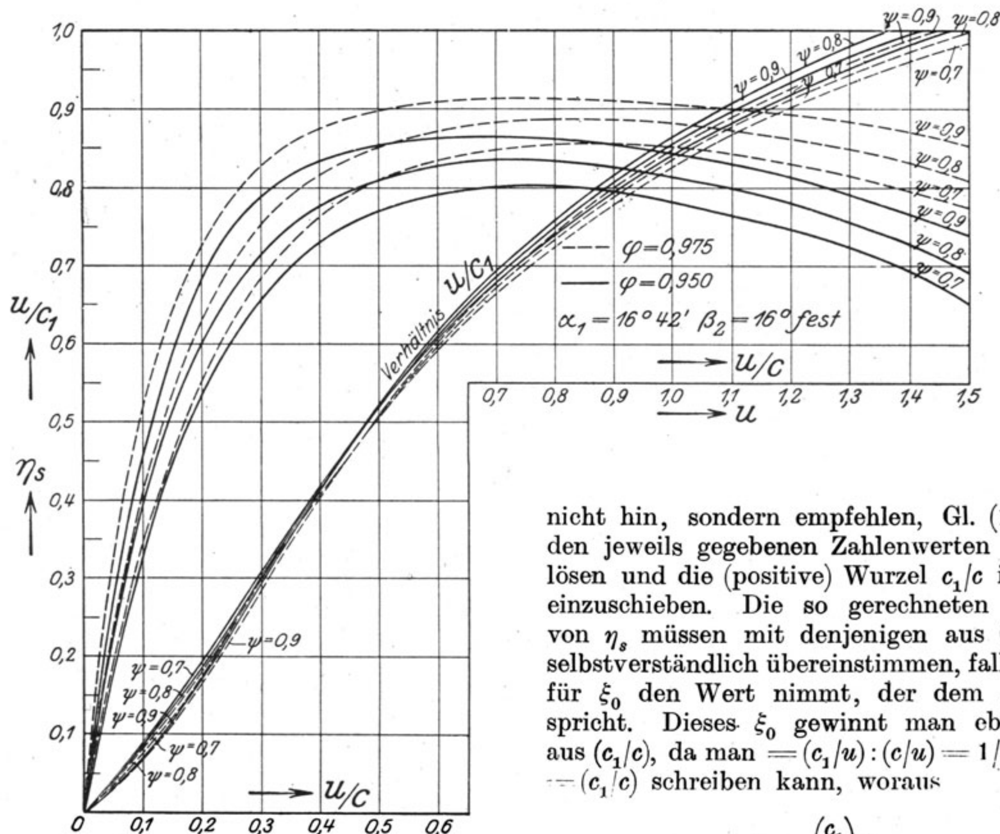


Abb. 236b.
Schaufelwirkungsgrad nach Abb. 236a in Abhängigkeit von u/c.

folgt. Geht man graphisch vor, so ist man von der Bedingung $\beta_2 = \beta_1$ befreit. So ergab sich die Darstellung Abb. 236b. Die gestrichelten Linien beziehen sich auf $\varphi = 0{,}975$, die vollen auf $\varphi = 0{,}95$. Dabei ist $\alpha = 16^0 42'$, $\beta_2 = 16^0$ fest, β_1 auf stoßfreien Eintritt eingestellt. Die Hilfskurven für u/c_1 erlauben, diesen Wert als Abhängige von u/c abzugreifen.

e) Die Summe der Umfangsgeschwindigkeitsquadrate $K = z\overline{u}^2$.

Die Grundgleichung (11) $\frac{A}{2g}c^2 = h'$ kann man auch als $\frac{A}{2g}\left(\frac{c}{u}\right)^2 u^2$ oder

$$\frac{A}{2g}\frac{u^2}{\xi_0^2} = h' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14\text{a})$$

schreiben. Es mögen nun z_1 Stufen mit einer Umfangsgeschwindigkeit u_1 vorhanden sein, für die ξ_0 (als Mittelwert) unveränderlich eingeführt werden darf. Durch die Summation der adiabatischen Gefälle entsteht die Gleichung

$$\frac{A}{2g}\frac{z_1 u_1^2}{\xi_0^2} = \sum h' = H_1 \quad \text{oder} \quad z_1 u_1^2 = \frac{2g}{A}\xi_0^2 H_1.$$

Wenn für die weiteren Gruppen $z_2 z_3 \ldots$ mit $u_2 u_3 \ldots$ als Geschwindigkeiten das gleiche ξ_0 gilt, so ergibt die Summierung der entstehenden ähnlichen Gleichungen

$$z_1 u_1^2 + z_2 u_2^2 + \ldots = \frac{2g}{A}\xi_0^2 (H_1 + H_2 + \ldots) \quad \ldots\ldots \quad (14\text{b})$$

Wir führen folgende Bezeichnungen ein

$z = z_1 + z_2 + \ldots =$ gesamte Stufenzahl,

$\overline{u}^2$ mittleres Umfangsgeschwind.-Quadrat $= (z_1 u_1^2 + z_2 u_2^2 + \ldots) : z$,

$H^*_0 = H_1 + H_2 + \ldots = (1 + \varrho) H_0 =$ Summe der adiabatischen Stufengefälle,

$\varrho =$ wie oben der Bruchanteil der rückgewinnbaren Reibungswärme $= Q'/Q_0$ in Gl. (2),

$K = z\overline{u}^2$ die Summe der Umfangsgeschwind.-Quadrate,

$X = \frac{K}{H_0}$ und $X^* = \frac{K}{H_0^*}$ die „Parsonssche Kennzahl", wobei $X = (1 + \varrho) X^*$.

Gleichung (14b) schreibt sich dann

$$K = z\overline{u}^2 = \frac{2g}{A}\xi_0^2 H_0^* = \frac{2g}{A_0}(1 + \varrho) H_0 \xi_0^2 \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

oder

$$X^* = \frac{z\overline{u}^2}{H_0^*} = \frac{K}{H_0^*} = \frac{2g}{A}\xi_0^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Die Kennzahl X bzw. X^* wurde unseres Wissens zuerst von Parsons bei Überdruckturbinen eingeführt und wird von allen Parsonsturbinen bauenden Firmen benutzt. Es fehlt ihr eine anschauliche Bedeutung, auch ist sie unhomogen, da im Zähler mechanisches, im Nenner Wärmemaß benutzt wird. Anschaulicher wäre das Geschwindigkeitsverhältnis

$$\xi_0 = \sqrt{\frac{AX^*}{2g}} = \frac{u}{c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16\text{a})$$

obwohl auch dieses gegen u/c_1 zurücksteht, das dem Konstrukteur sogleich die Form der Geschwindigkeitsdreiecke vor Augen führt[1]).

Wie dem auch sei, es kann η_s nach Gl. (12) als Funktion von ξ_0, somit mit Hilfe von (16a) auch als Funktion von X dargestellt werden. Diese Rechnung erledigen wir im einzelnen nur für die Überdruckturbine, wo sich die Darstellung eingebürgert hat, betonen jedoch schon hier, daß durch die Wahl von X (oder X^*) bei sonst beliebiger Einteilung der Stufengefälle, der Wirkungsgrad festgelegt ist.

f) Umfangsgeschwindigkeit beim „Durchgehen" oder im „Leerlauf" der Turbine.

Die Dampfströmung und die Geschwindigkeitsdreiecke sind dieselben wie in Abb. 211a, 211b dargestellt. Aus der letzteren erhält man, wenn alle Größen für den Leerlauf durch

[1]) Zerkowitz hat in der Z. f. d. gesamte Turbinenwesen 1912, 8. Heft, für den reziproken Wert $1/X^* = H_0^*/z\overline{u}^2$ die sympathische Bezeichnung „spezifisches Gefälle", d. h. dasjenige, das eine Turbine bei $z = 1$ $u = 1$ und dem gewählten X aufzehren würde, vorgeschlagen.

die Fußnote m ausgezeichnet werden

$$c_{2\,m}^{2} = c_{1\,um}^{2} + (\psi c_{1a})_m^2 = c_{1m}^2 - (1 - \psi_m^2) c_{1\,am}^{2}$$

und es wird

$$2gh' = A\left(\frac{c_{1\,m}^{2}}{\psi_m^2} - c_{2m}^2\right) = A\left[\frac{1}{\varphi^2} - 1 + (1 - \psi_m^2)\sin^2\alpha_1\right] c_{1\,m}^{2} \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

aus welcher Gleichung c_{1m} bestimmt werden kann, wenn für φ_m ψ_m entsprechend niedrige Werte gewählt werden, da erfahrungsgemäß h' sich mit der Umfangsgeschwindigkeit wenig ändert. Dann gilt bedingungungsweise ähnlich wie Gl. (11b) in Abschnitt 57 (7a)

$$u_{max} = c_{1m} \cos\alpha_1 \left[1 + \psi_m \frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\beta_2}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

In Wahrheit wird, wie dort bemerkt, Überdruck auftreten und u_{max} herabsetzen.

61. Neuentwurf der vielstufigen Gleichdruckturbine.

Die Annahmen, die wir einem Neuentwurf zugrunde legen, hängen von der Verwendungsart der Turbine und wirtschaftlichen Gesichtspunkten, d. h. den Forderungen, die wir an den Wirkungsgrad und die Gestehungskosten stellen, ab. Beispielsweise erhält eine in der Anlage billig sein sollende Turbine nur wenige Stufen, muß sich aber im Dampfverbrauch eine Einbuße gefallen lassen, und umgekehrt. Hierzu kommt die Bedingtheit durch Umstände, die der Turbinenkonstrukteur nicht beherrscht. So ist die Wahl der Umlaufzahl nicht von der Turbine allein, sondern in hohem Maße von der anzutreibenden Dynamo, oder etwa der Schiffsschraube, dem Kompressor u. a. abhängig. Ferner hängt die Zahl der Stufen vom Gesetze der Reibungswiderstände ab. Wie sich der Einfluß hiervon geltend macht, veranschaulichen wir weiter unten. Um die besten Verhältnisse zu finden, muß eine Art „Variationsrechnung" mit verschiedenen Annahmen durchgeführt werden, wobei jedoch den praktischen Gesichtspunkten der gebührende Einfluß eingeräumt werden muß. So wird insbesondere der übermäßigen Erhöhung der Umfangsgeschwindigkeit eine Grenze gesetzt durch die Festigkeit der für die Scheiben verwendeten Baustoffe, beziehungsweise durch das Vertrauen in die Zuverlässigkeit der Herstellung der Scheiben, die sehr schwierige Schmiedestücke bilden. Desgleichen durch die Rücksicht auf die Radreibung, die unter Umständen, beispielsweise bei Gegendruckturbinen, ausschlaggebend sein kann. Selbst wenn unter Beachtung all dieser Faktoren die hohe Geschwindigkeit empfehlenswert wäre, so ist noch nicht gesagt, daß die so konstruierte Turbine die wirtschaftlichste sei. Es wird in der Tat von namhaften Konstrukteuren der Standpunkt vertreten, daß der Gewinn durch Erhöhung der Geschwindigkeit infolge vermehrter Herstellungskosten (wegen Mehrgewicht und Mehrbearbeitung) wirtschaftlich aufgehoben wird. Vergleichsrechnungen dieser Art müssen offenbar mit Vorsicht aufgenommen werden; denn die nur durch Rechnung ermittelten Herstellungskosten einer neuen Bauart können stark von denjenigen abweichen, die eine auf die neue Bauart eigens eingerichtete Anstalt aufwendet.

Den entscheidenden Einfluß auf die Turbinenbauart übt die **Drehzahl** aus. In dieser Hinsicht hat der Dynamobau im letzten Jahrzehnt ungewöhnliche Fortschritte erzielt, die erlauben, eine Drehzahl von 3000 i. d. Min. bis zu Leistungen von 10000, ja 15000 kW zu benutzen. Von da bis zu 25000 oder 30000 kW finden wir 1500 Umdr./Min. vor, und die größte derzeit ausgeführte Einheit der Allgemeinen Elektrizitätsgesellschaft arbeitet bei 50000 kW mit 1000 Umdr./Min. Die Schiffsturbine bildet ein Kapitel für sich, auf das wir später eintreten. Auch der Kompressorenbau bietet wertvolle Anregungen, insbesondere die Steigerung der Umlaufzahlen weit über 3000 i. d. Min. bei den kleineren Leistungen.

Die Stufenzahl zeigt in ausgesprochener Weise eine Abnahme gegen früher, und so trifft man bei Turbinen mit 3000 Uml./Min. etwa 10 bis 6 Stufen an. Bei 1500 Uml./Min. etwa 15 bis 10. Ist hierüber eine Entscheidung getroffen, so wird das Wärmegefälle, mit Ausnahme der ersten und letzten Stufe, in gleich große Teilstücke eingeteilt. In der ersten Stufe wird man zweckmäßigerweise ein größeres Wärmegefälle aufzehren, um insbesondere bei hoher Überhitzung rasch auf tiefere Temperatur und kleineren Druck herabzugelangen. Dieses Bestreben hat für die 1. Stufe vielfach die Vorschaltung eines Gleichdruckrades mit 2 Geschwindigkeitsstufen veranlaßt, wie wir im praktischen Teil an verschiedenen Ausführungen er-

läutern werden. Obschon die Dampfausnutzung eines solchen Rades wesentlich ungünstiger ist als die der einfachen Druckstufen, kann trotzdem der Gesamtwirkungsgrad befriedigend ausfallen, falls man den Rest der Turbine unter den günstigsten Bedingungen arbeiten läßt. Die gleichmäßige Einteilung des Wärmegefälles wird auch dann aufgegeben, wenn man einen Hochdruck- und einen Niederdruckteil unterscheidet, die jedoch bei modernen Turbinen nicht mehr in getrennten Gehäusen untergebracht werden. Die Bezeichnung will nur besagen, daß die Hochdruckstufen mit kleinerem Raddurchmesser ausgeführt werden als die Niederdruckstufen, so daß die Schaufellängen und die Beaufschlagung von Anfang an nicht zu klein werden. Dementsprechend ist auch das Wärmegefälle der Hochdruckstufen kleiner.

Falls keine Vorbilder benachbarter Größe vorliegen, wird man den Dampfverbrauch zunächst einzuschätzen und daraus den Endpunkt der Zustandskurve festzustellen haben. Unter Zustandskurven verstehen wir die Verbindungslinie der aufeinanderfolgenden Anfangspunkte der Entspannung in den aufeinanderfolgenden Stufen, die in erster Annäherung als die gerade Verbindungslinie des gegebenen Anfangspunktes und des eingeschätzten Endpunktes im Entropieschaubild angenommen wird. Hierauf teilen wir das Gefälle in der erwähnten Weise ein, wobei im allgemeinen von Anfang an der letzten Stufe mit Rücksicht auf die Schaufellänge ebenfalls ein größeres Gefälle zuzuweisen ist.

Nun setzt die Einzelrechnung ein, wobei man mit Ausnahme der ersten und letzten Stufe (je für den Hochdruck- und Niederdruckteil) oft ein und denselben Geschwindigkeitsplan verwenden kann. Dies bedingt, daß das Wärmegefälle der ersten Stufe in der betreffenden Gruppe (trotz gleichen Geschwindigkeiten) etwas größer ist als dasjenige der folgenden, und zwar um den Betrag der kinetischen Energie des Zuflusses.

Infolge der Gleichheit des Geschwindigkeitsplanes werden für jede Stufe einer solchen Gruppe auch die Verluste gleich groß; demnach kann im Entropieschaubild die genaue Zustandskurve rasch als Zickzacklinie aus gleichen Gefälls- und Verluststücken zusammengesetzt werden. Ist man auf diese Weise beim Kondensatordruck angelangt, so zeigt es sich, ob die ursprüngliche Einschätzung brauchbar ist und ob die gemachten Annahmen beibehalten werden können. Im andern Falle sind entsprechende Änderungen anzubringen, die jedoch schon bei geringer Vertrautheit mit dem Stoff geringfügig oder überflüssig zu sein pflegen.

Die Zwischenwirkungsgrade.

Um eine Übersicht über die Veränderlichkeit des Wirkungsgrades und der Turbinenabmessungen von den einflußnehmenden Größen zu erlangen, wurde der Schaufelwirkungsgrad einer Zwischenstufe mit dem Anfangszustand 1,8 at abs. Druck und 150° C untersucht. Da der Einfluß der Schaufellänge auf das Ergebnis mit untersucht werden soll, darf nicht mit einer Gesamtverlustzahl φ gerechnet werden; man muß vielmehr auf die Reibungsformel zurückgreifen und die Reibungszahl ζ_r ermitteln. Dies geschah, indem man annahm, daß die in Abb. 237 dargestellten Schaulinien von φ an einer Leitschaufel der Christleinschen Art mit quadratischem Austrittsquerschnitt von 13 mm Seitenlänge bei 30° Neigung ermittelt worden seien. Unter Zuhilfenahme der in Abschn. 46 unter a) mitgeteilten Zwischenwerte ergaben sich nach der dortigen Gl. (12a) beispielsweise für die Geschwindigkeiten $c_1 = 200$ bzw. 500 m/sek, die Reibungszahlen $\zeta_r = 0{,}041$ bzw. 0,031[1]).

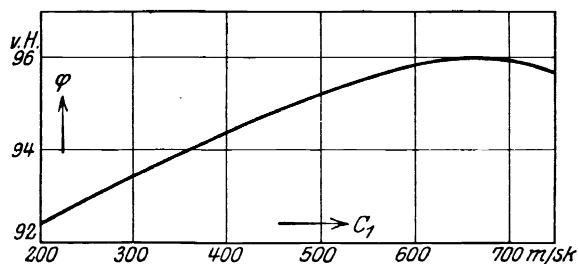


Abb. 237. Angenommene Schaulinie für φ.

Bei der Wahl der φ-Schaulinie wurde Wert darauf gelegt, ein ausgesprochenes Wachsen des φ mit der Geschwindigkeit zum Ausdruck zu bringen, wenn auch nicht in dem auffallenden Maße wie in Christleins Versuchen. die in diesen Punkten der Aufklärung be-

[1]) Während der Drucklegung stellte sich heraus, daß infolge eines Versehens bei 700 m/sek Geschwindigkeit als φ der zu hohe Wert 0,965 benützt worden war, wodurch die Endpunkte der in Abb. 238 dargestellten Schaulinien zu hoch hinauf rückten; wegen Zeitmangels konnte dieses Versehen nicht mehr richtiggestellt werden.

dürfen. Die Schaulinie hält eine Art von Mitte inne zwischen den Beobachtungen von Christlein und Brown, Boveri & Co.

Was den **Laufschaufelverlust** anbelangt, so wurde zunächst die Verhältniszahl ψ als Mittelwert der von Brown, Boveri & Co. mitgeteilten, in Abb. 171b dargestellten mit A und A_1 bezeichneten Schaulinien gewählt, so zwar, daß für die

$$\text{Geschwindigkeiten } w_1 = 100,\ 300,\ 450,\ 600 \text{ m/sek}$$
$$\psi = 0{,}755,\ 0{,}872,\ 0{,}906,\ 0{,}884$$

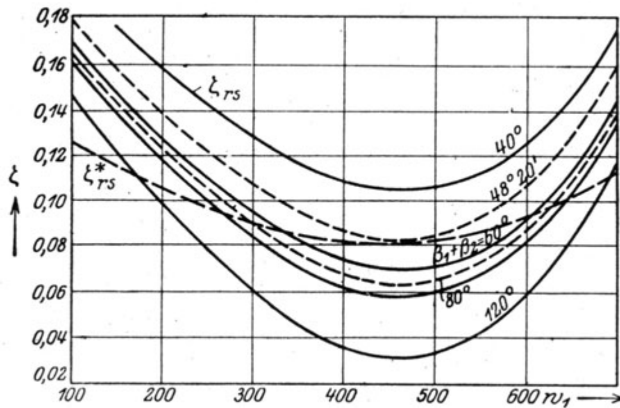


Abb. 237a. Berechnete Reibungszahlen ζ_{rs}.

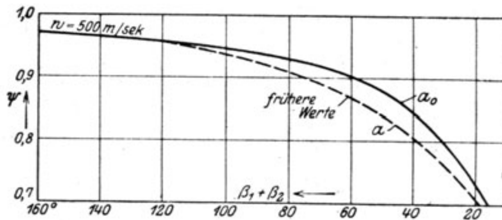


Abb. 237b. Hilfskurve zur Umrechnung von ψ auf andere Winkel.

ist. Die über 500 m/sek reichenden Werte kommen praktisch kaum je in Betracht. Aus ψ wurde die Reibungsziffer mittels der vereinfachten Energieformel

$$L_r = \frac{\zeta_{rs}}{2}\left(\frac{L_o}{a_m} + \frac{L_o}{e_m}\right)\frac{w_1^2}{2g} = (1 - \psi^2)\frac{w_1^2}{2g}$$

berechnet, auf Grund der willkürlichen Einschätzung, daß für die Versuchsschaufel $e_m = 9$ mm, $a_m = 16$ mm, $L_o = 30$ mm, $\beta_1 = \beta_2 = 30^0$ sei. Auf diese Weise ergab sich die in Abb. 237a mit 60^0 überschriebene Schaulinie. Um ζ_{rs} bei andern Ablenkungen,

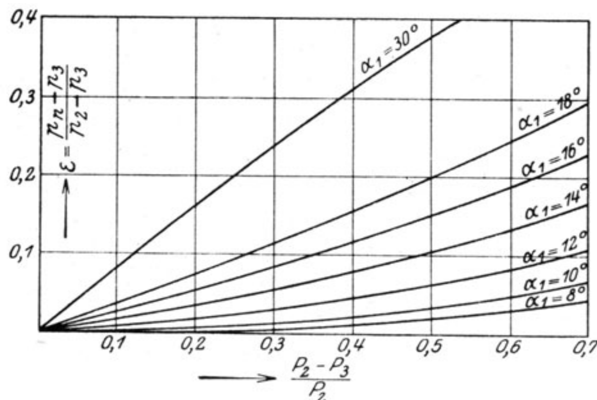


Abb. 237c. Druckverhältnis ε zur Ablenkungsrechnung.

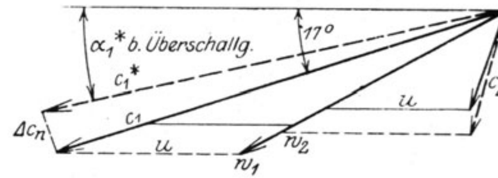


Abb. 237d. Geschwindigkeitsplan.

d. h. Schaufelwinkeln angeben zu können, wurde die in Abb. 237b mit a_0 überschriebene Schaulinie des ψ benützt, die gegenüber dem in der vierten Auflage benützten Verlauf a mit Rücksicht auf die Versuche von Brown, Boveri & Co. entsprechend aufgebessert erscheint. So konnten für Zwischenwinkel die Reibungsziffern in Abb. 237a als Abhängige der relativen Strömungsgeschwindigkeit w_1 dargestellt werden. Die mit ζ_{rs}^* überschriebene Schaulinie wird weiter unten erläutert.

Bei **Spaltausdehnung** wurde die **Strahlablenkung** mit Hilfe der empirischen Verhältniszahl

$$\varepsilon = \frac{p_n - p_3}{p_2 - p_3}$$

laut Abb. 237c nach dem Satz vom Antrieb berechnet. Darin bedeutet p_2 den Druck im engsten bzw. im Austrittsquerschnitt vor dem Schrägabschnitt, p_n den mittleren Normaldruck auf die Wand im Schrägabschnitt, p_3 den Gegendruck. Die Ablenkung stimmt angenähert mit derjenigen überein, die mittels der Stetigkeitsgleichung erhalten wird. Die Versuchswerte zeigen, daß die (scheinbare!) Reibungsziffer ζ_r stark wächst, wenn die **Entspannung** zu einem erheblicheren Teil **außerhalb des Schrägabschnittes im Freien** erfolgt, offenbar infolge Zunahme der Schwingungsenergie in senkrechter Richtung zur Strahlachse. Da so starke Ausdehnungen praktisch wenig Bedeutung haben, wird von der Mitteilung der Rechnungsergebnisse abgesehen. Der Berechnung des Zwischenwirkungsgrades wurde, solange man mit Unterschallgeschwindigkeit arbeitete, der unveränderliche Winkel $\alpha_1 = 17^0$ zugrunde gelegt. Die Laufschaufel ist jeweils auf stoßfreien Eintritt eingestellt gedacht, der Auslaßwinkel ist $\beta_2 = \beta_1$ (Abb. 237d). Sobald die Schallgeschwindigkeit überschritten wurde, ist **unter Beibehaltung der nicht erweiterten Düse** der Leitradwinkel auf α_1^*, d. h. um so viel verkleinert worden, daß die Richtung der absoluten Geschwindigkeit c_1 mit Rücksicht auf die Strahlablenkung wieder den Winkel $\alpha_1 = 17^0$ mit dem Radumfang einschloß. **Auf diese Weise blieben die Winkel im Laufrad für gleiche Verhältnisse von u/c_1 unverändert** und der Einfluß der Schaufelkrümmung, den wir heute noch weniger genau kennen, als den Einfluß der Geschwindigkeit ist, bei dem Vergleich ausgeschaltet. Im übrigen änderte sich der Umlenkungswinkel beim Übergang von $u/c_1 = 0{,}3$ auf 0,55 bloß um 24^0.

Damit der Zwischenwirkungsgrad ein **richtiges Maß für den Gesamtwirkungsgrad** der Turbine bilde, muß im Sinne von Abschn. 60 die Zuflußgeschwindigkeit für die Zwischenstufe als genau gleich mit der Abflußgeschwindigkeit vorausgesetzt werden. Um diese Gleichheit zu erreichen, mußte jedes Beispiel wiederholt berichtigt werden, was eine ungemein zeitraubende Arbeit war. In Abb. 238 sind die **Ergebnisse zusammengestellt**. Es wurden die Eckpunkte und vier Zwischenpunkte des Druckverhältnisses untersucht, und zwar je **für drei Geschwindigkeitsverhältnisse** $\frac{u}{c_1} = 0{,}30,\ 0{,}45,\ 0{,}55$. In Abb. 238 ist das Druckverhältnis $\frac{p_3}{p_1}$ als Abszisse benützt, da es uns insbesondere darauf ankommt, den Vergleich bei Übergang von Unterschall- zu Überschallgeschwindigkeit zu führen. Die Veränderlichkeit des Wirkungsgrades mit $\frac{u}{c_1}$ wird im wesentlichen durch die Schaulinien der Abb. 236 wiedergegeben, sofern man darin die Punkte mit denjenigen φ- und ψ-Werten vermerkt, die sich in Abb. 238 zu den einzelnen Annahmen als zugeordnet ergeben haben. Die Schallgeschwindigkeitsgrenze liegt nicht beim theoretischen Druckverhältnis $\frac{p_3}{p_1} = 0{,}54$, da die Ausdehnung nicht mit der Geschwindigkeit Null, sondern mit einer mehr oder weniger erheblichen „Zufluß"geschwindigkeit $c_0 = c_2$ beginnt. Denkt man sich die Zuflußenergie durch adiabatische Verdichtung in Druckenergie verwandelt, so würde als theoretischer Anfangszustand ein Druck p_0 zu rechnen sein, der höher ist als der augenblicklich herrschende Anfangsdruck p_1 der Stufe. Da $p_k/p_0 = 0{,}54$ sein muß, so gilt die Beziehung

$$\frac{p_k}{p_1} = 0{,}54 \cdot \frac{p_0}{p_1} > 0{,}54$$

doch ist die Abweichung nicht beträchtlich.

Es wurde angenommen, daß eine **Turbine für eine bestimmte Leistung** mit einem Dampfgewicht $G = 7{,}92$ kg/sek vorliegt. Die lichte Weite der Leitschaufeln wurde im Unterschallgebiet unveränderlich $e_1 = 13$ mm angenommen. **Bei kleiner Ausdehnung ist die Dampfgeschwindigkeit klein, somit der erforderliche Querschnitt, d. h. die Schaufellänge, groß,** sie steigt gemäß Abb. 238 in erheblichem Maße. Die Abbildung zeigt, daß infolgedessen φ **unterhalb des Schallgebietes nur ungemein wenig zunimmt, so daß Turbinen, die mit kleinem Stufengefälle arbeiten, mit Rücksicht auf φ allein noch durchaus nicht unwirtschaftlich zu sein brauchen. Wohl aber legt der Verlauf der ψ-Linien die Anwendung stärkerer Ausdehnung nahe.** In der Tat erkennt man, daß die den Versuchswerten von Brown, Boveri & Cie. nahekommenden Schaulinien ζ_{rs} in Abb. 237a innerhalb der Schallgrenze eine Steigerung des Wirkungsgrades um 5 bis 6 v. H. ergeben. Wesentlich kleiner ist die Zunahme für die zweite, **des Vergleiches halber flacher angenommene** ζ_{rs}^*-Linie in Abb. 237a, mit der freilich η nur für das Verhältnis $\frac{u}{c_1} = 0{,}45$ durchgerechnet wurde, wobei in Abb. 238 die zugehörigen Werte mit einem Stern (*) bezeichnet sind. Über der Schallgrenze nehmen sowohl φ als auch ψ weiter zu und bewirken entsprechendes Wachstum der Wirkungsgrade, bei $\frac{u}{c_1} = 0{,}3$ nur bis zu einem Ausdehnungsverhältnis von etwas unter 0,4. Allein gleichzeitig nehmen die für eine Stufe aufgezehrten adiabatischen Gefälle und die **erforderlichen Umfangsgeschwindigkeiten erheblich zu. Durch diesen Umstand wird der praktischen Verwertbarkeit der Spaltausdehnung sehr bald eine Grenze gesetzt.** Wenn sich in der Tat das Druckverhältnis dem Wert 0,3 nähert, so steigt das Wärmegefälle gegen 50 k/cal und erfordert bei einem Verhältnis $\frac{u}{c_1} = 0{,}45$ Umfangsgeschwindigkeiten in der Gegend von 290 m/sek, was man als jenseits der praktisch zweckmäßigen Grenze bezeichnen dürfte. Hierbei würde **die Schallgeschwindigkeit um etwas über 30 v. H. überschritten.**

Die Abbildung zeigt die **außerordentliche Vielgestaltigkeit der mehrstufigen Turbine**, da ein und dasselbe Ergebnis mit weit auseinanderliegenden Mitteln erreichbar ist. So wäre ein Wirkungsgrad von rund 82,5 v.H. ebenso gut erzielbar mit

$$\frac{u}{c_1} = 0{,}3 \qquad \frac{p_3}{p_1} = 0{,}3 \qquad h = 50 \text{ kcal} \qquad u = 130 \text{ m/sek}$$

wie mit

$$\frac{u}{c_1} = 0{,}45 \qquad \frac{p_3}{p_1} = 0{,}8 \qquad h = 10 \text{ kcal} \qquad u = 200 \text{ m/sek}$$

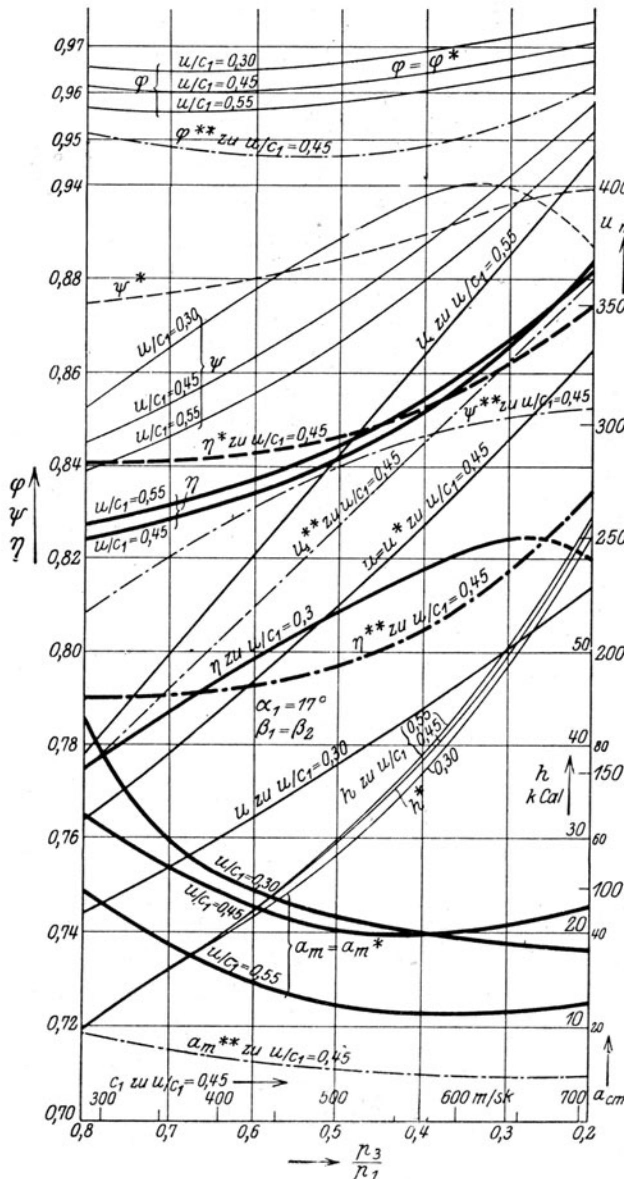


Abb. 238.
Wirkungsgrade, Umfangsgeschwindigkeiten, Gefälle.

von Undichtheit und Radreibung abgesehen. Zum gleichen Ergebnis führen selbstverständlich auch alle Zwischenübergänge, die man zwischen die angeführten Grenzfälle einschalten kann.

Um **den Einfluß der Schaufellänge im Hochdruckgebiet** zum Ausdruck zu bringen, wurde für eine Turbine mit $G = 21{,}2$ kg/sek bei Vollbeaufschlagung und einer mittleren Schaufellänge von 12 mm, für das Geschwindigkeitsverhältnis $\frac{u}{c_1} = 0{,}45$ und die Druckverhältnisse $\frac{p_3}{p_1} = 0{,}733$ 0,533 0,333 der Zwischenwirkungsgrad bestimmt. Der Anfangszustand der betreffenden Stufe ist $p_1 = 15$ at abs. und 320° C. Die mit entsprechender Bezeichnung in Abb. 238 eingetragenen (aus den angeführten drei Punkten interpolierten) Schaulinien lassen erkennen, daß φ und insbesondere ψ auf erheblich kleinere Werte sinken, infolgedessen auch **der Wirkungsgrad eine Einbuße von im Mittel 4 v. H.** erleidet. Eigentümlicherweise ändert sich auch die Form der Schaulinien, indem der Wirkungsgrad bei großen Druckverhältnissen höher liegt. Dies dürfte insbesondere mit der gleichsinnigen Änderung von ψ zusammenhängen.

Bei der Beurteilung der **Verhältnisse im Überschallgebiet darf nicht übersehen werden, daß der abgelenkte Strahl** bei weitem weniger Gleichmäßigkeit aufweist als unter dem Schallgebiet, — er **„streut"** **wesentlich mehr** und die Geschwindigkeit wird über den Querschnitt ungleichmäßiger verteilt sein. **Wie groß die hierdurch verursachte Einbuße ist, kann nur durch Versuche an bewegten Schaufeln, d. h. mit wirklichen Turbinenrädern festgestellt werden.**

Der verantwortliche Turbinenkonstrukteur wird nicht säumen, sich die Versuchsunterlagen zu beschaffen, auf Grund deren eine vollständigere Darstellung als in Abb. 238 möglich wird. Nur an Hand einer solchen Übersicht kann endgültig Entschluß gefaßt und die „beste Turbine" nicht nur in Hinsicht auf den Wirkungsgrad, sondern auch auf die Anlagekosten und auf die Betriebssicherheit entworfen werden.

Ausschlaggebender Einfluß des letzten Rades und Zahlenbeispiel.

Da man die Schaufellänge mit Rücksicht auf den Unterschied der Teilung an der Spitze und an der Wurzel nicht über $^1/_5$ oder äußerst $^1/_4$ des mittleren Durchmessers auszuführen pflegt, ist durch die Größe des letzten Rades der Austrittsquerschnitt und

die Leistung der Turbine begrenzt. Man kann zwar viel Arbeit „herausholen", wenn man größere Abflußgeschwindigkeiten zuläßt; der Auslaßverlust, den man im Mittel nicht über 3 bis 5 v.H. steigen läßt, engt die Bewegungsfreiheit ein.

Bedeutet τ die Verengungsziffer der Schaufeln, so ist auf alle Fälle durch den Durchmesser D der axiale Austrittsquerschnitt der letzten Schaufel

$$F_a = \tau \pi D a = \frac{\tau \pi}{5} D^2 \quad \ldots \quad (1)$$

festgelegt. Der Auslaßverlust

$$\zeta_a = \frac{A c_2^2}{2 g H_0}, \text{ woraus } c_2 = 91{,}5 \sqrt{\zeta_a H_0} \quad \ldots \quad (2)$$

schreibt die Größe der Auslaßgeschwindigkeit c_2 vor. Ist α_2 ihre Neigung gegen den Umfang, so ist die axiale Komponente $c_a = c_2 \sin \alpha_2$, und so ergibt sich mit v als Rauminhalt bei

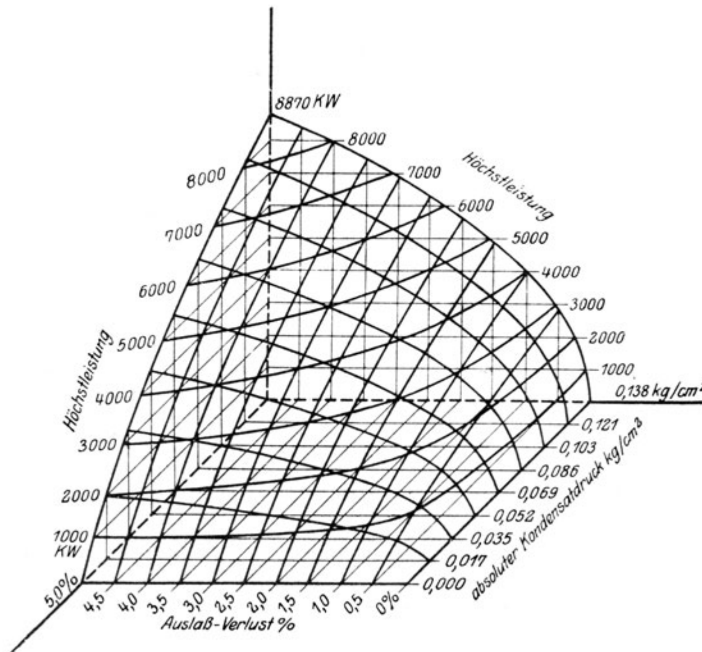


Abb. 238a. Begrenzung der Leistung durch das letzte Rad.

Kondensatorspannung das größte sekundliche Gewicht, das durch die Turbine strömen kann, $G_{sek} = \frac{F_a c_a}{v}$. Nun ist der Verbrauch für die kW-st wenn $\eta_e \eta_d$ die Wirkungsgrade der Turbine und des Stromerzeugers sind

$$G_{el} = \frac{632}{0{,}736\, \eta_e \eta_d H_0}$$

Also ist die größte Leistung, die man mit der Axialturbine erzielen kann (wenn $D/a = 5$ ist)

$$N_{kw} = \frac{3600 \cdot G_{sek}}{G_{el}} = \frac{3600 \cdot 91{,}5 \sin \alpha_2\, \pi \tau D^2 \eta_e \eta_d H_0^{3/2} \sqrt{\zeta_a}}{858 \cdot 5 \cdot v} \quad \ldots \quad (3)$$

Hier kann man für ein kleines Gebiet $pv =$ konst. und zwar wenn p in at, v in cbm/kg eingesetzt wird, etwa $pv = 1{,}45$ setzen, so daß schließlich mit $\eta_e = 0{,}7$; $\eta_d = 0{,}94$; $\tau = 0{,}92$; $\alpha_2 = 90^0$ die Höchstleistung sich zu

$$N_{kw} = 100\, p D^2 H_0^{3/2} \sqrt{\zeta_a} \quad \ldots \quad (4)$$

ergibt. (D in m, p in at abs., H_0 in kcal, ζ_a als echter Bruch eingesetzt.) Ist bloß ζ_a veränderlich, so nimmt N_{kw} parabolisch zu. Ist $p = 0$ oder $\zeta_a = 0$, so ist auch $N_{kw} = 0$, da H_0 endlich bleibt; d. h. bei unendlich kleinem Kondensatordruck kann mit endlichem Auslaßverlust keine Leistung abgegeben werden.

Daraus folgt jedoch nicht, daß wenn bei einer ausgeführten im Betrieb befindlichen Turbine der Kondensatordruck stark erniedrigt wird, die Leistung abnimmt. Sie nimmt im Gegenteil zu, in noch stärkerem Maße wächst aber auch der Auslaßverlust. Auf diese Verhältnisse kommen wir in Abschn. 68 zurück.

Als Beispiel ist in Abb. 238a die von Baumann[1]) berechnete Leistung einer Turbine mit $D = 1{,}07\ m$, $p_1 = 13{,}65$ at abs, $t_1 = 276^0$ C in Abhängigkeit von p und ζ_a dargestellt. Auf den Einfluß der Luftleere sei besonders hingewiesen.

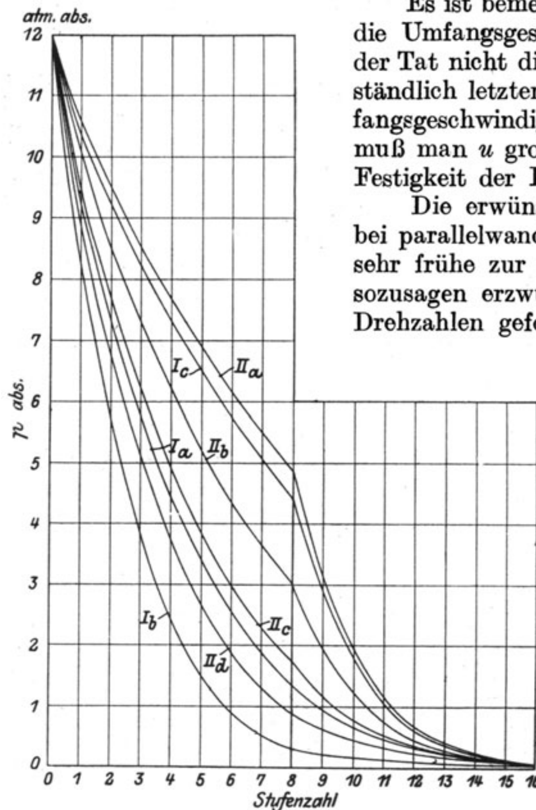


Abb. 238c. Unempfindlichkeit des Wirkungsrades gegen Unterschiede in der Gefällsaufteilung.

Es ist bemerkenswert, daß in Gl. (9) weder die Drehzahl noch die Umfangsgeschwindigkeit vorkommen. Diese beeinflussen in der Tat nicht die Leistung, sondern die Stufenzahl, da selbstverständlich letztere um so größer werden muß, je kleiner die Umfangsgeschwindigkeit ist. Um kleine Stufenzahlen zu erhalten, muß man u groß wählen; dies aber findet seine Grenze in der Festigkeit der Laufscheibe.

Die erwünschte Steigerung der Abflußgeschwindigkeit hat bei parallelwandigen Leitschaufeln in den letzten Rädern schon sehr frühe zur Anwendung der „Spaltausdehnung" geführt, die sozusagen erzwungen wird, sobald große Leistungen bei hohen Drehzahlen gefordert werden.

So führt die Durchrechnung einer Turbine von 15000 kW Leistung bei 3000 Umdr./min und 15 at abs. Anfangsdruck 300° C Dampftemperatur, 0,04 at abs. Luftleere auf folgende Abmessungen:

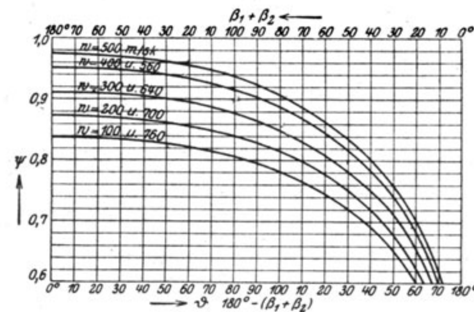


Abb. 238b. Von der Schaufellänge unabhängig angenommene ψ-Werte.

Gleichdruck-Dampfturbine von 15000 kW bei 3000 Umdr./min
$p_1 = 15$ at abs., $t_1 = 300^0$ C, $p_{kond.} = 0{,}04$ at abs.

Ausführung mit		5 Stufen					7 Stufen						
Stufe		I	II	III	IV	V	I	II	III	IV	V	VI	VII
Druck vor der Stufe p_1 .	at abs.	15,0	6,08	2,15	0,67	0,175	15,0	9,0	5,25	2,90	1,48	0,72	0,175
Mittlerer Durchmesser D .	mm	← 1655 →				1720	← 1655 →						1720
Austrittswinkel Leitapparat α_1		← 14° →			15°	16°	← 14° →					15°	16°
Strahlablenkung ϑ . . .		2° 10	4° 40	7° 37	11° 40	16° 50	← 0° →					11° 40	16° 50
Reingefälle $h_0 = A \frac{c}{2g}$ . .	kcal	50	47,38	46,55	46,04	45,83	29,05	← 28,06 →				49,01	45,83
Umfangsgeschwindigkeit u	m/sek	← 260 →				270	← 260 →						270
Verhältnis $\frac{u}{c}$		0,402	0,413	0,417	0,419	0,436	0,527	← 0,537 →				0,406	0,436
Verhältnis $\frac{u}{c_1}$		← 0,419 →				0,429	← 0,554 →					0,419	0,429
Geschwindigkeit c_1 . . .	m/sek	← 621 →				630	← 469 →					621	630
„ c_2 . . .	„	148	170	182	218	280	← 135 →					218	280
Laufradwinkel β_1		27° 30	31° 10	35° 45	43° 50	52° 40	← 29° 40 →					43° 5	52° 40
„ β_2		27° 30	31° 10	32° 15	36°	46° 20	← 29° 40 →					36°	46° 20
Theoretische Leitschaufellänge a_1	mm	34,7	38,3	49,3	135	398	23,5	24	23	40	77	135	389
Theoretische Laufschaufellänge (Austritt) a_2 . .	mm	38	40	52	143	519	30	30	30	50	97	143	419
Beaufschlagung		$^1/_4$	$^1/_2$	← voll →			$^1/_2$	$^5/_7$	← voll →				

[1]) Proc. Instit. Electr. Eng. 1912, Vol. 48, S. 768.

Gleichdruck-Dampfturbine von 15000 kW bei 3000 Umdr./min.
$p_1 = 15$ at abs., $t_1 = 300^0$ C, $p_{\text{kond.}} = 0{,}04$ at abs.

Ausführung mit	10 Stufen									
Stufe	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
Druck vor der Stufe p_1 . at abs.	15,0	10,95	7,94	5,70	3,95	2,67	1,75	1,13	0,72	0,175
Mittlerer Durchmesser D . mm	←				1300			→	1655	1720
Austrittswinkel Leitapparat α_1	←				14°			→	15°	16°
Strahlablenkung ϑ . . .	←				0°			→	11° 40	16° 50
Umfangsgeschwindigkeit u m/sk	←				204,5			→	260	270
Reingefälle $h_0 = A \frac{c}{2g}$ . . kcal	18,4	←			17,8			→	49,4	45,8
Verhältnis $\frac{u}{c}$	0,521	←			0,53			→	0,405	0,436
Verhältnis $\frac{u}{c_1}$	←				0,548			→	621 218	630 280
Geschwindigkeit c_1 . . . m/sek	←				373			→	0,419	0,429
„ c_2 . . . m/sek	←				108			→		
Laufradwinkel β_1	←				30°			→	43° 50′	52° 40
„ β_2	←				30°			→	36°	46° 20
Leitschaufellänge a_s . . . mm	21	21,3	21	28	38	56	82	123	135	398
Laufschaufellänge a_2 . . mm	27	27	27	36	49	71	104	156	143	419
Beaufschlagung	0,57	$^3/_4$	←				voll			→

Die Berechnung erfolgte mit Anwendung der in Abb. 238b dargestellten Gesamtbeiwerte ψ ohne Rücksicht auf die Schaufellänge. Diese Vereinfachung führt zu dem eigentümlichen Ergebnis, daß gemäß nachstehender Zahlentafel die gesamten Wirkungsgrade kaum merklich voneinander abweichen.

Stufenzahl		5	7	10
Adiabatisches Gesamtgefälle	kcal		228	
Letzte Austrittsgeschwindigkeit	m/sek	280	330	330
Austrittsverlust	kcal	9,36	13,00	13,00
Schaufelverlust	kcal	34,1	34	33,4
Inneres Gefälle	kcal	184,5	181,0	181,6
Innerer Wirkungsgrad	v. H.	80,9	79,4	79,7
Innerer Wirkungsgrad ohne Auslaßverlust	v. H.	85,0	85,0	85,3

Unempfindlichkeit gegen die Aufteilung des Gesamtgefälles auf die einzelnen Stufen, solange $\Sigma u^2 z$ unverändert bleibt.

In Abb. 238c sind die Ergebnisse einer in der 4. Auflage durchgeführten Rechnung zusammengestellt, die mit den unveränderlichen Werten $\varphi = 0{,}95$; $\psi = 0{,}80$; $\alpha_1 = 17^0$; $\beta_2 = \beta_1$ gewonnen worden sind und sich auf eine Turbine großer Leistung mit $p_1 = 12$ at abs.; $t_1 = 300^0$ C; $p_k = 0{,}05$ at abs. beziehen. Trotz erheblicher Unterschiede der Druck- und Wärmegefälle bleibt beim festgehaltenen Verhältnis $u/c_1 = 0{,}5$ der Wirkungsgrad fast unverändert. So insbesondere sind die Schaulinien IIa bis IId unter der Annahme entworfen worden, daß die Umfangsgeschwindigkeit der acht ersten Räder beziehungsweise 107; 136,6; 160; 167 und die der acht letzten 211; 195; 173; 167 m/sek beträgt, wodurch die Summe $\Sigma u^2 z$ jeweil unverändert bleibt.

Schaubild		IIa	IIb	IIc	IId
Gesamtgefälle für 1. Stufe in der Hochdruckhälfte . .	kcal	7,0	10,4	13,3	17,8
Desgleichen in der Niederdruckhälfte	kcal	22,5	18,9	17,0	13,5
Innerer Gesamtwirkungsgrad	v. H.	81,6	81,6	81,0	80,2

Hierdurch wird erwiesen, daß **Turbinen mit verwerteter Auslaßenergie bei gleichen Summen des Produktes aus der Stufenzahl und dem Quadrat der zugehörigen Umfangsgeschwindigkeit** ($\Sigma u^2 z$) **unter sonst gleichen Umständen nahezu gleich große innere Wirkungsgrade aufweisen.**

Diese theoretisch begründete Regel wurde auch durch **Versuche in großem Maßstabe** innerhalb gewisser Grenzen bestätigt.

62. Die Überdruckturbine.

a) Der Rückdruck (die „Reaktion").

Das Ur-Vorbild der Überdruckturbine ist die Heronsche Drehkugel (die wir in der Einleitung beschrieben haben) und das mit ihr grundsätzlich gleichartige Segnersche Wasserrädchen, das im hydraulischen Turbinenbau Veranlassung zur Einführung der Bezeichnung „Reaktionsturbine" gegeben hat.

Untersuchen wir daher, wie die „Reaktion" entsteht; wir wählen als Beispiel statt der schon minder einfachen Heronschen Drehkugel ein wagerecht geradlinig mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegtes Gefäß, Abb. 239, aus dem Wasser durch die Mündung f in einer der Bewegung entgegengesetzten Richtung ausströmt. Der auf das Gefäß übertragene Rückdruck ist die Resultierende sämtlicher Flüssigkeitsdrucke und besteht einerseits aus dem nicht ausgeglichenen Druck auf die Projektion der Mündungsfläche an der gegenüberliegenden Gefäßwand

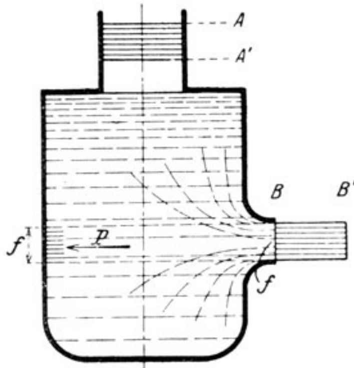


Abb. 239. Entstehung des „Rückdruckes"

$$P' = fp,$$

worin f die Mündungsfläche, p den absoluten Druck für die Flächeneinheit bedeuten, dann aber aus einem weiteren Betrag mit eigentümlichem Entstehungsgrund. Die zur Mündung führenden Flüssigkeitsfäden müssen nämlich in die Richtung des Strahles abgelenkt und beschleunigt werden, und hierzu wird ein Teil der vorhandenen Pressung aufgezehrt, so daß die Wand in der Nähe der Mündung einem geringeren Druck ausgesetzt ist, als bei ruhender Flüssigkeit. Demnach besitzt die unverminderte Flüssigkeitspressung an der gegenüberliegenden Wand einen weiteren Überdruck, dessen Größe bei undehnbaren Flüssigkeiten und einem nach Abb. 239 vor sich gehenden Ausfluß bemerkenswerterweise dem Druck P' gerade gleich ist, so daß der Rückdruck oder die „Reaktion" im ganzen

$$P = 2fp \text{ kg}$$

beträgt. Der Beweis folgt für Wasser, wenn man die in einer Sekunde zufließende und abfließende Wassermasse mit m, die Ausflußgeschwindigkeit mit w bezeichnet und den Außendruck $= 0$ voraussetzt aus dem Satz vom Antrieb. Die Bewegungsgröße der ganzen im Gefäß befindlichen Masse, zwischen den Schnitten A und B, erfährt, nachdem diese Schnitte in einer Sekunde nach A' und B' verschoben worden sind, den Zuwachs mw in wagerechter Richtung, und dieser muß dem Produkt aus der gesamten auf die ganze Masse einwirkenden Horizontalkraft und der Zeit, d. h. einer Sekunde, gleich sein. Wir erhalten daher

$$P = mw,$$

da aber $m = (\gamma/g) \cdot fw$ und, indem wir die Zuflußgeschwindigkeit als vernachlässigbar ansehen, $w^2/2g = p/\gamma$ ist, so findet sich

$$P = \frac{\gamma}{g} fw^2 = 2fp,$$

wie zu beweisen war. **Bei elastischen Flüssigkeiten sind die Verhältnisse nicht ebenso einfach.**

Der Rückdruck im geradlinig bewegten Schaufelkanal setzt sich aus den Drücken der einzelnen Elemente zusammen. Es seien in Abb. 240 die aufeinanderfolgenden Lagen des in der Zeit Δt eintretenden Massenelementes δm dargestellt. Die aufeinanderfolgenden relativen

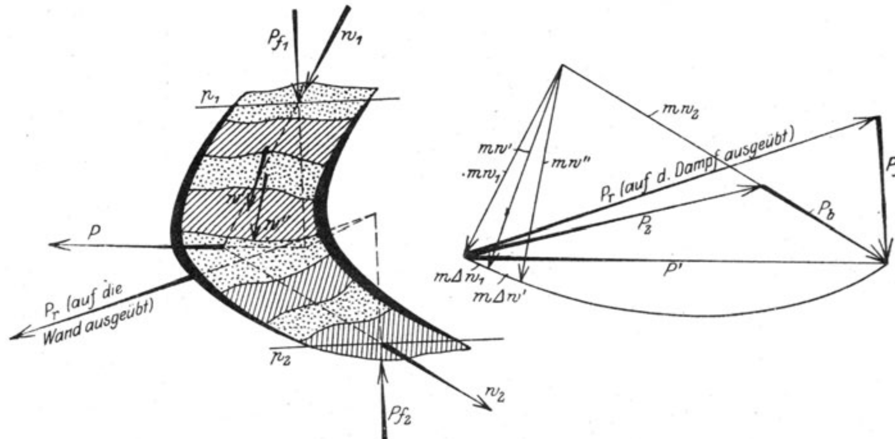


Abb. 240. Rückdruck in einer Schaufel.

Geschwindigkeiten $w_1 w' w'' \ldots$ ergeben die elementaren geometrischen Zunahmen Δw_1, $\Delta w' \ldots$, aus welchen durch die Ausdrücke $\frac{\delta m \Delta w_1}{\Delta t}$; $\frac{\delta m \Delta w'}{\Delta t} \ldots$ die elementaren auf die Dampfteile wirkenden Kräfte ΔP_1; $\Delta P' \ldots$ sich ergeben. Nun ist $\delta m/\Delta t$ die sekundlich einströmende Masse $= m$; wenn wir also in der Nebenabbildung die Fahrstrahlen mw_1;

mw'; mw'' ... parallel zu w_1, w' ... auftragen, so sind ihre geometrischen Differenzen die Kräfte ΔP_1; $\Delta P'$ ... selbst. Ihre Resultierende P' ist die gerade Schlußlinie des Polygons; sie kann zerlegt werden in die Kraft, die zum Vorschein käme, wenn $w_2 = w_1$ wäre, die also den **Umlenkungsdruck** $= P_z$ für sich —, und in die der Zunahme von w_1 auf w_2 entsprechende Komponente, die den **Beschleunigungsdruck** P_b darstellt. Jede der Kräfte ΔP stammt einerseits vom Druck der Wand (einschließlich Reibung), andererseits vom Flüssigkeitsdruck der Nachbarteile auf das betrachtete Element her. Bei der Bildung der Resultierenden heben sich die Flüssigkeitsdrucke gegenseitig, bis auf den Anteil, der auf die Eintritts- und auf die Austrittsfläche wirkt, auf. Die letzteren sind (für das ganze Rad) das Produkt der axialen Ein- und Austrittsfläche der Schaufel mit den betreffenden Dampfdrücken und liefern $= F_1 p_1 - F_2 p_2 = P_{f1} - P_{f2} = P_f$. Die Resultierende der Wanddrücke werde mit P_r bezeichnet. Dann erkennt man an Abb. 240, daß die gesamte auf den Dampf ausgeübte Kraft P' einerseits die Resultierende aus den als Kräfte anzusehenden Größen $-mw_1$ und $+mw_2$, anderseits die Resultierende aus P_r und P_f ist. Der vom Dampf auf die Kanalwand ausgeübte Rückdruck ist gleich, aber entgegengesetzt zu P_r. Seine wahre Lage wird gefunden, indem man im Schaufelbild $-mw_2$ und $+mw_1$ zur Resultierenden $-P$ und diese mit den Flüssigkeitsdrücken P_{f1} und P_{f2} zu $-P_r$ zusammensetzt.

Es erzeugt also der austretende Strahl eine „Reaktion" $-mw_2$ und der eintretende Strahl gewissermaßen eine „Aktion" $+mw_1$. Es ist bemerkenswert, daß bei gleicher Anfangs- und Endgeschwindigkeit P_r nicht abhängt von der Form, Länge und Breite des Kanales.

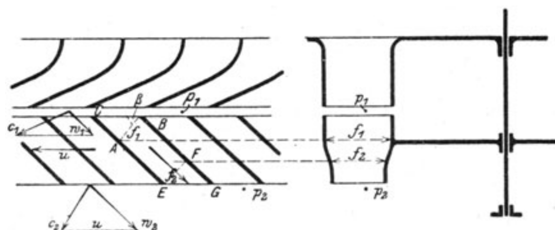


Abb. 241. Die Dolderturbine.

Ein eigentümliches Kräftespiel tritt bei der Dolderturbine[1]), Abb. 241, auf. Da w_1 und w_2 gleichgerichtet sind, gibt es keinen „Umlenkungsdruck". Betrachtet man bloß den Zustand zwischen den bei A und E punktiert angegebenen Querschnitten f_1 und f_2, so würde man geradezu an der Möglichkeit einer Kraftübertragung zweifeln. Die in der Achsenrichtung des Kanales auf dessen Wände übertragene Flüssigkeitspressung (und Reibung) wirkt in der Tat der Bewegung offensichtlich entgegen. Die Umfangskraft stammt, wie man leicht einsieht, von dem hydraulischen Druck auf die schiefe Fläche CA her, der auch noch den auf FG wirkenden Druck überwindet. Bei einer Zerlegung in Elemente, wie in Abb. 240, tritt das scheinbare Paradoxon nicht auf.

In Abb. 242 und 243 ist zu Handen der jüngeren Studierenden das Paradoxon von Kleiner[2]) dargestellt. Durch die drehbare hohle Welle A wird mittels Düse B die Außenseite der Halbkugel C beaufschlagt mit dem Ergebnis, daß sich die eingezeichnete Drehrichtung einstellt. Hierauf wird, wie in Abb. 243 ersichtlich, die Halbkugel um 180° verdreht, so daß der Strahl die hohle Seite trifft, worauf die Turbine die entgegengesetzte Drehung annimmt. Ist bei reibungsfreier Strömung die Umfangskraft in den beiden Fällen gleich oder nicht?

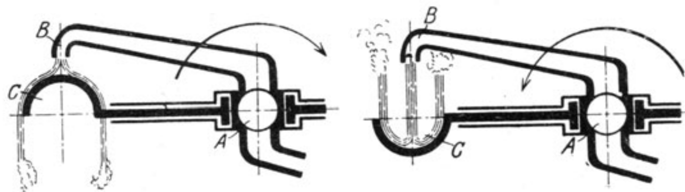


Abb. 242 u. 243. Turbinenmodell von Kleiner.

b) Die einstufige Überdruckturbine ohne Undichtheitsverlust.

Der Einfachheit halber vernachlässigen wir zunächst die Undichtheit. Die Turbine möge im Leitrad zwischen den Druckgrenzen $p_0 p_1$, im Laufrad zwischen den Grenzen $p_1 p_2$ arbeiten, die Wärmeinhalte seien i_0, i_1, i_2 (Abb. 244 und 245). Die ideale Turbine würde im Leitrad verlustfrei adiabatisch von i_0 auf i_1' expandieren; für die wirkliche ist

$$i_0 - i_1' = A\frac{c_1^2 - c_0^2}{2g} + AZ_1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

[1]) E. Dolder, Zustandsverhältn. strömender Flüssigkeiten in Turbinenrädern. Zürich 1907.

[2]) Vorlesungsexperiment des verdienten ehemaligen Professors der Physik an der Universität Zürich.

wo Z_1 den kinetischen Verlust bedeutet. Dieser Verlust hängt vom Stoß gegen die nicht vollkommen scharfe Schaufelkante, — bei der Laufschaufel von der Wirbelung, die sich im Raume hinter der Wandstärke der Leitschaufel ausbildet, ab, in der Hauptsache wird er durch die Kanalreibung verursacht, für die wir den Ansatz $R = \int \zeta_r \frac{U}{4f} \frac{c^2}{2g} dl$ wählen könnten, wenn wir bei gekrümmten Kanälen Genaueres über die Reibungszahl ζ_r wüßten. Jedenfalls kann man alle c^2 durch $c_1{}^2$ vermöge der Stetigkeit ersetzen, so daß sich der Gesamtverlust in der Form

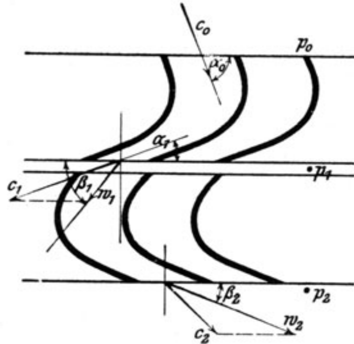


Abb. 244.
Einstufige Überdruckturbine.

$$A\,Z_1 = A\,\zeta_1 \frac{c_1{}^2}{2g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1\mathrm{a})$$

darstellen läßt, wobei ζ_1 durch Versuche als Abhängige der Schaufelabmessungen und -formen zu bestimmen wäre. Hiernach schreibt sich Gl. (1)

$$i_0 - i_1{}' = \frac{A}{2g}[(1 + \zeta_1)\,c_1{}^2 - c_0{}^2] \quad . \quad . \quad . \quad (1\mathrm{b})$$

gleicht also den bekannten hydraulischen Ansätzen mit „Widerstandszahlen". Die Stelle der hydraulischen Druckhöhe vertritt hier das adiabatische Gefälle, aus dem die Erhöhung der kinetischen Energie und der Energieverlust bestritten werden.

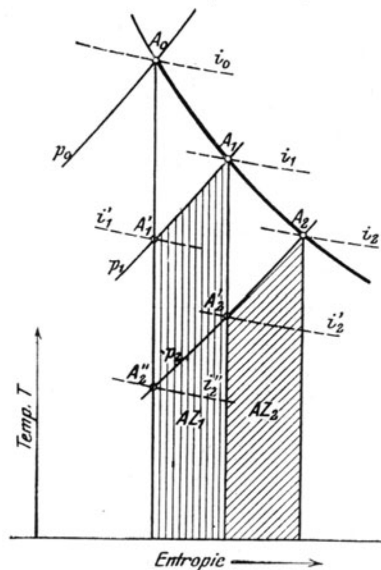


Abb. 245.
Entropieschaubild zu Abb. 244.

Die Größe von ζ_1 machen wir, wie bei der Gleichdruckturbine in der Hauptsache von dem Ablenkungswinkel, den der Strahl in der Schaufel erfährt, abhängig. Im übrigen kann man ebensogut das Geschwindigkeitsverhältnis φ bzw. ψ, wie bei der Gleichdruckschaufel in die Gleichungen einführen. Mit der theoretischen Geschwindigkeit beim Austritt aus der Leitschaufel

$$A\,c_{th}^2 = 2g\,[i_0 - i_1{}'] + A\,c_0{}^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1\mathrm{c})$$

drückt sich die wirkliche Geschwindigkeit als $c_1 = \varphi\,c_{th}$ aus und der kinetische Verlust ist

$$(c_{th}^2 - c_1{}^2)/2g = (1 - \varphi^2)\,c_{th}^2/2g = c_1{}^2\,(1 - \varphi^2)/(\varphi^2 2g).$$

Durch die Gleichsetzung mit (1a) folgt (wie in Abschn. 46)

$$\zeta_1 = \frac{(1 - \varphi^2)}{\varphi^2} = \left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1\mathrm{d})$$

Der Wärmeinhalt am Ende der Leitschaufel ist

$$i_1 = i_1{}' + A\,Z_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1\mathrm{e})$$

Der Endzustand kann somit als Schnitt von i_1 mit der Linie p_1 im Entropiediagramm eingetragen werden. Nachdem man graphisch $w_1 =$ Result. $(c_1, -u)$ ermittelt hat, können die für das Laufrad gültigen Formeln

$$i_1 - i_2 = \frac{A}{2g}[(1 + \zeta_2)\,w_2{}^2 - w_1{}^2] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$i_2 = i_2{}' + A\,\zeta_2 \frac{w_2{}^2}{2g}; \quad \zeta_2 = \left(\frac{1}{\psi^2} - 1\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

angeschrieben werden, aus welchen man die Ausflußgeschwindigkeit w_2 also schließlich $c_2 =$ Result. $(w_2, +u)$ berechnet. Die Winkel sind, theoretisch gesprochen, willkürlich. Die Verlustwärmen in Leit- und Laufschaufeln erscheinen im Entropiediagramm als die unterhalb der entsprechenden Zustandslinien schraffierten Flächenstreifen. Von der Radreibung darf man als geringfügig absehen. Die Summierung der Gl. (1b), (1e), (2), (3) liefert

$$i_0 - i_2 = A\,\frac{c_1{}^2 - c_0{}^2}{2g} + A\,\frac{w_2{}^2 - w_1{}^2}{2g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

als selbstverständlichen Ausdruck der reinen Beschleunigungsarbeit. Das Verhältnis

$$\frac{i_1 - i_2'}{i_0 - i_2''} = \varrho \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

worin i_2'' den Wärmeinhalt der adiabatischen Ausdehnung vom Anfangszustand auf den Eindruck p_2 bedeutet, nennen wir den „Reaktionsgrad". Dieser gibt an, den wievielten Teil des Gesamtgefälles wir im Laufrad ausnutzen. Für die reine Gleichdruckturbine ist $i_1 - i_2' = 0$, man arbeitet mit dem Reaktionsgrad Null; $\varrho = 1$ bildet die Grenze für „volle Reaktion".

Die Querschnitte berechnen wir bei vorgeschriebener sekundlicher Dampfmenge G mit Hilfe der Durchflußgleichungen

$$G v_0 = F_0 c_0; \quad G v_1 = F_1 c_1 = F_1' w_1; \quad G v_2 = F_2 w_2.$$

die man nach Abschn. 75 (12) auch auf die axialen Reinquerschnitte anwenden darf.

c) Kongruente Leit- und Laufschaufeln mit gleicher Axialgeschwindigkeit.

Wir führen Leit- und Laufschaufeln häufig nach Abb. 246 mit

$$\alpha_0 = \beta_1 \qquad \alpha_1 = \beta_2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

aus, so daß dieselben mit kongruentem Querschnitt aus demselben gezogenen Profilstab hergestellt werden können. Soll dann die Axialgeschwindigkeit dieselbe, d. h. $c_{0a} = c_{1a} = w_{2a}$ sein (wobei w_{1a} von selbst $= c_{1a}$ ist), so folgt auch

$$c_0 = w_1 = c_2 \text{ und } c_1 = w_2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

und bei kongruenter Schaufelform werden überhaupt die Geschwindigkeiten in entsprechenden

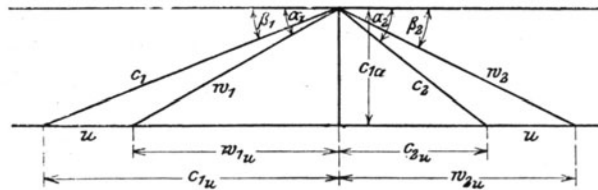


Abb. 246. Kongruente Leit- und Laufschaufeln.

Punkten gleich. Da sich nur der spezifische Rauminhalt und nur unbedeutend ändert, können auch die Reibungsverluste Z_1 und Z_2 nicht wesentlich verschieden ausfallen (bei undehnbaren Flüssigkeiten wären sie gleich). Der Wärmeinhalt nimmt im Leit- und Laufrad nach Gl. (1), (2) und (3), (4) um gleiche Beträge ab, d. h. es wird

$$i_0 - i_1' = i_1 - i_2',$$

daher haben wir $\varrho =$ ungefähr 0,5, d. h. halben Reaktionsgrad. Die Schaufelverbreiterung richtet sich nach dem spezifischen Rauminhalt.

d) Leistung am Radumfang.

Die (technische) Energie beim Eintritt ist $i_0 + A c_0^2/2g$, beim Austritt $i_2 + A c_2^2/2g$, daher ist die gewonnene Arbeit

$$A L_u = i_0 + A \frac{c_0^2}{2g} - \left(i_2 + A \frac{c_2^2}{2g}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

oder wenn wir Ausdruck (5) benutzen

$$L_u = \frac{c_1^2 - w_1^2}{2g} + \frac{w_2^2 - c_2^2}{2g} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8a)$$

Diese Formel kann, wie früher gezeigt, unmittelbar auf den Ausdruck umgeformt werden, den der Satz vom Antrieb liefert.

$$L_u = \frac{u}{g}(c_{1u} - c_{2u}) \quad \text{oder} \quad = \frac{u}{g}(w_{1u} - w_{2u}) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8b)$$

Sehr einfach stellt sich die Arbeit für die **Turbine mit kongruenten** Schaufeln dar, indem hier (algebraisch)

$$c_{2u} = w_{2u} - u = -(c_{1u} - u)$$

ist, daher wir

$$L_u = \frac{u}{g}(2c_1 \cos\alpha_1 - u) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8c)$$

erhalten.

e) Veränderlichkeit der sekundlichen Dampfmenge und des Wirkungsgrades bei wechselnder Umfangsgeschwindigkeit.

Für die dem Entwurfe zugrunde liegende Umfangsgeschwindigkeit bieten Gl. (1) bis (4) das Mittel, die Dampfgeschwindigkeiten und die Zustandsg ößen zu bestimmen. Die Gleichung der Stetigkeit liefert für das vorgeschriebene sekundliche Dampfgewicht G die Querschnitte mittels der Gleichungen

$$G v_0 = F_0 c_0; \quad G v_1 = F_1 c_1; \quad G v_1 = F_1' w_1; \quad G w_2 = F_2 w_2,$$

aus welchen wie üblich die Schaufellängen berechnet werden.

Soll nun dieselbe Turbine mit anderer Umfangsgeschwindigkeit laufen, so tritt die merkwürdige Eigenschaft der Überdruckturbine ins Spiel, daß auch G sich ändert. In der Tat nimmt mit wachsendem u bei vorerst gleichbleibenden c_1 die relative Geschwindigkeit w_1 ab; also wird das vorhandene Druckgefälle auch nur ein kleineres w_2 zu erzeugen vermögen: es strömt weniger Dampf durch das Laufrad, es entsteht ein Stau, der den Spaltdruck erhöht und c_1 verkleinert. Wird $u > c_{1u}$ so nimmt w_1 wieder zu, also wird auch G wachsen. Die Berechnung dieser Änderung wäre im allgemeinen Falle zu verwickelt, da man G und p_1 versuchsweise so lange abändern müßte, bis die oben aufgezählten Bedingungsgleichungen erfüllt sind.

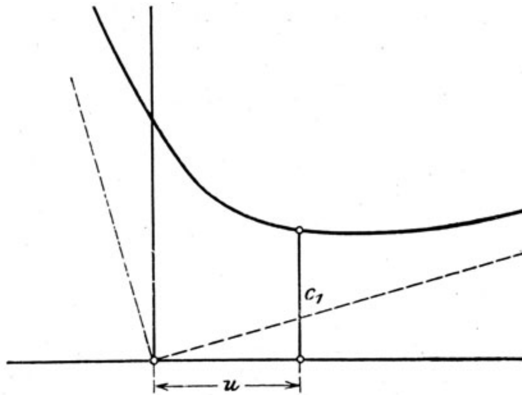


Abb. 247. Veränderlichkeit der durchströmenden Dampfmenge.

Beschränken wir uns daher auf den anschaulichen Fall einer Idealturbine, die ohne Reibung und ohne Stoß arbeitet (bei der also Winkel β_1 stets auf stoßfreien Eintritt umgeändert würde, während die übrigen Winkel ihre Größe beibehalten). In Gl. (4) fassen wir dann $i_0 + A c_0^2/2g$ zu einer Größe i_0', dem „Wärmeinhalt von der Turbine", zusammen, der unveränderlich bleiben soll, schieben an Stelle von i_2 den adiabatischen Endzustand i_2'' ein und setzen nach dem Kosinussatze $w_1^2 = c_1^2 + u^2 - 2uc_1 \cos\alpha_1$, so daß (Gl. 4) die Form

$$\frac{2g}{A}(i_0 - i_2'') = 2uc_1 \cos\alpha_1 - u^2 + w_2^2$$

annimmt. Um diese noch weiter zu vereinfachen, wollen wir endlich annehmen, daß die Druckgrenzen hinlänglich wenig verschieden sind, um $v_1 = v_2$ setzen zu können, woraus für die gleichwinklige Turbine mit $F_1 = F_2$ wie oben $w_2 = c_1$ folgt. So entsteht mit $i_0\, i_2''$ als festen Werten

$$\frac{2g}{A}(i_0 - i_2'') = 2uc_1 \cos\alpha - u^2 + c_1^2 = \text{konst.} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

und diese Gleichung lehrt, daß c_1 und u durch eine gegen die Koordinatenachsen verdrehte gleichseitige Hyperbel dargestellt werden (Abb. 247). Für diese Idealturbine nimmt die sekundliche Dampfmenge mit wachsender Umfangsgeschwindigkeit anfänglich ab, dann zu.

Versuche zeigen, daß auch für die wirkliche Turbine ein ähnliches Gesetz gilt. Der Mindestwert liegt außerhalb der praktisch in Betracht fallenden Grenzen.

Der Wirkungsgrad bestimmt sich, wie üblich, aus dem verfügbaren adiabatischen Gefälle

$$A L_0 = i_0 + A\frac{c_0^2}{2g} - i_2'' \quad \text{als} \quad \eta_u = \frac{L_u}{L_0} = \frac{u}{g L_0}(c_{1u} - c_{2u}) \quad \ldots \ldots \quad (10a)$$

daher im Sonderfalle der Turbine mit winkelgleichen Leit- und Laufschaufeln

$$\eta_u = \frac{u}{g L_0}(2 c_1 \cos \alpha_1 - u) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Darf man die Zuflußgeschwindigkeit c_0 d. h. die ihr entsprechende kinetische Energie vernachlässigen, so bleibt wohl L_0 unveränderlich, allein c_1 hängt nach (9) in verwickelter Weise von u ab, und so ist die Zunahme von η_u mit der Umfangsgeschwindigkeit nur angenähert parabolisch. Wir können keine einfachen Ausdrücke für die beste Umfangsgeschwindigkeit und den maximalen Wirkungsgrad aufstellen, sind vielmehr auf den Weg des Versuchens angewiesen. Es leuchtet von selbst ein, daß η_u um so besser wird, je kleiner die Reibungsverluste und der Auslaßverlust ausfallen. Wir müssen daher stoßfrei eintreten und c_2 tunlichst klein machen. Dies bedingt die Wahl tunlichst kleiner Winkel α_1 und β_2 und einer solchen Umfangsgeschwindigkeit, daß c_2 möglichst axiale Richtung besitzt („normaler Austritt").

f) Einfluß der Undichtheit über die freien Schaufelenden hin. Gesetz der Widerstandszahl.

Die Überdruckturbine wird überwiegend mit „offenen", d. h. nur durch das Gehäuse und die Laufradtrommel begrenzten Schaufeln gebaut (Abb. 248), und das unvermeidliche Spiel „x" am Leit- und Laufschaufelende gibt Veranlassung zu einem Undichtheitsverlust. Die im Seitenriß dicht gezogenen Linien bedeuten die Strömung im Spalt über der Laufschaufel, punktiert ist die Ansicht der Laufschaufelstirnfläche. Der Dampfstrom bricht sich an jeder folgenden Schaufelreihe und erfährt obendrein eine Ablenkung durch die Schaufelenden, an denen er vorbeiströmt. In der Laufschaufel gibt der Dampf Arbeit ab, daher muß seine absolute Geschwindigkeit kleiner werden, während im Spalt der Druckunterschied nur Reibung überwindet und Beschleunigung erzeugt. Es ist wahrscheinlich, daß der bei B mit der Breite x in den Spalt tretende Strom sich radial, bei C auf die Breite x' verengt und daß das Fehlende durch Austreten eines Stromes y aus der Laufschaufel ersetzt werden muß. Diese Mischung und der Übertritt in die nächste Leitschaufel sind mit Wirbelung verbunden. Föttinger erwähnt gelegentlich, die von der Theorie der Flug-Tragflächen her bekannten „Wirbelzöpfe" auch am freien Schaufelende sichtbar gemacht zu haben. Ähnliche Vorgänge finden im Spalte der Leitschaufel statt.

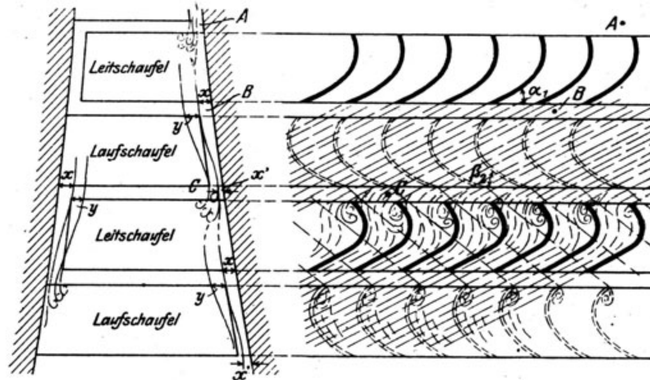


Abb. 248. Strömung im Spalt.

Eine Berechnung des Undichtheitsverlustes mittels des Wärmegefälles ist angesichts der Unkenntnis der Widerstände untunlich. Auf alle Fälle darf man, etwa bei Vergleichsrechnungen, nicht bloß mit dem Gefälle im Laufrad rechnen; auch darf als Querschnitt nicht die Ringfläche mit der Breite x, sondern das Produkt derselben mit $\sin \alpha_1$, da die Dampfbahnen angenähert unter diesem Winkel geneigt sind (in Wirklichkeit steiler, da die Beschleunigung im Spalt in axialer Richtung erfolgt), angesehen werden.

Diese Verhältnisse wurden von Anderhub[1]) im Maschinenprüffeld der Eidg. Techn. Hochschule an einem Überdruckturbinenmodell von 160 mm mittlerem Durchmesser und 8 Kränzen zu 13 mm Schaufellänge experimentell untersucht. Das Spiel der Leit- und Laufschaufeln war zunächst auf das praktisch erreichbare Mindestmaß eingestellt.

Dann wurden die Leitschaufeln um 0,78, die Laufschaufeln um 0,43 mm, schließlich nochmals die Laufschaufeln um 1,47 mm gekürzt. Die innere Leistung der Turbine bei 2,0 at abs. Anfangsdruck ist in Abb. 249 als Abhängige des Gegendruckes und der Umlaufzahl dargestellt. Die voll, gestrichelt und punktiert gezogenen Linien beziehen sich auf das kleine, mittlere und große Spiel. Anderhub leitet für die Abnahme der inneren Arbeit in Teilen des adiabatischen Gefälles die empirische Formel ab

$$\zeta_{sp} = 1{,}72 \frac{\delta^{1,4}}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

[1]) Unters. üb. d. Dampfström. im radialen Schaufelspalt. Dissertation, Zürich 1912.

wo δ das Schaufelspiel, a die Schaufellänge (beide in mm) bedeuten. Er stellt ferner fest, daß der Einfluß einer gleich großen Spalterweiterung an der Laufschaufel 1,5mal so viel Verlust verursacht, wie an der Leitschaufel, und daß die durch einen Spalt fließende Dampfmenge rund doppelt so groß ist als diejenige, die durch die gleiche radiale Länge der Schaufel strömt. Eigentümlicherweise nahm an der kleinen Versuchsturbine die gesamte Dampfmenge mit wachsender Spaltweite ab, so daß im Hauptstrome starke Störungen vorgekommen sein müssen.

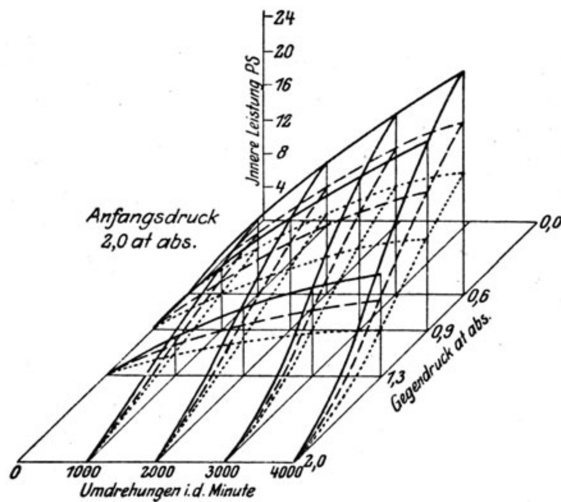


Abb. 249. Leistungen der Versuchsturbine von Anderhub.

Die Aufgabe, die Undichtheit nicht bloß in überschläglicher Weise mittels Formel (11) zu berücksichtigen, ist heute noch unlösbar. Man müßte jedenfalls die Dampfmenge in den „Hauptstrom" und den „Spaltstrom" teilen. Für den ersteren müßten wegen der Störung, die der Spalt verursacht, den Widerstandszahlen ζ_1, ζ_2 andere, größere Werte beigelegt werden. Infolge davon würde die durch die wirksame Schaufellänge strömende Dampfmenge kleiner als wenn keine Spalte vorhanden wären. Als Undichtheitsverlust würde man eine, auf 1 mm Weite gerechnet, doppelt so große Dampfmenge als im Hauptstrom hinzuschlagen. Nach Anderhub dürfte man von diesem Spaltstrom eine gewisse Arbeitsleistung erwarten, da er teilweise der Laufschaufel entstammt. Um mit der Abnahme des Wirkungsgrades nach (11) einigermaßen in Übereinstimmung zu bleiben, würden wir sie für 1 kg auf bloß etwa 10—25 v. H. derjenigen Arbeitsleistung einschätzen, die auf 1 kg im Hauptstrome entfällt; auf um so weniger, je breiter der Spalt ist. Sind G, G' die stündlichen Gewichte; H_0 das adiabatische Wärmegefälle; η_i der innere Wirkungsgrad des Hauptstromes; $\alpha = 0{,}1$ bis $0{,}25$, so würde hiernach

$$N_i = \frac{(G + \alpha G')\eta_i H_0}{632} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

In der verlustfreien Turbine wäre bei gleichgroßer Gesamtdampfmenge $N_i' = (G + G') \cdot H_0/632$; demnach der tatsächliche innere Wirkungsgrad

$$\eta_{it} = \frac{G + \alpha G'}{G + G'} \eta_i \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

Durch geeignete Annahmen über ζ_1', ζ_2', die auch η_i vermindern, kann Formel (13) mit (11) gleichwertig gemacht werden. Die Durchflußgleichung $G v_1 = F_1 c_1$ würde man auf den Hauptstrom allein und je auf den Austritt aus einer Schaufel zu beziehen haben. Ist $a' = a - \delta$ die für G verfügbare Schaufellänge in mm, so strömen G/a' kg durch 1 mm Länge hindurch, und es wäre $G' = 2G\delta/a'$.

h) Größe der Beiwerte φ, ψ und der Widerstandszahlen ζ_1, ζ_2.

Bei einer ohne Undichtheit (also mit einem Spiele $= 0$) arbeitenden Überdruckturbine müßten φ, ψ höhere Werte erhalten, als bei der Gleichdruckturbine, da bei letzterer im Schaufelwiderstand die schädliche Wirkung der aus dem Spalt angesaugten Dampfmenge mit berücksichtigt ist. In Übereinstimmung mit Wagner[1]) wählen wir, ohne zwischen Leit- und Laufschaufel (die stets von ähnlicher Form und Größe sind) einen Unterschied zu machen $\varphi = \psi$ gemäß der obersten Schaulinie in Abb. 217, abhängig vom Umlenkungswinkel ϑ. Dieser ist für die Laufschaufel

$$\vartheta = 180 - (\beta_1 + \beta_2) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

Aus ψ ergeben sich die Widerstandszahlen

$$\zeta = \zeta_1 = \zeta_2 = \frac{1}{\psi^2} - 1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

[1]) Der Wirkungsgrad von Dampfturbinenbeschaufelungen. Berlin 1913, S. 77.

Was die Abhängigkeit von der Geschwindigkeit anbelangt, verweisen wir auf das in Abschn. 46 Gesagte. Die Undichtheit wird am einfachsten berücksichtigt, indem man die Verschlechterung ζ_{sp} nach der Formel von Anderhub (Gl. 11) zu ζ hinzufügt, wozu man auf Grund der später folgenden Schaulinien des Wirkungsgrades berechtigt ist. Es wird dann mit

$$\zeta_{tot} = \zeta + \zeta_{sp} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

die Leistung der gesamten Dampfmenge, als ob keine Undichtheit vorhanden wäre, berechnet. Will man in der Durchflußgleichung die Verschiedenheit der Dampfmenge in der Schaufel und im Spalt berücksichtigen, so bestimmt man beispielsweise für das Ende einer Leitschaufel mit c_{1a} und γ_1 die auf 1 mm entfallende sekundliche Dampfmenge

$$G_1 = \pi \frac{D_m}{1000} c_{1a} \gamma_1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

Ist dann G_{sk} die gesamte sekundliche Menge, so muß mit δ als der Spaltweite in mm die Beziehung

$$G_{sk} = (a' - \delta) G_1 + 2\delta \cdot 2 G_1$$

bestehen, woraus sich die theoretische Schaufellänge

$$a' = \frac{G_{sk}}{G_1} - 3\delta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

in mm bestimmt. Diese wird im Verhältnisse der Stegdicke zur Teilung vergrößert.

63. Die mehrstufige Überdruckturbine.

Wir gehen von der Annahme aus, laß die Räder unmittelbar aufeinanderfolgen (Abb. 250), so daß die Abflußgeschwindigkeit jedes Rades nutzbar verwertet wird. Als maßgebend sehen wir den Dampfzustand an, der im Endquerschnitte einer Leit- bzw. Laufzelle vorhanden ist.[1]) Die Geschwindigkeiten, die zu einem bestimmten Leit- und Laufradpaar gehören, versehen wir mit gleichartigen Buchstaben; so z. B. gelten für die aufeinanderfolgenden Räderpaare $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ die Geschwindigkeiten

$$c_{1\alpha},\ w_{1\alpha},\ w_{2\alpha},\ c_{2\alpha};$$
$$c_{1\beta},\ w_{1\beta},\ w_{2\beta},\ c_{2\beta};$$
$$c_{1\gamma},\ w_{1\gamma},\ w_{2\gamma},\ c_{2\gamma};$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

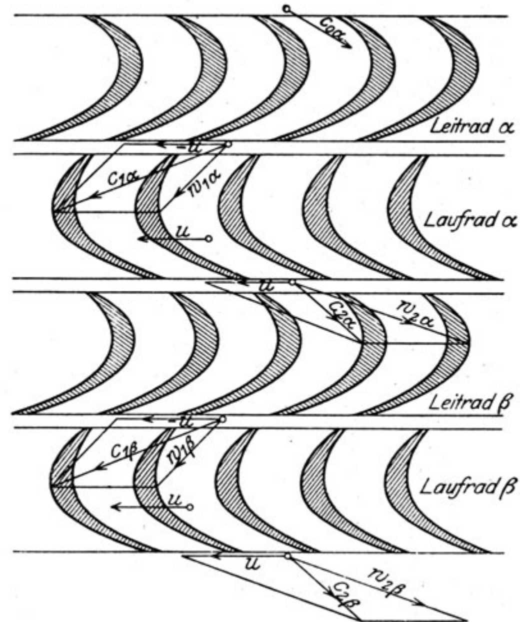


Abb. 250. Mehrstufige Überdruckturbine.

Es seien ferner die Wärmeinhalte

in der Dampfkammer . . . . i_0
am Eintritt in die Leitschaufel α . $i_{0\alpha}$
am Austritt aus der Leitschaufel α . $i_{1\alpha}$
,, ,, ,, ,, Laufradschaufel α $i_{2\alpha}$
,, ,, ,, ,, Leitschaufel β . $i_{1\beta}$
,, ,, ,, ,, Laufradschaufel β $i_{2\beta}$ usw.

In der Dampfkammer habe der Dampf die Geschwindigkeit $c_{0\alpha}$.

Für das erste Radpaar gelten die für die einstufige Turbine abgeleiteten Formeln in der Gestalt

$$\left.\begin{aligned} i_{0\alpha} - i'_{1\alpha} &= A \frac{(1+\zeta_{1\alpha}) c_{1\alpha}^2 - c_{0\alpha}^2}{2g}; \quad i_{1\alpha} = i'_{1\alpha} + A \zeta_{1\alpha} \frac{c_{1\alpha}^2}{2g} \\ i_{1\alpha} - i'_{2\alpha} &= A \frac{(1+\zeta_{2\alpha}) w_{2\alpha}^2 - w_{1\alpha}^2}{2g}; \quad i_{2\alpha} = i'_{2\alpha} + A \zeta_{2\alpha} \frac{w_{2\alpha}^2}{2g} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

wobei $i'_{1\alpha}$, $i'_{2\alpha}$ den Wärmeinhalt der adiabatischen Expansion im Leit- bzw. Laufrad bedeutet.

[1]) In Abb. 250 sind die darstellenden Punkte nur der Deutlichkeit halber in den Spalt verlegt.

Für das zweite Radpaar bildet c_{2a} = Result. von w_{2a} und $+u$ die Eintrittsgeschwindigkeit; daher gelten die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{ll} i_{2a} - i'_{1\beta} = A\dfrac{(1+\zeta_{1\beta})\,c_{1\beta}^2 - c_{2a}^2}{2g}; & i_{1\beta} = i'_{1\beta} + A\,\zeta_{1\beta}\dfrac{c_{1\beta}^2}{2g} \\ i_{1\beta} - i'_{2\beta} = A\dfrac{(1+\zeta_{2\beta})\,w_{2\beta}^2 - w_{1\beta}^2}{2g}; & i_{2\beta} = i'_{2\beta} + A\,\zeta_{2\beta}\dfrac{w_{2\beta}^2}{2g} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

und so fort, bis man beim letzten Laufrad den Kondensatordruck erreicht hat. Leistung und Querschnitte werden bestimmt wie oben.

Die Überdruckturbine wird indessen fast ausnahmslos mit sehr vielen Stufen ausgeführt, für die diese Rechnungsart zu zeitraubend wäre, um so mehr, als der Verlust durch Undichtheit, der hier eine große Rolle spielt, noch besonders berücksichtigt werden müßte. Daher entwickeln wir im folgenden ein abgekürztes Verfahren.

64. Die vielstufige Überdruckturbine

kann, wenn die Stufenzahl etwa 20—30 übersteigt, in hinreichend genauer Weise graphisch behandelt werden. Bloß die letzten Stufen erfordern bei tiefer Luftleere eine rechnerische Nachprüfung. Dabei vereinfacht sich das Verfahren ungemein, wenn wir, ältere Erfahrungen voraussetzend, die Zustandskurve des Dampfes von Anfang an aufzeichnen können. Die Reibungsverluste müssen mit Umgehung der im vorigen Abschnitte benutzten Einzel-Widerstandszahlen in summarischer Weise berücksichtigt werden, wie wir im Nachfolgenden zeigen. Indessen liegt die Möglichkeit vor, die Widerstände auch im einzelnen zu verfolgen.

a) Entwurf auf Grund einer erfahrungsmäßig angenommenen Zustandskurve.

Das verfügbare Gefälle.

wird mit Rücksicht auf die bis jetzt vorliegenden Erfahrungen wie folgt festgelegt:

	Kleine Einheiten	Große Einheiten	
Der Gesamtverlust durch Reibung in den Turbinenschaufeln, einschließlich des Undichtheitsverlustes an den Schaufelenden ζ_s	40	20	v. H.
Kinetische Energie $c_2{}^2 : 2g$ beim Austritt aus dem letzten Laufrad (kurz: „Auslaßverlust")	8—10	3—5	„ „
Dampfreibung der Trommeln, Stopfbüchsen, Lagerreibung	8—10	3—5	„ „
	56—60	26—30	v. H.
Hierzu kommt der besondere Undichtheitsverlust durch die sogen. „Labyrinthkolben", die weiter unten besprochen werden	8—10	3—5	„ „

Wir tragen diesem letzten Verluste Rechnung, indem wir zum Schluß die theoretisch erforderliche Dampfmenge um den entsprechenden Betrag erhöhen.

Wenn der Kondensatordruck p_k gewählt worden ist, berechnen wir den der adiabatischen reibungsfreien Ausdehnung von p_0 auf p_k entsprechende Wärmeinhalt i'_k, daraus

$$H_0 = i_0 - i_k' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

das „theoretische Wärmegefälle". Von diesem geht durch Schaufelreibung als „Zwischenverlust" der Anteil

$$\zeta_s H_0 = AZ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

verloren, und es bleibt in der Herrmannschen Bezeichnung

$$H_w = (1 - \zeta_s)\,H_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

als „wirksames Gefälle" übrig, welches zur Erzeugung der Geschwindigkeiten dient, und von dem der Auslaßverlust und die Lager- wie andere Reibungen abzuziehen sind, um die von der wirklich arbeitenden Dampfmenge gelieferte effektive Leistung zu erhalten.

Die Zustandskurve im Entropieschaubild

kann in erster Näherung unter der Annahme entworfen werden, daß die Verluste in allen Teilen gleich groß, und zwar identisch mit dem gesamten Schaufelverlust ζ_s sind. Diese Verlustzahl

wird wie bei der Gleichdruckturbine folgendermaßen definiert: Die adiabatische Expansion führe vom Anfangszustand P zu Punkt P_x' mit i_x' auf Linie $p_x =$ konst. (Abb. 251). Der wirkliche Zustand sei P_x mit i_x. Die Zwischenverlustzahl ζ_s bedeutet das Verhältnis

$$\zeta_s = \frac{i_x - i_x'}{i_0 - i_x'} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Wir haben daher als „Verlustwärme“

$$Q_x = \zeta_s (i_0 - i_x') \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

die in der Abbildung durch Schraffur hervorgehoben ist, und mittels der auf jeder Drucklinie zum adiabatischen Endpunkt der wirkliche Endpunkt bestimmt wird. Auf der Linie des Kondensatordruckes ist der Verlust dem gesamten Schaufelverlust gleich, d. h.

$$AZ = Q_z = \zeta_s H_0 \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Ein genauerer Entwurf muß die Veränderlichkeit der Verluste in den verschiedenen Teilen der Turbine berücksichtigen. Im allgemeinen wird der Hochdruckteil am schlechtesten arbeiten, weil die Schaufeln hier am kürzesten sind und besonders bei Überhitzung das größte radiale Spiel haben müssen. Im Mitteldruckteil sind die Schaufeln zwar länger, aber die Dampfgeschwindigkeiten noch klein. Im Niederdruckteil werden die Geschwindigkeiten häufig hoch, die Winkel groß, was wegen geringer Umlenkung günstig wirkt, aber infolge geringer Leistungsabgabe den relativen Verlust steigert, doch sind die Schaufellängen meist groß, so daß gute Wirkung zu erwarten ist.

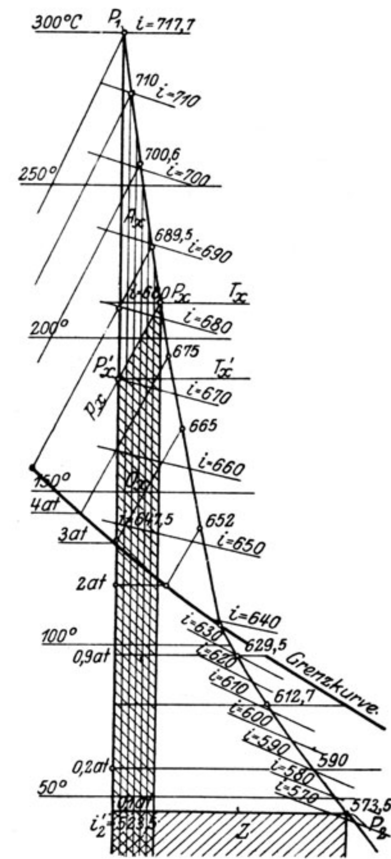


Abb. 251. Zustandslinie der vielstufigen Überdruckturbine.

Zur Veranschaulichung der Verwendung der Molliertafel ist beispielsweise in Abb. 252 das adiabatische Gefälle $A_0 D_0$ in 4 Teile geteilt, und angenommen, daß das erste Viertel mit 50 v. H. Wirkungsgrad ausgenützt wird, daher $AB_1 = 0{,}5\, A_0 B_0$ ist, was auf Punkt B führt. Das Gefälle BC_0', das dem zweiten Viertel $B_0 C_0$ entspricht, soll 70 v. H. Wirkungsgrad ergeben, daher $BC' = 0{,}7\, BC_0'$ ist und C als Zustandspunkt bestimmt. Für den Rest ist 0,80 als Wirkungsgrad angenommen. Die Wagrechte durch D schneidet auf $A_0 D_0$ das gesamte nutzbare Gefälle heraus, und man kann feststellen, daß der gesamte innere Wirkungsgrad $A_0 D' : A_0 D_0 = 75$ v. H. beträgt. Genauere Werte der Wirkungsgrade können an Hand folgender Versuchsergebnisse eingeschätzt werden.

An einer 1100 kW-Turbine von Brown, Boveri & Cie. hat Marguerre[1]) bei 1500 Umdr. i. d. Min. folgende Zahlen festgestellt:

Leistung	kW	1102	917	681	381
Abs. Druck von dem 1. Leitrad	kg/qcm	5,03	4,25	3,25	1,96
Temperatur von dem 1. Leitrad	° C	267	272	272	265
Luftleere in v. H. der Atmosphäre		86,9	87,8	89,2	90,2
1. Viertel der Turbine	$\zeta_s =$ v. H.	35	36	36	38
2. Viertel	$\zeta_s =$ „	26	28	27	28
3. und 4. Viertel	$\zeta_s =$ „	29	30	29	26
Insgesamt	$\zeta_s =$ „	28	29	28	30

An einer 700 kW-Turbine mit 3000 Umdr. findet derselbe Beobachter[2]) im Mitteldruckteil ohne Angabe der Schaufellänge, aber unter Erwähnung, daß das Spiel 1,6 mm betragen habe, am Mitteldruckteil $\zeta_s = 0{,}24$ und nimmt an, daß bei großen Einheiten $\zeta_s = 0{,}20$ erreichbar sei. Schröter[3]) fand bei einer Melms- und Pfenninger-Turbine von 500 kW Leistung bei 2500 Umdr. im Hochdruck $\zeta_s = 0{,}4 - 0{,}47$, im Niederdruckteil $\zeta_s = 0{,}32 - 0{,}36$. Gensecke[4]) untersuchte eine 300 kW-Parsons-Turbine mit 2400 Uml./min und stellt im Hochdruckteil die ungleich höheren Verluste $\zeta_s = 0{,}6$, im Mitteldruckteil $\zeta_s = 0{,}38$, im Niederdruckteil $\zeta_s = 0{,}42$ fest, bei 1 mm Schaufelspiel.

---

[1]) Z. Ver. deutsch. Ing. 1907, S. 344.
[2]) Z. Ver. deutsch. Ing. 1908, S. 1348.
[3]) Z. Ver. deutsch. Ing. 1906, S. 1811.
[4]) Z. f. d. gesamte Turbinenwesen 1909, Heft 6—10.

Darstellung der Zustandsgrößen als Abhängige des Wärmegefälles.

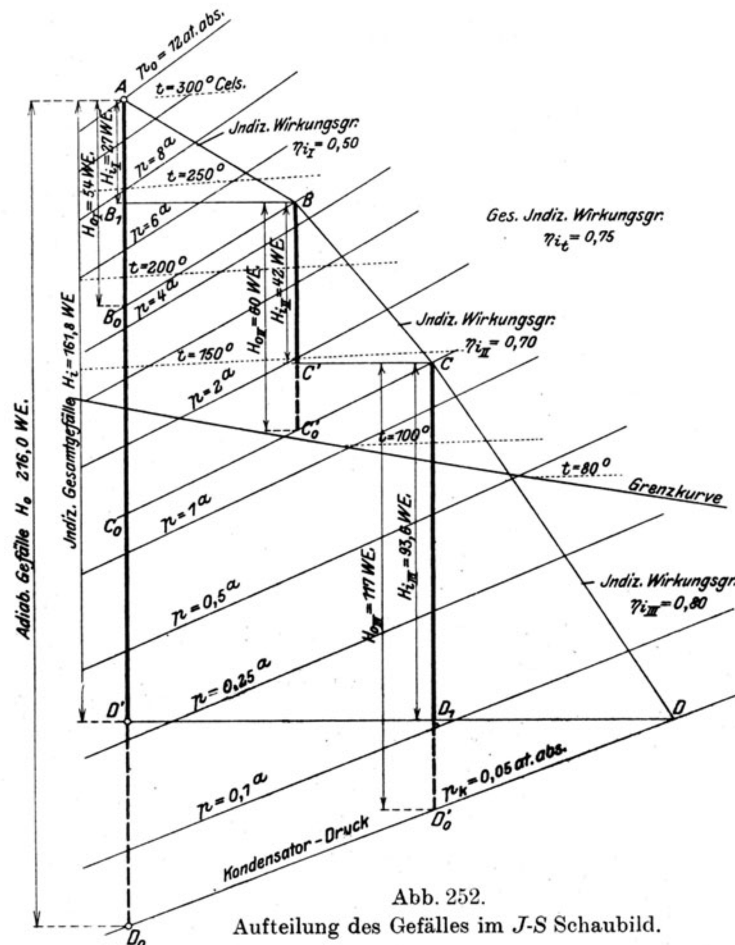
Wir tragen in Abb. 253 das zum beliebigen Punkt P der Zustandskurve gehörende Wärmegefälle

$$H_x = i_0 - i_x$$

als Abszisse $A_0 B_x$ vom Punkte A_0 nach rechts auf, und als dessen Abhängige den zu P_x gehörenden spezifischenRauminhalt v_x, und zweckmäßigerweise auch den Druck, als Ordinaten ein.

Wahl der Umfangsgeschwindigkeit u.

Je größer diese sein darf, desto besser für die Dampfausnutzung; doch wird uns durch zwei Rücksichten eine Grenze gesteckt. Der Eintrittsquerschnitt, der aus dem voraussichtlichen Wirkungsgrade und der Leistung (mithin der Dampfmenge) von vornherein berechnet



werden kann, erweist sich selbst bei 1000 PS Leistung so klein, daß bei etwa 1500 Umdrehungen und über 50 m betragender Umfangsgeschwindigkeit die Schaufeln der voll beaufschlagten Turbine nur wenige Millimeter lang werden. Wegen des Verlustes im Ringspalt über den Schaufelenden wird man indes bei 100 PS wohl mindestens 10 mm, bei 1000 PS 25—30 mm, bei größeren Einheiten entsprechend mehr als Schaufellänge fordern. Wir werden daher mit Umfangsgeschwindigkeiten von 30—40 m anfangen. Bei den langen Schaufeln der letzten Räder spielt hingegen der Spalt keine Rolle mehr; hier wird u so groß gewählt, wie es die Festigkeit der Räder bzw. der Schaufelbefestigung zuläßt.

Wir bauen die Turbine demgemäß aus zwei oder mehreren, im allgemeinen drei Trommeln auf und verteilen das Gesamtgefälle nach Belieben im allgemeinen zweckmäßig etwa so, daß die größte Trommel die Hälfte und die kleineren zusammengenommen die andere Hälfte des Gefälles aufbrauchen. So ist in Abb. 253 AB der Gefällsanteil der ersten, BC derjenige der zweiten Trommel usw., für die die unveränderlichen Umfangsgeschwindigkeiten $u_1, u_2, \ldots$ nach abwärts aufgetragen worden sind und (in verzerrtem Längenmaßstabe) ein Bild der ganzen Lauftrommel darstellen.

Wahl der Winkel.

Je kleiner die Austrittswinkel am Leit- und Laufrade, d. h. α_1 und β_2, sind, desto mehr Gefälle zehren wir bei gegebener Dampf- und Umfangsgeschwindigkeit in einer Turbine auf, desto kleiner wird die Stufenzahl, was günstig wäre. Allein zu kleine Winkel bedingen schmale und lange Kanäle, vergrößern hierdurch die Dampfreibung und rufen durch die im Verhältnis größere Schaufeldicke stärkere Querschnittserweiterungen, Wirbel hervor. Als praktisches Mittel wird der Wert. $\alpha_1 = \beta_2 = 20$ bis 25^0 gelten können. An den letzten Rädern finden wir aus später anzuführenden Gründen Winkel bis zu 40 und 50^0 vor.

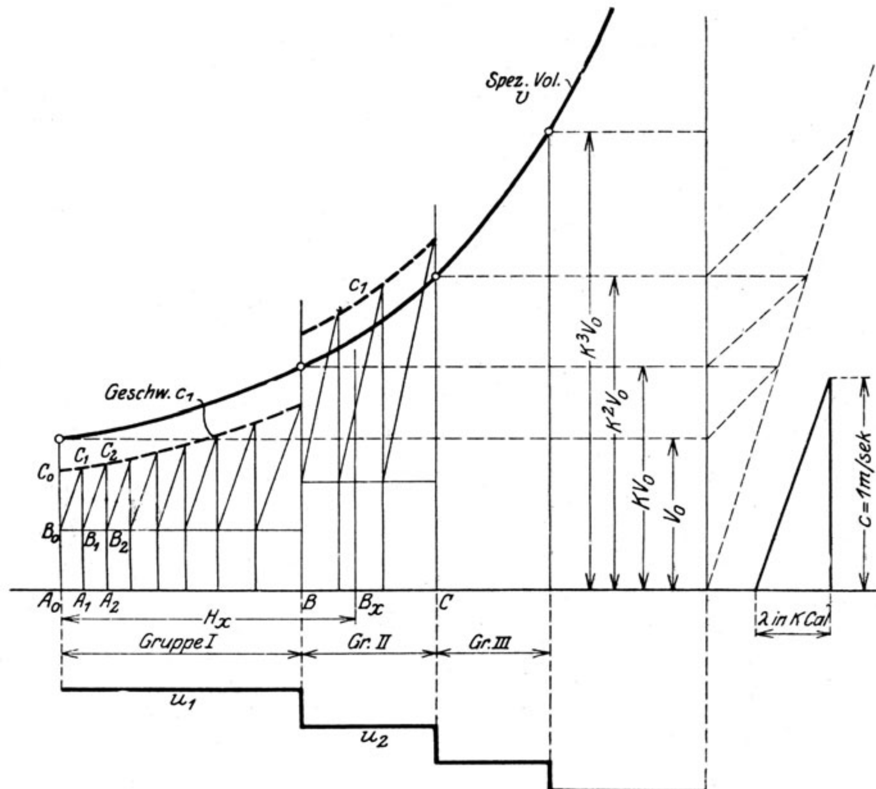


Abb. 253. Graphische Stufeneinteilung

Für die Wahl der Dampfgeschwindigkeit

gelten dieselben Überlegungen wie bei der Gleichdruckturbine, allein wir sind über das Gesetz des Schaufelwiderstandes schlechter unterrichtet als dort. Bei etwa halbem „Reaktionsgrad", der oft ausgeführt wird, erhalten Leit- und Laufkanal eine ziemliche Krümmung bei kleiner axialer Breite. Sie können nicht mit den von Christlein untersuchten Leitvorrichtungen verglichen werden, doch dürfte sich die Reibungszahl mit wachsender Geschwindigkeit ähnlich ändern wie in seinen Versuchen. In Ermangelung von neueren Versuchsergebnissen wird man sich an die Erfahrungen mit älteren Turbinen halten, die als praktisches Mittel

$$\frac{u}{c_1} = 0{,}5 \ldots 0{,}3$$

aufzuweisen pflegen. Bei Schiffsturbinen ist man gezwungen, weit tiefer, selbst unter 0,2 zu gehen, um mit kleinen Umfangsgeschwindigkeiten auszukommen. Hierbei wächst ζ_s erheblich, wie man an Hand der unten folgenden Wirkungsgradkurven beurteilen kann.

Gruppen gleicher Schaufellänge.

Aus der Durchflußgleichung

$$Gv = f c_1$$

folgt, daß für eine Stufengruppe mit unveränderlichen Winkeln und Schaufellängen, d. h. unveränderlichem Austrittsquerschnitt f die Dampfgeschwindigkeit c_1 mit dem spezifischen Volumen im gleichen Verhältnis wächst. Haben wir uns also über das c_1 beim Eintritt entschieden,

so ist die Geschwindigkeit für die folgenden Stufen der ersten Gruppe durch eine der v-Kurve ähnliche Linie dargestellt. Die Geschwindigkeit der letzten Stufe der Gruppe soll nicht mehr als das 1,4- oder 2fache der ersten sein, und dies liefert eine folgerichtige Einteilung des ganzen Gefälles, indem man auf der Raumkurve die Werte

$$v_{I} = kv_0, \quad v_{II} = kv_{I} = k^2 v_0, \quad v_{III} = kv_{II} = k^3 v_0, \quad v_{IV} = kv_{III} = k^4 v_0 \ldots$$

bezeichnet, sofern v_0 der spezifische Rauminhalt im Anfang und k das oben angeführte jeweils feste Verhältnis bedeutet. Eine graphische Konstruktion ist punktiert am rechten Rande der Abbildung angedeutet[1]). Natürlich darf eine Gruppe nicht zur Hälfte auf der einen, zur anderen Hälfte auf der benachbarten Trommel liegen, und man muß die Einteilung entsprechend abändern. Das Verhältnis $u:c_1$ ist jetzt von Stufe zu Stufe veränderlich, der Mittelwert desselben sollte indes für jede Gruppe ungefähr den gleichen Wert besitzen.

Abb. 254. Die gleichwertige Geschwindigkeit c_x.

Das Einzelgefälle.

Bei großer Stufenzahl wird die Austrittsgeschwindigkeit c_2 eines bestimmten Rades wenig verschieden sein von der Austrittsgeschwindigkeit der unmittelbar vorhergehenden Turbine. Wir vernachlässigen den Unterschied zunächst ganz und setzen mithin z. B. unter Bezugnahme auf zwei Stufen α und β $c_{2\alpha} = c_{2\beta}$, so daß $c_{1\beta}^2 - c_{2\alpha}^2 = c_{1\beta}^2 - c_{2\beta}^2 = c_{1\beta}^2 - w_{1\beta}^2$ wird. Lassen wir das Zeichen β weg, so lauten die Energiegleichungen für eine beliebige Zwischenturbine bei kongruenter Leit- und Laufschaufel:

$$h_1 = i_0 - i_1 = A\,\frac{c_1^2 - c_2^2}{2g} = A\,\frac{c_1^2 - w_1^2}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7a)$$

$$h_2 = i_1 - i_2 = A\,\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = A\,\frac{c_1^2 - w_1^2}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7b)$$

Das in Leit- und Laufrad aufgezehrte Wärmegefälle ist gleichgroß, wir haben angenähert halben Reaktionsgrad. Durch Addition von h_1 und h_2 folgt das

Einzelgefälle für eine Stufe[2]) $h = A\,\dfrac{c_1^2 - w_1^2}{g}$ . . . . . . (7c)

wofür man, wenn nach dem Kosinussatz $w_1^2 = c_1^2 + u^2 - 2c_1 u \cos\alpha_1$ eingesetzt wird, auch schreiben kann

$$h = A\,(2c_1 \cos\alpha_1 - u)\,\frac{u}{g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7d)$$

Diese Formel lehrt mit Rücksicht auf Gl. (8c) in Abschn. 62 (d), daß unter unseren vereinfachenden Annahmen das Einzelgefälle mit der Einzelleistung identisch wird (wie sich bei streng gleichgroßer Zu- und Abflußgeschwindigkeit von selbst versteht). Nun müßte Stufe für Stufe das h gerechnet und aneinandergereiht werden, bis das Gefälle aufgebraucht ist. Diese Arbeit läßt sich graphisch bequem erledigen, indem man für

$$h = \left(c_1 - \frac{u}{2\cos\alpha_1}\right)\frac{A\,u\,2\cos\alpha_1}{g}$$

---

[1]) Um im kleinen Maßstab auszukommen, ist auf jeder Trommel (u konst.) nur eine Gruppe angenommen worden; in Wirklichkeit gibt es deren stets mehrere.

[2]) Mit Rücksicht auf Abb. 254 kann h auch in der Gestalt

$$h = A\,\frac{c_1^2 - w_1^2}{g} = A\,\frac{(c_{1u}^2 + c_{1a}^2) - (w_{1u}^2 + c_{1a}^2)}{g} = A\,\frac{c_{1u}^2 - w_{1u}^2}{g} = \frac{A}{g}\,(c_{1u} + w_{1u})\,(c_{1u} - w_{1u})$$

geschrieben und das geometrische Mittel $(c_{1u} + w_{1u})\,(c_{1u} - w_{1u})$ graphisch erhalten werden, indem man von O_1 aus mit c_{1u} den Kreis schlägt und im Endpunkte von w_{1u} die Lotrechte errichtet. Der bis zum Kreise reichende Abschnitt c_x dieser Lotrechten ist das verlangte Mittel, und somit ist $h = A\,c_x^2/g$.

schreibt, oder dies mit den Abkürzungen

$$u' = \frac{u}{2\cos\alpha_1}, \quad \lambda = \frac{A\,u\,2\cos\alpha_1}{g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

auf die Form

$$h = (c_1 - u')\,\lambda \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8\text{a})$$

bringt. Entwirft man, wie in Abb. 253, ein rechtwinkliges Dreieck mit der etwa im 100fachen Maßstabe der Geschwindigkeiten aufgetragenen senkrechten Kathete 1 m/sek und der ebenfalls im 100fachen Maßstabe des Wärmegefälles aufgetragenen wagerechten Kathete von λ Wärmeeinheiten, so kann Gl. (8a) als Verhältnis

$$\frac{h}{c_1 - u'} = \frac{\lambda\,(\text{kcal})}{1\,(\text{m/sek})} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8\text{b})$$

geschrieben, und h aus dem ähnlichen Dreieck bestimmt werden, dessen Hypotenuse von B_0 parallel zur Hypotenuse des Hilfsdreieckes gezogen wird, sofern $A_0B_0 = u'$ und die Kurve $C_0C_1 \ldots$ die jeweiligen Geschwindigkeiten c_1 darstellt. Daher ist $h = B_0B_1 = A_0A_1$. Da eine Gruppe von Schaufeln gleicher Länge folgt, braucht man für die zweite Stufe nur $B_1C_2 \| B_0C_1$ zu ziehen, um in $B_1B_2 = A_1A_2$ das Einzelgefälle zu erhalten, und so fort für die übrigen, bis das Gefälle der betreffenden Gruppe erledigt ist. Bei nicht stimmendem Endpunkt muß das Gruppengefälle um den fehlenden Betrag verkleinert oder vergrößert werden. Für die nächste Gruppe ändert sich infolge größerer Schaufellänge auch u und u', wobei jedoch kleine Unterschiede vernachlässigt werden dürfen.

Man könnte die rechtwinkligen Dreiecke umlegen, so daß die Hypotenuse von C_0 nach B_1 geht, da A_0C_0 der ersten Austrittgeschwindigkeit c_1 näher liegt als A_1C_1; bei der oben angewendeten Lage wird das Stufengefälle etwas größer und kommt der Wirklichkeit näher, da in Wahrheit w_2 nicht $=$, sondern $> c_1$ ist.

Bei größeren Teilgefällen sollte man h gemäß (7a), (7b) in die Anteile $2gh_1 = A\,(c_1^2 - w_1^2)$ und $2gh_2 = A\,(w_2^2 - c_2^2)$ trennen, so daß sich mit der Bezeichnung $\lambda' = \lambda/2$ die Werte

$$h_1 = (c_1 - u')\,\lambda'; \quad h_2 = (w_2 - u')\,\lambda' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8\text{c})$$

ergeben, die man durch Parallelen, zur Hypotenuse des aus 1 m/sek und λ' kcal gebildeten Dreieckes, wie oben, herausschneidet.

b) Graphische Integration bei sehr vielen Stufen.

Man denke sich nach Abb. 255 jede Stufe durch einen der in gleichen Abständen $= \Delta x$ aufeinanderfolgenden Teilpunkte der Grundlinie B dargestellt. Im Anfangspunkte tragen wir

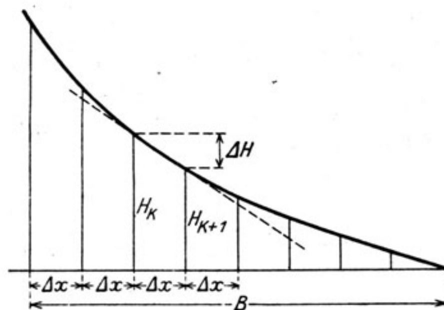


Abb. 255.

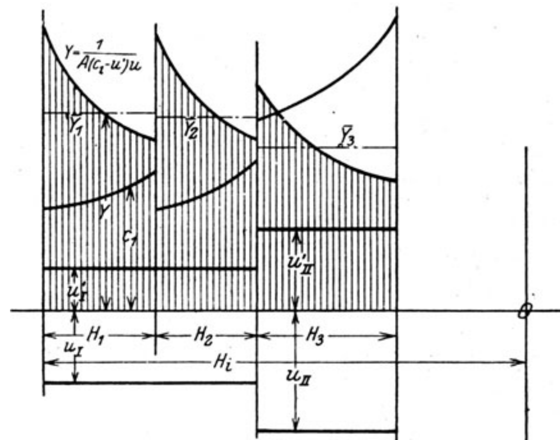


Abb. 256.

Graphische Integration.

das ganze verfügbare innere Gefälle H in kcal auf; im 1., 2., 3. ... Teilpunkt soviel als davon nach der 1., 2., 3. ... Stufe übrig bleibt. Der Unterschied zweier aufeinander folgenden Gefälle ist dann das Einzelgefälle der betreffenden Stufe, das hier mit ΔH bezeichnet werden soll, und

nach Gl. (7d) den Wert

$$H_{k+1} - H_k = -\Delta H = -A(2c_1 \cos\alpha_1 - u)\frac{u}{g} \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

besitzt. Verbinden wir die Endpunkte der H durch eine stetige Linie, so kann $\Delta H/\Delta x$ näherungsweise durch dH/dx im betreffenden Punkt ersetzt werden. Indem wir Gl. (9) mit Δx dividieren, ergibt sich daher

$$-\frac{\Delta H}{\Delta x} = -\frac{dH}{dx} = -\frac{A}{g\Delta x}(2c_1 \cos\alpha_1 - u)u \quad \ldots \ldots \quad (9a)$$

In Abb. 256 ist nun, wie früher in Abb. 253, die Geschwindigkeit c_1 (bzw. w_2) und u in Abhängigkeit vom Gefälle für die einzelnen Trommeln und Gruppen gleicher Schaufellänge dargestellt; d. h. c_1 und u sind graphisch gegebene Funktionen von H. Dies liefert ein Mittel, um das Integral der Differentialgleichung (9a), da die Variablen getrennt werden können, in der Form

$$\int_0^H \frac{dH}{(2c_1 \cos\alpha_1 - u)u} = \frac{A}{g}\int_0^B \frac{dx}{\Delta x} \quad \ldots \ldots \quad (9b)$$

darzustellen. Für die graphische Durchführung ist es bequem $(2c_1 \cos\alpha_1 - u)u = (c_1 - u')u/2\cos\alpha_1$ zu schreiben, wobei, wie früher $u' = u/2\cos\alpha_1$ ist, worauf der reziproke Wert

$$Y = \frac{1}{A(c_1 - u')u} \quad \ldots \ldots \quad (9c)$$

für hinreichend viele Punkte berechnet und in Abb. 256 eingetragen wird. Das Integral $\int dx/\Delta x = B/\Delta x$ ist nichts anderes als die Gesamtzahl z der Stufen, so daß Gl. (9b) hierfür den Wert

$$z = \frac{g}{2\cos\alpha_1}\int_0^H Y\,dH \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

liefert. Schreibt man noch $\int_0^H Y\,dH = \overline{Y}H$, so daß $\overline{Y}$ den Mittelwert dieser Größe bedeutet, so wird

$$z = \frac{g}{2\cos\alpha_1}\cdot\overline{Y}H \quad \ldots \ldots \quad (10a)$$

Da man die Stufenzahl nicht bloß im ganzen, sondern auch für jede Gruppe einzeln wird kennen wollen, ist die Integration einzeln für die Teilabschnitte $H_1\,H_2 \ldots$ usw. auszuführen, und ergibt sinngemäß

$$z_1 = \frac{g}{2\cos\alpha_1}\overline{Y}_1 H_1; \quad z_2 = \frac{g}{2\cos\alpha_1}\overline{Y}_2 H_2 \text{ usw.} \quad \ldots \ldots \quad (10b)$$

Dabei wird es für eine Gruppe gleicher Schaufellänge genügen, wenn man Y für den Anfangs-, Mittel- und Endpunkt berechnet. Für die Flächenauswertung $\int Y\,dH$ wird man die Kurve von Y als Parabel auffassen, also den Inhalt des vom Trapezinhalt abzuziehenden Parabelsegmentes als Produkt der Grundlinie und $^2/_3$ der Pfeilhöhe ermitteln.

Abgekürztes Verfahren mit Mittelwerten.

Ist ein geeigneter Mittelwert der Geschwindigkeit c_1 für eine Gruppe gleicher Schaufellänge bekannt, so kann der Mittelwert des Einzelgefälles

$$\overline{h} = A(2\overline{c}_1 \cos\alpha_1 - u)\frac{u}{g} \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

und aus dem vorgeschriebenen Gruppengefälle H_1 die Stufenzahl als Quotient

$$z_1 = \frac{H_1}{\overline{h}}$$

berechnet werden. Für c_1 könnte in erster Annäherung das geometrische Mittel aus Anfangs- und Endwert genommen werden. Genauer betrachtet, hängt derselbe ab von der Form der Geschwindigkeitskurve.

Durch Lösung einer Anzahl von Beispielen ergab sich der in Abb. 257 dargestellte Zusammenhang. Wir bezeichnen den Wert von $c_1 - u'$ (in Formel 8a) am Anfang einer Gruppe mit y_1, in der Mitte der Gefällstrecke mit y_m und am Ende mit y_2. Die Verhältnisse y_2/y_1 und y_m/y_1 sind in der Abbildung auf der X- bzw. der Y-Achse aufgetragen. Berechnen wir nun das geometrische Mittel $y_g = \sqrt{y_1 y_2}$, so kann man den für unsere Aufgabe in Betracht kommenden Mittelwert $\overline{y}$ als Produkt des geometrischen Mittels und einer Beizahl k

$$\overline{y} = k y_g \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad \text{(11a)}$$

darstellen. Die Werte von k sind als Z-Koordinaten aufgetragen. Die entstehende Fläche ist durch eine Anzahl horizontaler Ebenen geschnitten und die Schnittlinien sind auf die XY-Ebene projiziert worden, was die Auffindung zugehöriger Punkte erleichtert. Beispielsweise findet man zu $y_2 : y_1 = 2{,}8$ und $y_m : y_1 = 1{,}6$ den Wert $k = 0{,}95$. Die Krümmung der c_1- bzw. v-Kurve wird durch die verhältnismäßige Größe von y_m/y_1 dargestellt; je kleiner dies Verhältnis gegen y_2/y_1, desto stärker ist die Kurve gekrümmt. Die Werte, die einem geraden Stück der v-Kurve zugeordnet sind, werden durch die schiefe Gerade in der XY-Ebene verbunden. Aus $\overline{y}$ findet man $\overline{c_1} = \overline{u'} + \overline{y}$.

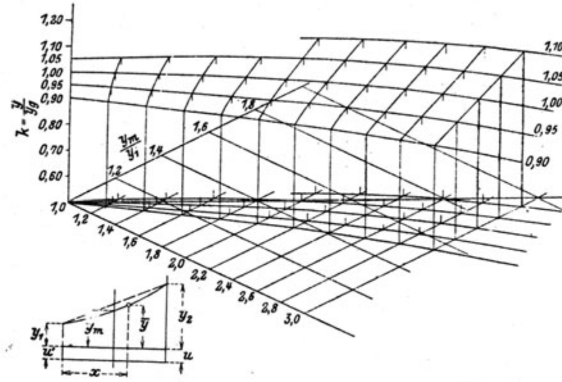


Abb. 257. Beiwerte k zu Gl. (11a).

Für die gewöhnlich vorkommenden Verhältnisse ist $y_2 : y_1 = 1{,}2$ bis $1{,}4$; man kann unbedenklich $k = 1$ setzen, und in weiterer Annäherung mit dem geometrischen Mittel der Anfangs- und der Endgeschwindigkeit selbst, d. h. mit $\overline{c_1} = \sqrt{c_{1a} c_{1e}}$, rechnen.

Berichtigung der Dampfgeschwindigkeiten mit Rücksicht auf die begangenen Vernachlässigungen.

Es sei bemerkt, daß eine Berichtigung nur in Fällen angebracht sein dürfte, wo man über die Verluste verschiedener Art, auf welchen die Zustandskurve aufgebaut ist, durch die Erfahrung bestätigte genauere Angaben besitzt.

Das wahre Gefälle der Turbine α beträgt (mit $2g$ vermehrt) $2g h_{\alpha\, eff} = A\left(c_{1\alpha}^2 - c_{0\alpha}^2 + w_{2\alpha}^2 - w_{1\alpha}^2\right)$ was wir $= A\left(c_{1\alpha}^2 - w_{1\alpha}^2 + w_{2\alpha}^2 - c_{2\alpha}^2\right) + A\left(c_{2\alpha}^2 - c_{0\alpha}^2\right)$ schreiben, wobei $c_{0\alpha}$ die Zuflußgeschwindigkeit des Dampfes bedeutet. Der Klammerausdruck ist aber angenähert = Wärmegefälle $\times$ $2g$, falls wir nach Gl. (8c) das Leit- und Laufradgefälle getrennt rechnen. Wir erhalten daher für die aufeinanderfolgenden Stufen

$2g h_{\alpha\, eff} = 2g h_{\alpha\, ang} + A\left(c_{2\alpha}^2 - c_{0\alpha}^2\right)$; $\quad 2g h_{\beta\, eff} = 2g h_{\beta\, ang} + A\left(c_{2\beta}^2 - c_{2\alpha}^2\right)$; $\quad 2g h_{\gamma\, eff} = 2g h_{\gamma\, ang} + A\left(c_{2\gamma}^2 - c_{2\beta}^2\right)$;

für die letzte Stufe $\quad 2g h_{k\, eff} = 2g h_{k\, ang} + A\left(c_{2k}^2 - c_{2k-1}^2\right)$.

Durch Summation dieser Einzelgefälle für eine Gruppe entsteht

$$H_{eff} = H_{ang} + \frac{A}{2g}\left(c_{2k}^2 - c_{0\alpha}^2\right) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad \text{(11b)}$$

Es wird also im ganzen um den Betrag

$$\Delta H = A\left(c_{2k}^2 - c_{0\alpha}^2\right)/2g \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad \text{(11c)}$$

mehr Gefälle aufgebraucht als das angenäherte Verfahren ergibt.

Man darf aber ΔH nicht einfach anfügen, da dann die Einteilung des Gefälles auf die Einzelstufen nicht mehr stimmt. Damit das für die Gruppe vorgeschriebene H_{eff} bleibt, müßte man vielmehr alle Geschwindigkeiten im Verhältnis

$$\sqrt{H_{ang}/H_{eff}}$$

verkleinern, während die Stufenzahl und die Einteilung des Gefälles bleibt. Aus praktischen Gründen wird man die einmal festgesetzte Umfangsgeschwindigkeit nicht gern abändern, und in diesem Falle ist das obige Verkleinerungsverhältnis mit einem Berichtigungsfaktor zu versehen, den man sich an Hand einiger Proberechnungen ermitteln müßte.

Genauere Durchrechnung der letzten Stufen.

Bei tiefer Luftleere wächst der Rauminhalt des Dampfes mit abnehmendem Drucke so rasch, daß die entwickelten angenäherten Verfahren zu ungenau werden. Außerdem ist man

in der Schaufellänge beschränkt, indem als äußerstes Maß

$$a = \frac{1}{4} \quad \text{bis} \quad \frac{1}{6} D_m$$

angesehen wird, was für die Umfangsgeschwindigkeit an der Spitze und der Wurzel der Schaufel eine Abweichung von höchstens 1/4 gegen die Mitte ergibt. Es empfiehlt sich, die letzten Stufen unter Annahme der Schaufellänge einzeln zu rechnen, entweder wie in Abschn. 63a erörtert, oder mit Anwendung der v^2-Methode (Abschn. 68), oder nach dem Verfahren von Koob[1]), bei dem man mit dem Kondensatordruck beginnend schrittweise nach vorwärts geht.

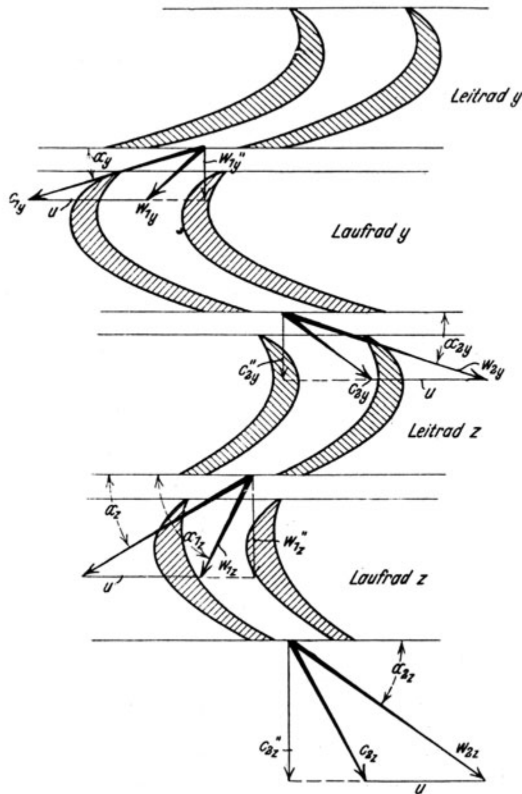


Abb. 257a. Rückwärtsrechnung der letzten Stufen.

Bei der gewählten Schaufellänge a_z ist der Reinquerschnitt in axialer Richtung für unendlich dünne Schaufeln $= \pi D_z a_z$, der mit Rücksicht auf die Schaufeldicke mit einem probeweise angenommenen Faktor $\tau < 1$ zu vermehren ist und den effektiven Axialquerschnitt

$$f^a_{2z} = \tau \pi D_z a_z$$

ergibt. Der zugelassene Auslaßverlust $c_{2z}/2g$ lehrt uns c_{2z} kennen. Wenn die axiale Komponente von c_{2z} mit c_{2z}'' bezeichnet wird, so muß

$$f^a_{2z} c_{2z}'' = G_{sk} v_{2z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

sein, wo v_{2z} das spezifische Dampfvolumen beim Austritt bedeutet, wie es sich aus der Zustandskurve ergibt. Aus (12) berechnen wir c_{2z}'' und konstruieren c_{2z} als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit c_{2z}'' als Kathete (Abb. 257a). Indem wir $-u$ hinzufügen, ergibt sich w_{2z} und der Austrittswinkel (in der Abbildung mit α_{2z} bezeichnet). Hierauf kann die Schaufeldicke angenommen, τ gerechnet und α_{2z} abgeändert werden, falls die Abweichung zu groß war. Nun berechnen wir die übrigen Querschnitte bez. Winkel, indem wir die Größe der Geschwindigkeiten, d. h. das Wärmegefälle vorschreiben und die Geschwindigkeitsdreiecke konstruieren.

Bezeichnen wir die letzten Stufen mit .... x, y, z; die Wärmeinhalte beim Austritt aus dem Leitrade x mit i_{x1}; beim Austritt aus dem Laufrade x, mit i_{x2} und analog für y mit i_{y1}, i_{y2} für z mit i_{z1}, i_{z2}, ferner die spezifischen Dampfvolumina an denselben Stellen mit v_{x1}, v_{x2} bzw. v_{y1}, v_{y2} bzw. v_{z1}, v_{z2}, endlich die Pressungen mit p_{x1}, p_{x2}; p_{y1}, p_{y2}; p_{z1}, p_{z2}. Im übrigen bedienen wir uns derselben Zustandskurve wie beim Näherungsverfahren. Für das Laufrad z besteht die Gleichung

$$A \frac{w_{2z}^2 - w_{1z}^2}{2g} = i_{z1} - i_{z2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12a)$$

Wird w_{1z} angenommen, so bestimmt Gl. (12a) i_{z1} und umgekehrt. Aus der Zustandskurve im Entropiediagramm kann also auch v_{z1} bestimmt werden. Nun muß für den axialen Austrittsquerschnitt aus dem Leitrade z, die Durchflußgleichung

$$G_{sk} v_{z1} = f^a_{1z} w_{1z}'' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12b)$$

erfüllt sein. Wären die „Verengungszahl" τ und die Schaufellänge gleich wie beim Austritt, so erhielte man

$$f^a_{1z} = \tau \pi D_z a_z = f^a_{2z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12c)$$

oder durch Vergleich von Gl. (12) mit Gl. (12b)

$$\frac{w_{1z}''}{c_{2z}''} = \frac{v_{z1}}{v_{z2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12d)$$

[1]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1904, S. 660.

Wenn hieraus w_{1z}'' berechnet ist, so ergibt sich der relative Eintrittswinkel in das Laufrad β_{1z} (in der Abbildung mit α_{1z} bezeichnet) durch das rechtwinklige Dreieck aus w_{1z}'' und w_{1z}. Bildet man c_{1z} als Resultierende aus w_{1z} und $+u$, so erhält man die Neigung der Leitschaufel α_z. Da aber τ in Gl. (2) nicht dasselbe ist wie oben, so muß f_{1z}^a neu berechnet werden, und ergibt aus Gl. (3) die korrigierte Komponente w_{1z}, die mit dem unveränderten w_{1z} zur Berichtigung der Winkel β_{1z} und α_{1z} dient. Ähnlich ist zu verfahren mit der Leitschaufel und den weiteren Turbinenstufen y, x . . . . .

c) Wirkungsgrad. Dampfverbrauch, Schaufelabmessungen.

Das im ganzen verfügbare Gefälle, in kcal für 1 kg Dampf ist

$$H_0 = i_0 - i_k'$$

Der Arbeitsdampf liefert eine innere Arbeit in kcal

$$H_i = i_0 - i_k - A\frac{c_2^2}{2g} = H_0 - H_2 - A\frac{c_2^2}{2g}.$$

wo c_2 die absolute Auslaßgeschwindigkeit des letzten Laufrades bedeutet.

Der innere Wirkungsgrad ist demnach

$$\eta_i = \frac{H_i}{H_0} \quad \text{(13)}$$

Der Verbrauch an Arbeitsdampf für die innere PS-st

$$G_i = \frac{632}{H_i} \quad \text{(13a)}$$

Ist G_{st} die gesamte Arbeitsdampfmenge in der Stunde, so ist die innere Leistung

$$N_i = \frac{G_{st} H_i}{632} = \frac{G_{st}}{G_i} \quad \text{(13b)}$$

Die effektive Leistung wird

$$N_e = N_i - N_r = \eta_{mech} N_i.$$

Die gesamte stündliche Dampfmenge ist die Summe der Arbeitsdampfmenge G_{st} und des Undichtheitsverlustes im Labyrinth G'

$$G_t = G_{st} + G',$$

daher der gesamte Dampfverbrauch für die PS_e und Stunde

$$G_e = \frac{G_t}{N_e} \quad \text{(14)}$$

Falls ein Teil des Labyrinthdampfes einer Zwischenstufe der Turbine zufließt, so ist die Verschiedenheit der arbeitenden Dampfgewichte und der entsprechende Gewinn an Arbeit in Rechnung zu stellen.

Für den Neuentwurf wird N_e vorgeschrieben sein; man wird η_m, G', schätzen und aus G_t die sekundliche Dampfmenge $G_{sk} = G_t/3600$ berechnen, die zur Bestimmung der Schaufellängen dient. Wir erhalten den axialen Reinquerschnitt für den Leitradaustritt und Laufradeintritt

$$F_{1a} = F_{1a}' = \frac{G_{sk} v_1}{c_{1a}} = \pi D a_1,$$

ebenso für den Laufradaustritt und Leitradeintritt

$$F_{2a} = \frac{G_{sk} v}{w_{2a}} = \pi D a_2,$$

aus welchen die theoretischen Schaufellängen $a_1 a_2$ berechnet werden.

Was die tatsächlichen Längen anbelangt, so ist neben der Rücksicht auf das Spiel am Schaufelende auch die Möglichkeit der Strahlablösung bei gewissen Kanalformen zu beachten. Nach Versuchen des Verfassers ist beispielsweise für die Abb. 257b dargestellten Schaufeln der tatsächliche Strahlquerschnitt

$$F_1 = \varepsilon \pi D a_1 \sin \alpha_1.$$

worin α_1 die Neigung auf der konkaven Austrittsseite, a_1 die wirkliche Schaufellänge einschließlich Spiel bedeutet, und die Verengungszahl ε folgende Werte annimmt:

Abb. 257b. Teilweise Ausfüllung des Schaufelaustrittes.

für die

		1.	2.	3. Trommel
wirkliche Verengung	ε =	0,79	0,86	1,95
Verengung nach der Stegdicke	ε' =	0,90	0,91	0,93

Rechnet man den Spaltdampf getrennt, so stellen sich für die reine Schaufellänge die Verengungszahlen

0,71; 0,81; 0,90

ein. In der Praxis wird für die Schaufel Parsonsscher Art bei den Winkeln $\alpha_1 = 30$; 40; 50° der Wert des Produktes $\varepsilon \sin \alpha$, häufig zu $^1/_3$; $^1/_2$; $^2/_8$ geschätzt.

d) Genauere Ermittelung der Zustandskurve aus den Geschwindigkeiten und den als bekannt vorausgesetzten Widerstandszahlen.

Wir denken uns die Geschwindigkeiten und die sonstigen maßgebenden Größen jeder Stufe in gleichweit abliegenden Punkten der Grundlinie B, Abb. 258, aufgetragen. Unbekannt ist die Stufenzahl — angenommen wird der Verlauf der Geschwindigkeit c_1 und u. Erstere muß einen hyperbelartigen Verlauf zeigen und in Absätzen von einem kleineren auf einen größeren Wert steigen, wenn wir Gruppen mit gleichen Schaufellängen erzielen wollen. Die Umfangsgeschwindigkeit steigt in gleichviel Staffeln hinauf als wir Trommelabsätze haben. Im allgemeinen wird sich empfehlen, mit Hilfe einer schätzungsweise angenommenen Zustandskurve nach der vorhin erläuterten Methode einen Vorentwurf durchzurechnen, damit man in bezug auf die Geschwindigkeiten von vornherein günstige Annahmen treffen kann.

Für einige herausgegriffene Turbinen α, β, γ, δ . . . entwerfen wir die Geschwindigkeitsdreiecke und ermitteln das nutzbare Gefälle

$$h = A\frac{c_1^2 - w_1^2}{g} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

tragen dieses in die Abbildung ein und verbinden die Endpunkte durch stetige Kurven. Die Summierung der sämtlichen Teilgefälle müßte das wirksame Gefälle, d. h.

$$\Sigma h = i_0 - i_k = H_w$$

ergeben. Man kann diese Summe als Produkt aus der Zahl z der Stufen und dem mittleren Gefälle h_m darstellen, welch letzteres man erhält, indem man den Inhalt der von der h-Kurve

den Endordinaten und der Abszissenachse eingeschlossenen Fläche bestimmt und durch die Länge der Grundlinie teilt. Daher besteht die Gleichung

$$H_w = \Sigma h = z h_m = i_0 - i_k \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

Wäre die Zustandskurve $A_0 A_k$ (Abb. 259) festgelegt, so wäre i_k bekannt, und man könnte hieraus die Zahl der Stufen berechnen. Dies vom Verfasser früher angewendete Verfahren

Abb. 258. Abb. 259.
Nachprüfung der Zustandskurve.

kann nun durch eine naheliegende Erweiterung so abgeändert werden, daß die Zustandskurve aus der Reibungsarbeit aller Einzelstufen heraus entwickelt wird[1]). Wir machen die Annahme, daß die Reibungsarbeit in Wärmemaß durch den Ansatz

$$h_r = 2 A \zeta \frac{c_1^2}{2g} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

wiedergegeben werden kann, wobei durch den Beiwert 2 die Summierung über Leit- und Laufschaufel einer Stufe ausgedrückt ist. Da der Beiwert ζ von der Schaufellänge und dem radialen Spiel abhängt, muß freilich auch hier eine vorläufige Annahme über dessen Zahlengröße gemacht werden. Trägt man die h_r bzw. $\zeta c_1^2/g$ für die vorhin herausgegriffenen Teilturbinen in die Abbildung ein, so kann durch Planimetrieren deren Mittelwert h_{rm} ermittelt werden, und es gilt die Gleichung

$$H_r = \Sigma h_r = z h_{rm} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

mit noch unbekanntem z.

Die Summe der Reibungswärmen Σh_r bildet die gesamte Reibungsarbeit, die im Entropiediagramm (Abb. 259) durch die mit Q' und H_z bezeichneten Flächen dargestellt wird. Ersetzen wir näherungsweise die Zustandslinie durch eine Gerade, so wird

$$Q' = (T_0 - T_k) \frac{\Delta S}{2}; \qquad H_z = T_k \Delta S;$$

daher $\Sigma h_r = Q' + H_z = \frac{T_0 + T_k}{2 T_k} H_z$, oder mit der Abkürzung

$$\frac{2 T_k}{T_0 + T_k} = \tau \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (19)$$

die Reibungswärme $\Sigma h_r = H_z / \tau$ . . . . (19a)

---

[1]) Vgl. auch Jasinsky, Zeitschr. f. d. ges. Turbinenwesen 1908, S. 405.

Ist von Anfang an bekannt, ob die Zustandskurve nach innen oder nach außen durchgebogen ist, kann an τ ein Berichtigungsfaktor angebracht werden.

Die Verbindung von Gl. (19) und (18) liefert

$$H_z = \tau H_r = \tau z h_{rm} \quad \text{. . . . . (20)}$$

Das adiabatische Gefälle H_0 kann aber in Teilgefälle

$$H_0 = i_0 - i'_k = (i_0 - i_k) + (i_k - i'_k) = H_w + H_z \quad \text{. . . . . . (20a)}$$

zerlegt werden, was nach Einführung der Werte (16) und (18)

$$H_0 = z(h_m + \tau h_{rm}) \quad \text{. . . . . (21)}$$

gibt und zur Berechnung des endgültigen Wertes der Stufenzahl z dient.

Eigentlich müßte von H_0 dasjenige kleine Gefälle abgezogen werden, das zur Beschleunigung des Dampfes in der ersten Leitschaufel auf eine Geschwindigkeit w_1 erforderlich ist, damit auch für die erste Stufe das Gefälle durch Formel (15) ausdrückbar sei. Ebenso dürfte die Auslaßgeschwindigkeit beim Übergang von einer Trommel zur anderen verloren gegeben und ein entsprechender Abzug von H_0 gemacht werden.

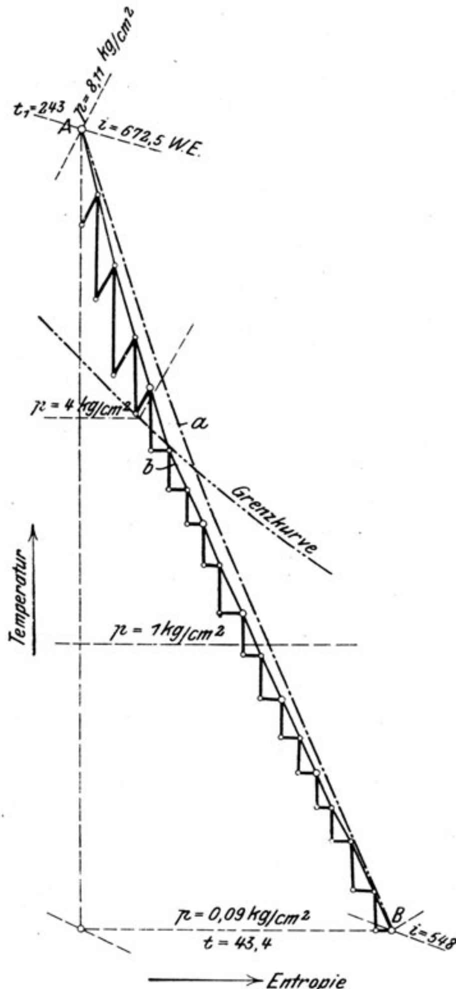


Abb. 260. Berichtigung der Zustandskurve.

Nun kann die wahre Zustandskurve ermittelt werden, indem man die Grundlinie in Abb. 258 in z gleiche Teile teilt und Stufe für Stufe das Nutzgefälle h gemäß Formel (15) und die Reibungsarbeit $h_r = A\,\zeta\, c_1^2/g$ rechnet. Letztere unterscheidet sich so wenig vom kinetischen Energieverlust h_z, daß wir unbedenklich

$$h_z = A\zeta \frac{c_1^2}{g}$$

setzen können, worauf sich das adiabatische Gefälle

$$h_0 = h + h_z,$$

daher der Wärmeinhalt $i' = i_0 - h_0$ der adiabatischen Expansion in der fraglichen Stufe, und aus der Beziehung $i = i' + h_z$ auf der zugehörigen Drucklinie der Wärmeinhalt i und ein Punkt der wahren Zustandskurve ermitteln läßt. Da dies Verfahren für alle Stufen durchzuführen sehr zeitraubend wäre, wird man zu der Annäherung greifen, mehrere Stufen zu Gruppen zusammenzufassen (die auch mit den Gruppen gleicher Schaufellänge übereinstimmen dürfen) und wird nun

$$H_{zI} = A\sum_1^{z_1} \zeta \frac{c_1^2}{g}; \qquad H_{zII} = A\sum_1^{z_2} \zeta \frac{c_1^2}{g} \text{ usw. . . . .}$$

anderseits die Summen der nutzbaren Gefälle

$$H_I = \sum_1^{z_1} h; \qquad H_{II} = \sum_1^{z_2} h \text{ usw. . . . .}$$

bilden. Vernachlässigt man den Flächeninhalt des kleinen Dreieckes $A_0 A_I A'_I$ (Abb. 259), so ist hiernach für die erste Gruppe das adiabatische Gefälle

$$H'_I = i_0 - i'_I = H_I + H_{Iz},$$

woraus sich i'_I mit dem zugehörigen Druck p_1 ergibt. Suchen wir auf dieser Drucklinie den Punkt

$$i_I = i'_I + H_{Iz},$$

so gelangen wir um so genauer zu einem Punkte der wahren Zustandskurve, je kleiner die Zahl der in einer Gruppe zusammengefaßten Stufen ist.

Für die zweite Gruppe ist ähnlich

$$H'_{II} = i_I - i'_{II} = H_{II} + H_{IIz},$$

woraus p_2, und

$$i_{II} = i'_{II} + H_{IIz}$$

und so fort für die übrigen. Zum Schluß kann eine kleine Berichtigung notwendig werden, falls wir τ ungenau eingeschätzt hatten.

Aus der festgelegten Zustandskurve kann der spezifische Rauminhalt in das Stufendiagramm eingezeichnet und die Schaufellänge usw. berechnet werden.

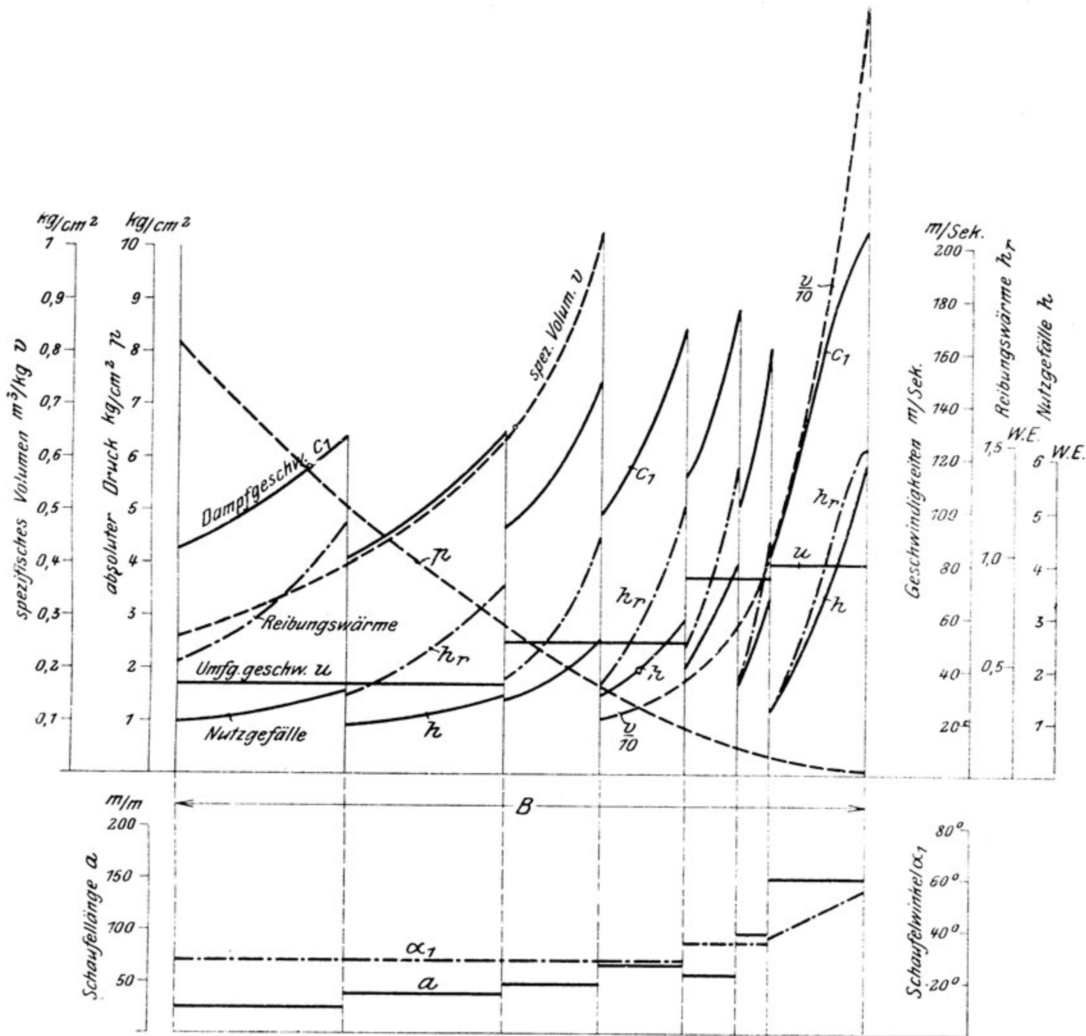


Abb. 261. Die Reibungsarbeit.

Zahlenbeispiel.

Der Anfangszustand sei $p_1 = 8{,}11$ kg/qcm abs., $t_1 = 243^0$ C, der Kondensatordruck $p_k = 0{,}09$ kg/qcm abs. Im Entropieschaubild Abb. 260 wird der Schätzung nach die Zustandskurve a von A nach B durchgelegt, und aus dieser nach dem ersten Verfahren dieses Abschnittes die Turbine vorläufig berechnet. Hierauf tragen wir in Abb. 261 den Rauminhalt v als Funktion der Stufenzahl auf, und schreiten zum genaueren Entwurf, indem wir die Einzelwiderstandszahl auf Grund der in Abschn. 62 besprochenen Versuche wählen. Wir behalten hier den älteren Ansatz aus der IV. Aufl.

$$\zeta = 0{,}12 + 4\,\frac{x}{a}$$

bei, wo x das Spiel, a die Schaufellänge bedeuten, da es uns mehr nur auf die Darstellung des Verfahrens ankommt.

Das Spiel x sei für Leit- und Laufschaufel durchwegs 1 mm; die vorläufige Schaufellänge ist aus dem Vorentwurfe bekannt, so daß auch ζ für irgendeine Stufe berechnet werden kann. In Abb. 261 ist die Gruppeneinteilung und die Geschwindigkeit c_1, ferner die Reibungswärme h_r und das nutzbare Einzelgefälle h eingetragen. Durch Planimetrieren findet man $h_m = 1{,}92$ kcal $h_{rm} = 0{,}734$ kcal, aus den Temperaturen $\tau = 0{,}759$, ferner das adiabatische Gesamtgefälle $H_0 = 163{,}5$ kcal. Mithin liefert Formel (21)

$$z = \frac{H_0}{h_m + h_{rm} \cdot \tau} = 66$$

als gesamte Stufenzahl. Die hierauf vorgenommene Einzelberechnung der adiabatischen Gruppengefälle ergibt die im Entropieschaubild eingezeichnete Zickzacklinie b, deren Eckpunkte sich der probeweise angenommenen Zustandskurve a so weit anschließen, daß eine Wiederholung des Verfahrens überflüssig erscheint.

e) Der Schaufelwirkungsgrad.

Der Schaufelwirkungsgrad bedeutet wie bei der Gleichdruckturbine das Verhältnis der in einer Stufe (Leit- und Laufschaufel zusammengenommen) nützlich umgesetzten Gefälle zum adiabatischen Gefälle, d. h. mit Bezug auf Abb. 245

$$\eta_s = \frac{i_0 - i_2}{i_0 - i_2''} \text{ angenähert auch } \frac{i_0 - i_1}{i_0 - i_1'} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (22)$$

Er mißt daher nur die Schaufelreibungsverluste, ohne Rücksicht auf die Zulauf- und Abflußenergie. Der in Abschn. 60 unter (b) erbrachte Beweis, daß der Wirkungsgrad der vielstufigen Gleichdruckturbine näherungsweise dem Schaufelwirkungsgrade gleich ist, kann unverändert auf die Überdruckturbine übertragen werden.

Nun ist nach dem Energiesatz

$$i_0 - i_2 = A L_u + \frac{A}{2g}(c_2^2 - c_0^2)$$

$$i_0 - i_2'' = A L_u + \frac{A}{2g}(c_2^2 - c_0^2 + 2\zeta c_1^2),$$

wobei die kinetischen Verluste in Leit- und Laufrad gleich groß $= \zeta c_1^2/2g$ gesetzt werden. Wir nehmen näherungsweise $c_2 = c_0$ an und setzen kongruente Leit- und Laufschaufeln voraus, so daß $L_u = (2 c_1 \cos \alpha_1 - u)\, u/g$ wird. Diese Werte und $u = \xi c_1$ in Gl. 22 eingesetzt, liefern[1])

$$\eta_u \simeq \eta_s = \frac{(2 \cos \alpha_1 - \xi)\,\xi}{(2 \cos \alpha_1 - \xi)\,\xi + \zeta} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (23)$$

Wünscht man mit dem Geschwindigkeitsverhältnis $\varphi = c_1/c_{th1}$ zu rechnen, so kann man η_s aus dem Energieumsatz im Leitrad allein, da dieser dem im Laufrad gleich ist, als $(i_0 - i_1):(i_0 - i_1')$ berechnen. Hierin ist $i_0 - i_1 = A\,(c_1^2 - c_0^2)/2g$ und $i_0 - i_1' = A\,(c_{th}{}^2{}_1 - c_0^2)/2g$. Unter denselben Voraussetzungen wie oben, ist $c_0 = w_1$ und aus dem Geschwindigkeitsdreieck $w_1^2 = c_1^2 - 2\, c_1 \cos \alpha_1 u + u^2$. Dies eingesetzt führt auf

$$\eta_s = \frac{c_1^2 - w_1^2}{c_1^2/\varphi^2 - w_1^2} = \frac{\varphi^2 (c_1^2 - w_1^2)}{c_1^2 (1 - \varphi^2) + \varphi^2 (c_1^2 - w_1^2)} = \frac{(2 \cos \alpha_1 - \xi)\xi}{(2 \cos \alpha_1 - \xi)\,\xi + (1 - \varphi^2)/\varphi^2} \quad . \; . \quad (24)$$

welcher Wert mit (23) übereinstimmt, da $\zeta = (1 - \varphi^2)/\varphi^2$ ist.

Die in Abschn. 64(a) eingeführte Schaufelverlustzahl ζ_s muß von ζ wohl unterschieden werden, **da ζ_s den Verlust in Teilen des reinen Wärmegefälles, während ζ den Verlust in Teilen der kinetischen Energie $c_1^2/2g$ bzw. $w_2^2/2g$ ausdrückt.** Zwischen den beiden besteht nach Gl. (22) und (23) die Beziehung:

$$\zeta_s = 1 - \eta_s = \frac{i_1 - i_1'}{i_0 - i_1'} = \frac{\zeta c_1^2/2g}{(1 + \zeta)\, c_1^2/2g - c_0^2/2g} = \frac{\zeta}{(1 + \zeta) - \dfrac{c_0^2}{c_1^2}} = \frac{\zeta}{(2 \cos \alpha_1 - \xi)\,\xi + \zeta} \quad . \; (25)$$

Die Zahl ζ_s hängt also vom Verhältnis $\xi = u/c_1$ ab, und kann aus den Schaulinien der Wirkungsgrade entnommen werden, die in Abb. 262 für die Werte $\zeta = 0{,}1$ bis $0{,}6$ und $\alpha_1 = 17^0$ als

[1]) Vgl. Bánki, Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1905, S. 480.

Funktion des Verhältnisses u/c_1 aufgetragen sind. Es folgt aus dieser Darstellung, daß der Höchstwert des Schaufelwirkungsgrades bei der vielstufigen Überdruckturbine erst in der Nähe des Wertes $u = c_1$ erreicht wird; daß der Wirkungsgrad von $u = 0$ an sehr rasch ansteigt und innerhalb eines großen Zwischenraumes wenig veränderlich ist.

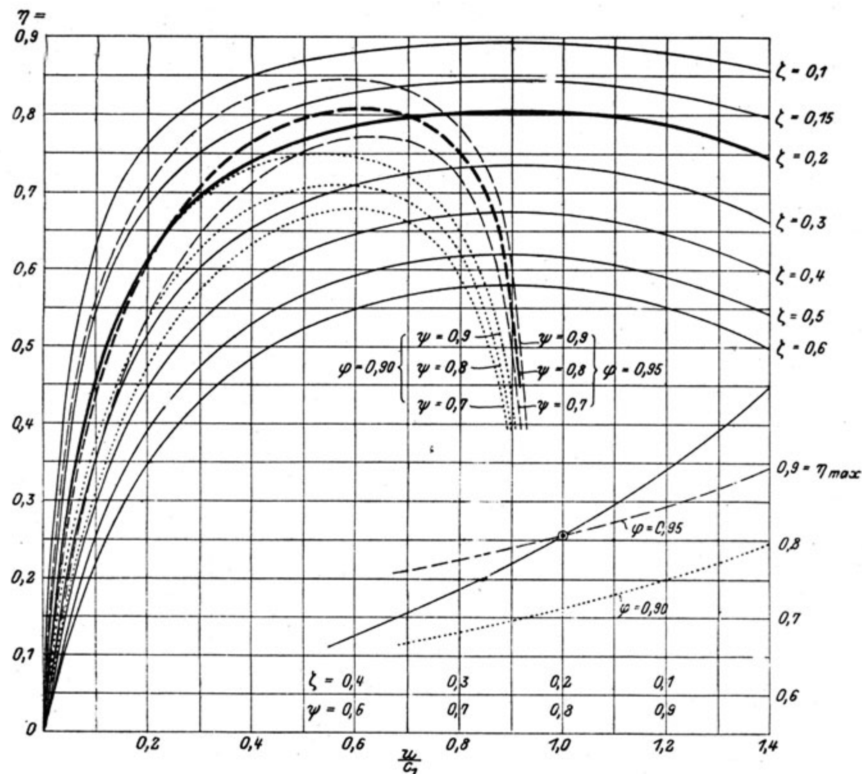


Abb. 262. Schaufelwirkungsgrade bei Überdruck und bei Gleichdruck.

Bei der vielstufigen Gleichdruckturbine mit Verwertung der Auslaßenergie haben wir als beste Umfangsgeschwindigkeit rd. $0{,}6 c_1$ gefunden. In der Nähe des besten Wirkungsgrades verhalten sich aber die Geschwindigkeiten c_1 bei gleichen Stufengefällen für Über- bzw. Gleichdruck rd. wie $1 : \sqrt{2} = 0{,}7$, so daß die absoluten Werte der Umfangsgeschwindigkeit im Verhältnisse 0,7:0,6 stehen werden. Allein, da, um Gewicht zu sparen, weder die eine noch die andere Turbinenart mit der „besten" Umfangsgeschwindigkeit arbeitet, ist die Wahl des Verhältnisses $u : c_1$ in hohem Maße durch praktische Erwägungen bedingt.

Des Vergleiches halber sind in die Abbildung die Wirkungsgrade der Gleichdruckturbine (bei Verwertung von c_2 mit $\alpha_1 = 17^0$; $\beta_1 = \beta_2$), deren Berechnung in Abschn. 60 (b) nachzusehen ist, hineinpunktiert, so daß leicht festgestellt werden kann, unter welchen Umständen die beiden Systeme gleiche Wirkungsgrade zu erzielen vermögen.

Für die Überdruckturbine können wir als Mittelwert von ζ den Wert 0,2 ansetzen. Für die Gleichdruckturbine sind $\varphi = 0{,}95$, $\psi = 0{,}80$ wohl erprobte Größen; und unsere Zusammenstellung zeigt, daß bei diesem Werte die beiderseitigen Wirkungsgrade genau übereinstimmen — es besitzt in dieser Beziehung keine der Bauarten eine Überlegenheit.

In der rechten Ecke der Abbildung ist eine Zusammenstellung der Höchstwerte des η_s als Funktion von ζ und ψ angefügt, aus ihr kann man zusammengehörende, d. h. gleichem Wirkungsgrade entsprechende Werte von ζ, φ, ψ leicht auffinden. Die Kurven für die Gleichdruckturbine (punktiert) sind den Werten $\varphi = 0{,}95$ und $\varphi = 0{,}90$ zugeordnet, bei $\varphi = 1$ würde die (nicht gezeichnete) Gleichdruckkurve ebenso durch den Punkt $\eta = 1{,}0$ hindurchgehen, wie die (vollgezogene) Kurve der Überdruckturbine.

Einfluß der Drehzahl und des Auslaßverlustes.

In obiger Erörterung ist der Auslaßverlust der letzten Stufe vernachlässigt worden. Je kleiner die Umfangsgeschwindigkeit ist, ein um so kleinerer Teil der Dampfenergie wird in Arbeit umgesetzt, um so größer

muß der Auslaßverlust werden. Die wahren Wirkungsgrade bei halber Umlaufzahl werden daher mit den Werten von η, die dem halben Wert u/c_1 entsprechen, **nicht** übereinstimmen, sondern kleiner sein. Um zu erkennen, wie groß dieser Einfluß ist, sind die Schaulinien Abb. 262a entworfen worden. Eine vielstufige Überdruckturbine mit dem überall gleichen Verhältnis $u:c_1 = 0{,}4$ besitzt nach Abb. 262, wenn wir $\zeta = 0{,}2$ annehmen, den Zwischenwirkungsgrad $\eta_s = 0{,}734$. Infolge der rückgewinnbaren Wärme würde, wie bei der Gleichdruckturbine, der Gesamtwirkungsgrad beispielsweise bei $p_1 = 10$ at abs. $t_1 = 300^0$ um 3,5 v. H. höher, $= 0{,}769$ werden. Hiervon müssen wir nun den Auslaßverlust abziehen, für den wir mit $u = 100$ m/sek und 40^0 Schaufelwinkel $c_2 = 184$ m/sek, also $H_a = A\,c_2{}^2/2g = 4{,}05$ WE, oder 1,93 v. H. vom theoretischen Gefälle $H_0 = 210$ WE (entsprechend 0,05 at Gegendruck) finden, was den endgültigen inneren Wirkungsgrad $\eta_i = 0{,}750$ ergibt. Gehen wir nun zu einer kleineren Umlaufzahl über, so ist in erster Linie zu beachten, daß bei gleichem Anfangszustand die sekundliche Dampfmenge zunimmt, und zwar, wie wir später nachweisen, etwa im Verhältnis der in Abb. 262a graphisch angegebenen Schaulinie. Im gleichen Verhältnis wird in erster Annäherung c_1 zunehmen und wir werden aus Abb. 262 zu dem neuen Wert u'/c_1' den Einzelwirkungsgrad η_1' entnehmen, den Gesamtwirkungsgrad einschätzen und daraus den Endpunkt der Zustandskurve im Entropiediagramm bestimmen, an dem wir das Endvolumen v_2' abgreifen. Die Stetigkeit $G'v_2' = f_2 w_2'$ liefert mit dem für die normale Umlaufzahl vorher berechneten Austrittsquerschnitt f_2 die neue Geschwindigkeit w_2' und diese wieder c_2'. Nun wird der neue Auslaßverlust $H_a' = A c'_2{}^2/2g$ berechnet und nach Abzug hiervon der schließliche innere Wirkungsgrad ermittelt. Da c_1 nicht in allen Stufen im gleichen Verhältnis zunimmt, ist in unserem Entwurf die Rechnung wiederholt und ein Mittelwert gewählt worden.

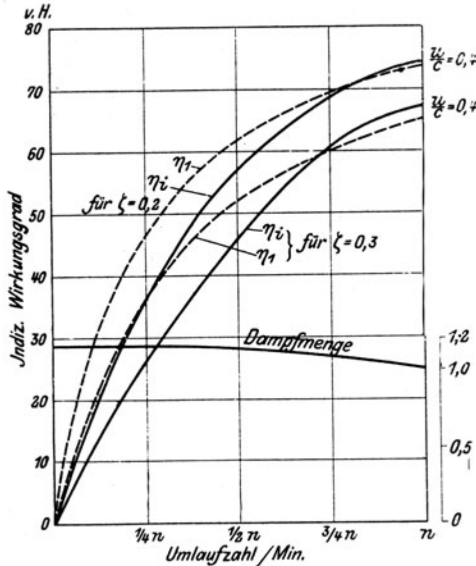


Abb. 262a. Wirkungsgrad bei abnehmender Drehzahl.

Die so bestimmten Werte η_i unterscheiden sich erheblich von den Zwischen-Wirkungsgraden η_1, wie auch das zweite in Abb. 262a aufgenommene Beispiel, mit $\zeta = 0{,}3$ und für den Normalgang $u/c_1 = 0{,}4$ lehrt, indem der Anstieg viel geradliniger erfolgt. In den praktischen Ausführungen pflegt der Auslaßverlust größer zu sein als wir angenommen haben, und die nahezu geradlinige Zunahme des Wirkungsgrades reicht fast bis zum Normalgang hinauf.

Der Wirkungsgrad und die Summe der Umfangsgeschwindigkeitsquadrate.

Ähnlich wie bei der Gleichdruckturbine führen wir die Geschwindigkeit c, die dem adiabatischen Stufengefälle h' entspricht, durch die Gleichung

$$\frac{A}{2g}c^2 = h' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

ein. Dann ist nach Gl. (15), (16) in Abschn. 60 (d) die Parsonssche Kennzahl

$$X^* = \frac{K}{H_0^*} = \frac{z\overline{u}^2}{H_0^*} = \frac{2g}{A}\xi_0{}^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

und wir stellen uns die Aufgabe, den Wirkungsgrad als Abhängige von X^* oder von

$$\xi_0 = \frac{u}{c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

darzustellen. Dies gelingt am einfachsten, indem wir ξ_0 durch ξ ausdrücken, da η_s als Funktion von ξ bereits bekannt ist. Zu diesem Zwecke halten wir an der Annäherung

$$c_2 = w_1; \qquad w_2 = c_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

fest, so daß auf die Leitschaufel die Hälfte von h' entfällt und die Energiegleichung als

$$\frac{h'}{2} = \frac{A}{2g}\frac{c^2}{2} = \frac{A}{2g}\left[(1+\zeta)\,c_1{}^2 - w_1{}^2\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

geschrieben werden kann.

Schiebt man hier $c_1^2 - w_1^2 = 2c_1 u \cos\alpha_1 - u^2$ ein, so ergibt sich

$$\left(\frac{c}{u}\right)^2 = 2\left[\zeta\left(\frac{c_1}{u}\right)^2 + 2\left(\frac{c_1}{u}\right)\cos\alpha_1 - 1\right] \quad \text{oder} \quad \left(\frac{1}{\xi_0}\right)^2 = 2\left[\zeta/\xi^2 + 2\cos\alpha_1/\xi - 1\right]. \quad (31)$$

woraus ξ_0 zu rechnen ist, wenn man ξ gegeben hat. Für die Winkel $\alpha_1 = 20^0$; 30^0; 40^0 und je drei Werte der Widerstandszahl $\zeta = 0{,}1$; $0{,}2$; $0{,}3$ sind zusammengehörende Werte von ξ und ξ_0 in Abb. 263a dargestellt. Die Abszisse ist ξ_0 oder ξ, die Ordinate $\xi - \xi_0$. Ist ξ_0 gegeben,

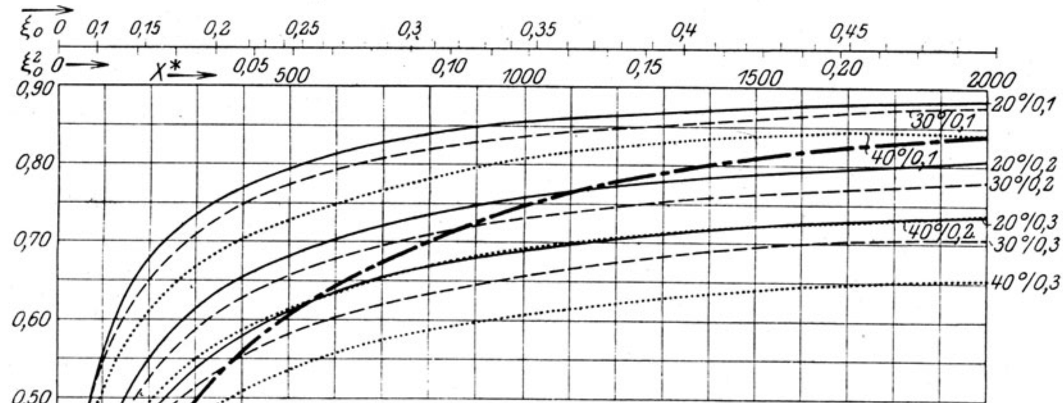


Abb. 263. Schaufelwirkungsgrad der Überdruckturbine in Abhängigkeit von $(u/c)^2 = \xi_0^2$.

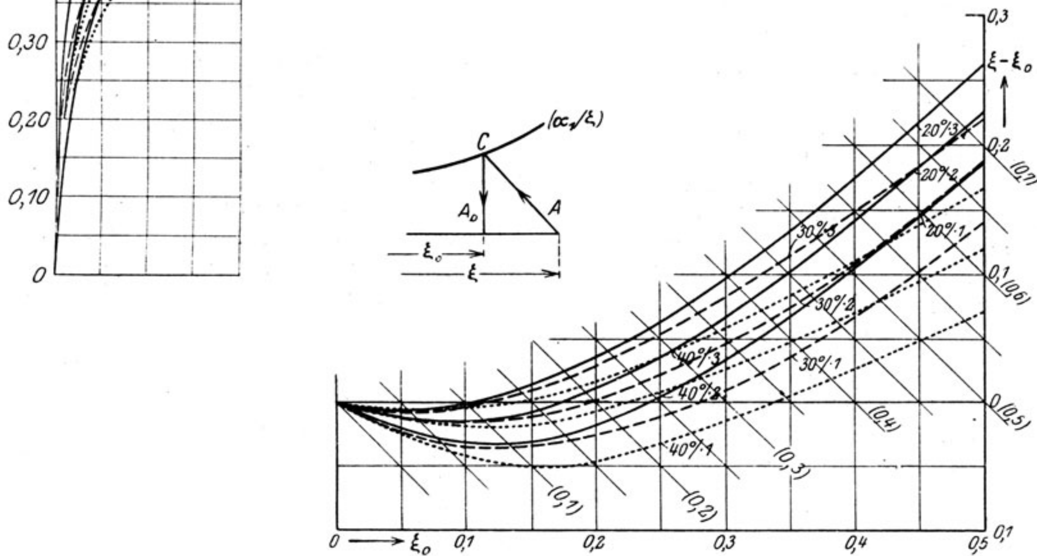


Abb. 263a. Zusammenhang zwischen ξ und ξ_0.

so findet man unmittelbar $\xi - \xi_0$ daraus ξ. Ist ξ gegeben, so wird wie in der Nebenabbildung dargestellt, der entsprechende Teilpunkt A auf der Abszissenachse aufgesucht, unter 45^0 auf die Kurve $(\alpha_1\zeta)$ nach C übertragen und senkrecht auf A_0 hinabprojiziert, wo man ξ_0 abliest.

Die unmittelbare Darstellung des Wirkungsgrades durch die Veränderliche ξ_0 gelingt, wenn man den Zähler in der Formel von $\eta_s = (i_0 - i_2):(i_0 - i_2'')$ als

$$i_0 - i_2 = 2\cdot\frac{A}{2g}(c_1^2 - w_1^2) = \frac{A}{2g}(c^2 - 2\zeta c_1^2)$$

schreibt, so daß mit $i_0 - i_2'' = A c^2/2g$

$$\eta_s = 1 - 2\zeta\frac{c_1^2}{c^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (32)$$

wird. Für die Ausrechnung ist übrigens die frühere Darstellung $2g\,(i_0 - i_2) = A\,2\,(c_1^2 - w_1^2) = A\,2\,(2 c_1 u \cos\alpha_1 - u^2)$, also

$$\eta_s = 2\left[2\frac{c_1}{c}\frac{u}{c}\cos\alpha_1 - \frac{u^2}{c^2}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32a)$$

bequemer. In beiden Fällen benützen wir die mit u^2 vermehrte Gl. 31

$$\zeta c_1^2 + 2\cos\alpha_1\, u c_1 - \left(u^2 + \frac{c^2}{2}\right) = 0,$$

die es ermöglicht, c_1 durch c auszudrücken. Die Auflösung liefert als brauchbar nur die positive Wurzel

$$c_1 = \frac{1}{\zeta}\left\{-u\cos\alpha_1 + \sqrt{u^2\cos^2\alpha_1 + \zeta\left(u^2 + \frac{c^2}{2}\right)}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (33)$$

und mit dieser lautet Gl. (32) oder (32a)

$$\eta_s = 2\left(\frac{u}{c}\right)^2\left[-\left(1 + \frac{2\cos^2\alpha_1}{\zeta}\right) + \frac{2\cos\alpha_1}{\zeta}\sqrt{\cos^2\alpha_1 + \zeta\left(1 + \frac{c^2}{2u^2}\right)}\right] \quad . . \quad (34)$$

Schiebt man nach Gl. (28) $\xi_0^2 = (u/c)^2 = AX^*/2g$ ein, so erhält man

$$\eta_s = \frac{AX^*}{g}\left[-\left(1 + \frac{2\cos^2\alpha_1}{\zeta}\right) + \frac{2\cos\alpha_1}{\zeta}\sqrt{\cos^2\alpha_1 + \zeta\left(1 + \frac{g}{AX^*}\right)}\right] \quad . . \quad (34a)$$

Die so gerechneten Werte von η_s sind in Abb. 263 für die Winkel $\alpha_1 = 20^0$; 30^0; 40^0 und die Werte $\zeta = 0{,}1$; $0{,}2$; $0{,}3$ dargestellt. Auf der Abszissenachse sind neben X^* auch die Maßstäbe von ξ_0^2 und ξ_0 aufgetragen. In den eingeschriebenen Bruchzahlen bedeutet der Zähler α_1, der Nenner ζ. Man erkennt, daß bei kleinen Widerständen ($\zeta = 0{,}1$) die Veränderung des Winkels zwischen 20^0—40^0 nicht viel ausmacht. Nach anfänglich raschem Steigen gehen die Schaulinien zu flachen Neigungen über, so daß große Opfer an K/H_0 erforderlich sind, um den Wirkungsgrad merklich zu erhöhen. In die Abbildung ist auch eine von Martin[1]) angegebene Kurve eingezeichnet, die als Zusammenfassung der Erfahrungen des englischen Turbinenbaues an Überdruckturbinen zu gelten hat und den gemessenen inneren Wirkungsgrad η_i darstellt. Winkel sind in der Quelle nicht angegeben, daher nur im allgemeinen darauf hingewiesen werden kann, daß die kleinen Werte von K/H_0 auch kleinen Einheiten entsprechen. Es ist mithin begreiflich, daß η_i mit wachsendem K/H_0 stärker zunimmt als unsere Kurven da bei größerer Leistung infolge größerer Schaufellänge und Breite die Widerstandszahl ζ abnimmt. Festländische Ausführungen haben in den Grenzen von $X = 500$ bis 1000 erheblich günstigere Werte von η_s aufzuweisen.

Umfangsgeschwindigkeit beim „Durchgehen" der Überdruckturbine.

Diese Geschwindigkeit darf bei den Überdruckturbine aus der Nullsetzung des unter der Voraussetzung $\alpha_1 = \beta_2$; $c_1 = w_2$; $w_1 = c_2$ aufgestellten Wirkungsgrades $\eta_s = 0$ nach Gl. (34) ermittelt werden. In der Tat

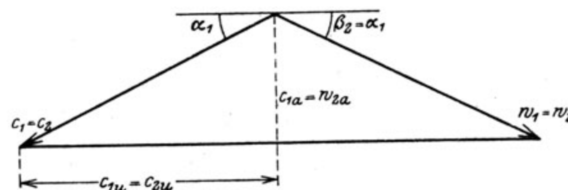


Abb. 264. Geschwindigkeiten beim „Durchgehen".

sind die Strömungsverhältnisse ähnlich wie die in Abb. 211a dargestellten. Für die Geschwindigkeiten haben wir die Bedingungen $c_{1u} = c_{2u}$, $c_{1a} \cong w_{2a}$, daraus folgen die Dreiecke Abb. 264, d. h. es fallen c_1 und c_2, wie auch w_1 und w_2 zusammen, so daß die erwähnten Bedingungen erfüllt sind. Aus $\eta_s = 0$ ergibt sich durch Ausrechnung

$$u_{max} = c\cos\alpha_1\sqrt{\frac{2}{\zeta_m}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

[1]) Engineering 1918, 5. Juli u. f., Abb. 7.

Diese Gleichung läßt sich einfacher ableiten, wenn man bedenkt, daß infolge des Zusammenfallens von w_1, w_2 und c_1, c_2 das adiabatische Gefälle ganz zur Überwindung der Reibung verwendet wird, aber

$$2gh' = 2A\zeta_m c_{1m}^2 = Ac^2$$

ist, woraus $c_{1m} = c/\sqrt{2\zeta_m}$ folgt. Abb. 264 zeigt aber, daß $u_{max} = 2c_{1m}\cos\alpha_1$, was in der Tat auf Gl. (35) führt. Über die Größe von ζ_m für den äußerst starken Stoß auf den Schaufelrücken besitzen wir bei der Überdruckturbine keine Anhaltspunkte. Wäre ζ_m vernachlässigbar klein, so würde u_{max} und c_{1m} über alle Grenzen wachsen, was nicht wundernehmen darf, da wir das zur ersten Erzeugung von c_{1m} erforderliche Gefälle und den Auslaßverlust in η_s nicht berücksichtigen können. Im Leerlauf unterscheidet sich daher η_i von η_s in erheblichem Maße, so daß die wirkliche Umfangsgeschwindigkeit erheblich kleiner wird als u_{max}.

Berechnung der Querschnitte.

Aus Abb. 262a oder aus Gl. (31) ergibt sich[1]), wenn u und $u/c = \xi_0$ gewählt wurden, der Wert ξ, mit dem $c_1 = u/\xi$ folgt, und damit ist unter Zuziehung der Entropietafel für die Rauminhalte die Querschnittsberechnung ermöglicht.

In roh angenäherter Weise, die heute wohl der Vergangenheit angehört, wurden früher die Schaufelabmessungen auf Grund der Annahme $pv = C_0$ so berechnet, daß man drei Trommeln annahm, deren Durchmesser sich wie $1:\sqrt{2}:(\sqrt{2})^2 = 1:\sqrt{2}:2$ verhalten, und die Leistungen im Verhältnisse 1:1:2 verteilt, so daß die Trommeln der Reihe nach $^1/_4$, $^1/_4$ und $^1/_2$ der Gesamtleistung aufnehmen. Nachdem die Arbeit bei Gleichheit der Zu- und Abflußgeschwindigkeit dem tatsächlichen Wärmegefälle gleich ist und dieses hier durch $C_0 \lg n\,(p_0/p_k)$ oder $C_0 \lg n\,(v_k/v_0)$ dargestellt wird, bedeutet dies, wenn wir mit v_I, v_{II} die spezifischen Rauminhalte am Ende der I. bzw. der II. Trommel bezeichnen, daß die Beziehungen

$$\lg n \frac{v_I}{v_0} = \frac{1}{4}\lg n \frac{v_k}{v_0};\quad \lg n \frac{v_{II}}{v_I} = \frac{1}{4}\lg n \frac{v_k}{v_0};\quad \lg n \frac{v_k}{v_{II}} = \frac{1}{2}\lg n \frac{v_k}{v_0}$$

oder

$$\frac{v_I}{v_0} = \sqrt[4]{\frac{v_k}{v_0}};\qquad \frac{v_{II}}{v_I} = \sqrt[4]{\frac{v_k}{v_0}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (37)$$

bestehen müssen, aus denen man v_I, v_{II} berechnet. Die Einzel-Stufenzahlen erhält man mit Rücksicht auf Gl. 27 aus den Bedingungen

$$z_I u_I^2 = \tfrac{1}{4}K;\quad z_{II} u_{II}^2 = \tfrac{1}{4}K;\quad z_{III} u_{III}^2 = \tfrac{1}{2}K$$

Jede Trommel teilte man nochmals in etwa vier Teile mit gleicher Leistung, und erhielt als Rauminhalte der ersten Teilgruppen v, v_1, v_2, v_I, die nach Analogie der Gl. (37) durch die Verhältnisse

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{v_3}{v_2} = \sqrt[4]{\frac{v_I}{v_0}}$$

festgelegt werden. Die entsprechenden Leitradquerschnitte der ersten Gruppe F_0, F_1, F_2, F_I ... folgen dann aus den Durchflußgleichungen

$$Gv_0 = F_0 c_I;\quad Gv_1 = F_1 c_I;\quad Gv_2 = F_2 c_I;\quad Gv_I = F_I c_I,$$

worin $c_I = u_I/\xi$ ist. Als Schaufellänge wählt man das Mittel aus dem Anfangs- und Endwert einer Gruppe.

d) Rechnerische Ermittelung des Zustandsverlaufes.

Im „Engineering" vom 13. Jan. 1905, 19. Okt. 1906, 5. Juli 1918, sowie in seinem Buch über Dampfturbinen entwickelt H. M. Martin ein beachtenswertes rechnerisches Verfahren, in dem die Frage der rückgewinnbaren Wärme klar behandelt und nützliche analytische Formeln mitgeteilt werden. Statt der üblichen parabolischen Funktion für die spezifische Wärme des Wassers wird für englisches und metrisches Maß gültig die Formel

$$c = 0{,}5605\,T^{\frac{1}{10}}$$

aufgestellt, woraus für die Entropie der Flüssigkeit der Wert

$$s_f = 5{,}605\,T^{\frac{1}{10}} - 9{,}822 = aT^{\frac{1}{10}} - b \quad \ldots\ldots\ldots (37)$$

[1]) Die Auflösung jener Gleichung lautet

$$\frac{1}{\xi} = \frac{1}{\zeta}\left[-\cos\alpha_1 + \sqrt{\cos^2\alpha_1 + \zeta\left(1 + \frac{1}{2\xi_0^2}\right)}\right] \quad \ldots\ldots\ldots (36)$$

an der man erkennt, daß die in der Praxis hin und wieder benutzte Formel für die axiale Geschwindigkeitskomponente $c_{1a} = c_1 \sin\alpha_1 = u\sqrt{\frac{C}{\xi_0^2}} = u\sqrt{\frac{C_1}{X^*}}$ keine Berechtigung besitzt.

ebenfalls für beide Maßsysteme folgt. Im weiteren wird die Gleichung der Zustandskurve für die unendlich vielstufige Turbine mit unveränderlichem Zwischenwirkungsgrad wie folgt abgeleitet.

1. Im Sättigungsgebiet. Bezeichnet s_1 die Entropie im Anfangszustand, s_f die Entropie des flüssigen Wassers beim Zustande der adiabatischen Expansion auf eine Zwischenstufe mit der Temperatur T, ferner s' den ganzen Entropiezuwachs infolge der Reibungsverluste, so ist $-(s_1 - s_f + s')dT$ die verfügbare Wärme für die unendlich kleine Expansionsstufe mit dem Temperaturgefälle dT. Ist nun η_s der Zwischenwirkungsgrad der Stufe, so wird bei der vielstufigen Überdruck- wie auch Gleichdruckturbine der Betrag $\zeta = (1 - \eta_s)$ in Wärme verwandelt, die im Entropiediagramm als Flächenstreifen Tds' erscheint. Man erhält also

$$Tds' = -\zeta(s_1 - s_f + s')dT$$

oder, wenn wir beide Seiten mit $T^{\zeta-1}$ vermehren und ordnen,

$$T^{\zeta}ds' + \zeta T^{\zeta-1}s'dT = d(T^{\zeta}s') = -\zeta(s_1 - s_f)T^{\zeta-1}dT.$$

Mit Rücksicht auf (37) folgt hieraus durch Integration

$$T^{\zeta}s' = -(s_1 + b)T^{\zeta} + \frac{\zeta a}{\zeta + 0{,}1}T^{\zeta+0{,}1} + C.$$

Daraus ergibt sich

$$s' = -(s_1 + b) + \frac{\zeta a}{\zeta + 0{,}1}T^{0{,}1} + CT^{-\zeta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (38)$$

Die Unveränderliche C bestimmt man aus der Bedingung, daß für $T = T_1$ $s' = 0$ sei. Nunmehr berechnet man die rückgewinnbare Wärme mit Rücksicht auf Abb. (232)

$$Q' = \int_T^{T_1} s'dT = -(s_1 + b)(T_1 - T) + \frac{\zeta a}{\zeta + 0{,}1} \cdot \frac{10}{11}(T_1^{1,1} - T^{1,1}) + \frac{C}{1-\zeta}(T_1^{1-\zeta} - T^{1-\zeta}) \quad (39)$$

2. Verläuft die Ausdehnung im überhitzten Gebiet, so entwickelt sich die Gleichung der Zustandskurve besser in den Koordinaten p, v, mittels der Wärmegleichung

$$dq = di - Avdp,$$

worin nach Gl. (9) Abschn. 10 näherungsweise

$$i = \frac{Ak}{k-1}pv + \text{konst.}$$

ist und dq die durch Reibung entstehende, an den Dampf übergehende Verlustwärme bedeutet. $-Avdp$ ist (bis auf kleine Größen höherer Ordnung) das adiabatische Gefälle, also die verfügbare Arbeit AdL der betreffenden Stufe. Daher ist $dq = +(1 - \eta_s)AdL = -\zeta_s Avdp$, und die Wärmegleichung lautet:

$$\eta_s vdp = \frac{k}{k-1}d(pv) \quad \text{oder} \quad [k - (k-1)\eta_s]vdp + kpdv = 0.$$

Mit der Bezeichnung

$$\lambda = \frac{k}{k - (k-1)\eta_s} = \frac{k}{k(1-\eta_s) + \eta_s} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (40)$$

entsteht $\frac{dp}{p} + \lambda\frac{dv}{v} = 0$, deren Integral $pv^{\lambda} = \text{konst.}$ . . . . (41)

ist. Die Arbeitsfläche, d. h. das verfügbare gesamte Gefälle zwischen dem Anfangsdruck p_1 und dem Enddruck p ist

$$L = \frac{\lambda}{\lambda - 1}p_1 v_1\left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (42)$$

gemäß (40) ist jedoch, wie man leicht findet,

$$\frac{\lambda - 1}{\lambda} = \eta_s\frac{k-1}{k} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (42a)$$

also schreibt sich

$$L = \frac{1}{\eta_s}\frac{k}{k-1}p_1 v_1\left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\eta_s\frac{k-1}{k}}\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (42b)$$

Die der reinen Adiabate entsprechende Arbeitsfläche ist

$$L_0 = \frac{k}{k-1} p_1 v_1 \left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right] \quad \text{. . . . . (42c)}$$

Hiernach ist der Arbeitswert der rückgewinnbaren Reibungswärme

$$L' = \frac{Q'}{A} = L - L_0 \quad \text{. . . . . (43)}$$

Das nutzbare Gesamtgefälle ist $= L_0 + L' = L$, oder in Wärmemaß für Naß und Heißdampf

$$H^* = H_0 + Q'.$$

Die Gefällsvermehrung, die wir abkürzend mit Φ bezeichnen wollen,

$$\Phi = \frac{H^*}{H_0} = 1 + \frac{Q'}{H_0} \quad \text{. . . . . (44)}$$

nimmt bei Heißdampf die Form

$$\Phi = \frac{1}{\eta_s} \frac{1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\eta_s \frac{k-1}{k}}}{1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}} \quad \text{. . . . . (44a)}$$

an. Der gesamte innere Wirkungsgrad der Turbine wird dann nach Abschn. 62 (b)

$$\eta_i = \Phi \eta_s - \zeta_a \quad \text{. . . . . (45)}$$

wo ζ_a den Auslaßverlust bedeutet.

Für eine Expansion, die vom Heißdampf- in das Naßdampfgebiet übergeht (was die Regel bildet), ist die Bestimmung von Φ sehr umständlich, da zunächst der Schnittpunkt der Polytrope $pv^\lambda = p_1 v_1^\lambda = C_1$ mit der Grenzkurve

$$p v''^{\frac{16}{15}} = p v^\sigma = C \quad \text{. . . . . (46)}$$

gesucht werden muß, von dem ab die Zustandskurve (38) gilt. Durch Division findet man

$$v^{\lambda - \sigma} = \frac{C_1}{C} \quad \text{. . . . . (46a)}$$

woraus v, also mit (46) auch p an der Sättigungsgrenze bestimmbar sind. Aus (38) berechnet sich z. B. zur Kondensatortemperatur T_k die Entropiezunahme s' gegenüber adiabatischer Ausdehnung, also der Endzustand. Sind nun i_1, i_s, i_k die ebenfalls zu berechnenden Wärmeinhalte am Anfang, an der Grenzkurve und bei Kondensatordruck, so ist, wenn man $\zeta_a = 0$ voraussetzt, der Wärmewert der inneren Arbeit

$$H_{i,\,th} = i_1 - i_k.$$

Mit dem reinen adiabatischem Gefälle vom Anfangszustand auf Kondensatordruck, H_0 erhält man den theoretischen Gesamtwirkungsgrad

$$\eta_{i\ th} = \frac{H_{i,\,th}}{H_0} \quad \text{. . . . . (47)}$$

der dem angenommenen Zwischenwirkungsgrad η_s entspricht. Die Gefällsvermehrung Φ würde sich zum Schluß mittelbar aus Gl. (45) mit $\zeta_a = 0$ zu

$$\Phi = \frac{\eta_{i,\,th}}{\eta_s} \quad \text{. . . . . (48)}$$

ergeben. Die Anwendung dieser Rechnungsart setzt offenbar die vorherige Ausarbeitung umfangreicher Tabellen voraus, welch große Arbeit nur bei hohen Ansprüchen auf Genauigkeit unternommen werden dürfte.

C. Radialturbinen.

65. Die Hauptgleichungen für den sich gleichmäßig drehenden Kanal beliebiger Form.

Es bezeichne i_1, i_2 die Wärmeinhalte des Dampfes beim Eintritt und beim Austritt; r_1, r_2 die entsprechenden Halbmesser und u_1, u_2 die Umfangsgeschwindigkeiten unseres Kanales.

Die Drehung erfolge mit der gleichmäßigen Winkelgeschwindigkeit ω, so daß wir als scheinbare Zusatzkräfte der relativen Bewegung die „Fliehkraft" $\delta m r \omega^2$ (in radialer Richtung) und die Coriolissche Kraft $2\omega w \sin\alpha \delta m$ (wo α den Winkel zwischen der relativen Geschwindigkeit w und der Parallelen zur Drehachse bedeutet, und die Kraft senkrecht zur Ebene von w und der Drehachse steht) an jedem Massenelement δm anzufügen haben. Die relative Arbeit der letzteren ist Null, und auch von der einseitigen Verdichtung, die sie erzeugt, sehen wir, weil im allgemeinen geringfügig, ab. Die Arbeit der Fliehkräfte ist das Produkt der Kraft und der in ihre Richtung fallenden Projektion des Weges, die für das beliebig gerichtete Bogenelement ds der Kanalachse stets der Zunahme dr der Halbmesser gleich ist. Diese Arbeit wird daher für 1 kg, d. h. die Masse $1/g$ durch den Ausdruck $r\omega^2 dr/g$ wiedergegeben, den wir in die Energiegleichungen einzuführen haben.

Indem wir von der Schwere absehen, erhalten wir nach Abschn. 16 als Gleichung der kinetischen Energie

$$\frac{w\,dw}{g} = -v\,dp - da_r + \frac{r\omega^2}{g}dr \quad \ldots \quad (1)$$

ferner die Gleichung der Gesamtenergie

$$di + A\frac{w\,dw}{g} = dq + A\frac{r\omega^2}{g}dr - A\,da_r \quad \ldots \quad (2)$$

und die Wärmegleichung

$$dq_a + A\,da_r = di - Av\,dp \quad \ldots \quad (3)$$

Für die ganze Wegstrecke zwischen r_1 und r_2 ist die Arbeit der Fliehkräfte

$$\int\frac{r\omega^2 dr}{g} = \frac{r_2^2\omega^2 - r_1^2\omega^2}{2g} = \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} \quad \ldots \quad (4)$$

und so lauten die obigen Gleichungen in der Integralform:

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = -\int v\,dp - a_r + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} \quad \ldots \quad (5)$$

$$i_2 - i_1 + A\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = q + A\frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} - A a_r \quad \ldots \quad (6)$$

$$q = q_a + A a_r = i_2 - i_1 - A\int v\,dp \quad \ldots \quad (7)$$

Diese Gleichungen unterscheiden sich von denjenigen für die Axialturbine nur durch die Anwesenheit der Arbeit $(u_2^2 = u_1^2)/2g$, die eine gleichwertige Zunahme der relativen kinetischen Energie bewirkt, also das verfügbare Gefälle scheinbar vergrößert.

Anwendung auf die Radialturbine.

Der Laufkanal der Radialturbine ist gegenüber dem allgemeinen Fall durch das einzige Merkmal gekennzeichnet, daß seine Mittellinie in einer zur Achse senkrechten Ebene liegt. Da aber die allgemeinen Formeln nur den Ein- und Austrittshalbmesser enthalten und unabhängig sind von der Kanalform, können sie unmittelbar angewendet werden.

Für den feststehenden Leitkanal seien $i_0 r_0 c_0$ Wärmeinhalt, Halbmesser und Geschwindigkeit am Eintritt $i_1 r_1 c_1$ dieselben am Austritt, dann gelten die früheren Gleichungen

$$i_0 - i_1' = A\frac{(1+\zeta_1)c_1^2 - c_0^2}{2g}; \qquad i_1 - i_1' = A\zeta_1\frac{c_1^2}{2g} \quad \ldots \quad (8)$$

Für den Laufkanal seien mit Vernachlässigung der Spaltbreite $r_1 r_2$ die Halbmesser, $u_1\, u_2$ die Anfangsgeschwindigkeiten. Wir machen die Annahme $dq = A\,d a_r$ und drücken die Reibungsarbeit durch die Widerstandszahlen aus. Dann gilt

$$A\frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} + i_1 - i_2' = A\frac{(1+\zeta_2)w_2^2 - w_1^2}{2g}; \qquad i_2 - i_2' = A\,\zeta_2\,\frac{w_2^2}{2g} \quad . \; . \; . \quad (9)$$

Bei einstufigen Turbinen kann man die Fliehkraftarbeit meist weglassen, bei vielstufigen nicht ohne weiteres. Durch Zusammenzählen der Gl. (8) und (9) ergibt sich nämlich das Einzelgefälle einer Stufe

$$h = i_0 - i_2 = \frac{A}{2g}[(c_1^2 - c_0^2) + (w_2^2 - w_1^2) - (u_2^2 - u_1^2)] \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

Die Summation über alle Stufen führt zum „wirksamen Gefälle"

$$H_w = h_e + \Sigma h,$$

wenn h_e das Gefälle für den Eintritt in das erste Leitrad bedeutet. Setzen wir voraus, daß alle Stufen (radial) unmittelbar aufeinanderfolgen, und benutzen wir den Umstand, daß näherungsweise $u_2^2 - u_1^2 = \frac{1}{2}(u_2^2 - u_0^2)$ gesetzt werden darf, wo u_0 die Geschwindigkeit des vorhergehenden Rades bedeutet, so ergibt sich $\Sigma(u_2^2 - u_1^2) = \Sigma(u_2^2 - u_0^2)/2$, wobei, wenn man über alle Stufen summiert, die Zwischenglieder sich gegenseitig wegheben und nur

$$\frac{1}{2}(u_a^2 - u_e^2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

übrig bleibt, unter u_a die Geschwindigkeit des letzten, unter u_e die des ersten Rades verstanden. Dieses Glied kann unter Umständen Bedeutung haben.

Beim Entwurfe der vielstufigen Turbinen würde man, falls alle Schaufeln gleiche Breite haben, die Umfangsgeschwindigkeit als lineare Funktion der Stufenzahl einführen müssen. Wegen größerer Länge und starker Biegungsinanspruchnahme werden die äußersten Schaufelreihen meist breiter gemacht, daher hier die Umfangsgeschwindigkeit rascher wächst.

Die Gegenlaufturbine.

Wir erläutern das Verfahren am Beispiel der gegenläufigen Radialturbine, bei der die auf einer gemeinsamen Scheibe angeordneten Leiträder im entgegengesetzten Sinne umlaufen wie die Laufräder. Bei der Hauptvertreterin dieser Gattung, der Turbine von Ljungström, über die wir später berichten, ist die Drehzahl der beiden Scheiben gleich groß. Die äußerste Schaufel ist, mit Rücksicht auf die zugelassene höchste Umfangsgeschwindigkeit, von Anfang an auf Länge und Beanspruchung zu untersuchen und beeinflußt den ganzen Entwurf. Der innere Halbmesser wird so gewählt, daß die ebenfalls von Anfang an zu rechnende erste Schaufel eine der Leistung angemessene Länge erhält. Auf dem gegebenen Raum zwischen innerstem und äußerstem Halbmesser läßt sich nur eine bestimmte, durch die (zunehmende) Breite der Schaufeln bedingte Zahl von Stufen unterbringen. So entsteht hier die Aufgabe, zu der vorgeschriebenen Stufenzahl und den bekannten Anfangsgeschwindigkeiten die zum Aufbrauchen des bekannten Wärmegefälles erforderlichen Dampfgeschwindigkeiten, Winkel und Schaufellängen zu ermitteln.

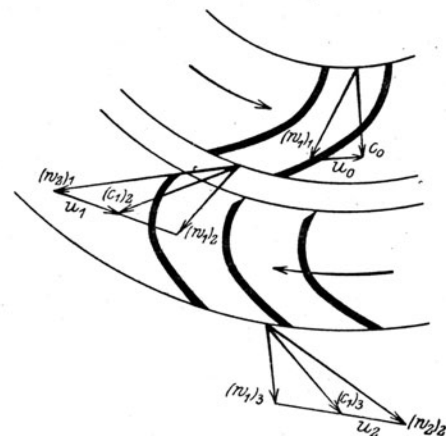


Abb. 265. Die Gegenlaufturbine.

1. Angenäherte Lösung. Da jeder Kranz an der Arbeitsabgabe teilnimmt, soll jeder als „Stufe" bezeichnet werden. Gemäß Abb. 265 ergibt für das erste Rad die radiale Zuflußgeschwindigkeit c_0 mit der negativen Umfangsgeschwindigkeit $-u_0$ die relative Eintrittsgeschwindigkeit $(w_1)_1$, die im Rade auf $(w_2)_1$ beschleunigt wird. $(w_2)_1$ mit $+u_1$ ergibt die absolute Austrittsgeschwindigkeit, $(c_2)_1$ die zugleich Eintrittsgeschwindigkeit $(c_1)_2$ in das zweite

Rad darstellt. Infolge der gleichen Drehzahl ist die Umfangsgeschwindigkeit des zweiten Kranzes auf den Austrittshalbmesser r_1 des ersten bezogen auch $= u_1$ und es liefert die Zusammensetzung von $(c_1)_2$ mit $-(u_1)$ die auf den gleichen Punkt bezogene relative Eintrittsgeschwindigkeit $(w_1)_2$, die im Rade auf $(w_2)_2$ beschleunigt wird. Man erhält aus $(w_2)_1$ unmittelbar $(w_1)_2$, wenn man es mit der relativen Umfangsgeschwindigkeit des Kranzes 2 in bezug auf 1, d. h.

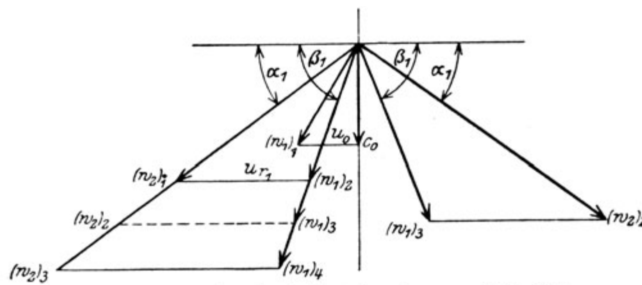


Abb. 266. Geschwindigkeitsplan zu Abb. 265.

$$u_{r1} = 2u_1 \quad . \; . \; . \quad (12)$$

zu mmensetzt. Dies ist in Abb. 266 für einige aufeinanderfolgende Räder unter Voraussetzung dargestellt, daß alle Austrittswinkel $(\alpha_1)_1 = (\alpha_1)_2 = (\alpha_1)_3 = \ldots$ einander gleich sind. Ebenso alle Eintrittswinkel β_1 bis auf den ersten. Die tatsächlichen wirksamen Gefälle sind dann der Reihe nach

$$\left.\begin{aligned} 2gh_1 &= A[(w_2{}^2)_1 - (w_1{}^2)_1] \\ 2gh_2 &= A[(w_2{}^2)_2 - (w_1{}^2)_2] \\ &- - - - - - - - \\ 2gh_z &= A[(w_2{}^2)_z - (w_1{}^2)_z] \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

Die Summation ergibt

$$2g\sum h = 2gH_w = A\left[\sum_1^z w_2{}^2 - \sum_1^z w_1{}^2\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

Das wirksame Gefälle erhält man aus dem inneren Gefälle H_i nach Abzug des Auslaßverlustes: $H_w = H_i - H_a$. Die Geschwindigkeiten stehen unserer Annahme gemäß im gleichen Verhältnis zu den betreffenden Umfangsgeschwindigkeiten; man kann also setzen

$$\left.\begin{aligned} (w_2)_1 &= \sigma_2 u_{r1} & (w_1)_1 &= \sigma_0 u_0 \\ (w_2)_2 &= \sigma_2 u_{r2} & (w_1)_2 &= \sigma_1 u_{r1} \\ (w_2)_3 &= \sigma_2 u_{r3} & (w_1)_3 &= \sigma_1 u_{r2} \\ &- - - - & &- - - - \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

mit noch unbekannten Verhältniszahlen $\sigma_2 \sigma_1 \sigma_0$. Das Einsetzen in (14) liefert

$$2gH_w = A\left[\sigma_2{}^2 \sum_1^z u_r{}^2 - \sigma_1{}^2 \sum_1^{z-1} u_r{}^2 - \sigma_0{}^2 u_0{}^2\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

Um die erste Summe zu bestimmen, sind in Abb. 267 die u_2 und $u_2{}^2$ in gleichen Abständen Δx aufgetragen. $\Delta x \sum_1^z u_r{}^2$ ist die schraffiert umrandete Fläche, an deren Stelle man bei vielen Stufen auch die zwischen $u_{r0}{}^2$ und $u_{rz}{}^2$ gelegene Fläche nehmen kann. Ist die mittlere Höhe der letzteren $= (u_r{}^2)_m$, so ist $\sigma_2{}^2 \sum_1^z u_r{}^2 = z\sigma_2{}^2 (u_r{}^2)_m$. Wir erlauben uns für eine Überschlagsrechnung die beiden anderen Glieder in Gl. (16) durch $z\sigma_1{}^2 (u_r{}^2)_m$ zu ersetzen, und erhalten

$$2gH_w = Azu_{rm}^2 (\sigma_2{}^2 - \sigma_1{}^2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (20)$$

Aus einem beliebigen, z. B. dem 1. der Geschwindigkeitsdreiecke folgt

$$(w_1)_2{}^2 = (w_2)_1{}^2 + u_{r1}^2 - 2u_{r1}(w_2)_1 \cos \alpha_1$$

oder nach Teilung durch u_{r1}

$$\sigma_1{}^2 = \sigma_2{}^2 + 1 - 2\sigma_2 \cos \alpha_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21)$$

Dies in (20) eingesetzt, führt auf

$$\sigma_2 = \frac{1}{2\cos\alpha_1}\left(1 + \frac{2gH_w}{Azu_{rm}^2}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22)$$

Dadurch sind gemäß (15) alle Geschwindigkeiten, also auch die Winkel β_1 bestimmt.

Gl. (22) erfährt eine weitere Vereinfachung, wenn wir annehmen, daß die Umfangsgeschwindigkeit, wie in Abb. 267 punktiert angedeutet, durch den Bogen einer Hyperbel, nach Gleichung

$u_r = a/x$ ersetzt werden kann (was angenähert immer zulässig sein wird). Dann kann man

$$\sum_1^z u_r^2 = \frac{1}{\Delta x} \sum \frac{a^2}{x^2} \Delta x \simeq \frac{a^2}{\Delta x} \int_{x_a}^{x_0} \frac{dx}{x^2} = \frac{a^2 z}{l} \left(\frac{1}{x_z} - \frac{1}{x_0}\right) = \frac{x_0 - x_z}{l} \frac{z a^2}{x_0 x_z} = z u_{0r} u_{zr}$$

setzen; bezeichnet man mit

$$u_{rg} = \sqrt{u_{0r} u_{zr}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (23)$$

das geometrische Mittel aus der Anfangs- und Endgeschwindigkeit u_r und schreibt man $\sigma_2 = \sqrt{(\sigma_2)_1 (\sigma_2)_z} = \sqrt{\frac{(w_2)_1}{u_{r1}} \cdot \frac{(w_2)_z}{u_{rz}}} = \frac{w_{2g}}{u_{rg}}$, wo w_{2g} das geometrische Mittel aus den Anfangs- und Endgeschwindigkeiten w_2 bedeutet, so läßt sich Gl. (20) mit Rücksicht auf Gl. (21) schreiben

$$\frac{z}{2}\left(2 w_{2g} \cos \alpha_1 - u_{rg}\right) \frac{u_{rg}}{g} = \frac{H_w}{A} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (24)$$

Der linksstehende Ausdruck ist die Leistung einer Stufe unter den vereinfachenden Annahmen, die wir für die vielstufige Axialturbine in Abschn. 64 (a) gemacht haben. Gl. (24) bedeutet mithin, daß die Leistung der Radialturbine bei hyperbolisch wachsender Umfangsgeschwindigkeit der Stufen angenähert ebenso groß ist, als ob alle Stufen mit dem geometrischen Mittel der Anfangs- und Endwerte der Dampf- und der Umfangsgeschwindigkeiten arbeiten würden.

Ist auf diese Weise die Größe der Dampfgeschwindigkeit angenähert festgelegt, so wird zur genaueren Ermittlung Gl. (21) in die vollständige Gl. (16) eingeschoben, und aus der sich ergebenden quadratischen Beziehung σ_2 ermittelt. Dabei wird man H_w nach Gl. (20a) und (21) in Abschn. (64) aus dem adiabatischen Gefälle H_0 berechnen, gemäß Formel

$$H_w = H_0 - \tau H_r \quad \ldots \quad (25)$$

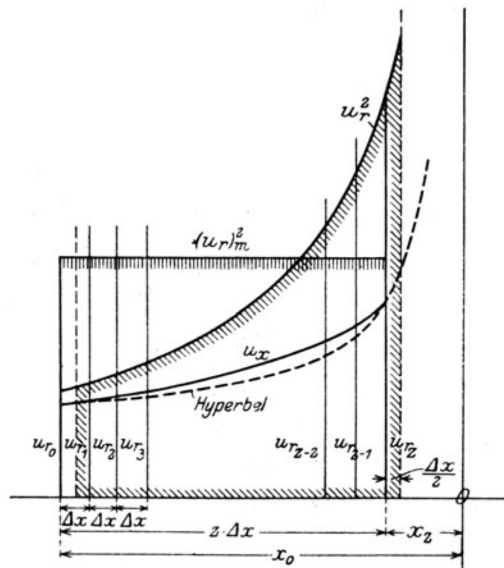


Abb. 267. Graphische Integration.

Die Reibungswärme H_r ist wie dort $= A \sum_1^z \zeta\, w_2^2/2g$ $= A \zeta \sigma_2 (u_{r1}^2 + u_{r2}^2 + \ldots u_{rz}^2)/2g$ also mit Benutzung des vorhin berechneten Mittelwertes

$$H_r = A \zeta \sigma_2 z u_{rm}^2 / 2g \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (26)$$

Endlich ist

$$H_i = H_w - H_a \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (27)$$

woraus $\eta_i = H_i / H_0$ und der Dampfverbrauch für die innere PS-st $G_i = 632/H_i$. Um die Schaufellängen zu rechnen, ist der Entwurf der Zustandskurve erforderlich, was durch Auftragen der wirksamen Gefälle nach Gl. (13) und der Reibungswärmen nach (Gl.) $2gh_r = A\zeta w_2^2$ erfolgt.

2. **Einzelrechnung bei veränderlichen Geschwindigkeitsverhältnissen.** Ingenieur Bäckström der Aktiebolaget Ljungströms Angturbin benutzte hierfür nach freundlicher Mitteilung der Firma folgendes Verfahren.

Das wirksame Gefälle der k-ten Stufe ist

$$2gh_k = A[(w_2^2)_k - (w_1^2)_k] = A[(w_2^2)_k - \{(w_2)^2_{k-1} + (u_r^2)_{k-1} - 2(w_2)_{k-1}(u_r)_{k-1} \cos \alpha_1\}].$$

Schieben wir $(w_2)_k = \sigma_k (u_r)_k$; $(w_2)_{k-1} = \sigma_{k-1} (u_r)_{k-1}$ mit dem Verhältnis $(u_r)_{k-1} : (u_r)_k = r_{k-1} : r_k$ ein, so entsteht

$$2gh_k = A\,(u_r^2)_k \left[\sigma_k^2 - \frac{r_{k-1}^2}{r_k^2} \left\{1 + \sigma_{k-1}^2 - 2\sigma_{k-1} \cos \alpha_1\right\}\right] \quad \ldots \quad (28)$$

Die Reibungswärme setzt Bäckström als

$$2gh_{rk} = \frac{A\zeta}{2}\left[(w_2^2)_k + (w_1^2)_k\right] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (29)$$

an, wodurch der Eintrittsgeschwindigkeit w_1 Rechnung getragen, und, damit ζ dem üblichen Wert nahekomme, der Teiler 2 beigefügt wird. h_k und h_{rk} sind nun ähnlich gebaut, und zwar wird, wenn man die Bezeichnung

$$f(\sigma_1 \alpha) = 1 + \sigma_{k-1}^2 - 2\sigma_{k-1}\cos\alpha_1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (30)$$

einführt

$$\left.\begin{aligned} h_k &= \frac{A u_{rk}^2}{2g}\left[\sigma_k^2 - \frac{r_{k-1}^2}{r_k^2} f(\sigma_1 \alpha)\right] \\ h_{rk} &= \frac{\zeta}{2}\,\frac{A u_{rk}^2}{2g}\left[\sigma_k^2 + \frac{r_{k-1}^2}{r_k^2} f(\sigma_1 \alpha)\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (31)$$

Diese Ausdrücke konstruiert Bäckström mit Hilfe einer 4fach geteilten graphischen Tabelle, Abb. 268, wo im I. Quadrant $f(\sigma_1 \alpha)$ als Ordinate zu α_1 als Abszisse durch eine Kurvenschar dargestellt wird. Im II. Quadrant ist $\mathrm{tg}\,\vartheta = r_{k-1}^2/r_k^2$; im III. sind auf der Ordinaten-

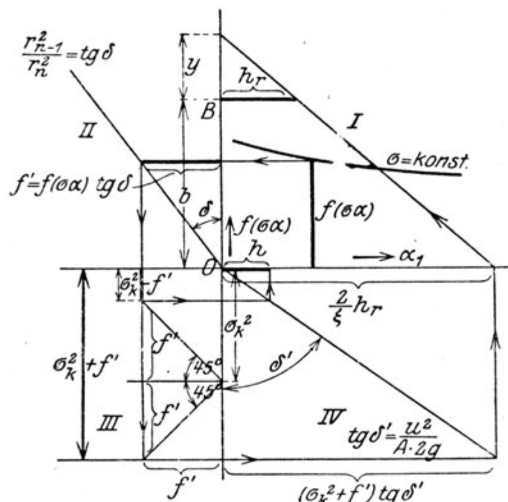


Abb. 268. Graphisches Rechnen nach Bäckström.

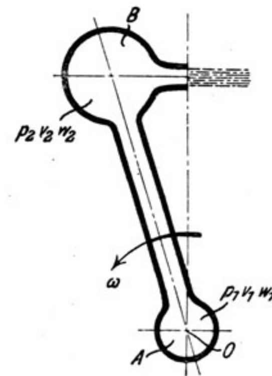


Abb. 269. Volle „Reaktion".

achse die Werte σ_k^2 aufgetragen und durch jeden Teilpunkt zwei Gerade unter 45° gezogen. Im IV. Quadrant ist $\mathrm{tg}\,\vartheta' = A\,u_{rk}^2/2g$. Der durch Pfeile angedeutete Linienzug von einem Punkte im I. Quadrant, der σ_{k-1} und α_1 entspricht, führt so auf den Wert h_k und $2h_{rk}/\zeta$. Um aus letzterem h_r zu erhalten, ist im I. Quadrant eine bei B beginnende verzerrte ζ-Teilung angebracht. Auf der Wagerechten durch B soll h_r herausgeschnitten werden; also muß das Verhältnis $\frac{h_r}{(2h_r/\zeta)} = \frac{y}{b+y} = \frac{\zeta}{2}$ betehen, aus dem $y = b\zeta/(2-\zeta)$ folgt. Auf diese Weise kann man Stufe für Stufe h und h_r ermitteln und durch Eintragen in die Entropietafel die Zustandskurve aufzeichnen.

Diese genauere Rechnung wird nicht verwickelter, wenn man darin die Wirkung der Fliehkräfte einbegreift. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} 2gh_k/A &= (w_2^2)_k - (w_1^2)_k - u_k^2 + u_{k-1}^2 = (w_2^2)_k \\ &- \left[(w_2^2)_{k-1} + u_{k-1}^2 - 2(w_2)_{k-1}\,u_{k-1}\cos\alpha_1\right] - u_k^2 + u_{k-1}^2 \quad \ldots \ldots \quad (32) \end{aligned}$$

Hier hebt sich u_{k-1}^2 heraus, und die Gleichung kann durch die σ in ähnlicher Weise ausgedrückt werden wie Gl. (28). Für h_{rk} darf man an der bisher vertretenen Form

$$2gh_{rk} = \zeta A (w_2^2)_k \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (33)$$

festhalten, da in ζ die Kanalabmessungen eintreten, durch die hinwieder vermöge der Stetigkeitsbedingung w_1 auch zur Geltung kommt; ζ ist nur die Abkürzung einer verwickelten Funk-

tionsform. Auf die neuen Ausdrücke läßt sich das graphische Diagramm Bäckströms leicht sinngemäß übertragen.

Von Parsons stammt ein Vorschlag für eine Radialturbine, die aus der Lavalturbine abgeleitet werden kann, indem man den Düsen durch eine hohle Achse Dampf zuführt und sie im entgegengesetzten Sinn wie das Laufrad umlaufen läßt. Diese Turbinenart bietet ein gutes Übungsspiel für die Handhabung des Energiebegriffes und soll daher näher besprochen werden.

Die sich drehende Düse kann schematisch durch Abb. 269 veranschaulicht werden, wobei vor dem Eintritt in die hohle Achse der Druck p_1, die Geschwindigkeit $w_1 = 0$, beim Eintritt in den Behälter B ein Druck p_2 und eine ebenfalls vernachlässigbare Geschwindigkeit w_2 herrschen mögen. Der Dampf ströme mit der relativen Geschwindigkeit w aus der Düse, die mit der Geschwindigkeit u umläuft, in einem Raum mit der Pressung p_0. Bei Vernachlässigung von w_2 übt der ausströmende Dampf auf das Gefäß B eine „Reaktion"

$$P = M w \quad \ldots \ldots \quad (34)$$

aus, wenn mit M die sekundlich im Beharrungszustande durchströmende Dampfmasse bezeichnet wird. Die von P geleistete Arbeit ist

$$E_P = M w u \quad \ldots \ldots \quad (25)$$

Man wäre geneigt, dies für die Nutzarbeit zu halten, bemerkt indessen bald, daß dann ein Perpetuum mobile vorläge, denn man brauchte nur die Umfangsgeschwindigkeit zu vergrößern, um mit gleichem Dampfaufwand immer größere Leistungen zu erhalten. Daß dies in Wahrheit nicht möglich ist, liegt in erster Linie, wie man sofort einwenden wird, daran, daß die Dampfteilchen während des Zuströmens auf die Geschwindigkeit u beschleunigt werden müssen, weshalb von E_p die Beschleunigungsarbeit

$$E_b = \frac{M u^2}{2} \quad \ldots \ldots \quad (36)$$

abgezogen werden muß. Allein dieser Abzug genügt nicht, denn der Dampf ist auch noch vom Drucke p_1 auf p_2 verdichtet worden. Die hierzu erforderliche Kompressionsarbeit E_k erhöht die innere Energie von U_1 auf U_2 und verrichtet die Druckarbeit $G p_2 v_2$, zu der indes bei der Einmündung der Oberflächendruck p_1 die Arbeit $G p_1 v_1$ beisteuert. Wir haben also

$$E_k = G\left[(U_2 - U_1)\frac{1}{A} + (p_2 v_2 - p_1 v_1)\right] \quad \ldots \ldots \quad (37)$$

Nun ist für die relative Bewegung im Rohrarm mit $w_1 = w_2$ die Zunahme des Wärmeinhaltes gleich der aufgenommenen Fliehkraftarbeit, d. h.

$$i_2 - i_1 = A\frac{u^2}{2g} \quad \ldots \ldots \quad (38)$$

oder wenn die Ausdrücke von $i_1 i_2$ eingesetzt werden

$$(U_2 - U_1)\frac{1}{A} + (p_2 v_2 - p_1 v_1) = \frac{u^2}{2g},$$

also erhalten wir für die Kompressionsarbeit

$$E_k = \frac{G}{g}\frac{u^2}{2} = \frac{M u^2}{2} \quad \ldots \ldots \quad (39)$$

mithin die wirkliche Nutzleistung

$$E_n = E_p - E_b - E_k = M w u - M u^2 = M(w - u)u \quad \ldots \ldots \quad (40)$$

Daß dieser weite Umweg auf ein richtiges Ergebnis führt, beweisen wir durch Anwendung der Gleichung der Drehmomente Gl. (11) Abschn. 51. Das Moment der Eintrittsgeschwindigkeit ist $= 0$; die absolute Austrittsgeschwindigkeit $w - u$ ergibt $(w - u)\,r$, und so ist das Drehmoment $\mathfrak{M} = M(w - u)\,r$, woraus die Leistung durch Vermehrung mit ω hervorgeht, und wenn $r\,\omega = u$ gesetzt wird, so erhalten wir

$$E_n = \mathfrak{M}\omega = M(w - u)u,$$

wie oben. Schließlich bleibt aufzuklären, auf welche Weise die Arbeiten $E_b E_k$ zustande kommen. Ihre Quelle bildet der Seitendruck, den das Zuleitungsrohr erfährt. Die Maße in einem Rohrabschnitt von der Länge dr ist $dm = f dr\,\gamma/g$, die Geschwindigkeit sei w_0, dann ist nach Coriolis der „Bahndruck" $dK = 2 dm w_0 \omega$ die von ihm geleistete elementare absolute Arbeit

$$= dK r \omega dt = 2(f w_0 dt\,\gamma/g)\,\omega^2 r dr = 2M\omega^2 r dr$$

und die Integration von 0 bis r liefert Mu^2, also wie sein muß die Summe der Beschleunigungs- und Kompressionsarbeit $E_b + E_k$, denn es ist in der Tat keine andere Kraft vorhanden, die dazu herangezogen werden könnte.

Um die Geschwindigkeit w zu ermitteln, berechnet man zunächst i_2 nach Formel (38) und erhält p_2, indem man in der Entropietafel (wie wir annehmen wollen) adiabatisch vom Zustande $p_1 v_1$ zum Wärmeinhalt i_2 fortschreitet. Nunmehr benützt man die Beziehung

$$A\frac{w^2}{2g} = i_2 - i_0 \quad \ldots \ldots \quad (41)$$

wobei i_3 den Wärmeinhalt desjenigen Dampfzustandes darstellt, den wir durch adiabatische oder mit Reibung behaftete Expansion vom Zustande i_2 auf den Druck p_0 der Umgebung erhalten.

Um diese Rechnung auf die Parsonssche Radialturbine anzuwenden, ist zu beachten, daß die Düse unter einem Winkel α gegen den Umfang geneigt sein wird, es besteht mithin die absolute Austrittsgeschwindigkeit, die wir mit c_1 zu bezeichnen haben, aus der axialen Komponente $w \sin \alpha$ und der tangentialen Komponente $w \cos \alpha - u$, demzufolge ist die vom Düsenrad geleistete Arbeit

$$E_1 = M (w \cos \alpha - u) u \quad \ldots \ldots \quad (42)$$

Die Arbeit des eigentlichen Laufrades wird gerechnet wie bei einer gewöhnlichen einstufigen Druckturbine, die durch einen Dampfstrahl mit der Neigung α und der eben definierten Geschwindigkeit c_1 beaufschlagt wird.

D. Verhalten der Dampfturbine unter veränderten Betriebsverhältnissen.

66. Berichtigung des Dampf- und Wärmeverbrauches mit Rücksicht auf kleine Druck- und Temperaturabweichungen gegenüber der Gewährleistung (bei gleichbleibender Umlaufzahl).

Der Dampf- und Wärmeverbrauch der Turbine nimmt unter sonst gleichen Umständen ab mit der Erhöhung der Eintrittsspannung und Eintrittstemperatur und mit der Vertiefung des Gegendruckes.

I. Die theoretischen Werte.

a) Erhöhung der Anfangsspannung (Abb. 270). Es stellen dar: Linien a_1 a_2 das adiabatische Wärmegefälle in kcal für gesättigten Anfangszustand, bzw. 300° C Anfangstem-

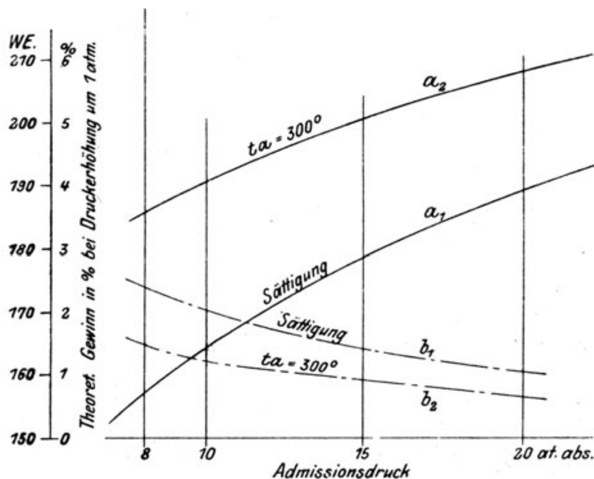


Abb. 270. Einfluß der Anfangsspannung.

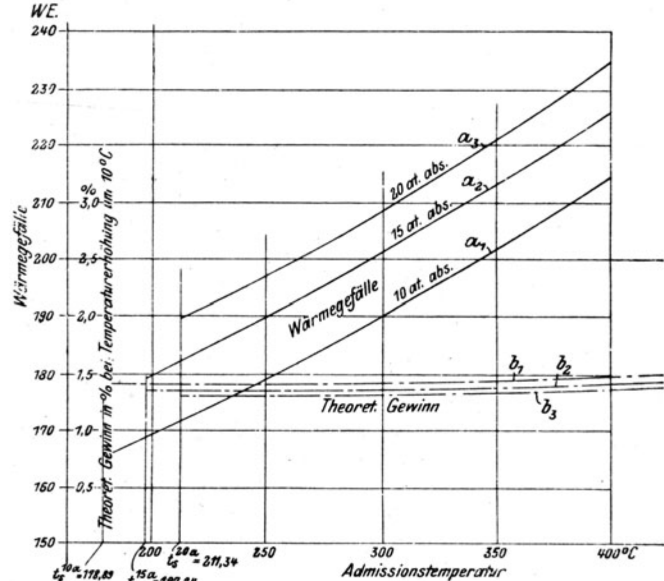


Abb. 271. Einfluß der Überhitzung.

peratur. Linien b_1, b_2 die entsprechende Abnahme des theoretischen Dampfverbrauches $G_i = 632/H_0$ in Hundertteilen des ursprünglichen Wertes für je 1 kg/qcm Druckerhöhung bei unveränderlichem Gegendruck von 0,1 kg/qcm.

Mittelwert: Zwischen 10 und 15 at nimmt der Dampfverbrauch für je 1 at Druckerhöhung bei Sättiguug um 1,7 v. H., bei 300° Überhitzung um 1,0 v. H. ab.

Der Wärmeverbrauch $Q_1 = G_i i$ ist das Produkt aus dem Dampfverbrauch für die PS-st und dem anfänglichen Wärmeinhalt, wenn wir der Einfachheit halber Speisewasser von 0° C voraussetzen. Nun ist für gesättigten Anfangszustand bei 8 und bei 20 kg/qcm abs. $i = 664$

und 673,8; die Zunahme beträgt daher im Mittel nur 9,8/(664 × 12) ≃ 0,12 v. H. für 1 kg auf 1 at Druckerhöhung und ist fast vernachlässigbar. Die Abnahme des Wärmeverbrauches für die PS_i-st ist also nahezu gleich der Abnahme des Dampfverbrauches.

b) Erhöhung der Überhitzungstemperatur (Abb. 271). Es stellen dar: Linien a_1, a_2, a_3 das adiabatische Wärmegefälle in Abhängigkeit von der Temperatur für 10, 15, 20 at abs. Anfangsdruck. Linien b_1, b_2, b_3 die Abnahme des theoretischen Dampfverbrauches bei 0,1 at abs. Gegendruck für je 10° C Mehrüberhitzung.

Mittelwert. Der Dampfverbrauch nimmt bei 0,1 at abs. Gegendruck und 10—20 at abs. Anfangsdruck für je 10° Mehrüberhitzung um 1,3 v. H. ab, oder: um 1,0 v. H. ab auf je 7,7° C Mehrüberhitzung.

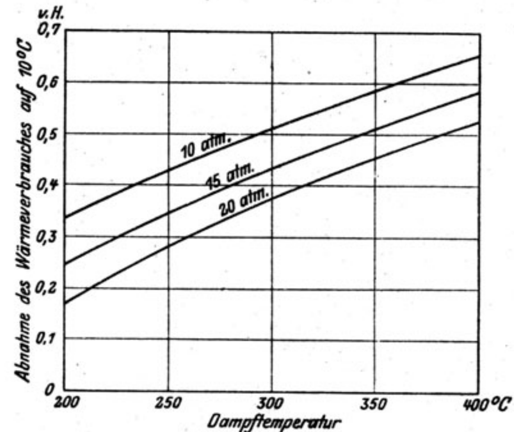


Abb. 272.
Theoretischer Einfluß der Überhitzung.

Der Gewinn an Wärmeverbrauch ist hiervon erheblich verschieden. Beispielsweise ist bei 10 kg/qcm abs. für 200 bzw. 250° C Dampftemperatur der Wärmeinhalt 678,2 bzw. 705 WE. Das Wärmegefälle bis auf 0,1 kg/qcm Kondensatordruck ist 167,9 bzw. 177,6 WE, also um 5,78 v. H. günstiger. Allein der Wärmeaufwand ist um (705—678,2):(678,2) = 3,95 v. H. gestiegen, also haben wir theoretisch nur 5,78—3,95 = 1,83 v. H. reinen Gewinn. Genauer wird der Vergleich, wenn der Wärmenutzungsgrad, d. h. das Verhältnis des Wärmegefälles zur Gesamtwärme in Betracht gezogen wird. Bei 200° C erhalten wir hierfür 167,9:678,2 = 24,73 v. H.; bei 250° C desgleichen 25,20 v. H., der Gewinn ist (25,20—24,73):24,73 = 1,9 v. H. auf 50° oder 0,38 v. H. auf 10°

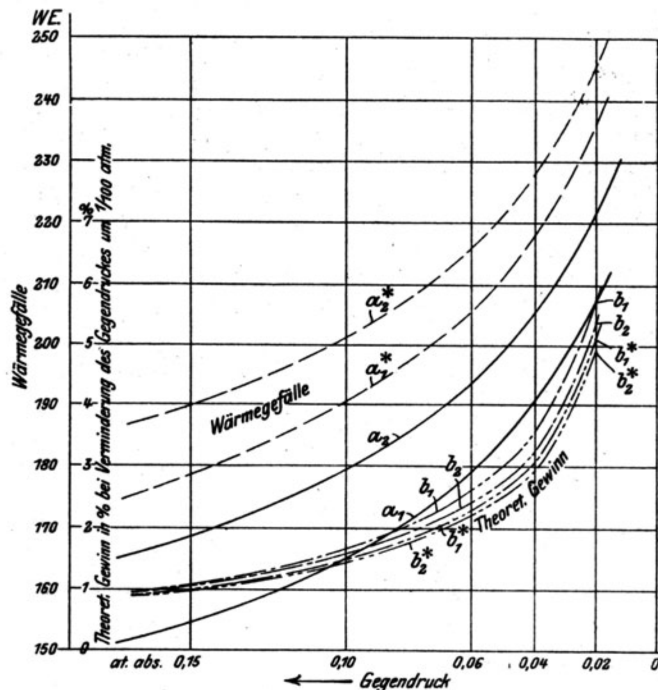


Abb. 273. Theoretischer Einfluß der Luftleere.

Erhöhung der Überhitzung. Der so berechnete Gewinn ist in Abb. 272 als Funktion der Temperatur und des Druckes aufgetragen. Mittelwert. Der theoretische Gewinn an Wärmeverbrauch bei 10—20 at Anfangs-, 0,1 at Gegendruck und 200—300° C Dampftemperatur beträgt 0,4 v. H. auf je 10° Temperaturerhöhung. Der tatsächliche Gewinn ist aus den unten angeführten Gründen größer.

c) Einfluß der Kondensatorspannung (Abb. 273). Es stellen dar: Linien a_1, a_2 das Wärmegefälle als Abhängige des Gegendruckes bei 10 und 15 at abs. Anfangsdruck und anfänglicher Sättigung. Linien a_1^*, a_2^* dasselbe bei 300° C Dampftemperatur. Linien b_1, b_2, b_1^*, b_2^* die entsprechenden Abnahmen des theoretischen Dampfverbrauches in v. H. für die Erniedrigung des Kondensatordruckes um je 0,01 at abs.

Mittelwerte: Einer Abnahme des Kondensatordruckes um 0,01 at abs. entspricht folgende Abnahme des Dampfverbrauches bei 10—15 at abs. Anfangsdruck und Sättigung bis zu 300° C Überhitzung.

Gegendruck . . . . at. abs.	0,10	0,04	0,02
Abnahme des Dampfverbr. . . v. H.	1,5	2,4	5,2

Der Übergang von Kondensation zum freien Auspuff beeinflußt, wie wir weiter unten nachweisen, das bei gleichem Anfangsdruck durchströmende sekundliche Dampfgewicht sozusagen gar nicht; das Wärmegefälle hingegen nimmt je nach der Überhitzung und der Luftleere auf 0,5 bis 0,6 seines ursprünglichen Wertes ab. Der thermodynamische Wirkungsgrad ist ungünstiger, da die letzten Stufen keine Kraft mehr abgeben und vergrößerte Reibungsarbeit verursachen. Statt dessen wird der Betrag der verlorenen kinetischen Energie im Auslaß fast auf Null herabgesetzt. Im großen ganzen kann man daher als Dampfverbrauch für die PS_e-st etwas mehr als das Doppelte desjenigen bei Kondensation rechnen, erreicht also bei gleich großem Gesamt-Dampfverbrauch nur die Hälfte der früheren Leistung. Soll die Leistung durch Zusatzventile in Zwischenstufen erhöht werden, nimmt auch der spezifische Dampfverbrauch entsprechend zu.

II. Die tatsächliche Verschiedenheit des Dampfverbrauches für die PS_e/st bei Turbinen gleicher Stufenzahl, gleicher Umfangsgeschwindigkeit, gleichem Auslaßverlust.

Die unter I. angegebenen Werte beziehen sich auf Turbinen mit adiabatischer Expansion und dem gesamten Wirkungsgrade $\eta_e = 1$. Es sei nun eine Turbine für bestimmte Verhältnisse, d. h. bestimmten Anfangsdruck, Temperatur, Gegendruck entworfen; ihr Dampfverbrauch für die PS_e-st. wird sein

$$G_e = \frac{632}{\eta_e H_0} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Eine andere Turbine sei nach gleichen Regeln für die gleiche Leistung, jedoch etwas andere Verhältnisse entworfen und liefere

$$G_e' = \frac{632}{\eta_e' H_0'} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Es frägt sich, was bei kleinen Abweichungen der Wert der Verhältniszahl

$$k = \frac{G_e'}{G_e} = \frac{\eta_e H_0}{\eta_e' H_0'} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

ist. Der Vergleich der beiden Turbinen wäre jedoch willkürlich, wenn wir wesentlich verschiedene Verhältnisse u/c oder Auslaßverluste zulassen wollten. Wir schreiben daher vor, daß die beiden Turbinen dieselbe Stufenzahl, dieselbe Umfangsgeschwindigkeit und denselben Auslaßverlust haben sollen. Für das Verhältnis k hat unter dieser Voraussetzung K. Baumann[1]) sorgfältig ausgearbeitete Tabellen mitgeteilt, die seither von englischen Fachkreisen zur Norm erhoben worden sind. Als Normalzustände, auf die sich die Werte k beziehen, wählt Baumann die folgenden:

		Hochdruck-Turbinen	Niederdruck-Turbinen
Anfangsdruck vor dem Regulierventil	at abs.	13,7	1,13
Überhitzung (Überschuß der Dampftemp. über Sättig.-Temp.)	° C	83,5	—
Luftleere	at abs.	0,069	0,086

Der Geltungsbereich des Vergleiches ist jeweil in der Abbildung angegeben.

a) Einfluß des Anfangsdruckes. Mit sinkendem Anfangsdruck nimmt der Wirkungsgrad etwas zu, weil die Undichtheitsverluste abnehmen und das Verhältnis u/c wegen des kleineren Gesamtgefälles günstiger wird.

[1]) In der bemerkenswerten Studie: Recent developments in steam turbine practice. Proc. Instit. Electr. Eng. 1912, Vol. 48, S. 768.

In Abb. 274 und 275 sind für Hoch- bzw. Niederdruckturbinen die Verhältniszahlen k_p für den Dampfverbrauch und für den Wirkungsgrad, vom Normalzustand als 1 ausgehend, aufgetragen. Außerdem fügten wir die Änderung des Dampfverbrauches für je 1 at Druckunterschied bei. Wenn beispielsweise eine Turbine für 10 at abs. eine zweite für 9 at abs., unter sonst gleichen Umständen entworfen ist, so ist der Unterschied 1,5 v. H., d. h. um so viel wird der Dampfverbrauch der zweiten größer sein als der der ersten.

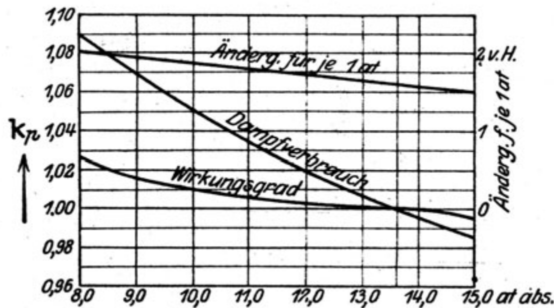


Abb. 274. Wirklicher Einfluß des Anfangsdruckes bei Hochdruckturbinen.

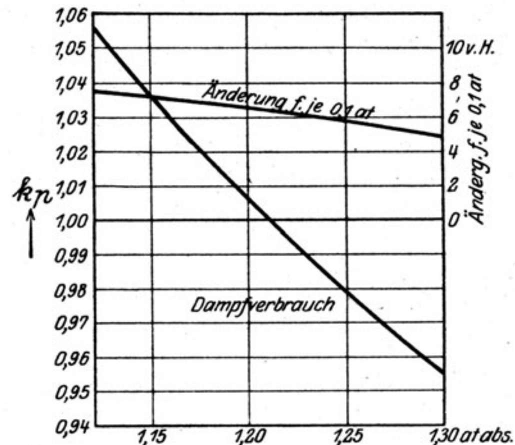


Abb. 275. Wirklicher Einfluß des Anfangsdruckes bei Niederdruckturbinen.

b) Einfluß der Überhitzung. Das Eigentümliche der Überhitzung ist, daß der Wirkungsgrad mit der Temperatur zunimmt. Als Grund hiervon wird von einer Seite die Abnahme der Reibungszahl gegenüber gesättigtem Dampf angesehen; von anderer Seite glaubt man in der Unterkühlung des Dampfes beim Überschreiten der Sättigungsgrenze die Erklärung suchen zu sollen. Wir kommen auf diesen Gegenstand in Abschn. 178 zurück und teilen vorder-

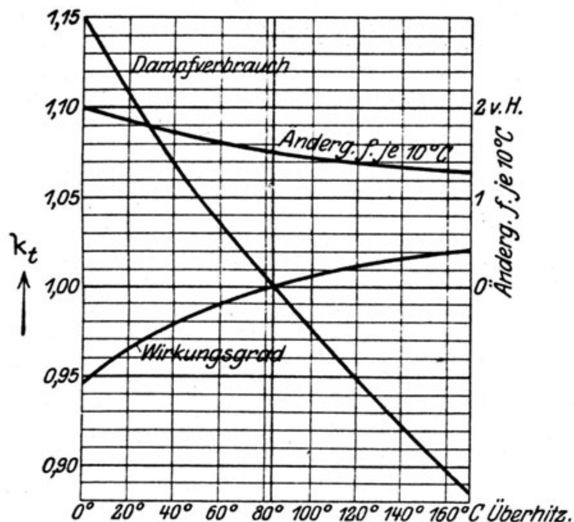


Abb. 276. Wirklicher Einfluß der Überhitzung bei Hochdruckturbinen.

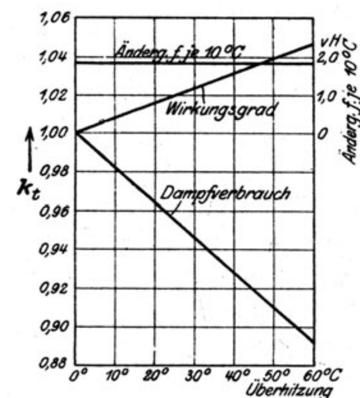


Abb. 277. Wirklicher Einfluß der Überhitzung bei Niederdruckturbinen.

hand in Abb. 276 und 277 die empirischen Baumannschen Kurven für Hochdruck- bzw. Niederdruckturbinen mit. Unter „Überhitzung" ist der Überschuß der Dampftemperatur über die Sättigungstemperatur verstanden. Die Kurve der „Änderung für je 10° Temperaturunterschied" bezieht sich auf den Dampfverbrauch. Die Änderung des Wärmeverbrauches für die PS_e-st. ist aus Gleichung

$$Q_e = G_e(i - i_0)$$

zu ermitteln, wo i_0 den Wärmeinhalt des Speisewassers bedeutet.

c) Einfluß der Dampfnässe. Nach Baumann wurde durch Versuche erwiesen, daß mit zunehmender Dampfnässe der Wirkungsgrad abnimmt; setzt man voraus, daß, mit der Entropie als Abhängige, die Kurve für η_e aus dem Überhitzungsgebiet stetig in das der Sättigung übergeht, so ergäbe sich eine Abnahme von 1 v. H. für je 1 v. H. Dampfnässe. Da das adiabatische Gefälle um ebensoviel abnimmt, so müßte hiernach der Dampfverbrauch für die PS_e-st. auf je 1 v. H. Dampfnässe um 2 v. H. zunehmen. Versuche in unserem Laboratorium, bei welchen durch Wassereinspritzung die spezifische Dampfmenge bis auf $x = 0{,}68$ herabgesetzt worden war, ließen eine Veränderung des Wirkungsgrades nicht erkennen. Da indessen unsere Turbine bloß 8 Überdruckstufen besaß, mithin nur ein sehr kleines Expansionsverhältnis zu

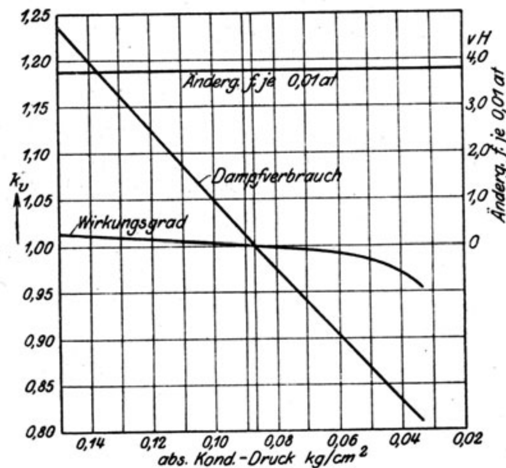


Abb. 278. Wirklicher Einfluß der Luftleere bei Hochdruckturbinen.

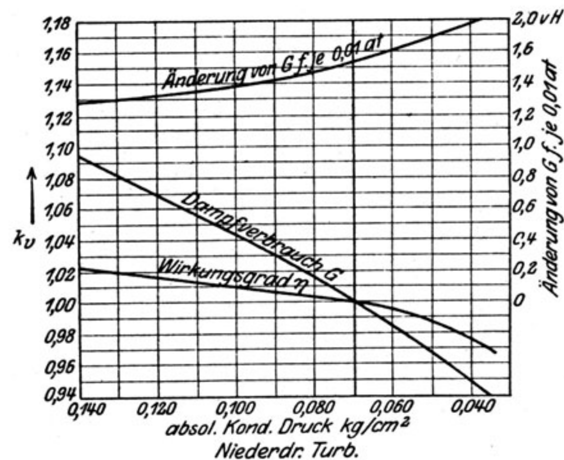


Abb. 279. Wirklicher Einfluß der Luftleere bei bei Niederdruckturbinen.

bewältigen vermochte, braucht man hieraus nicht notwendigerweise auf einen Widerspruch mit Versuchen an großen Turbinen zu schließen. Doch wäre die Veröffentlichung der einschlägigen Beobachtungen sehr erwünscht.

d) Einfluß der Luftleere. Nimmt der Kondensatordruck ab, so wird wegen Vergrößerung des Wärmegefälles das Verhältnis u/c ungünstiger, der Wirkungsgrad muß abnehmen. Die Zunahme des Wärmegefälles überwiegt indessen bei weitem, und so ergibt sich eine Abnahme des Dampfverbrauches, die für Hoch- bzw. Niederdruckturbinen in Abb. 278 und 279 dargestellt ist.

III. Berichtigung des Dampfverbrauches bei Übernahmeversuchen, wenn die Dampfverhältnisse von den Werten der Gewährleistung abweichen.

In diesem Falle handelt es sich um eine bestimmte Turbine, für deren Dampfverbrauch man bei bestimmten Dampfverhältnissen und Leistungen Gewähr übernommen hat. Bei veränderten Betriebsverhältnissen gelten folgende Berichtigungen.

a) Einfluß des Anfangsdruckes. Kommt die Änderung des Dampfdruckes in der Turbine voll zur Geltung, so dürfen die unter II. angeführten Verhältniszahlen k_p angewendet werden. Stellt man eine bestimmte Leistung ein, so sind die Verhältnisse je nach deren Größe und nach der Art der Regelung verschieden. Ist beispielsweise eine Düsengruppe an der Grenze ihrer Leistungsfähigkeit angelangt und sinkt der Dampfdruck, so schaltet der Regler eine weitere Gruppe ein, und man erleidet nicht bloß den Verlust des verringerten Gefälles, sondern nimmt auch eine vermehrte Drosselung in den Kauf. Nimmt unter gleichen Umständen der Dampfdruck zu, so wird nur gedrosselt, und von dem vergrößerten Gefälle bleibt nur eine kleine Überhitzung durch die Drosselung nutzbar, die Baumann auf 0,5 v. H. für 10 v. H. Dampfdruckzunahme schätzt. Häufig wird in solchen Fällen nur die Zunahme des Verbrauches bei sinkendem Druck als berechtigt anerkannt; bei steigendem Druck jedoch kein Abzug am Dampfverbrauch zugelassen.

b) Einfluß der Überhitzung. Nach Deinlein („Zur Dpfturb.theor." 1909, S. 9) und Baumann ist die in der Zeiteinheit durch eine Turbine strömende Dampfmenge

$$G = k_0 \sqrt{\frac{p}{v}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

worin k_0 eine der betreffenden Turbine zukommende Unveränderliche, p, v Anfangsdruck und Rauminhalt bedeuten. Für überhitzten Dampf darf man angenähert $pv = RT$ setzen, und erhält

$$G = \frac{k_0 p}{\sqrt{RT}} \quad \text{oder} \quad p = \frac{G}{k_0}\sqrt{RT} \qquad (5)$$

Bei einer bestimmten Belastung würde unter sonst gleichen Umständen nach Abschn. I auf etwa 7°C Mehrtemperatur eine Abnahme von G um 1 vH. eintreten. Diesen 7° entspricht eine Zunahme von $\sqrt{T}$ bei etwa 280° Dampftemperatur von 0,63 v. H., daher nimmt p nach Gl. (5) um $1{,}0 - 0{,}63 = 0{,}37$ v. H. ab. Dieser Abnahme entspricht nach Abschn. I eine Zunahme des Dampfverbrauches von etwa $0{,}37 \times 1{,}5 : 10 = 0{,}056$ v. H., die neben der Abnahme von 1 v. H. vernachlässigt werden kann. Die Berichtigung infolge wechselnder Überhitzung kann also dem Verhältnis k_t in Abb. 276 und 277 gleichgesetzt werden.

c) **Der Einfluß der Dampfnässe** ist aus gleichen Gründen derselbe wie unter II.

d) **Einfluß der Luftleere.** Bei abnehmendem Kondensatordruck nimmt für unveränderliche Last die Gesamtdampfmenge und mit ihr im gleichen Verhältnis der Anfangsdruck ab. Der Nutzen des besseren Vakuums wird daher teilweise durch stärkere Anfangsdrosselung aufgehoben. Noch mehr macht der vermehrte Auslaßverlust infolge vergrößerten Rauminhalts des Dampfes und das ungünstigere Verhältnis u/c für die letzten Stufen aus. Bei kleineren Leistungen treten die letztgenannten Verluste mehr zurück, und die Vergrößerung des Wärmegefälles durch bessere Luftleere macht im Verhältnis zum verfügbaren Gefälle mehr aus. Diese Einflüsse kommen in den Baumannschen Schaulinien Abb. 280, die sich auf Hochdruckturbinen beziehen, zum Ausdruck. Es ist jeweils angegeben, für welches Vakuum die Turbine bestimmt ist und mit welchem sie arbeitet (der Unterschied entspricht je 1 Pfd. engl. auf 1 Quadratzoll). Schaulinie B gibt durch ihren Schnittpunkt mit einer der k_v-Kurven an, welche Höchstlast mit der Turbine bei gleichbleibendem Druck vor dem 1. Leitrad erreichbar ist, wenn sich das Vakuum um den angegebenen Betrag ändert. Linien C, D beziehen sich ähnlich auf $^3/_4$ und $^1/_2$ Normallast.

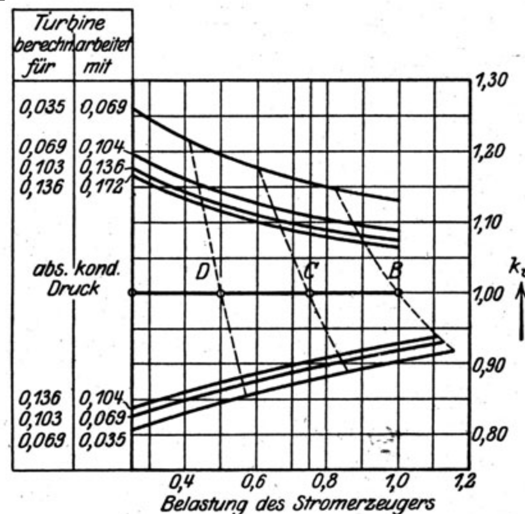


Abb. 280. Resultierender Einfluß der Luftleere.

Ist die Abnahme des Kondensatordruckes gegenüber dem rechnungsmäßigen Wert ein bedeutende, so treten eigentümliche Erscheinungen auf, die wir weiter unten theoretisch untersuchen.

67. Druckverlauf und durchströmendes Dampfgewicht einer gegebenen Turbine bei größeren Druckänderungen und gleichbleibender Umlaufzahl.

a) Kleiner Gegendruck (Vakuum).

Die praktische Erfahrung lehrt folgendes:

1. **Das sekundlich durchströmende Gewicht einer gegebenen Turbine bei unveränderten Querschnitten und tiefer Luftleere nimmt angenähert im gleichen Verhältnis wie der Anfangsdruck zu.**

Sofern bei gleichem Anfangsdrucke die Temperatur oder die Dampfnässe sich ändern, gilt die Baumannsche Gl. 4 bezw. 5 des vorigen Abschnittes.

2. **Die elektrische Nutzleistung nimmt mit dem Anfangsdruck angenähert linear zu.**

3. **Der gesamte Dampfverbrauch im Leerlauf beträgt 10—15 v. H. desjenigen bei Vollbelastung.**

In vielen Fällen genügt daher die Ermittlung des Dampfverbrauches bei zwei Belastungen, woraus der Verbrauch bei irgendeiner anderen durch lineare Fortsetzung angenähert bestimmt werden kann.

Bleiben bei der Regelung die Querschnitte nicht unverändert, so gelten obige Erfahrungsregeln nicht mehr.

4. Bei tiefer Luftleere ändern sich (von den allerletzten Stufen abgesehen) alle Zwischendrücke mit dem Anfangsdrucke verhältnisgleich.

Bei größeren Gegendrücken ändern sich die Verhältnisse wesentlich, können indes durch die nachfolgende Darstellung doch gut anschaulich gemacht werden.

b) Die Ellipse als Gesetz der Veränderung des durchströmenden Dampfgewichtes bei höherem Gegendruck.

Der Kegel der Dampfgewichte.

An der früher beschriebenen achtstufigen Überdruckturbine unseres Laboratoriums wurden Anfangs- und Enddruck in weiten Grenzen verändert und bei unveränderlicher Umlauf-

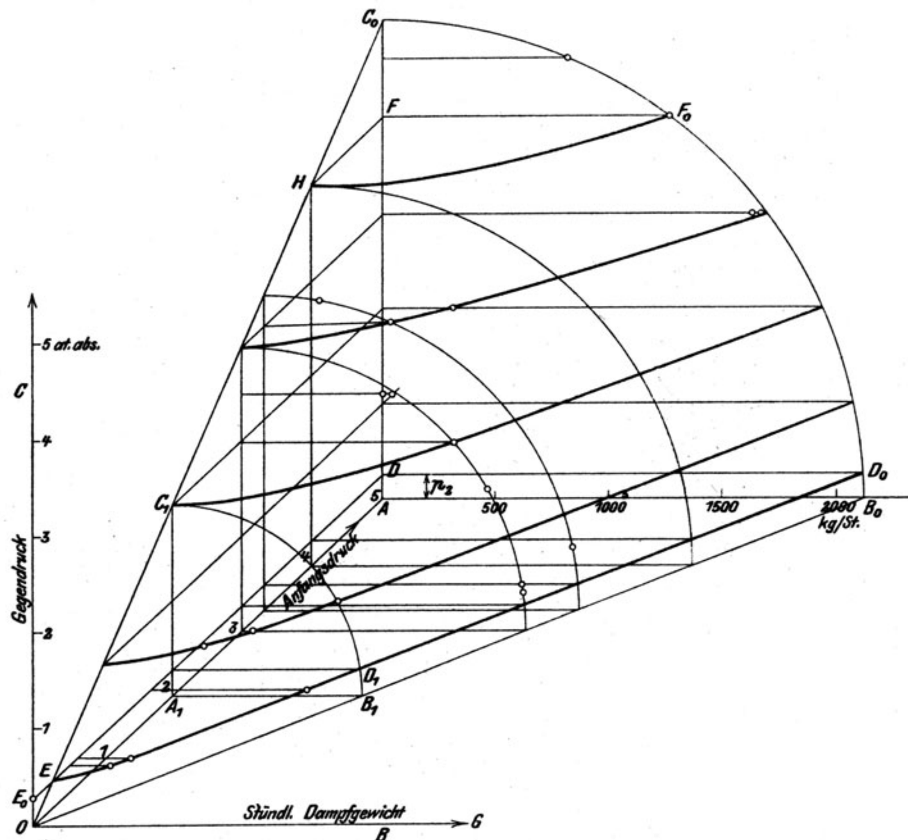


Abb. 281. Kegel der Dampfgewichte.

zahl (4000 min.), die in Abb. 281 dargestellte Abhängigkeit des sekundlichen Dampfgewichtes von den Drücken festgestellt.

O ist der Anfang des Koordinatensystems,
OA die Achse des absoluten Anfangsdruckes,
OB die Achse des stündlichen Dampfgewichtes,
OC die Achse des absoluten Gegendruckes.

Behalten wir den Anfangsdruck unveränderlich, beispielsweise $= OA$, und lassen wir den Gegendruck von Null bis auf den Betrag $AC_0 = OA$ wachsen, so nimmt das Dampfgewicht vom Werte $G_{max} = AB_0$ gemäß einer der Ellipse sehr nahe kommenden Kurve $B_0F_0C_0$ ab. Nähert sich der Gegendruck dem Anfangsdruck, so ist die Abnahme eine ungemein rasche, und wir setzen für die Grenze, wo Gegendruck = Anfangsdruck ist, das Dampfgewicht $G = 0$, obwohl es wegen der Pumpenwirkung der (künstlich anzutreibenden) Turbine nicht ganz verschwinden wird. Bei ganz kleinem Gegendruck etwa zwischen B_0D_0 ist die Dampfmenge, wie wir weiter unten theoretisch nachweisen, unveränderlich, so daß eigentlich nur

Bogen $D_0F_0C_0$ als Ellipse anzusehen ist. Stellen wir einen kleineren Anfangsdruck OA_1 her, so ergibt der Versuch bei Veränderung des Gegendruckes eine der früheren ähnliche Ellipse $B_1D_1C_1$, deren Achsen im Verhältnisse der Anfangsdrücke kleiner sind.

Hiernach stellt die Ellipse das Grundgesetz für die Veränderung der Dampfmenge mit dem Gegendruck, bei gegebenem Anfangsdruck und gleichbleibender Umlaufzahl, dar.

Im graphischen Schaubild kann diese Ellipse durch geeignete Wahl der Maßstäbe als Kreis dargestellt werden.

Die Gesamtheit der Endpunkte der Strecken G erfüllt eine **Kegeloberfläche** $OB_0F_0C_0$, zu deren Bestimmung ein einziger Hauptschnitt wie $AB_0D_0C_0$ genügt.

Will man die Veränderung des G bei **unveränderlichem Gegendrucke** beispielsweise $p_2 = AD$ kennen lernen, so muß der Kegel durch die wagerechte Ebene im Abstande AD geschnitten werden, was die Schnittlinie D_0D_1E ergibt. Wir erkennen, daß das Dampfgewicht dem Anfangsdrucke um so genauer proportional ist, je kleiner der Gegendruck war, da der Schnitt einer Erzeugenden des Kegels um so näher kommt. Für den höheren Druck AF ist die Krümmung der Schnittlinie F_0H schon eine ausgesprochene.

Soll das **sekundliche Gewicht unverändert** bleiben, so entspricht dies einem Vorgang in einer zu den Achsen p_1p_2 parallelen Schnittebene. Es wird also bei einer Erhöhung des Gegendruckes der Anfangsdruck auch steigen müssen, und zwar nach einem hyperbolischen Gesetz. Sind wir vom Scheitel der Hyperbel weiter entfernt, so ist die Zunahme eine angenähert lineare.

Die theoretische Begründung dieser Regeln geben wir im folgenden Abschnitt.

68. Theoretische Ermittelung des Druckverlaufes für eine gegebene Turbine. Die „v^2"-Methode.

Diese Ermittelung ist die Umkehrung der bei dem Neuentwurf einer Turbine zu lösenden Aufgabe. Hier sind die Querschnitte, die Winkel, die Umfangsgeschwindigkeiten gegeben, und man sucht entweder das Dampfgewicht, das bei gegebenem Anfangszustand und Gegendruck durch die Turbine strömt, oder den Anfangs- bzw. Enddruck, die zu einem gegebenen Dampfgewicht gehören.

Wird das Dampfgewicht gesucht, so benützt man für die erste Probeannahme die in Abschnitt 67 mitgeteilte Erfahrungstatsache, daß das Gewicht angenähert im gleichen Verhältnis mit dem Anfangsdrucke zu- und abnimmt. Aus der Verhältnisgleichheit aller Drücke zum Anfangsdruck folgt, daß auch das Wärmegefälle für die einzelne Stufe (zumindest im Anfang) sich nicht wesentlich ändert. Man kann daher probeweise die Austrittsgeschwindigkeit aus dem 1. Leitrad berechnen und vergleichen, ob sie den vorgeschriebenen Querschnitt ergibt. Ist der neue Querschnitt zu groß, so war die Geschwindigkeit zu klein, man muß das Gefälle größer annehmen, bis die Querschnitte stimmen. Hierauf rechnet man die Verluste im Laufrad und seinen Austrittsquerschnitt aus, wobei sich herausstellen wird, ob man mit Gleichdruck arbeiten oder einen Überdruck einführen muß, oder ob zu viel Querschnitt vorhanden ist, so daß entweder eine (unwahrscheinliche) Verdichtung im Rade stattfindet, oder, und das ist das Wahrscheinlichere, der Strahl sich ablöst. So müßte man Stufe für Stufe vorgehen, was keine so mühsame Arbeit ist, wie es den Anschein haben könnte.

Ein folgerichtigeres Verfahren wäre die Benutzung der Fannokurven, wie wir das für den Endzustand bei einer Düse in Abschn. 32 gezeigt haben.

a) Die v^2-Methode.

Bei dieser wird die Zustandskurve, d. h. der Wirkungsgrad schätzungsweise von vornherein angenommen und mit ihrer Hilfe das Quadrat des spezifischen Rauminhaltes als Abhängige des Wärmeinhaltes dargestellt. So sei in Abb. 282 für den Anfangszustand $AA_1 = v_0^2$; $AO = i_0$. Die Eintrittsgeschwindigkeit c_0 in das erste Leitrad ist durch das angenommene sekundliche Gewicht G bestimmt:

$$c_0 = \frac{Gv_0}{F_0} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Für den Austritt aus diesem Leitrad gilt

$$i_0 - i_1 = \frac{A}{2g}(c_1^2 - c_0^2) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

und

$$G^2 v_1^2 = F_1^2 c_1^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Aus diesen beiden Gleichungen sind zwei den Zustand bestimmende Größen, z. B. c_1 und v_1, zu ermitteln. Dies läßt sich graphisch wie folgt durchführen. Nehmen wir zunächst an,

Abb. 282. Die v^2-Methode.

es wäre BB_1 als Lösung für das Volumen v_1^2 im Spalt gefunden; daher $BO = i_1$. Tragen wir

$$AA_0 = A\frac{c_0^2}{2g}$$

ab, so muß einerseits nach Gl. (2)

$$A_0 B = i_0 - i_1 + A\frac{c_0^2}{2g} = A\frac{c_1^2}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

sein; anderseits kann man nach Gl. (3) das Verhältnis $BB_1 : A_0 B$ als

$$\frac{BB_1}{A_0 B} = \frac{v_1^2}{\left(A\frac{c_1^2}{2g}\right)} = \frac{F_1^2}{\frac{A}{2g}G^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

darstellen. Konstruieren wir daher in der Hilfsfigur links ein rechtwinkliges Dreieck mit der senkrechten Kathete F_1^2/G^2 und der wagerechten Kathete $A/2g$, so wird die zu seiner Hypotenuse von A_0 aus gezogene Parallele den unbekannten Punkt B_1 aus der v^2-Kurve herausschneiden. (Um mit den Maßstäben in keine Schwierigkeiten zu geraten, nehme man, mit einer beliebigen Geschwindigkeit c, als vertikale Kathete $F_1^2 c^2/G^2$, die im Maßstabe der Volumenquadrate und als horizontale Kathete $Ac^2/2g$, die im Maßstabe der Wärmegefälle abzutragen ist.)

Nachdem die Strecke $A_0 B$ uns c_1 zu berechnen gestattet, bilden wir graphisch w_1 als Resultierende aus c_1 und $-u$ und schreiben die für das Laufrad gültigen Gleichungen

$$A\frac{w_2^2}{2g} = i_1 - i_2 + A\frac{w_1^2}{2g}$$

$$G^2 v_2^2 = F_2^2 w_2^2$$

an, deren Auflösung nach gleichem Muster erfolgt, indem wir $Aw_1^2/2g$ links von B abtragen und die Neigung von $B_0 C_1$ durch ein neues Hilfsdreieck $\frac{F_2^2}{(A/2g)G^2}$ graphisch bestimmen. So schneidet uns jene Gerade auf der v^2-Kurve den Punkt C_1 aus, und es bilden die eingetragenen Längen $CC_1 = v_2^2$ und $Aw_2^2/2g$ die Werte des Volumenquadrates und der kinetischen Energie für das Laufschaufelende. Hierauf ergibt die Resultierende aus w_2 und $+u$ die Geschwindig-

keit c_2, die für das nächste Leitrad die Rolle des c_0 übernimmt. Auf diese Weise schreitet man fort, bis der Kondensatordruck erreicht ist. Wenn im Verlaufe der Berechnung die Schräge unter dem Winkel φ die v^2-Kurve nicht schneidet, so bedeutet dies, daß die vorgeschriebene Dampfmenge durch den betreffenden Querschnitt nicht hindurchzuströmen vermag. Den Grenzfall hierzu bildet ein Querschnitt, für den die φ-Linie die v^2-Quadratkurve gerade berührt, so daß dort die in Abschn. 35 erklärte Schallgeschwindigkeit w_s herrscht. Diesen Punkten kommt, wie aus dem Nachfolgenden hervorgeht, eine besondere Bedeutung zu.

Es empfiehlt sich, den Linienzug Abb. 282 senkrecht aufgestellt an die Adiabate im *JS*-Diagramm anzuschließen, wie das bei der Ermittelung der Düsenquerschnitte in Abb. 44 getan wurde, da dann Berichtigungen an der Zustands- und v^2-Kurve leichter angebracht werden können. Im allgemeinen wird man, da die Winkel gegeben sind, nicht mit stoßfreiem Eintritt arbeiten. Ist der Stoßwinkel klein, so kann der Stoßverlust vernachlässigt werden. Es liegt übrigens, wie wir unten zeigen, die Möglichkeit vor, unter Einführung der Widerstandszahlen ζ die Zustandskurve genau darzustellen.

v^2-Methode mit Rückwärtsschreiten. Der bekannte Kondensatorzustand (v_2) und das Gewicht G erlauben bei bekanntem F_2 sofort die letzte Geschwindigkeit $w_2 = Gv/F_2$ zu berechnen, somit Strecke CB_0 in Abb. 282 einzutragen. Man kann nun in zweierlei Weise „nach rückwärts" d. h. zu den vorhergehenden Stufen, schreiten. Ist der Einlaßquerschnitt F_1' willkürlich, so würde sich aus dem Hilfsdreieck ein Winkel φ'_1 ergeben, der von B_0 aus den Punkt B_1 ausschneidet. Indem man c_1 als Resultierende von $(w_1' + u)$ ermittelt, ergibt sich Strecke BA_0 und im Hilfsdreieck der Winkel φ_1 also der Querschnitt F_1 und die zugehörige Schaufellänge u. s. f.

Wenn jedoch alle Querschnitte und Winkel vorgeschrieben sind, so besteht zwischen c_1 und w_1 bei dem gegebenen u eine Beziehung, die man graphisch durch Aufzeichnen einiger Dreiecke c_1, w_1, u mit verschieden großem w_1 ermittelt. Man kann dann $v_1^2 = F_1^2 c_1^2/G^2$ als Ordinate zu $A c_1^2/2g$ als Abszisse auf durchsichtiges Papier aufzeichnen. Mit der Näherungsannahme, daß der Stoßwinkel und der Stoßverlust beim Eintritt ins Laufrad klein seien (oder nach Schätzung in der v^2-Linie berücksichtigt worden seien), wird nun das richtige c_1 bestimmt, indem man den Nullpunkt des v_1^2, c_1^2 Koordinatensystemes auf Punkt B_0 legt; die Hilfskurve schneidet auf der v^2-Linie den Punkt B_1 heraus, dessen Projektion B, somit $A w_1^2/2g$ (d. h. w_1 im Spalte) und mittelbar $A c_1^2/2g$ ergibt. Diese Umständlichkeit wird sich nur lohnen, wo viele kongruente (gleichlange) Schaufeln aufeinander folgen. Sonst wird „Probieren" rascher zum Ziele führen.

b) Die v^2-Methode in Verbindungen mit den Widerstandszahlen ζ. Tafel der adiabatischen v-Quadrate.

Ist c_0 die Eintrittsgeschwindigkeit, so gelten (Abb. 283) für das Leitrad die Gleichungen

$$i_0 - i_1' = A\,(1+\zeta)\frac{c_1^2}{2g} - A\frac{c_0^2}{2g} \quad \ldots \quad (1)$$

$$i_1 - i_1' = A\,\zeta\,\frac{c_1^2}{2g} \quad \ldots \quad (2) \qquad G^2 v_1^2 = F_1^2 c_1^2 \quad \ldots \quad (3)$$

zu denen als vierte Beziehung gehört, daß i_1' der adiabatischen Expansion von i_0 aus entspricht.

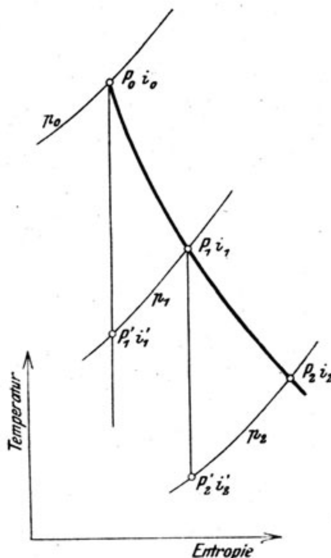


Abb. 283 zu Abb. 284.

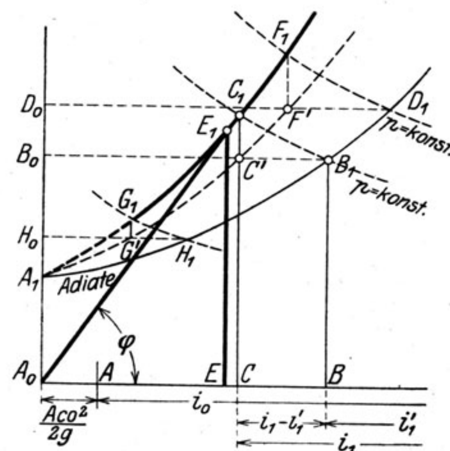


Abb. 284. Berücksichtigung der Widerstandszahlen.

Die Aufgabe ist, aus diesen Beziehungen zu den bekannten Größen c_0, i_0, G, F_1, ζ die Unbekannten c_1, v_1, p_1, i_1' oder, was dasselbe ist, c_1, v_1, i_1, i_1' zu bestimmen. Zu diesem Behufe sollte man sich Tafeln der adiabatischen v-Quadrate entwerfen, in denen für eine Schar von Adiabaten die Wärmeinhalte als Abszissen, die zugehörigen spezifischen Volumina, ins Quadrat erhoben, als Ordinaten aufgetragen werden. Durch Verbindung derjenigen Punkte an diesen Kurven, die gleichem Drucke entsprechen, entsteht eine zweite Kurvenschar $p =$ konst. Eine solche Tafel stellt wieder eine Abbildung der Dampftabellen dar, wobei jeder Punkt durch Druck und Volumen bestimmt wird und den zugehörigen Wärmeinhalt abzulesen gestattet. Außerdem würde man an jede Adiabate den Wert der Entropie, der ihr nach der Entropietafel zukommt, anschreiben.

Für den gesuchten Endzustand können mit Hilfe einer solchen Tafel zwei geometrische Orte angegeben werden. Expandieren wir vom Ausgangszustand in Abb. 284 zunächst adiabatisch zum willkürlichen Punkt B_1, so daß

$$\overline{AB} = i_0 - i_1'$$

bedeutet. Tragen wir $\overline{AA_0} = A c_0^2/2g$ von A nach links ab, so ist nach Gl. (1)

$$\overline{A_0B} = A\frac{c_0^2}{2g} + (i_0 - i_1') = A(1+\zeta)\frac{c_1^2}{2g} \quad \ldots \quad (4)$$

Die Verlustwärme sei durch Strecke BC dargestellt, d. h.

$$A\zeta\frac{c_1^2}{2g} = \overline{BC} \quad \ldots \quad (5)$$

Sie wird bei unveränderlichem Druck zugeführt und liefert senkrecht über C auf der durch B_1 gehenden Linie $p =$ konst. den Zustandspunkt C_1. Durch Teilung von (5) und (4) erhält man

$$\frac{CB}{A_0B} = \frac{\zeta}{1+\zeta}.$$

Um also den Zustandspunkt C_1 zu erhalten, teilen wir A_0B im Verhältnis $\zeta : 1+\zeta$, ohne c_1 ausdrücklich berechnet zu haben und projizieren den Punkt C senkrecht und auf die durch B_1 gehende Linie $p =$ konst. Das gleiche Verhältnis $\zeta/(1+\zeta)$ weisen auch die Strecken B_1C'/B_1B_0 auf. Durch Wiederholung der Konstruktion an den Punkten D_1, H_1 ... der Adiabate gelangt man zu den Punkten $F'G'$ ..., die zusammen eine bezüglich der Ordinatenachse A_0D_0 zur Adiabate affine Kurve ergeben. Diese Bemerkung macht die Entstehung der Zustandskurve $A_1G_1C_1$ ... anschaulicher.

Der zweite geometrische Ort soll die Auflösung der durch Addition von Gl. (1) und (2) entstehenden Gleichung $i_0 - i_1 = A\dfrac{c_1^2 - c_0^2}{2g}$ und der Gl. (3)

$$G^2 v_1^2 = F_1^2 c_1^2$$

darstellen. Aus diesen beiden folgt genau wie im vorigen Abschnitt, daß v_1^2 auf der durch A_0 unter dem Winkel

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{F_1^2}{\dfrac{A}{2g}G^2}$$

gezogenen Geraden gelegen sein muß. Der Schnitt E_1 dieser Schrägen mit der vorhin ermittelten „Zustandskurve“ bildet die Lösung der Aufgabe, und zwar ist $\overline{A_0E} = A c_1^2/2g$ und $\overline{EE_1} = v_1^2$.

Wir bilden $w_1 =$ Result. aus c_1 und $-u$, und wiederholen das Verfahren, indem nun w_1 an Stelle von c_0, w_2v_2 an Stelle von c_1v_1 treten. Die Umständlichkeit des Verfahrens besteht darin, daß wir auch die „Zustandskurve“ von E_1 aus frisch konstruieren müssen, und daß dies für jede neue Schaufelreihe von neuem erforderlich ist.

c) Beweis für das Gesetz von der Dampfellipse. Ellipsenschar für eine gegebene Turbine.

Wir ermitteln den Druckverlauf in der Turbine für eine beliebig angenommene sekundliche Dampfmenge G_d und tragen diesen in Abb. 285 über die durch gleich weit abstehende

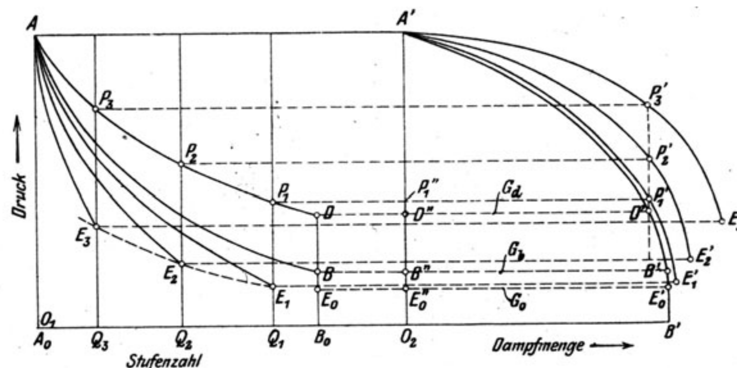


Abb. 285. Ellipsen für Teilturbinen.

Punkte (die nicht eingezeichnet sind) dargestellte Stufenzahl als Linie $AP_3P_2P_1D$ ein Rechts davon bedeutet die Wagerechte $D''D'$ in der Höhe des Enddruckes B_0D das entsprechende Gewicht G_d.

Wiederholen wir dies Verfahren für andere Dampfgewichte, so werden wir feststellen, daß die Punkte $A'D'G'$ ... auf dem Umfang einer der Ellipse sehr nahe kommenden Kurve gelegen sind, womit der praktisch-theoretische Beweis für das Gesetz der Ellipse geleistet ist. Doch wäre das Verfahren zu mühsam und zeitraubend, wenn wir immer die v^2-Methode anwenden müßten. Dies erweist sich indes als überflüssig durch die

Auffindung der Schallgeschwindigkeitspunkte.

In Abb. 286 sind die Kurven der v^2 und zugleich gemäß der angenommenen Zustandskurve die zugehörigen Drücke als Funktionen von i eingetragen. Die schrittweise Rechnung habe P als Zustand am Ende des letzten Leitrades ergeben, und P_1P_2 sei $A w_1^2/2g$, so daß von P_2 aus die letzte Schnittgerade unter dem in der Nebenfigur links durch $(f:G_0)^2$ bedingten Neigungswinkel φ zu ziehen ist. Falls diese Gerade die v^2-Kurve berührt, so haben wir einen Punkt mit Schallgeschwindigkeit, kurz **„Schallpunkt"**, erreicht; nimmt man G_0 größer an, so wird die v^2-Kurve nicht mehr getroffen, die Strömung ist unmöglich. Wäre

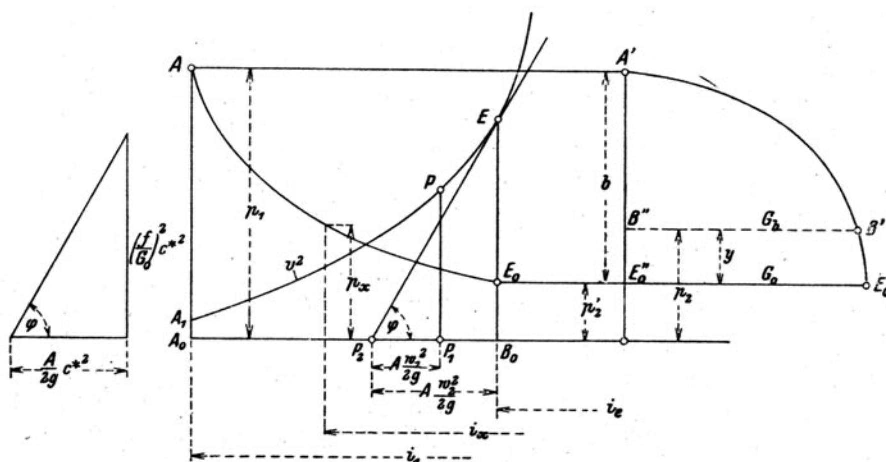


Abb. 286. Auffindung des „Schallpunktes".

nun die entsprechende Dampfmenge G_0 bekannt, so brauchte man nur, ohne die vorhergehenden Zustände zu kennen, die unter dem Winkel φ geneigte Tangente an die v^2-Kurve zu ziehen, und erhielte in E den Endzustand und in $B_0E_0 = p_2'$ den Enddruck, der dem Auftreten der Schallgeschwindigkeit entspricht. Da indes G_0 nicht bekannt ist, wird man den Winkel φ zunächst mit einem Werte f/G_b bilden, wo G_b ein willkürliches, oder das dem normalen Enddruck p_2 entsprechende, vom Entwurfe der Turbine her bekannte sekundliche Gewicht bedeutet, und der so bestimmte Punkt E wird in den meisten Fällen genügend genau sein, falls der Unterschied von p_2 und p_2' nicht groß ist.

Es ist aber leicht, seine Lage zu berichtigen, indem man bedenkt, daß, wenn p_2' der Enddruck ist, das durchströmende Gewicht sich als der Abschnitt $E_0''E_0'$, d. h. als die wagrechte Halbachse der Ellipse der Dampfgewichte $A'B'E_0'$ darstellen muß, deren senkrechte Halbachse durch $E_0''A' = b$ gegeben ist. In dieser Ellipse ist G_b die Abszisse, die aus der Abbildung abzugreifende Strecke y die Ordinate des Punktes B', und gemäß der Gleichung der Ellipse ist

$$\left(\frac{G_b}{G_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

woraus man G_0 und den berichtigten Wert von φ ermittelt. Die neue Tangente liefert die neue, genauere Lage des Punktes E, und einen hinlänglich genauen Wert p_2', so daß der Scheitel der Ellipse E_0' festgelegt erscheint. Es ist kaum nötig, das Verfahren zu wiederholen.

Durch diese **Hauptellipse** ist zu jedem Dampfgewicht ein bestimmter Enddruck zugeordnet, aber wir sind noch nicht in der Lage, die Zwischendrücke anzugeben. Dies gelingt durch die Überlegung, daß ein Teil unserer Turbine dem gleichen allgemeinen Gesetz gehorchen muß wie die ganze Turbine. Betrachten wir also in Abb. 285 etwa die zwischen A_0 und Q_1 gelegenen Stufen als eine Turbine für sich, so kann auf diese das gleiche Verfahren angewendet werden, und wir werden in E_1 die Schallgeschwindigkeitsgrenze, in E_1' den Scheitel derjenigen Ellipse auffinden, die für die Teilturbine A_0Q_1 maßgebend ist. So entsteht für andere Teilturbinen die **Ellipsenschar** $E_1 E_2 E_3 \ldots$

Diese Ellipsen, beispielsweise E_0' und E_1' stehen miteinander in einer besonderen Verwandtschaft. Betrachten wir die Drucklinie AP_1D, so ist für die ganze Turbine die sekundliche Dampfmenge gemäß Ellipse

E_0' die Strecke $D''D'$; für die Teilturbine gemäß Ellipse E_1' die Strecke $P_1'P_1''$; da aber durch die Turbine überall dieselbe Dampfmenge strömt, muß

$$D''D' = P_1''P_1'$$

sein. Dasselbe gilt für die Ellipsen mit den Scheiteln E_2', E_3' ... usw., und die eben entwickelte Beziehung liefert ein einfaches Mittel, die Zwischendrücke wie folgt zu ermitteln.

d) Druckverlauf für einen willkürlich vorgeschriebenen Gegendruck.

Es sei die Drucklinie für den Gegendruck B_0D (Abb. 285) unbekannt. Durch wagerechte Projektion auf die Hauptellipse erhalten wir in $D'D''$ die Dampfmenge G_d, die auf alle übrigen Ellipsen lotrecht übertragen, die Teilpunkte $P_1'P_2'P_3'$ ... ergibt. Diese projizieren wir rückwärts auf die Lotrechten durch $E_1E_2E_3$ ..., wodurch auf diesen die Kurve des Druckverlaufes $P_1P_2P_3$ ... herausgeschnitten wird.

Die Untersuchung zeigt, daß sich die Druckkurven vom Anfangspunkt ausgehend gegenseitig innig anschmiegen, und erst später fast plötzlich stärker auseinandergehen. Dies bedeutet, daß **das Druckgefälle, also auch die geleistete Arbeit, in den ersten Stufen durch Veränderung des Gegendruckes nur sehr wenig beeinflußt werden.**

Die Erhöhung des Gegendruckes setzt in erster Linie die Leistung der letzten Stufen herab, so daß die **letzten Räder** alsbald nur **leer mitlaufen.**

Dies bewirkt bei **geteilten** Turbinen, insbesondere der **Schiffsturbine,** daß die **Verteilung der Arbeit auf die Einzelturbinen durch Erhöhung des Gegendruckes (des Vakuums) sich wesentlich ändert.**

Wenn die **Schallgeschwindigkeit in Zwischenstufen überschritten wird,** was bei Turbinen, die durch Veränderung aller Leitradquerschnitte (mittels Schieber) regulieren, möglich ist, so stellt sich eine Unstetigkeit ein, die indes einfach zu übersehen ist. Beispielsweise möge sich in einer Zwischenstufe ein Druckunterschied von 6 at auf 2 at einstellen, während 3,45 at der kritische Druck ist. Erhöhen wir den Gegendruck am Austritt der Turbine, so wird die durchfließende Dampfmenge nicht geändert, und der Druck in der Zwischenstufe steigt nach dem in Absatz b erwähnten hyperbolischen Gesetz, bis der kritische Druck 3,45 at erreicht ist. Ist der Leitkanal nicht erweitert, so wird sich von da an ein Stau im Endquerschnitt einstellen und die Dampfmenge sinkt nach der Ellipse, die Turbine kann als einheitliches Ganzes behandelt werden. War hingegen die betreffende Stufe mit erweiterten Düsen ausgestattet, so steigt der Druck, wie in Abschn. 32 erläutert wurde, weit über 3,45 at, bevor die Dampfmenge zu sinken beginnt.

Ist in allen Stufen die Schallgeschwindigkeit dauernd überschritten, so kann der Druckverlauf auf dem Wege der Rechnung leicht verfolgt werden, indem man eine angenäherte Zustandsgleichung $p^{1/n}\, v = k$ aufstellt und für das alle Stufen durchströmende Gewicht, sofern die Zuflußenergie vernachlässigbar ist, die Ausflußformel $G = \chi f \sqrt{p/v}$ benutzt, in der f der vorgeschriebene Leitquerschnitt jeder Stufe (Funktion der Stufenzahl) ist. Durch Einsetzen des v aus der ersten Gleichung erhält man

$$p^{\frac{n+1}{n}} = \frac{kG^2}{\chi^2 f^2},$$

also p als Funktion der Stufenzahl. Das sekundliche Gewicht hängt nur ab von der allerersten Düse und dem hinter ihr herrschenden Gegendruck[1]).

Ebenfalls einfach kann, wie Forner gezeigt hat[2]), der Druckverlauf auf dem Wege der Rechnung für die Druckstufenturbine ermittelt werden, sofern die Auslaßenergie in allen Stufen durch Wirbelung vernichtet wird, auch wenn die Schallgeschwindigkeit nicht überschritten ist. In diesem Falle hat man die allgemeine Strömungsformel Abschn. 19 zu benutzen, gemäß der die sekundliche Dampfmenge G eine Funktion des Querschnittes, des Anfangs- und Enddruckes $p_1 p_2$ und des Anfangsvolumens v_1 ist. Für eine gegebene Turbine sind die Leitradquerschnitte aller Stufen gegeben, wir können also zu einem angenommenen G, p_1, v_1 den Druck am Ende der ersten Stufe p_2 berechnen. Zu diesem liefert eine angenäherte Zustandsgleichung das Volumen v_2, und wir können den Druck p_3 der zweiten Stufe ermitteln usf., bis alle Stufen erledigt sind.

Das Gesetz für die Abhängigkeit der sekundlichen Dampfmenge vom Gegendruck hat eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Gesetz der durch eine einfache Mündung strömenden Dampfmenge. In beiden Fällen gibt es einen kritischen Wert des Druckes, von dem an eine Erniedrigung des Gegendruckes die Dampfmenge nicht mehr beeinflußt, und wenn der Gegen-

[1]) Graphische Methoden mit genauer Berücksichtigung der wirklichen Zustandsänderung gibt H. Baer in der sehr gründlichen Untersuchung: Die Regelung der Dampfturbinen und ihr Einfluß auf die Energieentwicklung in den einzelnen Druckstufen. Mitteil. über Forschungsarbeiten, Berlin 1909.

[2]) Z. d. V. deutsch. Ing. 1909, S. 674.

druck höher ist als der kritische, nimmt die Dampfmenge angenähert nach einer Ellipse ab. Allein dieser kritische Druck ist bei der Turbine in der beschriebenen, eigenartigen Weise

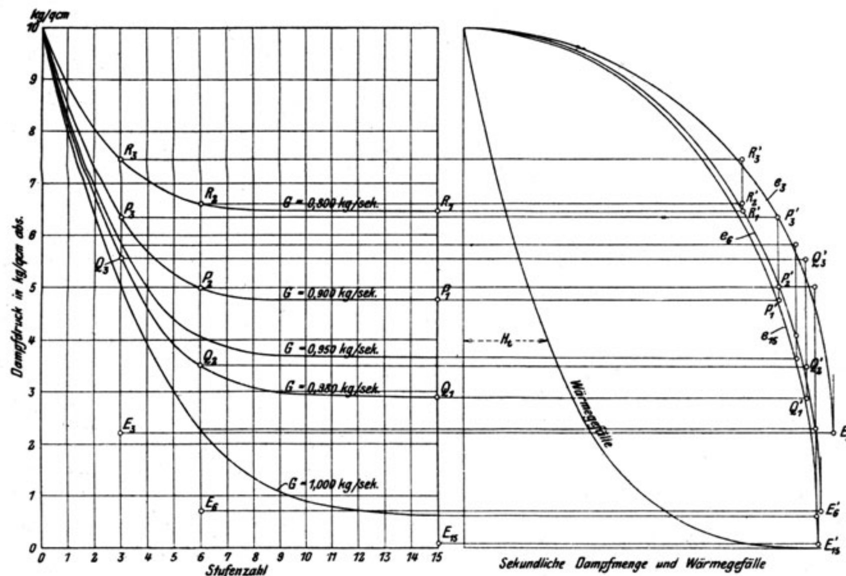


Abb. 287. Gesetz der Ellipse bei adiabatischer Ausdehnung.

durch die Abmessungen (Querschnitte, Winkel, Umfangsgeschwindigkeit) bedingt und besitzt meist sehr niedrige Werte, so daß sich in dieser Beziehung eine Analogie mit der Strömung durch lange Rohrleitungen, Abschn. 27, aufdrängt. Allein nicht die Reibung ist hier das Bestimmende; an ihre Stelle tritt in der Turbine die Arbeitsabgabe an die Laufräder, wodurch dem Dampf Stufe für Stufe Energie entzogen wird; dieser Einfluß überwiegt die Wirkung der Reibung um ein Bedeutendes. Um dies klar einzusehen, führen wir im folgenden ein Beispiel durch, in dem jede Reibung vollkommen ausgeschlossen wird.

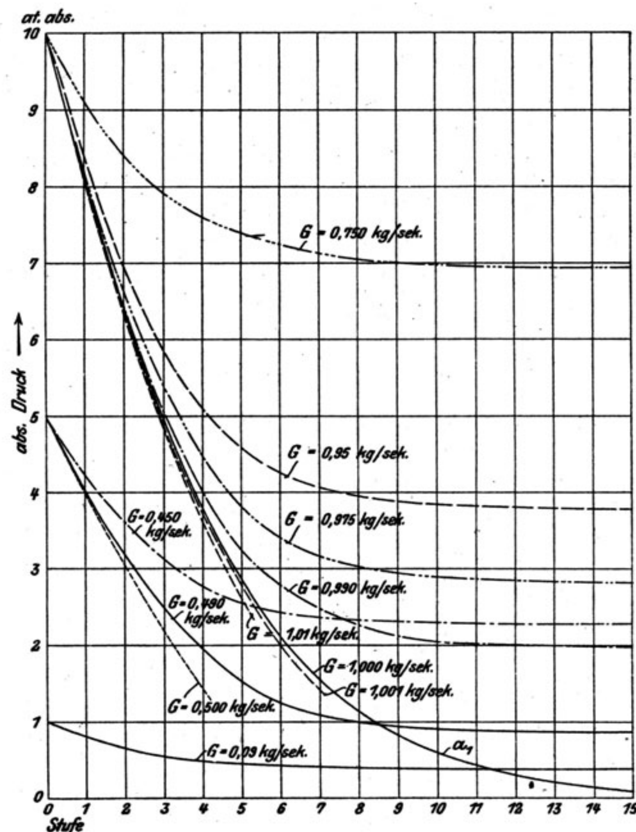


Abb. 288. Auslaßenergie jedesmal vernichtet.

1. Beispiel. Eine 15stufige Gleichdruckturbine mit 10 kg/qcm abs. Anfangsdruck, 250° C Anfangstemperatur und 0,1 kg/qcm Vakuum wurde in gewöhnlicher Weise unter der Annahme durchkonstruiert, daß die Auslaßgeschwindigkeit jeder Stufe vollständig verwertet wird. Als Dampfgewicht wurde 1 kg/sek gewählt, bei 125,6 m/sek Umfangsgeschwindigket (3000 Uml./min); die Zustandsänderung ist **reibungsfrei adiabatisch** vorausgesetzt. Mit der so bestimmten Reihe der Leitquerschnitte, Leit- und Laufschaufelwinkel wurde sodann nach der v^2-Methode der Druckverlauf für verschiedene, in Abb. 287 angegebene Gewichte bestimmt. Um der Umständlichkeit der Zustandsänderung in der Laufschaufel (Abschn. 69) vorläufig aus dem Wege zu gehen, sind die Laufschaufeln so lang gedacht, daß der Dampf stets genügenden Querschnitt vorfindet, um am Austrittsende auf den Spaltdruck zu expandieren, so daß stets Gleichdruckwirkung vorhanden ist. Bei 1 kg/sek führt die Druckkurve nicht ganz auf den ursprünglichen Kondensator-

druck hinab, was bei der großen Empfindlichkeit der v^2-Methode nicht zu verwundern braucht. Der Schallpunkt am Ende der 15. Stufe fällt auf E_{15}, und man sieht, daß die theoretischen Punkte P_1'; Q_1'; R_1' . . . genügend nahe auf den Umfang der Hauptellipse E_{15}' fallen. Nun wurden die Schallpunkte E_6 und E_3 der 6. und 3. Stufe bestimmt und die Kontrolle ausgeführt, inwieweit die Ellipsen E'_6 und E'_3 mit den schon bekannten Drucklinien übereinstimmen. Man projiziert beispielsweise die Punkte $P_1 P_2 P_3$ auf die zugehörigen Ellipsen, dann müssen die Schnittpunkte $P_1' P_2' P_3'$, weil demselben Dampfgewicht angehörend, auf einer Vertikalen liegen. Sowohl diese Punkte, als auch $Q_1' Q_2' Q_3'$ lassen erkennen, daß die Genauigkeit der Ellipse eine praktisch befriedigende ist. Die ebenfalls eingezeichnete Kurve der Wärmegefälle gestattet das leichte Abgreifen der bei einem bestimmten Gegendruck in Arbeit umgesetzten Wärmemenge.

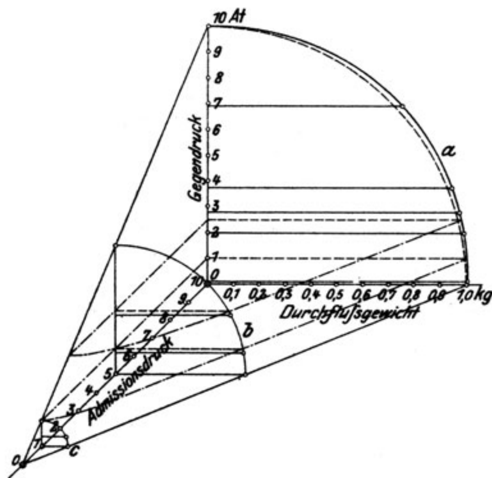


Abb. 288a. Räumliche Darstellung zu Abb. 288.

2. Beispiel. Die gleiche Turbine wurde, um auch Widerstände einzuführen, unter der Annahme behandelt, daß zwar der Dampf adiabatisch expandiert, aber die Auslaßenergie aller Stufen vernichtet (in Wärme umgewandelt) wird, und zwar einmal bei vollem Anfangsdruck (10 at abs.), dann bei Drosselung (bei gleichbleibendem Wärmeinhalt) auf 5 bzw. 1 at abs. Die gewonnenen Kurven sind in Abb. 288 veranschaulicht, aus der die räumliche Darstellung des sekundlichen Dampfgewichtes (Abb. 288a) als Funktion des Anfangs- und des Enddruckes abgeleitet wurde. Auch hier stimmt die tatsächliche Kurve a (vollgezogen) mit der theoretischen Ellipse (punktiert) sehr nahe überein und bestätigt das Gesetz von der „Kegelfläche" der Dampfmengen.

Versuche über den Druckverlauf.

Die Ergebnisse der Theorie werden durch den praktischen Versuch vollauf bestätigt. So vor allem in Grambergs[1]) sehr vollständigen Untersuchung einer Oerlikon-Gleichdruckturbine von 14 Stufen, 150 KW-Leistung bei 3000 Uml./min, deren Druckkurven alle wesentlichen Kennzeichen der oben theoretisch abgeleiteten Schaubilder aufweisen.

e) Dampfmenge und Druckverlauf bei veränderlicher Umlaufszahl.

Wird in der vielstufigen Turbine die Auslaßgeschwindigkeit jeder Stufe durch Wirbelung vernichtet, so ist die sekundlich durchströmende Dampfmenge von der Umlaufzahl so gut wie unabhängig. Die Zustandskurve ändert sich wohl, und zwar so, daß bei Verkleinerung der Umlaufzahl und demgemäß (im allgemeinen) sinkender Leistung der Wärmeinhalt mit dem Normalen verglichen größer wird (beim Stillstand

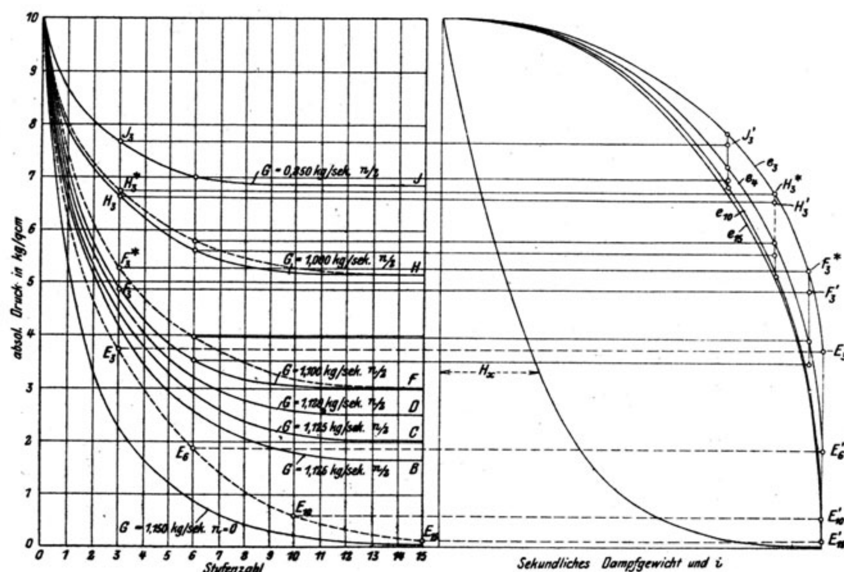


Abb. 289. Ellipsen bei verringerter Umlaufzahl.

[1]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1909, S. 250.

fällt der Zustand schließlich mit der Linie $i =$ konst. zusammen). Die adiabatischen Gefälle der einzelnen Stufen nehmen indessen nur unwesentlich zu, und da auch das spezifische Volumen etwas wächst, bleibt die Dampfmenge nahezu unveränderlich.

Sobald aber die Auslaßgeschwindigkeit verwertet wird, wie bei der Überdruckturbine und den vollbeaufschlagten Stufen der Gleichdruckturbine, wird bei kleinerer Umfangsgeschwindigkeit ein kleinerer Teil der Dampfenergie in Nutzarbeit umgesetzt, was eine Zunahme der Strömungsgeschwindigkeit, daher auch der Dampfmenge zur Folge haben muß.

Die theoretische Vorausbestimmung der Zunahme ist sehr umständlich und kaum genau durchzuführen, denn die Turbine arbeitet nicht mehr mit stoßfreiem Eintritt, und es ist schwer einzuschätzen, um wieviel die Widerstände infolgedessen zunehmen.

Um in dieser Beziehung eine klare Situation zu schaffen, wurde die Dampfmenge bei halber Umlaufzahl für die vorhin untersuchte Turbine unter der Voraussetzung bestimmt, daß die Zustandsänderung nach wie vor eine reibungsfrei adiabatische ist. Dies bedeutet, daß man die Eintrittswinkel aller Leit- und Laufräder stets auf stoßfreien Eintritt umgestellt denkt, während die Austrittswinkel erhalten bleiben. In Abb. 289 sind die Ergebnisse der mit der v^2-Methode durchgeführten Untersuchung veranschaulicht. Die Scheitel der für die Stufe 15, 10, 6 und 3 bestimmten Ellipsen fallen hier in eine Vertikale und müßten teilweise berichtigt werden, da ein einwärtsliegender Scheitel, wie man bei näherer Überlegung einsieht, einen Widerspruch im Druckverlauf ergeben würde. Die Abweichung der tatsächlichen, d. h. genau auf dem Umfang der Ellipse E_3' gelegenen Punkte $F_3^* H_3^*$ von den theoretischen ist hier etwas merklicher, ebenso entfernen sich die mit der theoretischen Ellipse ermittelten (punktierten) Druckkurven bei F_3 und H_3 mehr als oben von den wirklichen, was an dem Umstande liegt, daß bei kleiner Umlaufzahl die Geschwindigkeiten c_1 und w_1 jeweils wenig voneinander verschieden sind, daher das Resultat gewissermaßen der (an sich kleine) Unterschied zweier großer Zahlen ist und durch die Ungenauigkeit der Zeichnung mehr beeinflußt wird.

Verlauf mit Drucksprung. Theoretische Möglichkeit von Verdichtung bei hohem Gegendruck.

Gehen wir mit der Umlaufzahl sehr weit hinab, so treten ganz eigentümliche Verhältnisse auf, die wir zunächst wieder an reibungsfrei adiabatischer Zustandsänderung veranschaulichen wollen, da sie nur bei aufmerksamer Vergegenwärtigung der Strömungsgesetze verständlich sind. Wählen wir das durch-

Abb. 289a. Verdichtung.

Abb. 289b. Drucksprung.

strömende Gewicht klein, so führt die v^2-Methode zum Ergebnis, daß die Pressung hinter der ersten Stufe wieder zunimmt, wie die oberen Kurven in Abb. 289c anzeigen. Dies liegt daran, daß von der kinetischen Energie $c_1^2/2g$ infolge der niedrigen Umfangsgeschwindigkeit nur ein kleiner Teil in Arbeit umgesetzt wird, so daß c_2 wenig von c_1 verschieden ist, und der Ausgangspunkt B_1 (Abb. 289b) für die zweite Stufe nahe an A_0 heranrückt, so daß die neue Schnittlinie $B_1 C$ vor dem Punkte B die v^2-Kurve schneidet. Dies bedeutet, daß die Strömung mit dem angenommenen Gewicht nur **mit einer Verdichtung**, die übrigens schon im Laufrad beginnt, vor sich gehen kann, sofern wir an der **Möglichkeit** adiabatischer Zustandsänderung festhalten. Dann müßten auch die Eintrittswinkel auf stoßfreien Eintritt verstellt werden, um Verluste zu vermeiden. Die in Abb. 289c eingezeichneten Schaulinien mit Druckanstieg **haben daher nur theoretische Bedeutung.** In Wahrheit würde der Strahl in die 2. Leitschaufel mit starker Wirbelung eintreten und man müßte von B aus eine neue, großem ζ entsprechende Zustandskurve entwerfen, in die der Strahl $B_1 C$ einzuschneiden hätte, wobei sich auch eine Expansion einstellen könnte.

Wichtiger als diese Möglichkeiten sind die Vorgänge bei allmählich vergrößertem Gewicht. Alsbald nämlich gelangen wir an die Grenze, wo am Ende des 1. Leitrades die Schallgeschwindigkeit auftritt, und unsere unter dem neuen Winkel gezogene Schnittlinie die v^2-Kurve in B' berührt. Der Ausgangspunkt für die 2. Stufe ist dann B_1' (Abb. 289a) und die Schnittlinie der nun folgenden Stufe wird die v^2-Kurve wieder diesseits von B' in C' treffen, so daß wir gewissermaßen nicht vom Fleck kommen, d. h. den Kondensatordruck nicht erreichen können. Die Lösung dieses scheinbaren Widerspruches ist, daß hinter dem 1. Leitrad

eine Diskontinuität auftritt, d. h. daß sich dort ein unter dem kritischen Wert stehender Druck einstellt dem einer Expansion bis auf Punkt C in Abb. 289b entspricht. Da wir aber **nichterweiterte Leitkanäle** voraussetzten, wird am **Ende des Leitrades stets der Zustand B' vorhanden** sein, und die weitere Expansion wird sich, wie wir annehmen wollen, ganz im Spalt vor dem Laufrad vollziehen. Die Wahl des Punktes C ist an die Bedingung geknüpft, daß die verbleibende Auslaßgeschwindigkeit c_2 die Schallgeschwindigkeit überschreitet. Ist dies der Fall, so werden wir nämlich für die von C_1 unter dem Winkel φ_2 ausgehende Schnittlinie nicht mehr den ersten Schnittpunkt D_1, sondern den in der Verlängerung liegenden Punkt D_2 wählen, denn jetzt befinden wir uns gewissermaßen hinter dem engsten Querschnitt einer Düse und bleiben im Gebiete der Überschallgeschwindigkeit. Die so gewonnene Expansionslinie a in Abb. 289c entspricht dem kleinsten zulässigen Druckabfall hinter dem 1. Leitrad und führt in der Tat auf einen genügend tiefen Kondensatordruck.

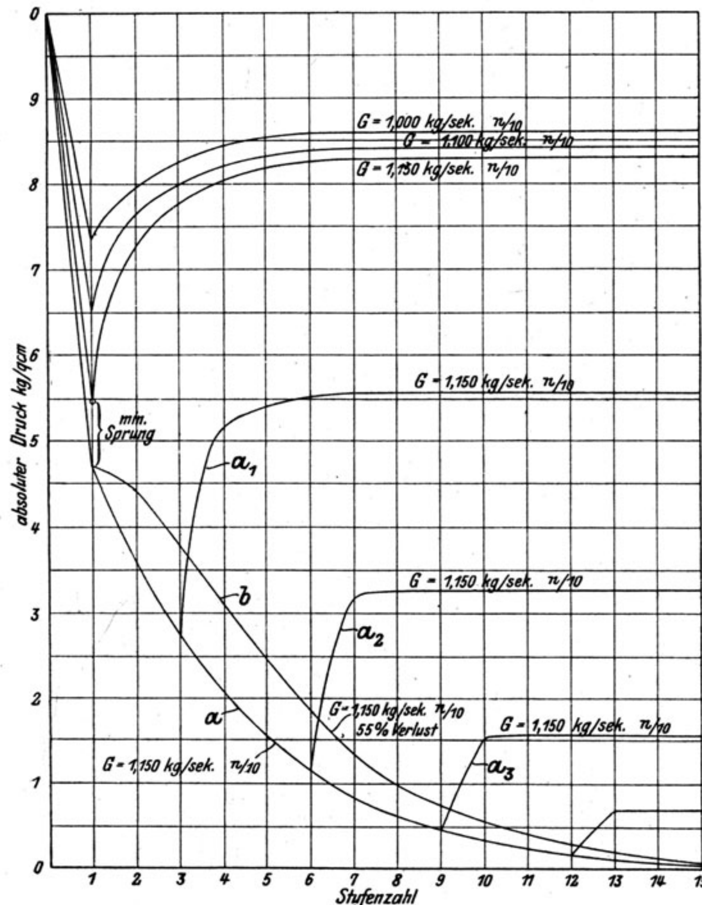


Abb. 289c. Theoretische Möglichkeit von Verdichtungen.

Da nun Überschallgeschwindigkeit herrscht, so versagt bei einer Erhöhung des Gegendruckes das Gesetz der Ellipse und es treten Erscheinungen auf, die denjenigen des Dampfstoßes in einer Düse gleich sehen. Wenn C_1 in Abb. 289a den Ausgangspunkt für eine bestimmte spätere Stufe bedeutet, so ist in der Tat die Fortsetzung stets bis zum Zustand D_2 oder aber D_1 zulässig. Der letztere bedeutet wieder eine Verdichtung, die wenigstens theoretisch ohne Stoß möglich ist, da die Leitschaufel einen sich verengenden Kanal bildet, wie die Überschallgeschwindigkeit c_2 fordert. Von D_1 an arbeitet man unter der Schallgrenze. So gelangen wir zu den ebenfalls rein theoretischen Schaulinien $a_1\, a_2\, a_3 \ldots$ der Abb. 289c.

Im Stillstand ist die Turbine, wenn wir an der reibungsfreien adiabatischen Zustandsänderung festhalten, vollends als Düse anzusehen, deren engsten Querschnitt in unserem Beispiel das erste Leitrad bildet und die mit zahlreichen Erweiterungen und Verengerungen versehen ist. Bei richtig eingestellten Winkeln wäre der Druckverlauf in den einzelnen Stufen einfach die Nachbildung der bei der Düse gewonnenen Schaulinien.

Sobald die Reibung in Betracht gezogen wird, ändert sich das Aussehen der Drucklinien, ohne grundsätzlich von dem Erörterten abzuweichen. Ein Beispiel bei normaler Umlaufzahl ist oben mitgeteilt worden und in Abb. 289c wurde die Drucklinie b auf Grund der Annahme durchkonstruiert, daß die Reibungsarbeit dem Quadrate der mittleren Geschwindigkeit proportional ist. Es wurde eine Zustandskurve probeweise angenommen und die Rechnung wiederholt, bis einigermaßen Übereinstimmung herrschte. Bis zum Zustand hinter dem 1. Leitrad ist adiabatische Expansion angenommen worden; die großen Widerstände setzen erst von hier ab ein. Es stellte sich heraus, daß die Reibungsarbeit bei $^1/_{10}$ der normalen Umlaufzahl auf etwa 55 v. H. des adiabatischen Gefälles anwächst, während sie normal mit 30 v. H. eingeschätzt war.

Die Gesamtzunahme des Dampfgewichtes von normaler Umlaufzahl bis zum Stillstand beträgt für unser Beispiel bei reibungsfreier Strömung 15 v. H. Bei einer Turbine Parsonsscher Bauart wird der Betrag mit Rücksicht auf die Reibung kleiner, weil hier eine ganze Gruppe gleicher Leit- und Laufräder den Anfang bildet, und nur das letzte Leitrad dieser Gruppe den „Minimalquerschnitt" der Düse bildet, mit der wir die Turbine vergleichen können. Die Reibung der vorhergehenden Stufen setzt aber die durchströmende Dampfmenge herab. So rechnet man praktisch mit nur etwas mehr als 5 v. H. Vermehrung vom Normallauf bis zum Stillstand.

f) Gleichzeitige Drosselung und Verringerung der Umlaufzahl.

Wird der Anfangs- und der Gegendruck einer Turbine bei unveränderter Umlaufzahl in gleichem Verhältnis verkleinert, so nimmt, wie wir eben angeführt haben, auch die sekundliche Dampfmenge und die Pressung in allen Zwischenstufen proportional ab Sei in Abb. 290 AB der alte und $A_1 B_1$ der neue Druckverlauf, so gilt für den Betrieb mit Drosselung die zu $A'B'$ ähnlich gelegene Ellipse der Dampfmengen $B_1' A_1'$. Das Vakuum wird bei kleinerer Belastung von selbst besser, indes nicht im Verhältnis der Anfangsdrücke, und wir werden nur etwa bis zum Drucke $B_0 B_2$ gelangen, dem der punktierte Druckverlauf und die Dampfmenge $B_2 B_2'$ entsprechen.

Bei der Schiffsturbine ist nun mit der Drosselung auch eine Abnahme der Drehzahl verbunden, so daß die Dampfmenge auf der neuen Ellipse $A_1' B_1''$ abzulesen ist.

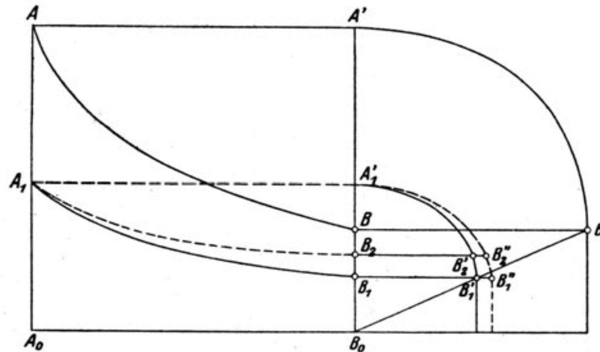


Abb. 290. Gleichzeitige Drosselung und Drehzahlabnahme.

Es stehen sich hier zwei entgegengesetzt wirkende Einflüsse gegenüber: die ungenügend tiefe Luftleere verkleinert, — die Abnahme der Drehzahl vergrößert die Dampfmenge. Wenn infolge Vorschaltens von Marschturbinen auch der Anfangszustand des Dampfes geändert wird, sind die Verhältnisse noch verwickelter. Wir behandeln im Abschnitt über die Schiffsturbine ein entsprechendes Beispiel in ausführlicher Weise.

69. Theorie des Einflusses der Luftleere auf den Dampfverbrauch. Beschränkter Nutzen einer Vertiefung unter die Schallgrenze.

Nachdem wir die aus der Beobachtung stammenden Berichtigungszahlen von Baumann über den Einfluß veränderter Luftleere kennen gelernt haben, bleibt noch übrig zu untersuchen, wie man sich hierüber in besonderen Fällen theoretisch Aufschluß verschaffen kann. Zu diesem Behufe ist es notwendig, sich vorhergehend klar zu werden über die

Vorgänge in der Laufschaufel.

Es sei in Abb. 291 eine Schaufel mit dem Anfangs- und Endquerschnitt F_1, F_2 und den Zwischenquerschnitten F_α, F_β . . . dargestellt. Wir wollen der Anschaulichkeit halber von der **Verdichtung durch die zentrifugalen Kräfte in der Krümmung absehen** und die Schaufel, wie in der Seitenansicht dargestellt, gewissermaßen durch einen geradlinigen Kanal ersetzen, was immer noch eine Annäherung an die wirkliche Zustandsänderung bilden wird, insbesondere für enge Kanäle. Abb. 292 links ist die Zustandsdarstellung im I-S-Diagramm, rechts die Darstellung im v-Quadratdiagramm. Die senkrechte Ordinate bildet in beiden das Wärmegefälle. Die in gleichen Abständen im I-S-Diagramm gezogenen Adiabaten $a\,b\,c$ . . . usw. erscheinen im v^2-Diagramm als vollgezogene Kurven $a\,b\,c$ . . .

Möge nun die Expansion von einem bestimmten Anfangszustand am Ende des zu der Schaufel gehörenden Leitkanales auf den Zustand A_1 geführt haben; die aus c_1 gewonnene relative Eintrittsgeschwindigkeit w_1 möge dem Gefälle $A_0 A_1$ entsprechen. Denken wir uns also den Dampf im Zustand A_0 in Ruhe, so wird er durch eine adiabatische Ausdehnung über das Gefälle $A_0 A_1$ die Geschwindigkeit w_1 erlangen. Um die in der Schaufel vor sich gehende Zustandsänderung zu erhalten, nehmen wir als bekannt an, daß die bis zu den Querschnitten $F_\alpha F_\beta \ldots F_2$ auftretenden Widerstände die Bruchteile $\zeta_\alpha \zeta_\beta \ldots \zeta_2$ des adiabatischen Gefälles ausmachen. Wir wollen nun zunächst für den **Zustand am Ende der Schaufel** einen **geometrischen Ort** angeben, indem wir eine Ausdehnung von A_0 aus so vor sich gehen denken, daß der Verlust für die ganze Dauer derselben ζ_2 ausmacht. Dieser geometrische Ort ist mit der Bezeichnung ζ_2 als Kurve in die beiden Diagramme eingezeichnet. Einen **weiteren geometrischen Ort** des Endzustandes bildet die von A_0 unter der Neigung $\operatorname{tg} \varphi_2 = F_2{}^2 : A\,G^2/2g$ gezogene Gerade. Wir nennen diese Gerade und die anderen, die sich auf die Querschnitte $F_1 F_\alpha$ . . . beziehen, der Kürze halber die $F_1 F_2 F_\alpha$ . . . Linien. Sie werden im I-S-Diagramm durch die Fanno-Kurven, die auch F-Linien heißen sollen, abgebildet. Der Schnitt der ζ_2 und F_2-Linien liefert den **richtigen Endzustand** B_2.

In ähnlicher Weise wird der Zustand im Querschnitte F_α festgestellt. Da nach Voraussetzung der Verlust $= \zeta_\alpha$ ist, konstruieren wir die zugehörigen Kurven in den beiden Diagrammen; der Schnittpunkt der F_α und der ζ_α-Kurve liefert uns den Zustand B_α. Ähnlich ergeben sich die Punkte B_β, $B_\gamma \ldots$, mithin die

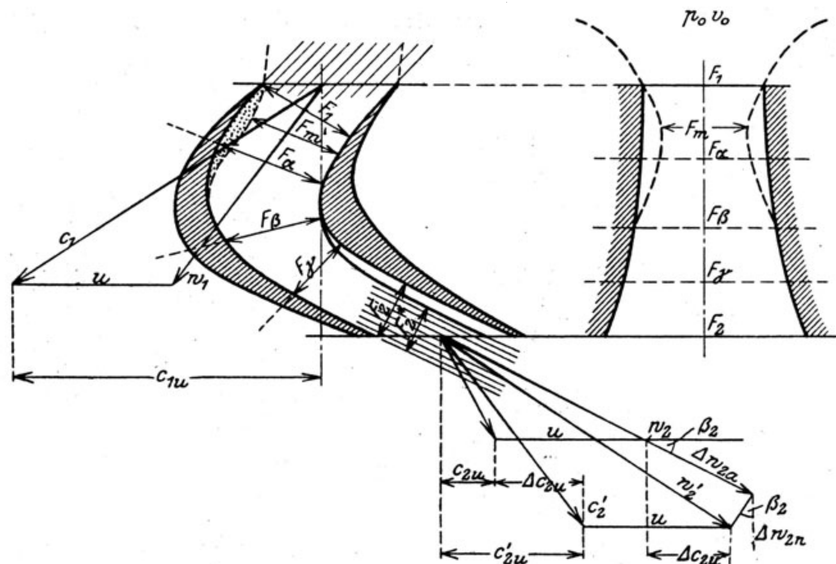


Abb. 291. Zustandsänderung und Ablösung oder Expansion im Schrägschnitt eines Schaufelkanals.

ganze Zustandskurve $B_1 B_2$. Diese Linie wird **mit der Linie $p_1 =$ konst. übereinstimmen,** die Schaufel wird also **eine Gleichdruckschaufel bilden,** falls bei bekannten $\zeta_\alpha\ \zeta_\beta \ldots$ die Querschnitte in richtiger Weise mit dem entsprechenden G und insbesondere der Austritt mit $w_2 = \psi w_1$ und $G v_2 = F_2 w_2$ berechnet war.

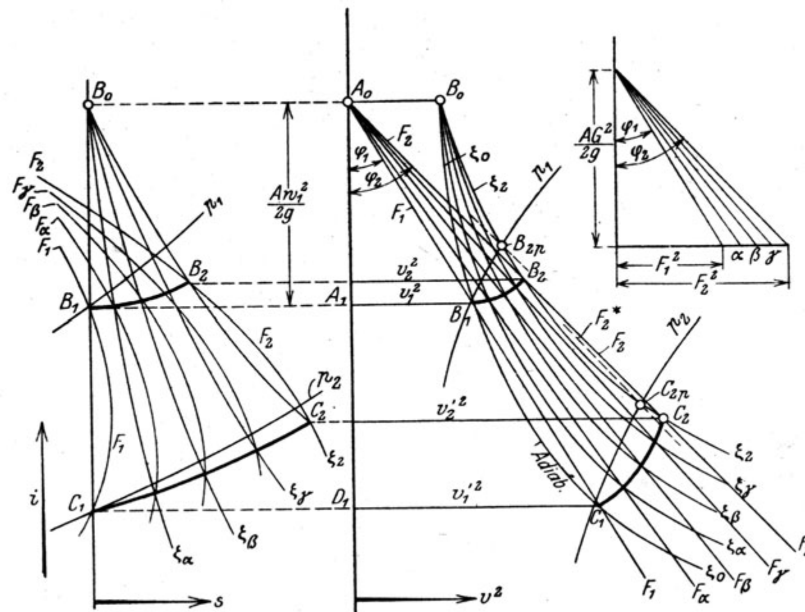


Abb. 292. Entropie und v^2-Schaubild für Zustandsänderung im Schaufelkanal.

Ist der wirkliche Endquerschnitt **kleiner, so tritt eine Verdichtung, im andern Falle eine Entspannung ein.** Auch wenn die Schaufel für einen bestimmten Anfangszustand A_1 für Gleichdruckwirkung bemessen war, wird sie nicht mehr mit Gleichdruck arbeiten, wenn sich der Anfangszustand ändert. Abb. 292 läßt erkennen, daß neben den vorhin betrachteten Schnittpunkten der F- und ζ-Linien noch je ein **weiterer Schnittpunkt** vorhanden ist, der wohl dem gleichen Anfangsquerschnitt aber einem andern Anfangszustand D_1 entspricht und demgemäß auf eine neue Zustandskurve $C_1 C_2$ führt. Außerdem ist jedoch noch eine **dritte Möglichkeit** vorhanden, nämlich eine **Strahlablösung in der Schaufel,** wie in Abb. 291 angedeutet wurde. Dann liegt gewissermaßen eine neue Schaufel vor mit dem **kleineren Austrittsquerschnitt** F_2*, und die Zu-

standsänderung muß vom Ablösungsquerschnitt (F_β) an eine solche bei unveränderlichem Drucke sein, der auch schon an der Ablösungsstelle herrscht. Sehen wir von der geringen Änderung der Widerstände ab, so ist die Ablösung an die Bedingnng geknüpft, daß der Endzustand auf die ζ_2-Kurve falle, und daß die Strömung mit einer Entropievermehrung und Querschnittsabnahme verbunden sei. In bezug auf die Zustandslinie $B_1 B_2$ kann diesen Bedingungen nur für einen kleineren Gegendruck als B_2 genügt werden, denn offenbar ist beispielsweise bei B_{2p} der erforderliche Querschnitt zu groß Hingegen ist bei $C_1 C_2$ jeder Gegendruck zwischen C_2 und C_{2p} zulässig.

Ein wichtiger **Sonderfall** entsteht, wenn, wie in Abb. 293 dargestellt, die Endpunkte der Zustandskurven $B_1 B_2$; $C_1 C_2$ zusammenfallen. Dies tritt ein, wenn die Linie F_2 den geometrischen Ort ζ_2 in K_1 berührt. Es ist wahrscheinlich, daß im Punkte K_1 auch die Zustandskurve und die F_2-Linie sich berühren. Wäre F_2 etwas kleiner als angenommen, so wäre der Schnitt von ζ_2 mit F_2 nicht mehr möglich, die Strömung könnte durch die gegebene Schaufel mit dem angenommenen Anfangszustand nicht vor sich gehen. Im übrigen ist, wie das J-S-Diagramm lehrt, nur die Strömung vom Anfangszustand B_1 nach K_1 möglich, hingegen die von C_1 aus nur bis zum Punkte K_2, weil sie vom Punkte K_2 an bis K_1 mit En-

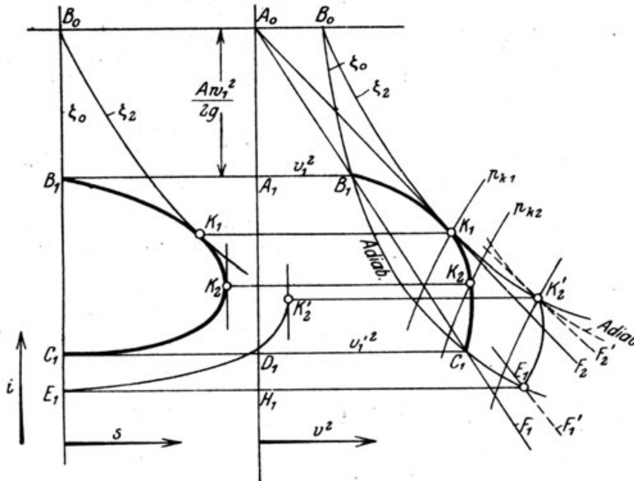


Abb. 293. Sonderfall zu Abb. 292.

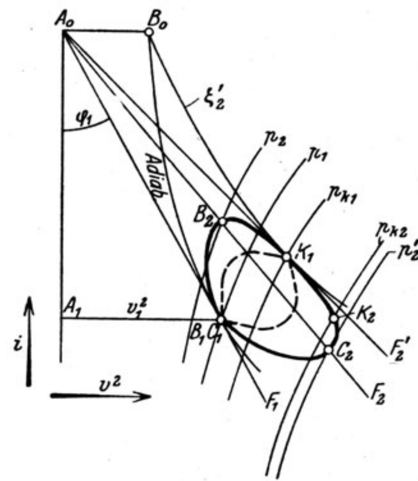


Abb. 294. Sonderfall zu Abb. 292.

tropieverkleinerung vor sich gehen müßte. Ist K_1 von B_1 aus erreicht, so bildet der zugehörige Druck p_{K_1} eine Art **kritischen Wert**. Wird der wahre Gegendruck kleiner gemacht als p_{K_1}, so kann ihm der Druck am Ende der Schaufel nicht mehr folgen, genau so wie der Druck in einer einfachen Mündung, sobald die kritische Pressung unterschritten wird. In ähnlicher Weise bildet K_2 und der zugehörige Druck p_{K_2} einen **zweiten kritischen Wert** für den Fall, daß die Zustandsänderung bei über der Schallgrenze liegender Eintrittsgeschwindigkeit mit einer Verdichtung von C_1 vor sich geht, und falls wir voraussetzen, daß die Schaufel im zugehörigen Querschnitt abgeschnitten würde. Bei maßstäblicher Darstellung muß die durch K_2 gehende v_2-Adiabate die Zustandslinie auch berühren. In der Nähe der kritischen Werte ist eine Strahlablösung unmöglich. Sobald wir für K_1 einen andern als den kritischen Druck p_{K_1} eingestellt denken, müßte nämlich beim Festhalten an der Widerstandslinie ζ_2, wie die Abbildung lehrt, der Austrittsquerschnitt vergrößert werden, was unmöglich ist. Bei K_2 ist eine Erhöhung über p_{K_2} wegen Entropieverkleinerung, und eine Erniedrigung wegen Querschnittsvergrößerung unmöglich.

Ein **weiterer Sonderfall** von Bedeutung entsteht, wenn die Querschnittslinie F_1 die vom Punkte B_0 ausgehende Adiabate berührt, d. h. wenn am Eintritt Schallgeschwindigkeit herrscht. Dann fallen die Anfangspunkte $B_1 C_1$ der Zustandslinien, wie in Abb. 294 in einen einzigen zusammen und es eröffnen sich dem Dampfe zwei Möglichkeiten. Die eine führt von B_1 nach B_2 zu dem höheren Drucke p_2, die andere von C_1 nach C_2 zum kleineren Druck p_2', d. h. es findet entweder eine Verdichtung oder eine Ausdehnung statt, ähnlich wie bei der Verzweigungsmöglichkeit der Druckkurven vom engsten Querschnitt der einfachen Düse ab. Das oben über Strahlablösung Ausgesagte gilt auch hier. Schließlich könnten für eine Schaufel mit dem Austrittsquerschnitt F_2' und einer Widerstandskurve ζ_2' die beiden Zweige im kritischen Punkte K_1 zusammentreffen, wobei, wie oben dargelegt, nur der Weg von B_1 über B_2 bis nach K_1 gangbar ist, der über C_2 jedoch beim kritischen Punkt K_2 halt machen muß. Im übrigen ist die Möglichkeit offen zu lassen, daß gemäß der punktierten Zustandslinie die Kurven sowohl in B_1 wie in K_1 einen Knick bilden und der zweite kritische Punkt K_2 nicht vorhanden ist. — Wir machen nun eine Anwendung dieser Darlegung auf den

Einfluß der Luftleere auf den Dampfverbrauch in Gleichdruckturbinen.

Es sei in Abb. 295 B_1 der Endzustand am Ende des letzten Leitkanales bei demjenigen Kondensatordruck p_{KB}, für den die Turbine berechnet ist. Demzufolge würde mit der Widerstandslinie ζ_{2B} und F_2 die Zustandskurve längs der Linie p_{KB} = konst. verlaufen.

a) Es möge nun der Druck im letzten Spalt zunächst um einen geringen Betrag abnehmen (der Kondensatordruck bestimmt sich durch das Nachfolgende). Durch Aufzeichnen der Dampfellipse gemäß Abschn. 68 kann die neue Linie des Druckverlaufs als Abhängige der Stufenzahl verzeichnet, daraus das Gefälle der letzten Stufe ermittelt werden. Dadurch wird man im Entropiediagramm auf den neuen Zustand C_1 am Ende der letzten Leitschaufel geführt und kann aus dem neuen Gefälle die neue absolute Geschwindigkeit c_1 und die neue relative Geschwindigkeit w_{1c} ermitteln. Wir tragen von D_1 das Gefälle $A w_{1c}^2/2g$ als Strecke $D_1 D_0$ ab und entwerfen die Adiabate von C_1 nach aufwärts. Projizieren wir D_0 wagerecht auf dieselbe, so erhalten wir den Anfangspunkt C_0 für die neue Widerstandslinie ζ_{2c}. Die Querschnittslinie F_1 wird, da sich die Dampfmenge nur unmerklich geändert hat, parallel zu $A_0 B_1$ sein. Indem wir nun von D_0 die Parallele zu $A_0 B_2$ ziehen, erhalten wir im Schnittpunkt dieser F_2-Linie mit ζ_{2c} den Endpunkt der neuen Zustandskurve C_2. Der sich ergebende Kondensatordruck p_{KC} ist unserer Annahme gemäß niedriger als der Spaltdruck bei C_1; je nach Umständen wird er höher sein, und vielleicht findet ein Ausgleich durch Strahlablösung statt. Aus Zustand C_2 kann die neue relative und absolute Endgeschwindigkeit, mithin der Wirkungsgrad der Turbine ermittelt werden. Es wird das ganze Gefälle wirksam gemacht; aber ein Teil geht durch die größere Auslaßenergie verloren.

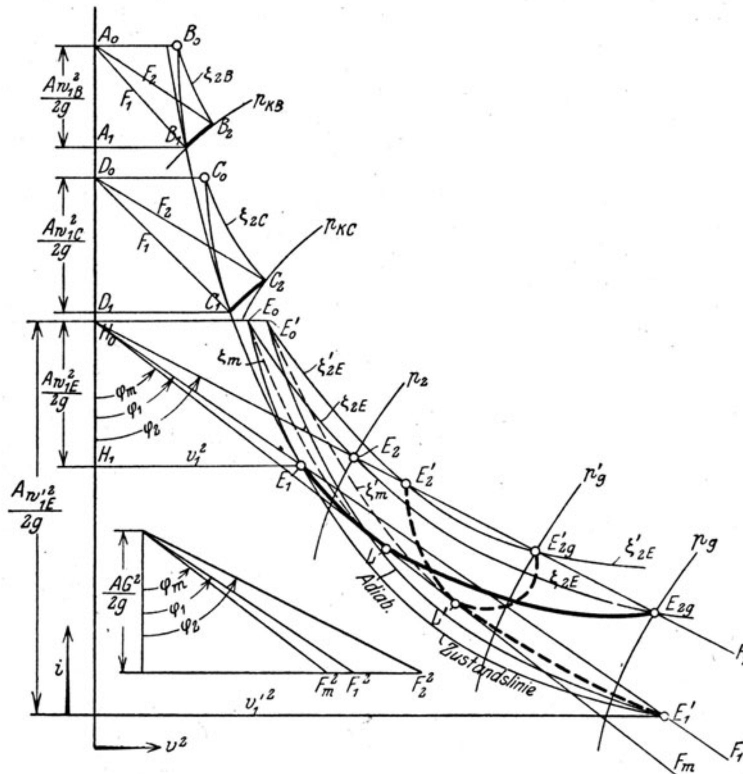


Abb. 295. Erniedrigung der Luftleere bei Gleichdruckschaufeln.

b) Annäherung an den Schallpunkt. Wir nehmen an, die Leitschaufel sei nicht erweitert, dann wird durch Steigerung des Gefälles die absolute Austrittsgeschwindigkeit schließlich die Schallgrenze erreichen. Überschreiten wir sie, so findet eine Strahlablenkung statt, oder falls sie schon vorhanden war (wodurch das oben Gesagte nicht beeinflußt wird), wird sie vergrößert. In gleichem Maße wächst auch die relative Geschwindigkeit w_1, und so können wir schließlich den Zustand, der in Abb. 293 mit C_1 bezeichnet ist, d. h. Überschallgeschwindigkeit, erreichen. Dabei ist zu beachten, daß der relative Eintrittsquerschnitt vor der Schaufel wegen der Ablenkung einen größeren Wert besitzt als früher. Hierauf kann in der Schaufel eine Verdichtung bis zum kritischen Punkt K_2 stattfinden. Eine weitere Erniedrigung des Kondensatordruckes unter dem Wert p_{K_2} beeinflußt den Zustand in der Schaufel nicht mehr. Sie ist indessen nicht ganz nutzlos wegen der **Weiterexpansion im Schrägabschnitt der Laufschaufel selbst.** Hierdurch wird, wie in Abb. 291 angedeutet wurde, ein Zuwachs Δw_{2a} in Richtung von w_2 und ein Zuwachs Δw_{2n} senkrecht hierzu hervorgerufen (s. Abschnitt 43). Es ergibt sich ein Zuwachs der absoluten Umfangskomponente im Betrage von

$$\Delta c_{2u} = \Delta w_{2a} \cos \beta_2 - \Delta w_{2n} \sin \beta_2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

somit vielleicht eine Leistungserhöhung trotz vergrößertem Auslaßverlust. Verglichen mit der vollständigen Ausdehnung innerhalb der entsprechend erweiterten Laufschaufel ergeben sich dieselben Verhältnisse wie bei der Ausdehnung im Schrägabschnitt der Leitschaufel. Bei kleinen Überschreitungen der Schallgrenze wird der Gewinn größer, bei größeren kleiner sein, als wenn die Expansion in der Schaufel stattgefunden hätte.

Ist die Strahlablenkung so stark, daß ein merklicher **Stoß auf den Schaufelrücken** stattfindet, wie in Abb. 291 durch die punktierte Linie angedeutet wurde, so ist der Strahl gezwungen, sich auf einen gewissen **engsten Querschnitt F_m einzuschnüren.** Dies beeinflußt die Zustandsänderung folgendermaßen. Es sei E_1 Abb. 295 der Zustand im Spalt. Die zugehörige relative Geschwindigkeit ergibt die Gefällshöhe $H_0 H_1 = A w_{1}^{2}{}_{E}/2g$. Durch Ziehen der Adiabate vom Zustandspunkt E_1 nach E_0 hinauf gelangen wir zum Anfangspunkt der Widerstandslinien. Die Neigung φ_1 muß mit der aus der Neigung von w_{1E} im Geschwindigkeitsdreieck folgenden Querschnittsgröße übereinstimmen. Der Minimalquerschnitt F_m muß rein geschätzt werden, und ergebe demgegenüber die Neigung φ_m. Die Grenze für die Drucksenkung wird erreicht, wenn dieser Querschnitt die ihm zugehörende Widerstandslinie ζ_m berührt. Dies möge im Punkte L stattfinden. Dann kommt diesem Punkt die Bedeutung des vereinigten Punktes $B_1 C_1$ in Abb. 294 zu. Es eröffnen sich die Möglichkeiten der (nicht eingezeichneten) Verdichtung nach E_2, als der obere Schnitt von F_2 mit ζ_2 oder der der Ausdehnung nach E_{2g} als unterer Schnitt von F_2 und ζ_m. Der zu letzterem Punkt gehörende Kondensatordruck p_g ist für den angenommenen Anfangszustand E_1 die tiefste am Schaufelende mögliche Spannung. Es besteht jedoch noch eine zweite Lösung der Aufgabe, falls die Geschwindigkeit w_1 die Schallgrenze überschritten haben sollte, so daß der Zustand im Spalt nicht durch E_1, sondern durch Punkt E_1'

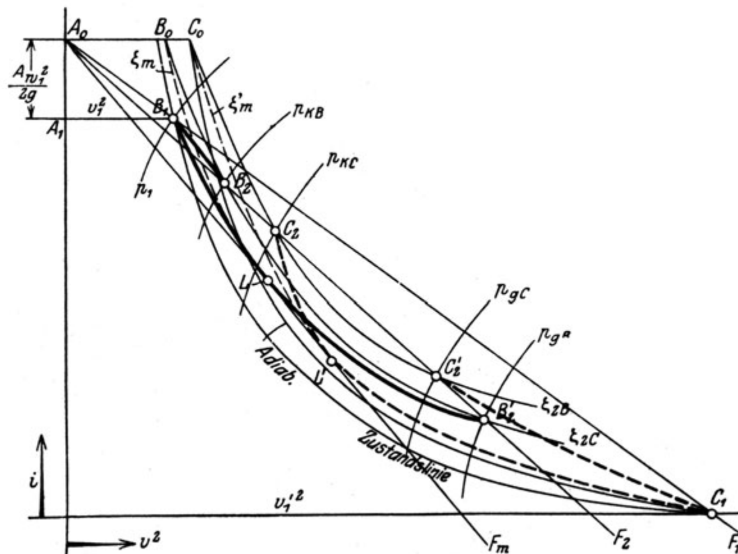


Abb. 296. Überdruckschaufel.

dargestellt wird. In diesem Falle wird durch die von E_1' nach aufwärts gehende Adiabate E_0' als der Anfangspunkt für die Widerstandslinien bestimmt und es wird, mit demselben Minimalquerschnitt gerechnet, ein anderer Schallpunkt L' sich ergeben, so daß zwischen Spalt und Minimalquerschnitt eine Verdichtung vor sich geht. Von da an führen zu den neuen Schnittpunkten $E_2' E_{2g}'$ von ζ_{2E}' und F_2 die beiden punktiert angegebenen Wege.

Der sich so ergebende zweite Grenzdruck p_g' ist wegen der höheren Lage von ζ_{2E}' gegen ζ_{2E} stets höher als p_g. Die Möglichkeit dieser beiden Strömungsarten wird sich bei einem einzigen Zustand E_1 oder E_1' ergeben. Wir können nämlich die Schaufel, wie in Abb. 291 angedeutet, durch einen „gleichwertigen" geradlinigen Kanal ersetzen, der nach vorn verlängert den Dampf mit dem Anfangszustand E_0 (ruhend) empfängt, und zunächst durch adiabatische Expansion bei E_1 die Geschwindigkeit w_{1E} erzeugt, und in welchem der Dampf nun mit Widerstand weiterströmend an der engsten Stelle bei L die „Schallgeschwindigkeit" erreicht, um bis E_{2g} fort zu expandieren. Das größte Gewicht, das durchfließen kann, ist $G_{sek} = \chi F_m \sqrt{p_0/v_0}$. Nach der Dampfellipse in G vom Druck im Spalt, also auch von p_0 abhängig, v_0 durch die Zustandslinie ebenfalls, F_m wegen der Ablenkung von c_1 desgleichen; also bildet obige Beziehung eine Bestimmungsgleichung für p_0, die indessen nur graphisch auf dem geschilderten Wege (durch die Durchrechnung von mindestens zwei Zuständen und Interpolation) gelöst werden kann.

Ist der wirkliche Kondensatordruck noch tiefer, so kommt die Spaltexpansion im Laufschaufelende und die Erhöhung der Umfangskomponente der Geschwindigkeit nach Gleichung (1) in Betracht.

c) Einfluß der Luftleere auf den Dampfverbrauch der Überdruckturbine. Das Kennzeichen der Schaufel für Überdruck ist, daß der Austrittsquerschnitt kleiner als der Eintrittsquerschnitt ist. Bei manchen Formen tritt zwischen den Endquerschnitten eine Einschnürung auf, d. h. ein Minimalquerschnitt F_m. Demgemäß ergeben sich für die Zustandslinien an Hand der Abb. 296 folgende Möglichkeiten. Der Endzustand am Ende der letzten Leitschaufel sei B_1. Tragen wir wieder das Gefälle $A_1 A_0 = A w_1^2/2g$ auf und entwerfen wir die Adiabate von B_1 nach aufwärts, so liefert ihr Schnittpunkt mit der Wagrechten

durch A_0, wie schon oben erläutert, den Anfangspunkt B_0 für die Widerstandslinien. Ist kein engster Querschnitt vorhanden, so ist der Schnittpunkt von F_2 mit ζ_{2c} der Endzustand B_2, der, wie ersichtlich, mit einer Ausdehnung verbunden ist. Eine zweite Lösung tritt auf, wenn der Anfangszustand auf der für die Turbine maßgebenden Zustandslinie in der Verlängerung von F_1 in C_1 liegt, d. h. bei Eintritt mit Überschallgeschwindigkeit. Dann gilt auch der zweite Schnittpunkt von F_2 und ζ_{2c}, d. h. B_2' als Endzustand, der durch eine Verdichtung beim Druck p_{gB} erreicht wird.

Ist ein **engster Querschnitt vorhanden,** so wird im ersten Fall der darin befindliche Zustand als Berührungspunkt L der mit der Widerstandszahl ζ_m konstruierten Widerstandslinie und F_m ermittelt. Von da an tritt wieder entweder eine (nicht gezeichnete) Rückverdichtung nach C_2 oder eine weitere Ausdehnung zum Schnittpunkte C_2' von ζ_{2B} (welches größer ist als ζ_{2c}) und F_2 ein. Auch für C_1 als Anfangszustand kann F_m erreicht werden, aber die Widerstandslinie ζ_m' ist vom Punkte C_0 aus zu konstruieren und liefert einen andern Berührungspunkt L' mit Linie F_m. Die Zustandsänderung geht nun zunächst von C_1 nach L', von da entweder mit Verdichtung (punktiert) nach C_2, oder (nicht gezeichnet) mit Expansion nach C_2' zurück. Freilich sollte, streng genommen, für diesen Fall ζ_{2B} noch mehr vergrößert werden.

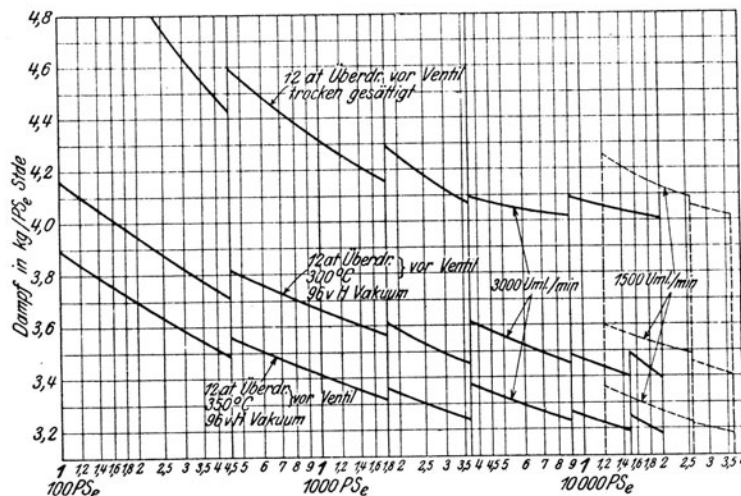


Abb. 297. Dampfverbrauch großer und kleiner Einheiten.

Wird der Kondensatordruck erniedrigt und ist keine engste Stelle vorhanden, so rücken alle Zustandspunkte um einen gewissen Betrag tiefer hinab. Eine Grenze für diese Erniedrigung bildet jene Lage, wo Linie F_2 die Widerstandslinie ζ_2 berührt. Dann herrscht am Ende der Laufschaufel die entsprechende Schallgeschwindigkeit, und ein „kritischer" Druck, der nicht unterschritten werden kann. Beim Vorhandensein eines Mindestquerschnittes ist das Eintreten der Berührung zwischen den Linien ζ_m und F_m bereits der Grenzzustand selbst. Man kann den Kondensatordruck noch weiter erniedrigen und dadurch, wie besprochen, eine Ausdehnung im Schrägabschnitt der Laufschaufel veranlassen.

69a. Dampfverbrauch und Gewichte von Turbinen gleicher Bauart, aber verschiedener Leistung.

Je größer die Turbine, desto mehr treten die nebensächlichen Widerstände, wie Rad-, Lagerreibung und Undichtheit gegen die Nutzleistung zurück und der Verlust beschränkt sich auf die eigentliche Schaufelreibung und die Auslaßenergie. Große Einheiten werden daher einen günstigeren spezifischen Dampfverbrauch aufweisen, wie beispielsweise in Abb. 297 nach Angaben der A.-G. Escher Wyss & Co., Zürich, dargestellt ist.

Der Verbrauch G_e ist in logarithmischem Maßstab aufgetragen, und liefert, wie ersichtlich, nahezu Gerade als Schaulinien, daher der Zusammenhang zwischen G_e und N_e durch ein Potenzgesetz dargestellt werden könnte. Die Figur lehrt auch, um wieviel die Einheiten mit hohen Umlaufzahlen wirtschaftlicher sind als die langsam laufenden.

Über die Gewichte verschieden großer Einheiten, auf die eff. PS-st bezogen, gibt die nachfolgende Zahlentafel Auskunft. Als grobe Näherung kann bei 1500 Umdr./min über

20000 PS das Gesamtgewicht durch die Formel

$$G = 130000 + 8\,N_{eff}$$

wiedergegeben werden. Bei 3000 Umdr./min und über 5000 PS kann

$$G = 40000 + 6\,N_{eff}$$

als Annäherung gelten. Im einzelnen gelten nach zwei Quellen folgende Angaben

Gewichte von Gleichdruck-Dampfturbinenanlagen in kg für 1 PS_e.

		Drehzahl 3000/min					Drehzahl 1500/min		
Leistung	PS	100	1000	5000	10000	20000	20000	30000	50000
Turbine allein	A	50	9,5	4,0	3,0	2,2	4,5	4,0	3,5
	B	—	11,0	6,0	4,0	3,0	6,5	5,5	3,5[1])
Stromerzeuger allein	A	15	9,5	5,5	4,5	3,5	4,3	4,0	3,5
	B	—	9,0	5,0	4,2	3,2	5,0	4,2	3,2
Kondensator mit Zubehör	A	40	9,5	4,0	3,4	2,5	(4,3)	(3,8)	(3,8)
	B	—	10,0	5,0	4,3	3,0	4,3[2])	3,8[2])	3,8[2])
Insgesamt kg/PS_e	A	105	28,5	13,5	10,9	8,2	13,1	11,8	10,8
	B	—	30,0	16,0	12,5	9,2	15,8	13,5	10,5

Über Vorkriegspreise gab Hoefer in der Zeitschr. f. d. gesamte Turbinenwesen 1913 eine lehrreiche Zusammenstellung. Man kann ihr die vielleicht wieder geltende Regel entnehmen, daß der Anteil der Turbine, des Stromerzeugers und der Oberflächenkondensation mit Zubehör bei größeren Einheiten

45, bzw. 30, bzw. 25 v. H.

der Gesamtanlagekosten ausmachten.

[1]) Drehzahl 1000. [2]) Zwei Kondensatoren.

V. Konstruktion der wichtigsten Turbinenelemente.

70. Leit- und Laufschaufeln.

1. Praktisch übliche Schaufelformen.

Für die praktische Ausführung kommt nicht einseitig der beste Dampfwirkungsgrad in Betracht; man muß vielmehr mit den Gesamtkosten rechnen, und diese gebieten, daß das Gewicht der Turbine gewisse Grenzen nicht überschreite. Wenn also etwa eine 100 mm breite Schaufel einen etwas besseren Wirkungsgrad liefert als eine solche von 25 mm, so wird man doch nicht die erstere wählen, da sie zu schwere Räder, zu große Lagerdistanz, schwere Wellen usw. bedingen würde.

Bei **Leitschaufeln** ist die Herstellung aus Blech sehr allgemein, daher bleibt die Stegdicke unverändert und die Schaufelform wird mit ziemlich willkürlicher Krümmung vom Eintrittswinkel zum Austrittswinkel übergeführt.

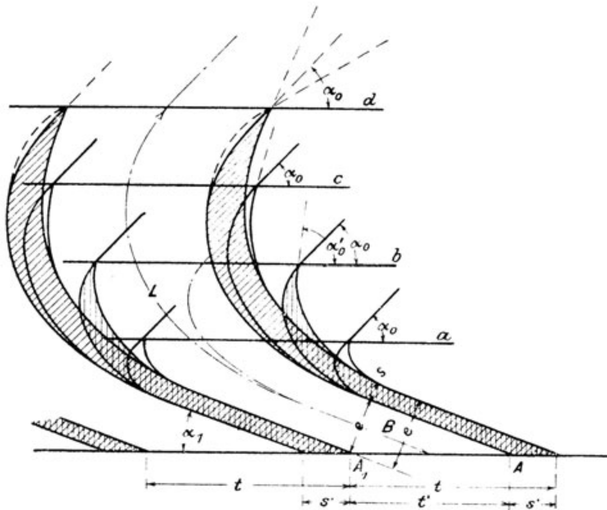


Abb. 298. Leitkanalform.

Sind die Stufen durch Zwischenwände getrennt, so ist meist genügend Raum vorhanden, um ganz breite Leitschaufeln auszuführen, was die Praxis von Anfang an ausgenützt hat. Wir finden Teilungen von 20—25 mm und mehr. Als mittlere Ausführungsform wird Beispiel *b* oder *c* in Abb. 298 gelten können, während *a* zu scharf gekrümmt ist, *d* nutzlos langen Dampfweg bietet. Die Austrittseite soll mit großer Sorgfalt behandelt werden, damit genügend lange geradlinige Führungsstrecken vorhanden seien.

Bei radialen Turbinen gilt für freie Strömung (wie wir später begründen) das Gesetz $r c_u =$ konst. und, sofern dieselbe zwischen zwei zur Achse senkrechten Ebenen vor sich geht, für unelastische Flüssigkeiten auch $r c_r =$ konst. (wo c_r die radiale Geschwindigkeit bedeutet), daher ist das Verhältnis $c_r : c_u$ auch = konst., d. h. die resultierende Geschwindigkeit bildet mit dem Leitstrahl einen unveränderlichen Winkel, wir müssen das Schaufelende nach einer logarithmischen Spirale formen.

Will man vollkommen zusammenhängenden Dampfstrahl erhalten, so müssen die Leitschaufelstege zugespitzt und die Seitenwände entsprechend konvergent geformt werden.

Für den Eintritt wird hie und da die Neigung des Schaufelrückens α_0 der Neigung des eintretenden Strahles gleichgemacht. Die hohle Kante weist dann einen Winkel $\alpha_0' > \alpha_0$ und einen Stoß auf, der weniger schädlich wirken kann, als eine eventuelle Ablösung des Strahles vom Schaufelrücken bei zu scharfer Krümmung.

Im allgemeinen sollte α_0 die Spitze der Schaufel halbieren.

Eine **Laufschaufel** für Überdruck, die nach Engineering 1906, II, S. 511, der von Parsons benutzten Originalform entspricht, ist in Abb. 299 dargestellt. Als Einheit ist die mittlere Strahldicke gewählt. Hier ist die Geradlinigkeit des Auslaufes zugunsten einer Verringerung der Stegdicke aufgegeben. Abb. 299a ist eine verwandte Form, bei der im Einlauf tunlichst lang eine kleine Geschwindigkeit angestrebt wird. In der Tat ist es

bei Überdruck nicht bloß zulässig, sondern zweckmäßig, den Dampf sehr plötzlich zu beschleunigen, um nur auf kurze Strecken reibungverursachende hohe Geschwindigkeiten zu haben. Dabei konzentriert sich auch die Arbeitsabgabe auf diese Kanalstrecke, was in keiner Weise ein Nachteil ist. **Da die relative Reibungsarbeit zugleich absoluter Verlust ist, haben wir für die Laufschaufel nur die relative Bewegung zu prüfen und diese so einzurichten, daß sie mit möglichst geringem Reibungsverlust vor sich geht.** Indes hat Profil

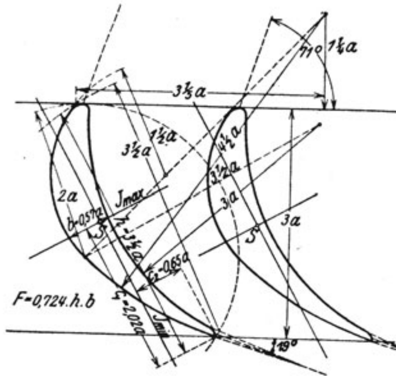


Abb. 299. Überdruckschaufel.

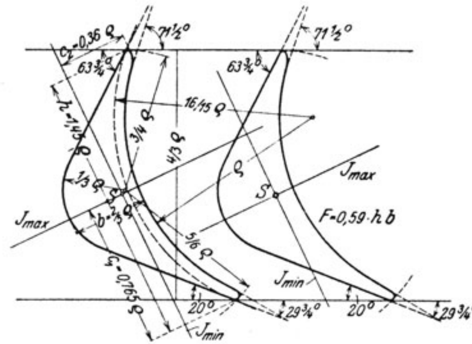


Abb. 299a. Überdruckschaufel.

Abb. 299a doch den Nachteil, daß im Übergang ein deutliches Minimum des Querschnittes vorhanden ist, daher der Dampf wie bei einer Düse mit Diffusor nutzlos tief expandiert und wieder verdichtet wird (s. Abb. 141). Dies wird bei der Parsonsschen Form nicht eintreten, da der Kleinstwert außerhalb des Kanales liegt. Als Austrittsrichtung bei diesen auseinanderstrebenden Strahlrändern wird man wohl das Mittel der beiden Winkel nehmen müssen.

Die große Stufenzahl der Parsonsturbine zwingt zur Anwendung sehr kleiner Schaufelbreiten und zwar am Hochdruckteil bis hinab auf 6 mm Breite bei etwa 4,2 mm Teilung. Dann etwa 10 mm Breite und 6 mm Teilung bis hinauf auf 25 mm Breite mit 14 bis 16 mm Teilung.

Die Form der Gleichdruckschaufel wie sie beispielsweise die General Electric Company ausführt, wird durch Abb. 299b veranschaulicht.

Von der durch O_1 gelegten Lotrechten tragen wir die vorgeschriebenen Winkel β_1 und β_2 ab und beschreiben mit dem Halbmesser der Krümmung ϱ die hohle Seite AB. Dabei ist die Schaufelbreite $b_0 = \varrho\,(\cos\beta_1 + \cos\beta_2)$, woraus ϱ bei gegebenem b_0 berechnet werden kann. Die Teilung, die etwas kleiner als ϱ gewählt wird, liefert das Nachbarprofil A_1B_1. Man trägt nun die Stegdicke s_1 am Eintritt etwa 0,3—0,5 mm und die am Austritt $s_2 =$ etwa 0,5—1 mm ab und sucht die Winkelhalbierende g der durch A_2 und B_2 unter den Winkeln β_1 und β_2 gezogenen Geraden. Der Auslauf muß geradlinig begrenzt werden bis mindestens zum Punkte B_3, der B gegenüberliegt, also liefert die Verlängerung BB_3 auf g den Mittelpunkt O_2 für den inneren Kreisbogen A_3B_3. Hierdurch sind die Kanalweiten am Ein- und Austritt e_1, e_2 gegeben, und man erhält die Längen a_1, a_2 aus den Querschnitten f_1, f_2, die wieder aus der Stetigkeitsgleichung $Gv_1 = f_1 w_1$; $Gv_2 = f_2 w_2$ folgen. Man sorgt dafür, daß der Querschnitt stetig von f_1 in f_2 übergeht. Eine Kontrolle des Zwischenzustandes wäre bei den verwickelten Verdichtungserscheinungen außerordentlich umständlich. An Stelle der gebrochenen Linie $D_0D_1D_2D_3D_4$ wird eine schiefe Gerade von D_0 nach D_4 durchgezogen. Die aus Blech von unveränderlicher Dicke gebogene Schaufel braucht nicht weiter beschrieben zu werden. Oft wird nur der Eintrittsrand zugeschärft, und zwar auf der Außenseite.

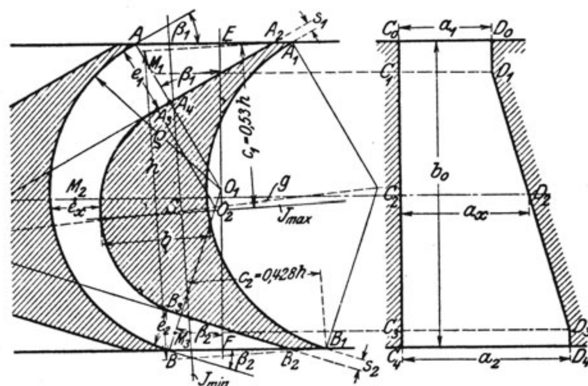


Abb. 299b. Gleichdruckschaufel der G. E. Co.

Als Schaufelbreite finden wir bei der Ljungströmturbine den sehr kleinen Mindestwert von 5 mm vor. Bei normalen Gleichdruckturbinen schwankt sie zwischen 15 bis

25 mm, letzteres bei Längen von über 250 mm. Ganz große Ausführungen mit Längen bis 600 mm erhalten bei Gleichdruck 30 bis 35 mm breite Schaufeln. Bei Überdruck und kleinerer Umfangsgeschwindigkeit bleibt man bei 25 mm Breite, versieht die Schaufel jedoch mit mehreren Drahtbindungen (s. u.)

Zu den Schaufelformen Abb. 299—299b sind die Flächeninhalte F, die Hauptträgheits- und Widerstandsmomente J, W berechnet und auf die in den Bildern kenntlich gemachte „Breite" b und „Höhe" h (in Richtung der Hauptachsen gemessen) bezogen worden, gemäß den Gleichungen $J_{max} = \alpha_1 b h^3$; $J_{min} = \alpha_2 h b^3$; $W_1 = J_{max} : c_1 = \beta_1 b h^2$; $W_2 = J_{min} : c_2 = \beta_2 h b^2$; $F = \gamma b h$. Die Verhältniszahlen $\alpha_1 \ldots \gamma$ sind in nachfolgender Zahlentafel zusammengestellt.

Verhältniszahlen für die Hauptträgheits-, die Widerstandsmomente und den Schaufelquerschnitt.

Schaufeln nach Abb.	α_1	α_2	β_1	β_2	γ
299	0,0418	0,111	0,0724	0,0980	0,718
299a	0,0278	0,0775	0,0524	0,0855	0,588
299b	0,0432	0,118	0,0815	0,0954	0,756

2. Konstruktion und Befestigung der Laufschaufeln für hohe Umfangsgeschwindigkeit.

Für Räder mit hoher, d. h. über 150 m gelegener Geschwindigkeit hat de Laval die musterhafte in Abb. 300 dargestellte Konstruktion geschaffen. Die Schaufeln werden au

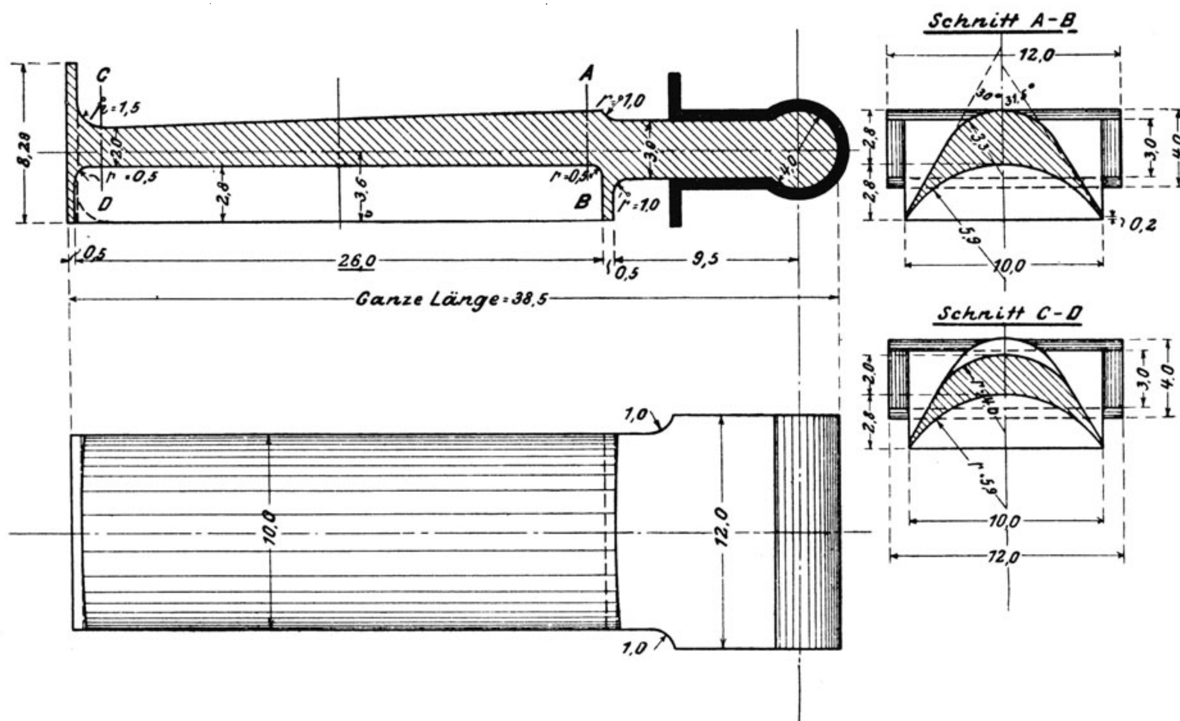


Abb. 300. Leitschaufel von de Laval.

Flußstahl gepreßt, auf Kaliber gefräst und in der Nute leicht verstemmt. Der Grundsatz der Vertauschbarkeit ist streng gewahrt und die Kosten für die Erneuerung eines Schaufelsatzes nicht groß. Die Schaufeln besitzen am äußeren Ende Ansätze, die sich gegenseitig berühren und einen geschlossenen Begrenzungsring bilden. Die Stege sind stark verdickt, um angenähert unveränderlichen Durchfluß zu gewahren. Man wird sie nach obenhin verjüngen, um die Fliehkraft zu vermindern, erhält aber weniger gute Dampfführung (siehe Schnitt AB und CD, Abb. 300). Die Konstruktion ist für die höchsten bisher erreichten Geschwindigkeiten (etwa 430 m/sek) geeignet, indessen in der Anwendung auf Einzelräder, die von der Seite zugänglich sind, beschränkt.

Die Entwicklung der Schaufelkonstruktion für eine moderne Turbine zeigen die in Abb. 301 u. f. nach Lasche[1]) dargestellten Schaufeln der Allgem. Elektrizitäts-Gesellschaft, Berlin.

Der ursprünglich benützte einfache Schwalbenschwanz wurde durch einen Gegenschwalbenschwanz, Abb. 301, ersetzt. Ein Ansatz am äußeren Ende diente zum Vernieten des die Schaufel

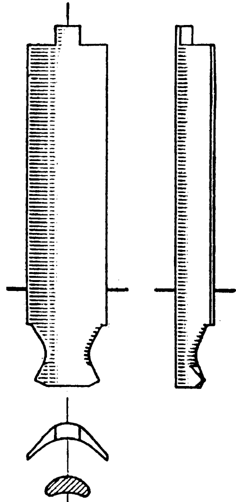


Abb. 301. A.E.G.-Schaufel mit überhöhtem Zwischenstück.

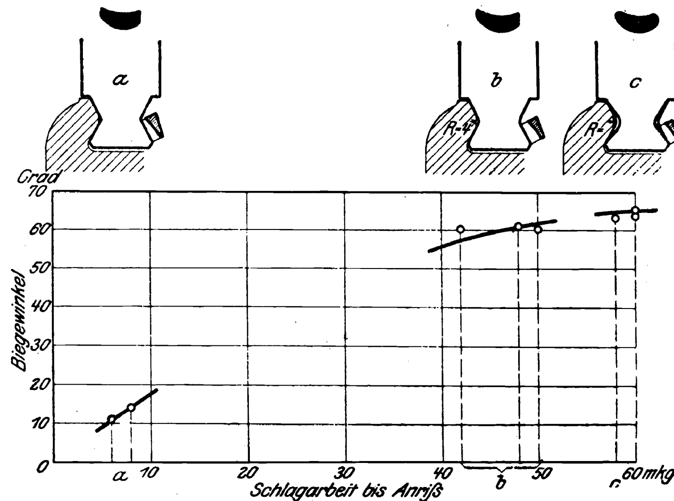


Abb. 301 a. Zunahme der Schlagarbeit nach Rundung aller Kanten.

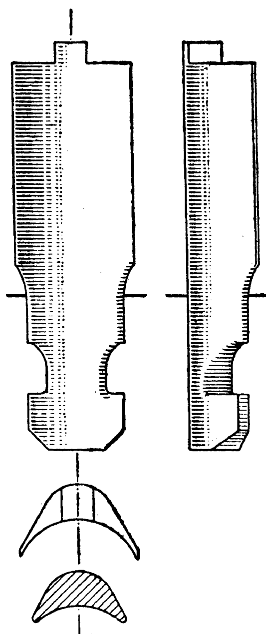


Abb. 301 b. Aussparung an den Schaufelkanten.

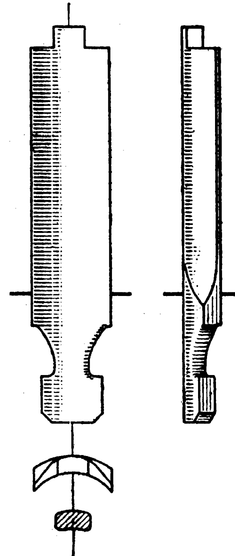


Abb. 302. Verstärkung des Schaufelfußes.

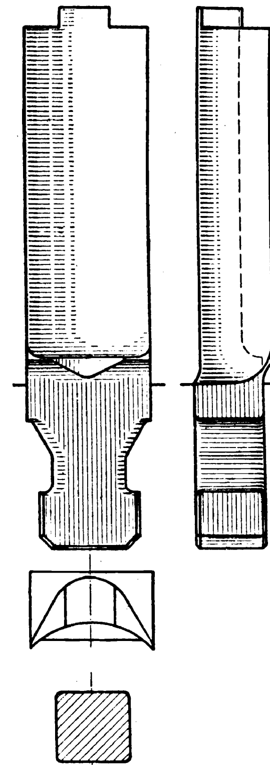


Abb. 303. Aus einem Stück mit der Beilage gefräste Schaufel der A.E.G.

überdeckenden Stahlbandes. Der Abstand der Schaufeln wurde durch Einlegen von entsprechend geformten Zwischenstücken in die Kranznute gewahrt. Als es notwendig wurde, zu längern Schaufeln überzugehen, zeigte sich der Einspannungsquerschnitt, da die Schaufel nur auf der Höhe des Schwalben-

[1]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1918, S. 583.

schwanzes eingespannt war, als zu schwach. Einen Fortschritt ergab die Anwendung des „überhöhten" Zwischenstückes, weil die Schaufel tiefer gefaßt und der eingeschnürte Querschnitt der Biegungsbeanspruchung sozusagen ganz entzogen wurde. Wertvoll sind die Mitteilungen Lasches über Schlagversuche, Abb. 301a, bei denen der Schaufelfuß bis zum engsten Querschnitt eingeklemmt und der Schlag auf die hohle Seite senkrecht zur Schaufellänge ausgeübt wurde. Die mit *a* bezeichnete Schaufel besaß scharfe Ränder und hielt eine Schlagarbeit von nicht ganz 10 m/kg bis zum Anriß aus. Bei der Schaufel *b* war die Einschnürung mit einem Halbmesser $R = 4$ mm abgerundet. Die Schlagarbeit steigt auf das 4—5fache, und als schließlich auch noch im Querschnitt, der in *c* schwarz angedeutet ist, die Ecke abgerundet wurde, stieg die Schlagarbeit in überraschender Weise weiter auf 60 m/kg bei entsprechender Erhöhung des Biegewinkels.

Es zeigte sich indes, daß im Betrieb die schwachen Ein- und Austrittsschenkel der Schaufel, da wo sie aus dem Füllstück heraustreten, leicht Anrisse zeigten. Dem wurde durch Aussparung an

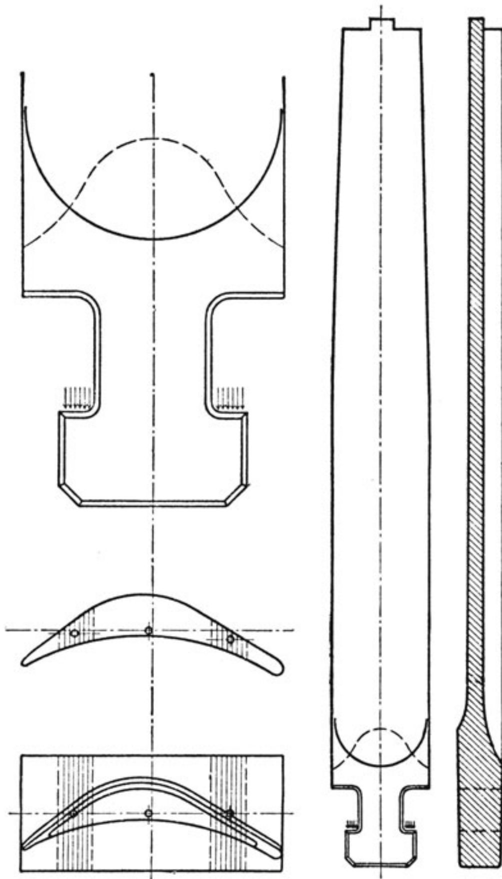


Abb. 305. In der Breitenrichtung verjüngte Schaufel der A.E.G.

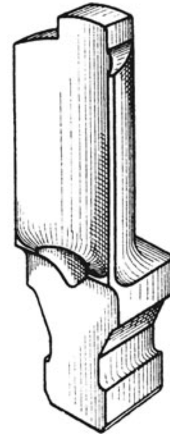


Abb. 304. Aus dem Vollen gefräste Schaufel der A.E.G.

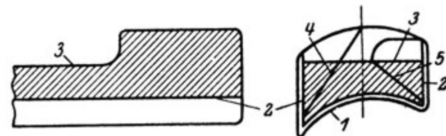


Abb. 306. Vorfräsen einer Schaufel.

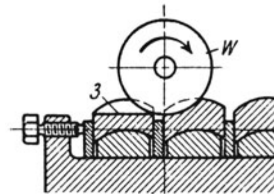


Abb. 307. Rückenvorfräsen.

jenen Kanten gemäß Abb. 301b begegnet. Der im Grundriß dieser Abbildung sichtbare Unterschied zwischen dem früheren und jetzigen tragenden Querschnitt legt die Vermutung nahe, daß die stark vorstehenden Schenkel das Trägheitsmoment nur unerheblich vergrößerten, während der Abstand der äußersten Faser und dadurch deren Biegungsbeanspruchung wesentlich größer wurden, ähnlich wie die Versteifung einer Platte durch schmale schwache Rippen die Biegungsbeanspruchung erhöhen kann. Bei weiterer Erhöhung der Leistung und entsprechend größeren Schaufellängen wurde die Schaufel nach Abb. 302 aus einem gezogenen Profil durch Abfräsen an den Kanten hergestellt, was eine erheblich größere Stärke des tragenden Fußes gibt. An diesem ist bereits der Schwalbenschwanz (wie auch schon in Abb. 301b) durch den sogenannten Hammerkopf ersetzt, der auf den Radkranz keine Seitendrücke, sondern bloß noch radialen Zug ausübt. Der schließliche und letzte Fortschritt besteht im **Fräsen der Schaufeln aus einem Stück,** gemäß Abb. 303 und 304. Im Interesse der leichten Bearbeitung ist der Fuß, wie ersichtlich, mit ebenen (radial stehenden) Stirnflächen ausgeführt. Mit besonderer Sorgfalt wurde der Einspannungsquerschnitt in den eigentlichen Schaufelquerschnitt übergeführt. Während bei dem, in der Abb. 303 vorhandenen Verhältnis von Schaufellänge zu Breite die Verwendung der aus einem Stück gefrästen Schaufeln mehr durch Rücksicht auf minder tragfähiges Material (Kriegszustände) veranlaßt war, so ist bei langen Schaufeln und hoher Umfangsgeschwindigkeit diese Ausführungsart nicht mehr zu

umgehen, s. Abb. 305. Die Verringerung des Fliehkraftzuges wird hier durch eine Verjüngung der Schaufel in der Breitenrichtung erzielt, wobei besonders Gewicht auf die gemeinsame Schwerpunktsachse gelegt wird, so daß die Fliehkraft reinen Zug und keine Biegung erzeugt.

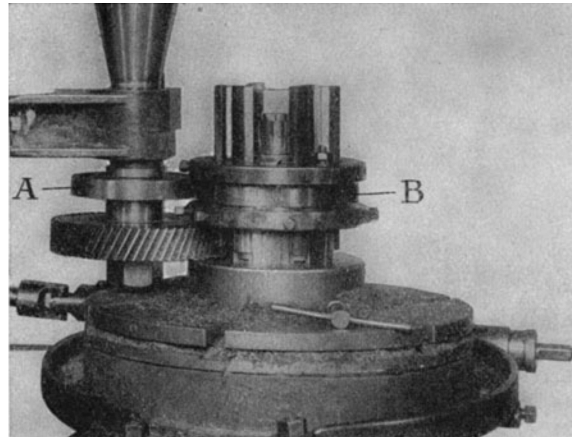


Abb. 308. Kopier-Schaufelfräse.

Daß bei der teuren Fräsarbeit auf die richtige Organisation des Arbeitsganges alles ankommt, ist selbstverständlich. Als Beispiel für die Durchführung im einzelnen beschreiben wir die Schaufelherstellung der Firma Brown Boveri & Cie. (Baden-Mannheim), der ich nachfolgende Mitteilungen verdanke. Die für Curtisräder bestimmte Schaufel wird aus einem vorgewalzten Profil, Abb. 306, in folgenden Stufen hergestellt:

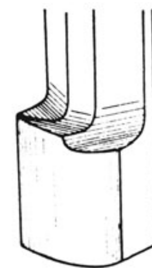


Abb. 309. Schaufelfuß vor dem Fertigfräsen.

1. Abschneiden auf richtige Länge durch Kaltkreissäge, wobei etwa 8 Stäbe eingespannt werden.

2. Gleichzeitiges Fräsen der hohlen und der in Abb. 306 mit 2 bezeichneten Seitenflanken: Die Schaufeln werden an den Stirnseiten fest eingespannt. Das Werkzeug besteht aus der Hohlfräse und zwei Messerköpfen links und rechts.

3. Vorfräsen des Rückens, wobei mehrere Schaufeln gemäß Abb. 307 nebeneinander eingespannt werden. Die mit schraubenförmigen Zähnen versehene Walzenfräse *w* erzeugt die mit 3 bezeichnete ebene Fläche bei unbearbeitet bleibendem Schaufelfuß gemäß Abb. 306.

4. und 5. Vorfräsen der mit 4 und 5 bezeichneten schrägen Rückenfläche, Abb. 306.

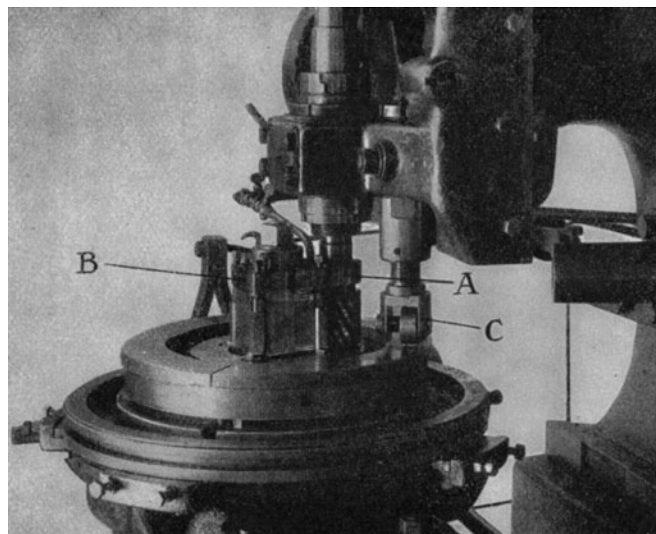


Abb. 310. Fräsen des Schaufelrückens und des schrägen Fußansatzes.

6. Bearbeitung der Rückenfläche des Schaufelfußes auf der Kopierfräse, Abb. 308. Es werden vier Schaufeln gleichzeitig eingespannt. *a* bedeutet die Kopierrolle, *b* die Kopierschablone. Die Kopiervorrichtung sitzt auf einem Rundtisch, der sich gleichmäßig dreht und zugleich wagerecht nach auswärts ausweichen kann, wobei er mittels Drahtseil und Gewicht stets gegen die Kopierrolle gepreßt wird. Die Fräse ist entsprechend dem radialen Winkel, den eine Schaufelteilung einschließt, konisch geschliffen. Das Auswechseln der Schaufeln erfolgt während des Ganges. Die nunmehrige Form der Schaufel wird durch Abb. 309 veranschaulicht.

7. Die Bearbeitung des Schaufelrückens bei schräger Wurzelschulter durch die in Abb. 310 dargestellte Kopierfräse. Die Schaufeln sind an der Wurzel und am obern Ende senkrecht zu je 4 im

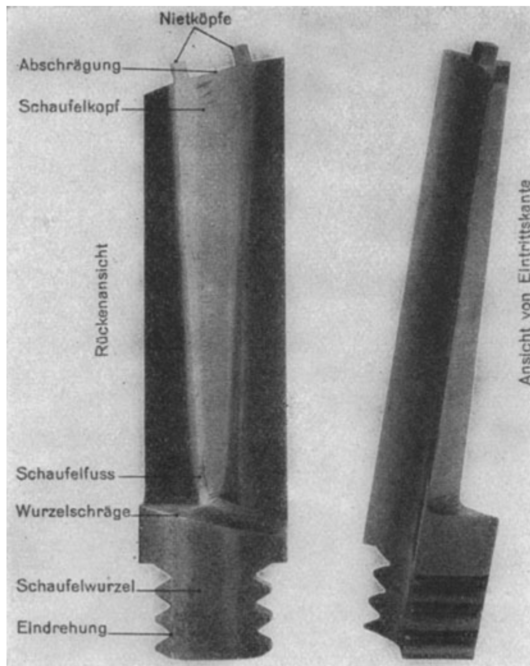


Abb. 311. Laufschaufel von Brown, Boveri & Cie.

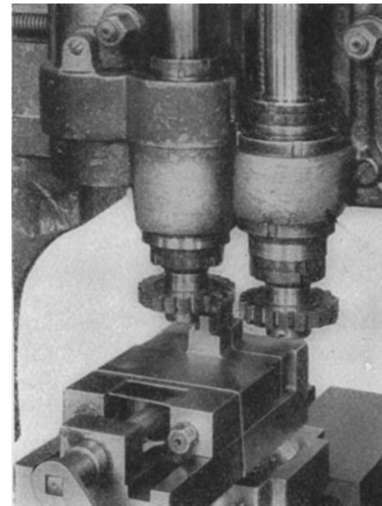


Abb. 312. Doppelfräse für Dreiecknuten an der Schaufelwurzel.

Fräsetisch eingespannt. Die Einspannvorrichtung trägt die Kopierschablone *B*, gegen welche die Kopierrolle *A* gepreßt wird. Während der Drehung des Frästisches wird der Frässchlitten durch die Rolle *C*, die über eine entsprechende Nocke führt, so gehoben, daß die untere Stirnseite der Fräse den schrägen Anlauf an der Schulter des Schaufelrückens Abb. 311 herstellt.

8. Hierauf wird bei längeren Schaufeln der Rücken auf nach außenhin abnehmende Wandstärke konisch abgefräst. Dies geschieht auf derselben Fräsmaschine ebenfalls nach dem Kopierverfahren, mit dem Unterschied, daß die Fräse konisch ist und lotrecht unbeweglich bleibt.

9. Da die Schaufel, um die Fliehkraftrichtung durch die Mitte der Befestigung (des Schaufelfußes) hindurchtreten zu lassen, in den Kranz schief eingesetzt wird, ist es notwendig, die zum Radumfang parallele Eintrittskante mit der nötigen Schräge gegen die Längsachse zu versehen, was durch eine Schaftfräse mit Stirnzahnung geschieht.

10. Einfräsen der zur Befestigung erforderlichen Dreiecknuten an der Schaufelwurzel, Abb. 311; dieses erfolgt auf einer Zweispindelvertikalfräsmaschine mit zwei gleichzeitig schneidenden Fräsen, wobei die Schaufel mit dem Fuß nach oben eingespannt ist. Abb. 312.

11. Anfräsen der Nietköpfe für das Deckband, Abb. 311, durch eine aus fünf Einzelfräsen zusammengesetzte Satzfräse.

12. Schleifen. Der Rücken wird quer zur Schaufellänge mittels Schmirgelscheibe aus Filz mit aufgeleimtem Schmirgel, die hohe Geschwindigkeiten zuläßt und durch die zugleich die bei der Querschnittsverjüngung entstandenen Ecken abgerundet werden, geschliffen. Das Hohlschleifen erfolgt ebenfalls quer zur Schaufellänge mit Schmirgelscheiben von etwas kleinerem Halbmesser als die Krümmung der Schaufelhohlseite.

Die Bearbeitung der für Überdruck verwendeten Schaufeln von größerer Länge bei ebenfalls hoher Geschwindigkeit ist, soweit Vorfräsen, Wurzel- und Rückenfräsen in Frage kommt, das gleiche wie vorhin.

Bemerkenswert ist das Verfahren um die Schaufel mit allmählich abnehmendem Querschnitt einmaligem Fräsendurchgang herzustellen. Gemäß der schematischen Abbildung 313 erhält die Fräse, das mit *celfg* bezeichnete Profil. Der Querschnitt der Schaufel in der Nähe des Fußes ist *clfi*. Während des Fortschreitens der Fräse wird die Schaufel in die Lage *elgk* geschwenkt, wobei der Querschnitt bei unverändert gebliebener Hohlseite die gewünschte Verschwächung erfährt. Die Drehung erfolgt um den Mittelpunkt *m*, wobei die Punkte *d*, *e* und *f*, *g* auf je einem zu *m* konzentrischen Kreisbogen gelegen sind.

Das gleiche Verfahren kann gemäß Abb. 314 vermöge einer birnenförmigen Fräse auf die Bearbeitung der hohlen Seite angewendet werden. Hier ist *yvj* die Anfangs-, *xus* die Endstellung. Die Einklemmvorrichtung für die Schaufel ist in Abb. 315 dargestellt. Darin bedeutet *A* das kugelförmige, in einer Kulisse gleitende Ende des Führungshebels, durch die der Schaufel die notwendige Verdrehung erteilt wird. *B* ist ein Druckluftzylinder, dessen Kolben bei Beginn des Fräsens die Schaufel niederdrückt. Da die Fräse nicht dicht an den Schaufelfuß heranrücken kann, muß das letzte Stück der Schaufel auf einer Kopierfräse (wie oben beschrieben) nachgeschlichtet werden.

Abb. 314.

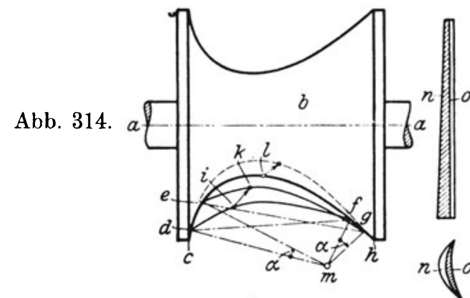
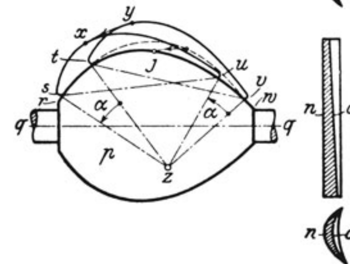


Abb. 313.



Fräsen verjüngter Schaufeln mit einmaligem Durchgang.

Besondere Sorgfalt ist bei den hohen Umfangsgeschwindigkeiten der Ausbildung des sogenannten **Schlußstückes** zuzuwenden, das dazu dient, eine erweiterte Öffnung, die zum Einbringen der Schaufeln in jedem Falle erforderlich ist, nach erfolgter Beschaufelung sicher zu verschließen. Nach der Ausführung von Brown, Boveri & Cie. erhält der Kranz die in

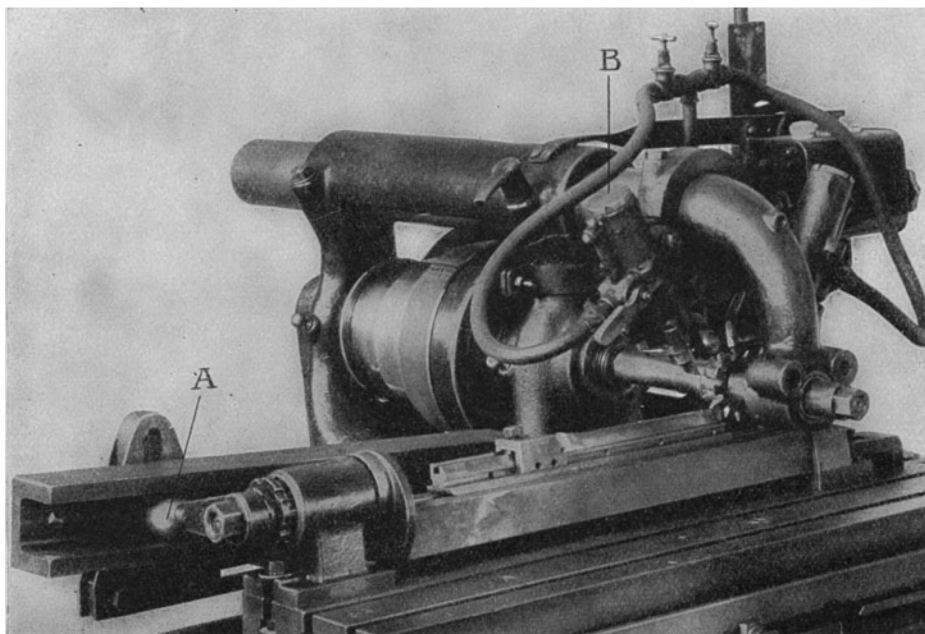
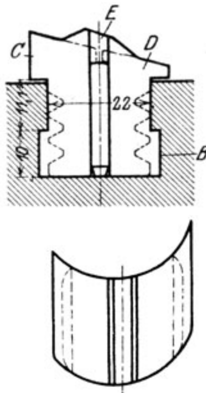
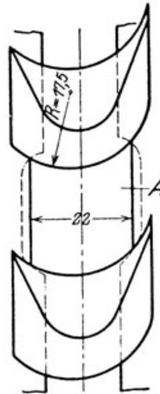


Abb. 315. Fräsmaschine zu Abb. 313.

Abb. 316 bei *A* angegebenen Verbreiterungen, in die gemäß 316a in der Tiefe des Falzes die Nuten *B* beiderseits eingefräst werden. Ist die Beschauflung vollendet, so bringt man die in Abb. 316a dargestellten Füllstücke *C* und *D* herein, die mit entsprechenden Vorsprüngen in die Eindrehungen *B* eingreifen. Der verbleibende Spalt *E* wird durch einen fest eingetriebenen Keil ausgefüllt und dieser durch Umnieten der in Abb. 316a sichtbaren Nasen

am Herausfallen verhindert. Bei mehrkränzigen Rädern kann nach der Ausführung Abb. 316b der gleichen Firma das Schlußstück durch einen Nietschaft, der am Innenrande des Kranzes bzw. in einer Bohrung der Radscheibe umgenietet wird, festgehalten werden.





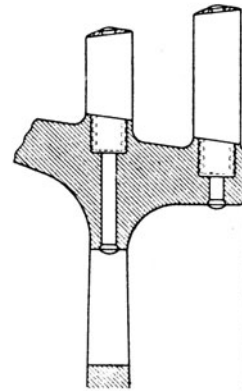
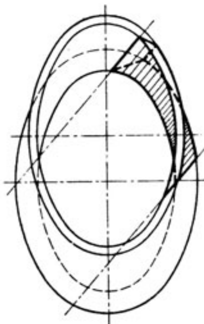
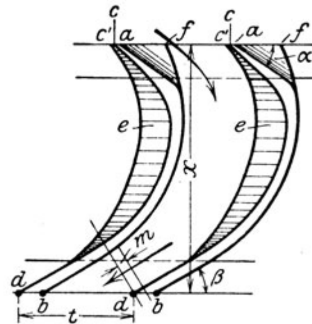


Abb. 316. Abb. 316a.
Schaufelschloß.

Abb. 316b. Schaufelschlösser bei mehrkränzigen Rädern.

Bei langen Schaufeln für Gleich- oder Überdruckturbine ist die Umfangsgeschwindigkeit an der Wurzel um so viel kleiner als am Schaufelende, daß die Ein- und Austrittswinkel, um gleich gute Dampfausnützung zu erhalten, wesentlich verschieden zu wählen wären. Eine hierauf bezügliche Lösung von Brown, Boveri & Cie. und Christlein ist nach D. R. P. Nr. 300829 (1917) in Abb. 316c dargestellt.





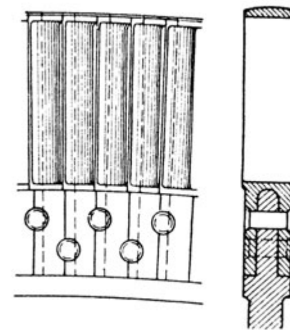


Abb. 316c. Abb. 316d.
Winkelausgleich nach Christlein.

Abb. 317. Schaufelbefestigung nach Rateau.

Der Grundkörper, aus dem man sich die Schaufel herausgeschnitten denken muß, ist eine Röhre mit nach unten zunehmender Wandstärke, deren Inneres ein elliptischer Zylinder, deren äußere Mantelfläche eine Kegelfläche ist. Die Abbildung stellt die Ansicht der Schaufel von oben dar. Es werden hiernach die Eintrittswinkel nach untenhin verkleinert, die Austrittswinkel vergrößert, wodurch auch die Querschnittsverengung am Schaufelfuß geringer wird als bei kleinen Winkeln. Den gleichen Zweck verfolgt das in Abb. 316d veranschaulichte Verfahren (D. R. P. 296456, 1914), wonach aus dem Grundprofil *afbdc* nach oben hin der im Grundriß schraffierte Querschnittsteil *e* auf der hohlen Seite weggenommen und auf der Rückseite zum Zwecke stoßfreien Eintrittes die durch Winkel α bezeichnete Fläche weggefräst sind.

Die Rateauturbine erhält nach Abb. 317 gegabelte Schaufelfüße, die durch eine Doppelreihe von Nieten auf dem glatten Scheibenkranz festgehalten werden. Die Metropolitan Vickers El. Co., die das gleiche Verfahren anwendet, versieht den Scheibenkranz mit zwei Nuten, Abb. 317a, in die beide Gabeln hineinragen, so daß sich für eine Niete ein vierfacher Abscheerquerschnitt ergibt. Der Vorteil dieser Ausführung besteht in der Vermeidung jeglicher scharfer Ecke, was für die Ermüdung des Baustoffes durch Schwingungen von Wichtigkeit ist. Ferner werden die Schaufeln bei großer Länge mit abnehmender Breite gegen die Spitze hin ausgeführt. Da die hohle Seite durch einen Kreisbogen von unveränderlichem Halbmesser gebildet wird, nimmt der Eintrittswinkel

gegen die Spitze hin in stetiger Weise ab. Die Verbreiterung nach unten hat den großen Vorteil, daß die Schaufelstärke geringer bleiben darf, wodurch der Querschnitt für den Dampfdurchgang erheblich vergrößert wird[1]).

Abb. 318 stellt die Ljungströmsche Schaufel (für axiale Beaufschlagung) dar, die den Kranz durch sägenschnittartige Verzahnung festhält. Die am Außenende angefrästen Platten bilden den Abschluß des Laufkanales. Eine leichte Schrägstellung (um $1^0 10'$) bezweckt, den Angriffspunkt der resultierenden Fliehkraft in die Mitte der Befestigungsfläche zu bringen. Neuerdings wird die Schaufel nicht aus Rund- sondern aus Quadratstahl mit abgebogener Spitze gefräst. Die nach einwärts schrägen Gabelzähne sollen beim Anspannen der Schaufel durch die Fliehkraft einen nach einwärts gerichteten Anpressungsdruck ausüben. Beim Zusammenbau werden die Schenkel über den Scheibenrand geschoben und müssen dabei um 0,1 mm federn; hierauf werden sie durch Drucköl pressen zusammengepreßt u. zw. je zwei diametral gegenüberliegende Schaufeln nacheinander. Dabei bildet die Flankenschräge (mit 55^0 Neigung) die schiefe Ebene, längs der die Schaufel rutscht und so an den tragenden Flanken von 30^0 Neigung einen Verspannungsdruck erzeugt. Versuche mit der dargestellten Schaufel haben ergeben: in drei Fällen einen Bruch des äußersten Zahnes bei 1100—1500 kg Zug; in zwei Fällen Bruch der Turbinenscheibe infolge Materialfehlers bei 1000—2000 kg Zug; in fünf Fällen Aufbiegen der Schenkel bei 2600—2970 kg Zug; in einem Fall Bruch der Schaufel bei 2830 kg Zug.[2])

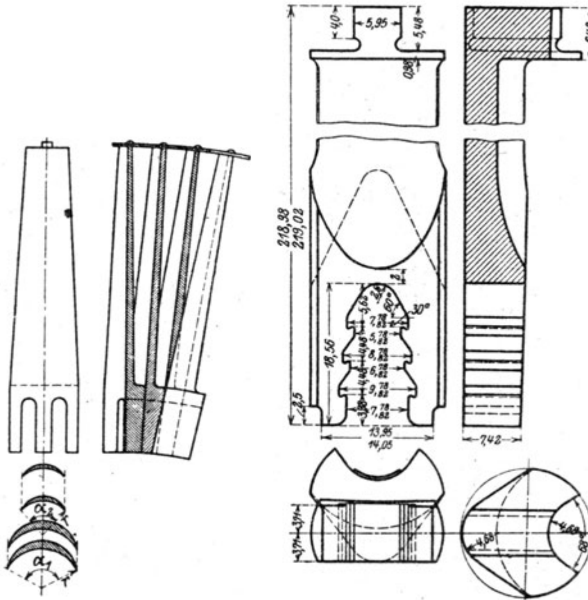


Abb. 317 a. Schaufel der Metropolitan-Vickers El. Co.

Abb. 318. Ljungströmschaufel für Axialräder.

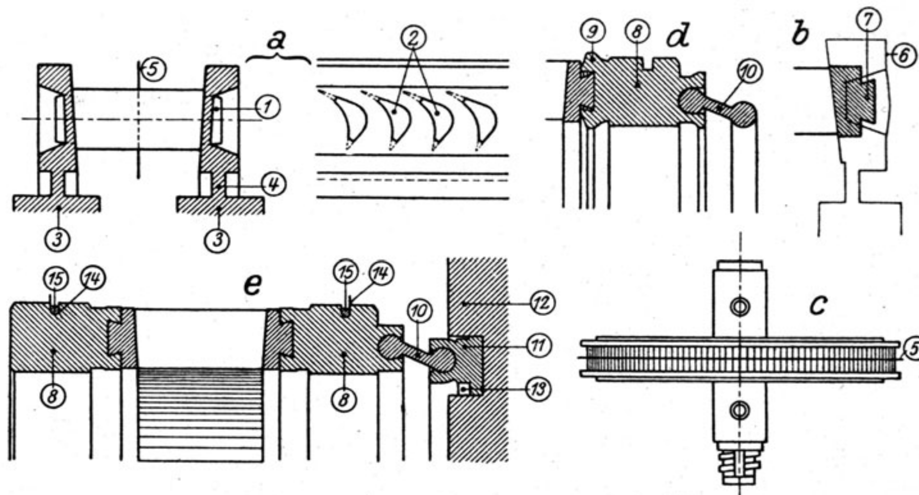


Abb. 319. Herstellung der Ljungströmschaufel für Radialturbinen.

Die Herstellung der Ljungströmschaufel für radial beaufschlagte Turbinen macht von der autogenen Schweißung in weitgehendem Maße Gebrauch.

Nach Abb. 319 werden die aus Profilstangen auf Länge geschnittenen Schaufeln mit einer geeignet abgesetzten Endigung (1) versehen und in die gestanzten Löcher (2) der Schaufelkränze eingesetzt. Diese

[1]) Schweiz. Pat. Nr. 74780 der früheren Brit. Westinghouse Co.

[2]) Die eingeschriebenen Doppelmaße stehen in der Werkzeichnung und bedeuten die Toleranzabweichung.

werden aus vollen Scheiben (3) so ausgedreht, daß ein schwacher Steg (4) übrigbleibt, der beim Schweißen ein Verziehen des Kranzes hindert. Zur Sicherheit wird in der Mitte der Schaufellänge ein dünner Blechring (5) mit auf die Schaufeln passenden Löchern eingefügt, der ein Verdrehen der Schaufeln während des Schweißens unmöglich macht. Nach dem Verschweißen besitzt der Ring den bei **b** durch schwache Linien dargestellten Umriß (6). Hierauf werden die Stege (4) auf dem bei **c** sichtbaren Dorn abgestochen und die Ringe bis auf das bei **b** durch Schraffur kenntlich gemachte Schwalbenschwanzprofil (7) abgedreht. Da dieser Rest nicht genügend tragfähig und wegen der Schweißung nicht genügend zuverlässig wäre, werden die Ringe in besonderen gewalzten Tragringen (8) bei **d** in der Weise befestigt, daß man den vorstehenden Rand (9) jener Ringe durch besonderes Walzverfahren auf das Schwalbenschwanzende des Schaufelringes umklemmt. In gleicher Weise wird Ring (8) auf den mit Kreiswulsten versehenen „Expansionsring“ (10) aufgewalzt, um gemäß **e** den beiderseitig verstärkten Schaufelkranz vermöge der Einlage (11) mit dem eigentlichen Scheibenkörper (12) zu verbinden. Zur Sicherung wird ein quadratischer Draht (13) in die vorgesehene Fuge eingeschoben und verstemmt. In ähnlicher Weise werden U-förmige Blechstreifen (14) in Umfangsnuten der Verstärkungsringe (8) eingeschoben und mittels verstemmter Drähte (15) festgehalten. Sie bilden die axiale Abdichtung der einzelnen Stufen. Der Expansionsring (10) ist so schwach bemessen, daß ihm nur die Rolle eine Führung zukommt und die Fliehkräfte durch die Festigkeit der Ringe (8) aufgenommen werden müssen. Bei ungleicher Erwärmung der Scheiben und des Schaufelkranzes werden auch die Wulste des Ringes (10) verschieden temperiert und dehnen sich unter leichter Verdrehung des Ringes, d. h. Steilerwerden des Kegels in entsprechendem Maße aus, so daß auf den Schaufelring nur ein geringer Zwang ausgeübt wird.

3. Laufschaufeln für mäßige Umfangsgeschwindigkeit ($u < 120$ m/sek).

Als Beispiel für mäßige Umfangsgeschwindigkeit führen wir die ursprüngliche Schaufel von Zoelly an, deren Werdegang Abb. 320 darstellt. Das zur Herstellung der Schaufel

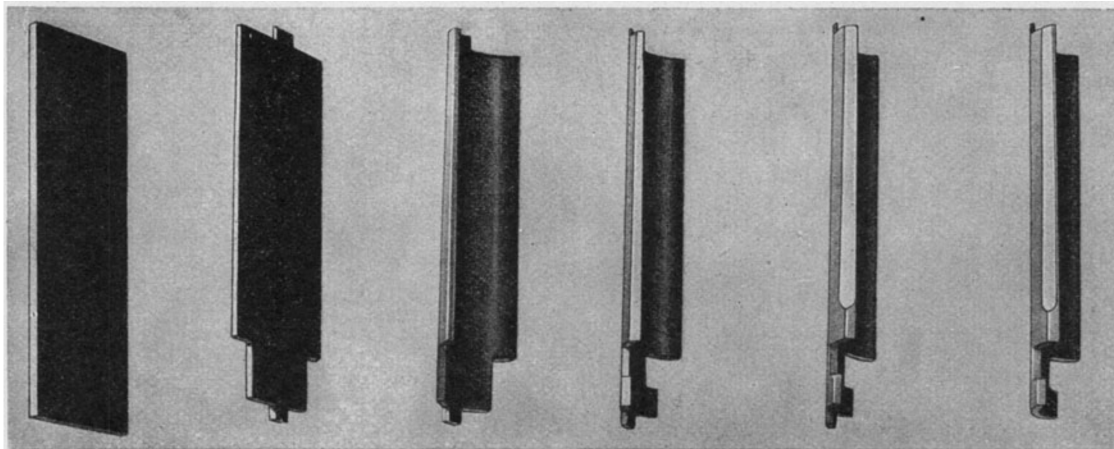


Abb. 320. Herstellung der Zoellyschaufel.

dienende Nickelstahlblech wird gegen das Ende hin zuerst dünn gefräst, mit dem Nietzapfen für den Deckring versehen, hierauf gebogen, die Einschnitte für den Fuß eingefräst, die

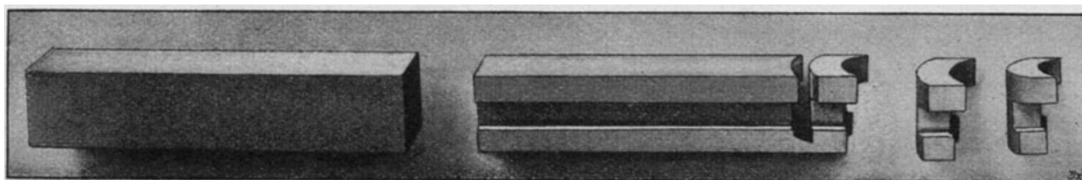


Abb. 320a. Füllstücke zur Zoellyschaufel.

Kanten nachgefräst und die Schaufel geschliffen. Die Füllstücke werden nach Abb. 320a aus einem vorgefrästen geradlinigen Stab durch Hohlfräsen ausgeschnitten. Über die Zoellyschaufel für hohe Geschwindigkeiten vergleiche man die Beschreibung der Zoellyturbine.

Für axiale Überdruckturbinen ist seit dem Vorgang von Parsons die Benützung von gezogenen Stäben üblich, aus denen die Schaufeln herausgeschnitten werden. Ursprünglich

wurden die Enden in einen schwach schwalbenschwanzförmigen Falz der Trommel eingelegt und lediglich durch starkes Verstemmen der Beilagen, die dabei in kleine Kerben an den Schaufeln teilweise eindringen konnten, gehalten. Dieses nicht unbedenkliche Verfahren steht auch heute noch manchenorts in Gebrauch.

Wesentliche Verbesserungen wurden von Brown Boveri & Cie. erzielt. Gemäß Abb. 321 erhält die Schaufel am Eintrittsende die Einkerbung A, vermöge der ein Vorsprung

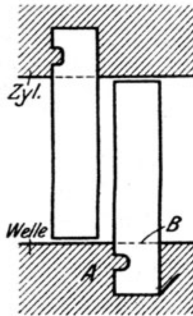


Abb. 321.

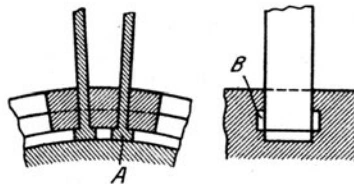


Abb. 322.

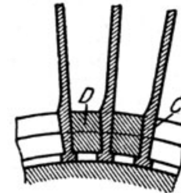


Abb. 323.

Überdruckschaufeln von Brown Boveri & Cie.

im Trommelfalz sie mit Sicherheit festhält. Wichtig ist das neuerdings übliche Tieferlegen jenes Vorsprunges, wodurch dem größten Biegungsmoment der volle Querschnitt B dargeboten wird. Die Beilage erhält selbstverständlich gleichgeformte Eindrehungen. Die neueste Ausführung besteht im Anstauchen eines T-förmigen Fußes A gemäß Abb. 322. Die Beilagen erhalten Vorsprünge B, die in Falze der Trommelnute eingreifen. Eine weitere Verbesserung stellt die Ausführung Abb. 323 dar, mit Anstauchung einer Verstärkung am Schaufelfuß, so zwar, daß die Beilagen D nicht mehr kegelig, sondern zylindrisch gefräst werden können. Man kann dieselben im übrigen, auch mit den gleichen gewindeprofilartigen Nuten, Abb. 324, wie bei den weiter oben beschriebenen Schaufeln versehen. Die genannte Firma setzt die Gefahr des Streifens bei Überdruckturbinen dadurch herab, daß in das Ende der aus Bronze bestehenden Schaufeln eine Vertiefung, Abb. 324a, mittels Stahlstempels eingedrückt wird. Die verbleibende äußerst geringe Wandstärke wird beim Streifen ohne

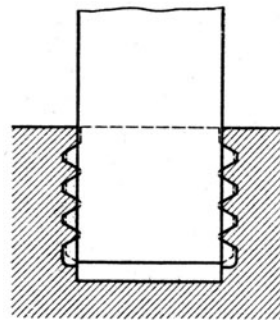


Abb. 324.

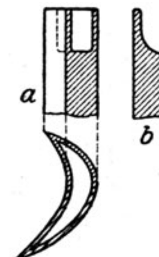


Abb. 324a.

Schaufelfuß und Kopf.

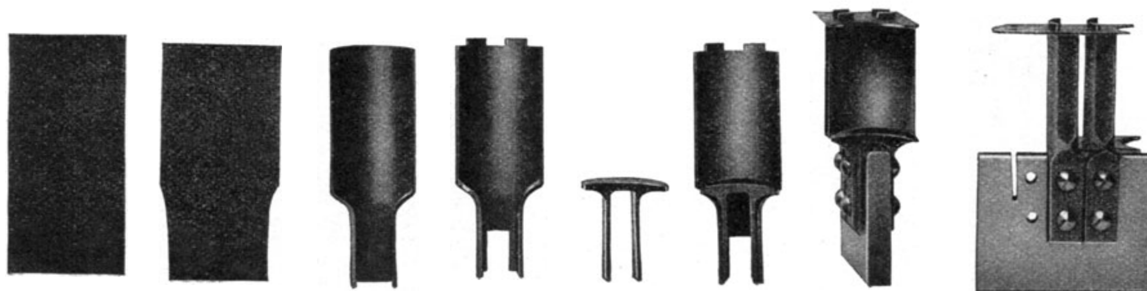


Abb. 325. Schaufel der Bergmann El. W. A. G.

Heißlauf abgeschliffen. Der Vorteil dieser Ausführung gegenüber dem in der gleichen Abbildung bei b ersichtlichen, alten Verfahren, bei dem das Schaufelende durch Fräsen abgesetzt wurde, besteht in besserer Dampfführung und größerer Festigkeit des dünnwandigen Stückes.

Die Bergmann-Elektrizitätswerke-A.-G. Berlin stellen die Schaufeln durch Pressen aus Nickelblech her, wobei Dehnungen tunlichst vermieden werden sollen. Abb. 325 stellt

den Arbeitsgang dar. Die Schaufel „reitet“ auf dem Radkranz; die innere Kanalbegrenzung wird durch die mitabgebildete Beilage gebildet, die gleichzeitig mit der Schaufel vernietet wird. Abb. 325a zeigt die Ansicht eines Kranzteiles.

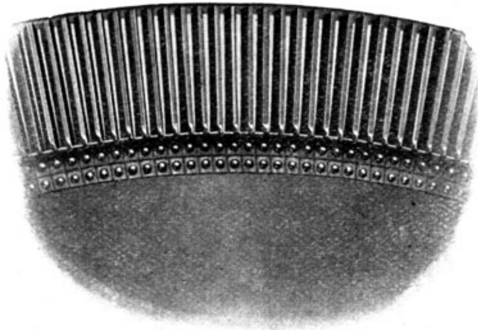


Abb. 325a. Kranz der Bergmannturbine.

Die Erste Brünner Maschinenfabr.-Ges. biegt die Schaufeln in S-Form, Abb. 326, und läßt die Füllstücke gegen Falze $F_1 F_2$ anliegen.

Willans & Robinson in Rugby versehen mit anderen Lizenznehmern Parsons' die Schaufeln mit einem Deckring und setzen ganze Bogenstücke bis zum Halbkreis mit Hilfe eines „Grundringes“ außerhalb der Turbine zusammen. Dies ermöglicht Massenherstellung mit Arbeitsteilung und Anwendung von Sondermaschinen. Die fertigen Segmente werden in die Trommelnuten eingefügt und mit Hilfe eines besonderen Stemmringes befestigt. In Abb. 327 ist b der Deckring, die Strömung geht von rechts nach links. Der Schaufelfuß wird flach gepreßt, die Nuten im Grundring sind gerade, nur das dünne Ende der Schaufel bei a wird etwas umgebogen. Man erzielt den Vorteil, daß bei unverändertem Schaufelprofil der Austrittswinkel durch Änderung der Schlitzneigung leicht verändert werden kann. So wird in einer Gruppe gleichlanger Schaufeln der Winkel in vier Abstufungen geändert. (Daß dabei der Eintrittswinkel nicht genau stimmt, ist von weit geringerer Bedeutung.) Bemerkenswert ist die Sorgfalt, daß Stichproben der Deckringe in einer Maschine, Abb. 327a, durch Anpressen eines Stahlblockes auf Erwärmung und Abnutzung geprüft werden, damit unter allen Umständen nur ein Material (Weißgußkomposition) zugelassen wird, das beim Streifen nicht feuert und anfrißt.

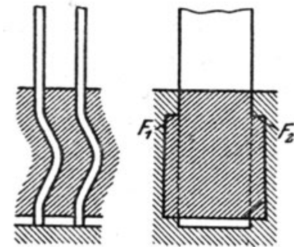


Abb. 326. Überdruckschaufel der Erste Brünner M. F. A.

Die Brush El. Eng. Co. führt nach Abb. 328 die Nute mit gewellten Seitenwänden aus. Das Material der Beilagen dringt beim Stemmen in diese Rillen ein und erhöht die Festigkeit der Verbindung. Die Nuten im Gehäuse bleiben gerade. Die Brush El. Eng. Co. setzt die Schaufeln in die Trommelnute unmittelbar ein und führt als Vorteil davon die geringere Zahl von Teilen an, die bei hoher Überhitzung durch ihre Ausdehnung Schwierigkeiten bereiten könnten. Die

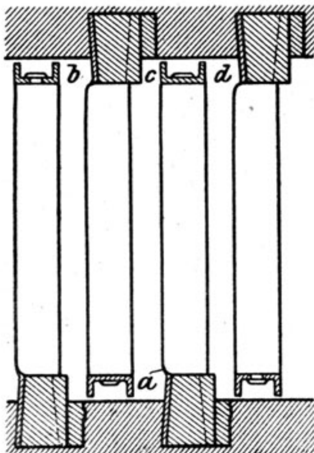


Abb. 327. Schaufeln von Willans & Robinson.

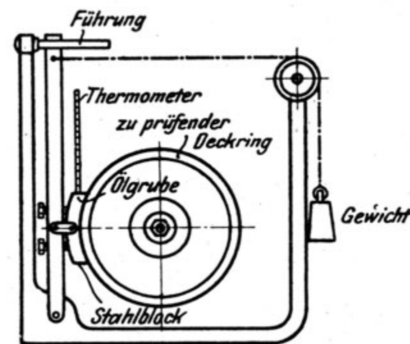


Abb. 327a. Prüfmaschine zu Abb. 327.

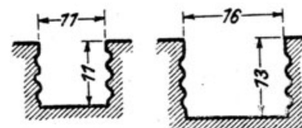


Abb. 328. Gewellte Nuten der Brush El. Eng. Co.

Schaufeln der im ganzen eingesetzten Kranzstücke sollen sich bei Überhitzung stellenweise so stark geworfen und sogar verdreht haben, daß die **Durchströmquerschnitte** erheblich **verkleinert wurden.** Auf diese umstrittene Frage kommen wir weiter unten nochmals zurück.

71. Festigkeit der Laufschaufeln.

a) Statische Beanspruchung.

Für die statische Beanspruchung kommen die Fliehkraft, der resultierende auf die Schaufel wirkende Dampfdruck und die Reibung in Betracht. Ist die Resultierende der beiden letzteren nach Abschn. 62 ermittelt und als R in Abb. 329 eingetragen, so ergibt $R\Delta$, wo Δ den Abstand des Schwerpunktes bedeutet, ein (meist vernachlässigbares) verdrehendes Moment. Um die Biegungsspannung zu ermitteln, muß bekanntlich die nach S übertragene Biegungskraft nach den Richtungen der Hauptachsen zerlegt und die Biegung für jede getrennt berechnet werden.

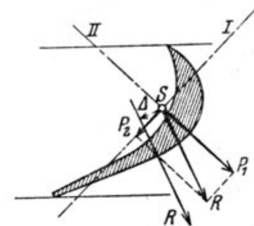


Abb. 329. Drehbeanspruchung der Schaufel.

Die Versteifung durch „Bindedrähte" oder Deckbänder kann wie folgt beurteilt werden.

In Abb. 330 möge die um die Hauptachse I biegende Kraftkomponente auf den Durchstoßpunkt des Bindedrahtes reduziert $= P_1$ sein, die Biegung um die zweite Achse wird vernachlässigt. Ebenso **sehen wir von der Fliehkraft** ab, da diese beim Anfahren (Manöver der Schiffsturbinen) nicht vorhanden ist.

In den Mittelfeldern einer größeren Schaufelgruppe wird die Biegung im Aufriß durch den Winkel α_b dargestellt. Im Grundriß gelangt das Schaufelende aus der punktierten Stellung in die vollgezogene; demnach erfolgt die Biegung um die Hauptachse I. Der Biegungswinkel α kann, wie im Grundriß angedeutet, in die Komponenten α_b, α_d zerlegt werden. Für den Draht ist nur der Betrag α_b Biegung, während α_d bloß eine spannungsfreie Verdrehung beider Drahtenden bewirkt. Infolge der Symmetrie liegt der Inflexionspunkt in der Mitte. Wird der Draht dort getrennt, so braucht man als Querschnittsspannung lediglich die unbekannte Schubkraft S anzubringen, die auf die Schaufel das Moment $Se/2$ überträgt. Die Einsenkung z (senkrecht zur Tangente des Binddrahtes gemessen) wird bekanntlich durch Formel

$$z = \frac{Se^3}{24J'E'} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

bestimmt. Daraus folgt gemäß der Abbildung

$$\alpha_b = \frac{z}{\left(\frac{e}{2}\right)} = \frac{Se^2}{12J'E'} = \frac{Me}{6J'E'} \quad \ldots \quad (2)$$

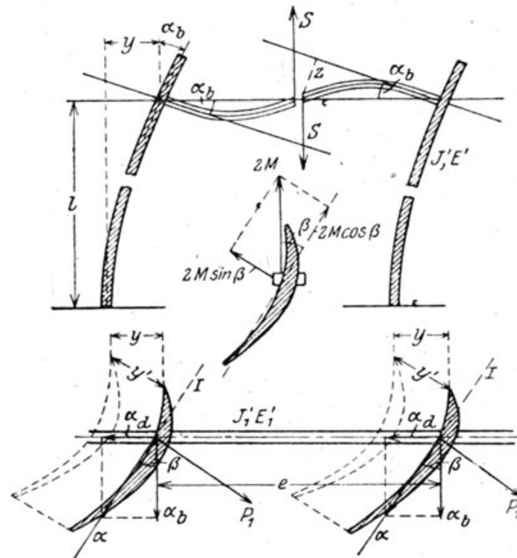


Abb. 330. Statische Schaufelbiegung.

Das hieraus bestimmbare Moment M wirkt von rechts und links, also im doppelten Betrage, auf die Schaufel. Die Zerlegung nach der Hauptachse I ergibt, wie in der Mittelabbildung dargestellt, $M_b = 2M\cos\beta$, während die andere Komponente mit Rücksicht auf die große Steifheit der Schaufel senkrecht zu I vernachlässigt werden darf. Dann ist der Biegungswinkel der Schaufel unter der vereinten Wirkung von P_1 und M

$$\alpha = \frac{P_1 l^2}{2JE} - \frac{2Ml\cos\beta}{JE} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Da aber $\alpha_b = \alpha\cos\beta$, so ergibt sich $\alpha = \alpha_b/\cos\beta$ und mit Rücksicht auf (2) die Gleichung

$$\frac{P_1 l^2}{2JE} - \frac{2Ml\cos\beta}{JE} = \frac{Me}{6J'E'\cos\beta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

aus der wir die Unbekannte M zu berechnen haben. Ist diese ermittelt, so erhält man den Biegungspfeil der Schaufel in der Biegungsebene

$$y' = \frac{P_1 l^3}{3JE} - \frac{2Ml^2\cos\beta}{2J'E'} \quad \text{und} \quad y = y'\cos\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Für die äußersten Schaufeln einer Gruppe wird der Biegungswinkel offenbar größer, da der Draht nur auf einer Seite vorhanden ist. Wenn man annimmt, daß die Nachbarschaufeln durchweg die oben

berechnete Biegung annehmen, so ist es ein Leichtes, die Mehrbiegung der äußersten Schaufel durch Wiederholung der oben gegebenen Betrachtung zu ermitteln. Wendet man ein Deckband statt des Bindedrahtes an, so wird man angenähert von den gleichen Formeln Gebrauch machen dürfen.

Der Einfluß der Fliehkraft kann unter sinngemäßer Umformung der in Abschn. 195 gegebenen Entwicklungen untersucht werden.

Schaufeldruck bei Radialturbinen.

Als Übungsbeispiel für den Studierenden behandeln wir im nachfolgenden die Bestimmung des Schaufeldruckes für Radialturbinen. Wir stellen in Abb. 331 die aufeinanderfolgenden Lagen eines Massen-

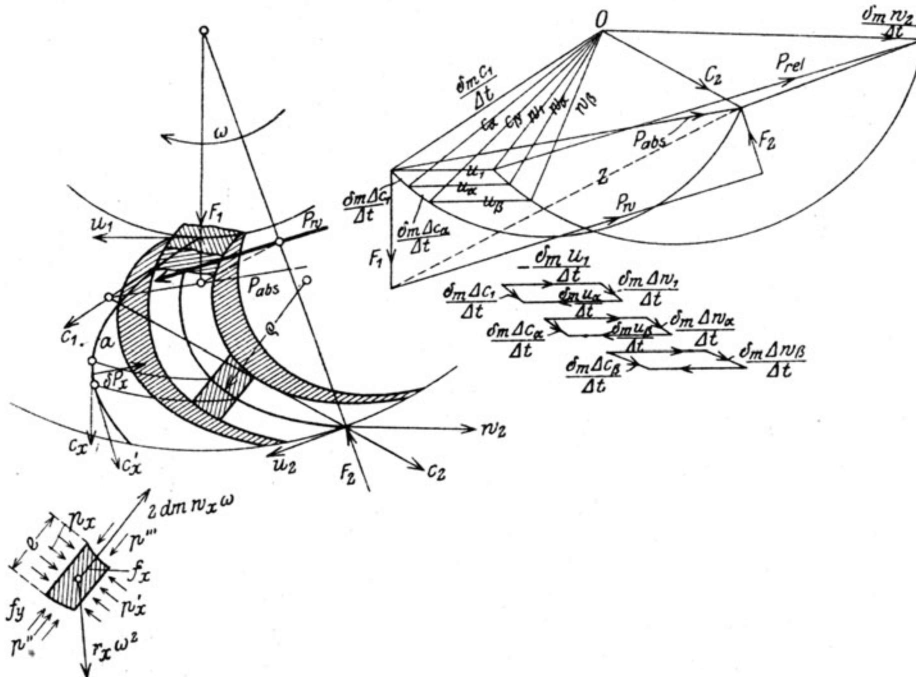


Abb. 331. Schaufeldrücke der Radialturbine.

teilchens δm dar, zu welchen $w_1, w_\alpha, w_\beta \ldots$ die zugehörigen relativen Schwerpunkts-, $u_1, u_\alpha, u_\beta \ldots$ die Umfangs- und $c_1, c_\alpha, c_\beta \ldots$ die absoluten Geschwindigkeiten sein mögen. Die Zunahmen $\Delta c_1, \Delta c_\alpha, \Delta c_\beta \ldots$ ergeben mit δm vermehrt und durch Δt geteilt die effektiven resultierenden Teilkräfte $\delta P_1, \delta P_\alpha, \ldots$ die die Masse δm zur Bewegung auf der absoluten Bahn a zwingen. Wenn wir den Faktor $\delta m/\Delta t$ im Geschwindigkeitsplan überall anbringen, so stellen alle Strecken Kräfte dar, und es ist δP_1 die Resultierende aus $\left(-\frac{\delta m c_1}{\Delta t}\right)$ und $\left(+\frac{\delta m c_\alpha}{\Delta t}\right)$ ähnlich $\delta P_\alpha, \delta P_\beta \ldots$ Diese Kräfte sind gleich groß für ein am absoluten Ort oder für das im gleichen Abstand in der Schaufel sich befindliche Element.

Die Resultierende der auf den ganzen Schaufelinhalt wirkenden Kräfte ist alsdann die Kraft P_{abs}. In gleicher Weise ist $\delta m \Delta w_1/\Delta t$ die elementare relative Beschleunigungskraft und P_{rel} die Gesamtresultierende, deren Lage gefunden wird, indem wir die Kraft $-\delta m w_1/\Delta t$ am Eintritt hinzufügen, und achten, daß wie in Abschn. 62 gezeigt, die Kanalmittellinie das Seilpolygon für die Zusammensetzung bildet. Demnach wird der Angriffspunkt von P_{rel} erhalten als Schnitt der Richtungen w_1 und w_2 in der Schaufelzeichnung. Um die Lage von P_{abs} zu ermitteln, stellen wir, wie die auseinandergezeichneten Kräftevierecke zeigen, die Elementarkraft δP_1 dar als Resultierende von $(-\delta m u_1/\Delta t)$; $(\delta m \Delta w_1/\Delta t)$; $(+\delta m u_\alpha/\Delta t)$, ähnlich δP_α als die von $(-\delta m u_\alpha/\Delta t)$; $(\delta m \Delta w_\alpha/\Delta t)$; $(+\delta m u_\beta/\Delta t)$ usf. Bei der Summation dieser Kräftegruppen heben sich offenbar die mit u behafteten Glieder bis auf das erste und letzte hinweg, und es wird P_{abs} $=$ Result. von $\{(-\delta m u_1/\Delta t);\ P_{rel};\ (+\delta m u_2/\Delta t)\}$. Da aber $P_{rel} =$ Result. von $(-\delta m w_1/\Delta t)\ (+\delta m w_2/\Delta t)$ und da Result. von $\{(-\delta m u_1/\Delta t);\ (-\delta m w_1/\Delta t)\} = (-\delta m c_1/\Delta t)$, ähnlich für den Austritt, so wird schließlich

$$P_{abs} = \text{Result. von } (-\delta m c_1/\Delta t) : (+\delta m c_2/\Delta t).$$

Nun ist, in anderer Weise dargestellt, jedes der δP die Resultierende an den Drücken der Wand und der Flüssigkeit. Letztere heben sich bei der Summation in den Berührungsflächen der Elemente gegenseitig auf, und es bleiben nur der Druck am Eintritt F_1 und der am Austritt F_2. Dann ist, wie im Kräftevieleck angedeutet,

$$P_{abs} = \text{Result. von } (F_1;\ P_{rv};\ F_2)$$

Hieraus folgt der von der Kanalwand ausgeübte Druck

$$P_w = \text{Result. von } (-F_1;\ P_{abs};\ -F_2)$$

zu dem man in der Schaufelzeichnung gelangt, indem man im Schnittpunkt von ($-F_1$; P_{abs}) zu deren Resultierender Z eine Parallele bis F_2 zieht, und P_w parallel nach jenem Schnittpunkt überträgt. Da für die Festigkeit der Druck maßgebend ist, den der Dampf auf die Wand ausübt, so muß nun das Vorzeichen, d. h. die Richtung von P_w umgeändert werden. Damit ist freilich vorerst nur die Resultierende aus dem auf die Rücken- und Hohlseite eines Kanales wirkenden Druck gefunden; zur Bestimmung der auf eine Schaufel wirkenden Kraft reichen diese Unterlagen nicht hin, da jene Drücke nicht getrennt bekannt sind. Angenähert wird man P_w, um eine halbe Teilung verdreht, als den Schaufeldruck ansehen dürfen.

Abb. 332. Das v^2-Verfahren für radiale Turbinen.

Als weiteres Übungsbeispiel ist folgender Weg der Durcharbeitung wert.

Indem man vom Zentrifugaldruck absieht, kann man bei Überdruckturbinen die Geschwindigkeit w_x in irgendeinem Querschnitt f_x nach der v^2-Methode wie folgt ermitteln. In Abb. 332 ist $B_0B = A\,w_1^2/2g$ und BB_1 das am Austritt aus dem Leitrad gültige v_1^2. Gehört zum Querschnitt f_x die Umfangsgeschwindigkeit u_x, so muß im Sinne der Energiegleichung für die relative Bewegung $B_0B_x = A\,(u_x^2 - u_1^2)/2g$ hinzugefügt und von B_x aus unter der Neigung φ_x die den Punkt C_{1x} herausschneidende Gerade gezogen werden. Dann ist $C_{1x}C_x = v_x^2$ und $C_xB_x = A\,w_x^2/2g$. Der Punkt B_x wechselt somit für jeden Querschnitt die Lage. Zu v_x wird aus der Zustandskurve der Druck p_x entnommen. Schneidet man durch zwei parallele Schnitte das Element dm (Abb. 331) heraus, so sind für die Radialturbine die Zusatzkräfte $dm\,r\,\omega^2$ und $dm\,2\,w_x\,\omega$ anzufügen. Die in der Normale nach einwärts wirkende Beschleunigungskraft $f_y\,(p'' - p''') + dm\,2\,w_x\,\omega$ muß aber den Wert $dm\,w_x^2/\varrho$ besitzen, wenn ϱ der Krümmungsradius der Kanalmitte bedeutet. Da nun $dm = f_y\,e\,\gamma/g$, so folgt

$$p'' - p''' = \Delta p = e\,\frac{\gamma}{g}\left(\frac{w_x^2}{\varrho} - 2\,w_x\,\omega\right) \quad \text{(6)}$$

Der Druck wird vom Mittelwert p_x nach beiden Seiten um gleichviel abweichen, also kann man setzen

$$p'' = p_x + \frac{\Delta p}{2}; \qquad p''' = p_x - \frac{\Delta p}{2} \quad \text{(7)}$$

Außer den Normaldrücken wirken auf die Wand die Reibungskräfte ein, die wir nach Abschn. 25 durch eine Schubspannung

$$\tau_x = \frac{\gamma\,\zeta_r\,w_x^2}{8g} \quad \text{(8)}$$

veranschaulichen hönnen. Die ihr entsprechenden Elementarkräfte sind $\tau_x f_y$, wenn f_y die in Abb. 331 im Schnitt erscheinende Seitenfläche des Elementes bedeutet.

Ist der Krümmungshalbmesser so groß, daß

$$\frac{w_x^2}{\varrho} - 2\,w_x\,\omega = 0, \quad \text{d. h. } \varrho_0 = \frac{w_x}{2\,\omega} \quad \text{(9)}$$

wird, so ist der Überdruck $p'' - p''' = 0$. Bei noch größerem Halbmesser wird er negativ, d. h. die Schaufel überträgt Arbeit auf den Dampf, und nicht umgekehrt.

b) Dynamische Beanspruchung.

Die dynamische Beanspruchung besteht wesentlich in den Schwingungen, die durch die Erzitterung des Läufers und durch die Dampfstöße beim Vorbeistreichen an den Leitschaufeln, unter Umständen durch die Schwingungen der Laufscheiben, verursacht werden.

Diese Beanspruchung bildet eine Gefahr allerhöchsten Grades, falls die Zahl der Impulse mit der Eigenschwingungszahl der Schaufel übereinstimmt. Der theoretische Wert derselben wird mit Hilfe der Darlegungen bestimmt, die wir im Abschnitt über die kritische Drehzahl bringen, da die letztere, wie sich zeigt, wenn man von der Schrägstellung der Scheiben absieht, der Eigenschwingungszahl geradezu gleich ist. Die Schaufel kann um die Hauptachse des kleinen oder des großen Trägheitsmomentes schwingen, so daß zwei Gruppen von Schwingungszahlen vorhanden sind. Um die eine davon zu bestimmen, hat man sich also eine Welle mit dem Trägheitsmoment der betreffenden Schaufel vorzustellen, die man mit derselben Einspannungsart wie die Schaufel umlaufen läßt, und deren kritische Drehzahl durch den Versuch oder nach den Regeln des Abschn. 88 u. f. gefunden wird.

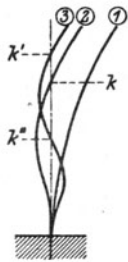


Abb. 333. Schwingungsformen der Schaufel.

Die theoretische Formel für die tiefste sekundliche Schwingungszahl einer an einem Ende eingespannten, am andern Ende freien Schaufel mit dem Trägheitsmoment J, der Länge l der ganzen Masse m ist

$$N_{sek} = 0{,}560 \sqrt{\frac{JE}{ml^3}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

Sie entspricht der mit 1 bezeichneten Schwingungsform, Abb. 333. Die nächst höhere Schwingungsform weist einen Knotenpunkt K, die darauffolgende zwei Knoten K', K'' auf usf. Die entsprechenden Schwingungszahlen verhalten sich wie folgt

$$N_1 : N_2 : N_3 : \ldots = \left(1{,}193 \frac{\pi}{2}\right)^2 : \left(\frac{3}{2}\pi\right)^2 : \left(\frac{5}{2}\pi\right)^2 = 1 : 6{,}30 : 17{,}5 : 39{,}0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

Ist das Trägheitsmoment veränderlich, so wird man zur Bestimmung der Schwingungszahl zweckmäßigerweise von dem Satze von Rayleigh Gebrauch machen, den wir in Abschn. 195 erörtern. Sobald die Schaufel erheblichen Fliehkräften unterworfen ist, nimmt die Schwingungszahl zu. Ein Verfahren zu ihrer Berücksichtigung entwickeln wir ebenfalls im Abschn. 195.

Versuche über Schaufelschwingung.

Die Außerachtlassung der Resonanzschwingung, insbesondere im Gebiete der Überdruckturbine mit ihren großen Leistungen und langen, verhältnismäßig schmalen Schaufeln hat zu Betriebsstörungen mit gewaltigen Verheerungen geführt, daher diese Fragen neuerdings an Wichtigkeit gewonnen haben.

Die ersten folgerichtigen Versuche im großen Maßstabe sind von der Firma Blohm & Voß veranstaltet worden, der ich die nachfolgenden Mitteilungen verdanke.

Die zu Segmenten von über 1 m Länge in schmiedeeisernen Fußstücken zuerst in Bogenform später geradlinig zusammengefaßten Schaufeln wurden Erschütterungen nach Art der Dampfstöße durch Beaufschlagung mittels periodisch unterbrochener Luftströme ausgesetzt. Sodann wurde das Fußstück der Länge nach in schwingende Bewegung versetzt, wodurch eine Erschütterung des betreffenden Laufrades nachgeahmt werden sollte. Die Impulszahl konnte zwischen 1600 bis 2300 i. d. Min. verändert werden. Die verwendeten Schaufeln besaßen rund 375 mm Länge, 23 mm Breite (in der Achsenrichtung) und rd. 16 mm Teilung. Die halbe Weite der Hin- und Herbewegung des Schaufelfußes betrug 0,75 mm. Bei dieser Erregung betrug der Schwingungsausschlag der doppelt gebundenen Schaufeln 12 mm nach jeder Seite in der Richtung der Hauptachse II, Abb. 330; bei gleichzeitiger Lufterregung stieg er auf 15 mm. Es stellte sich heraus, daß bei doppelter Bindung 7 mm starker Außendraht und 4,5 mm starker Innendraht dieser starken Mißhandlung auf die Dauer standzuhalten vermochten. Schwächere Drähte brachen. Ähnliche Versuche sind veranstaltet worden von Roth[1]) und Dr. Bauer[2]). Nach Roth erwies sich eine durch bloß genietetes Deckband versteifte Beschaufelung günstiger als solche mit Drahtbindung. Die bemerkenswerte Untersuchung Roths über Kristallgefüge und Ermüdungserscheinungen werden weiter unten besprochen. Bauer konnte bei Schaufeln von 495 mm Länge, 36,6 Breite das Auftreten der tieferen Schwingung bei 1500 Impulsen i. d. Min. und einer höheren bei 3000 Impulsen i. d. Min. entsprechend den Schwingungen um die Achse des großen Trägheitsmomentes mit großer Deutlichkeit feststellen. Die ersteren erreichten 21,5 mm Weite nach jeder Seite. Die Komponente in Richtung der Turbinenachse war 11 mm nach jeder Seite; bei der höheren Frequenz unter gleichen Umständen bloß 7 mm nach jeder Seite, daher die ersteren wegen der Gefahr des Streifens an die benachbarten Leit-

[1]) Jahrb. der Schiffbautechn. Ges. 1916, S. 154.

[2]) Desgleichen S. 201.

schaufeln die gefährlicheren sind. Der Unterschied bei Verwendung eines Deckbandes gegenüber dem Bindedraht war vernachlässigbar. Außer der Kopfbindung waren noch zwei Zwischendrähte eingezogen. Die Anwendung von diagonal stehenden Bindedrähten schaltete, wie zu erwarten war, die tiefe Schwingung vollständig aus.

Nicht bloß lange, sondern **auch kurze Schaufeln können in Schwingung geraten,** da die Zahl der durch die Strahlunterbrechung der Leitschaufeln hervorgebrachten Stöße eine ungewöhnlich hohe ist. So wird für eine Schaufel mit $J = 0{,}034$ cm⁴, $l = 3$ cm bei 20 g Gewicht, $N = 6500$ i. d. Sek. und diese Impulszahl kommt zustande bei rd. 130 m/sek Umfangsgeschwindigkeit und 20 mm Teilung der Leitschaufeln.

72. Schaufelbaustoffe.

1. Der älteste Schaufelbaustoff für Großturbinen ist das **Messing** von der gleichen Zusammensetzung wie das sogenannte **Patronmessing,** das aus 72 v. H. Kupfer, 28 v. H. Zink besteht, wobei der Gehalt an Blei 0,1 v. H. nicht überschreiten soll.

Die Vorzüge des Messings sind seine Rostbeständigkeit und leichte Bearbeitungsfähigkeit, der Hauptnachteil die geringe Festigkeit, die obendrein mit wachsender Temperatur stark abnimmt, so daß die Verwendung in Dampf von mehr als 200° C. ausgeschlossen ist. Ferner die starke Abhängigkeit der Festigkeit von dem Grade des **gewollten oder ungewollten Ausglühens.** Hierüber veröffentlichte Roth[1]) eine bei Schichau in Elbing durchgeführte wertvolle Untersuchung, der Abb. 334—340 entnommen sind.

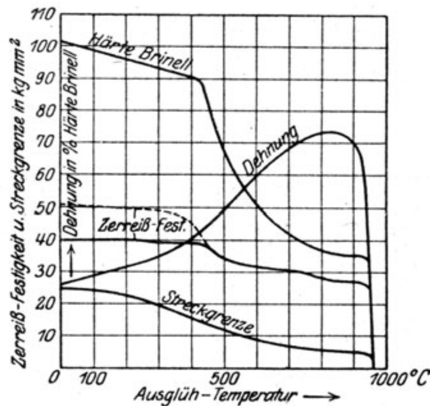


Abb. 334.
Festigkeit von Messing.

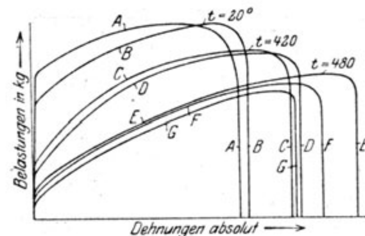


Abb. 335. Arbeitsfestigkeit von Messing nach verschieden hohem Ausglühen.

Abb. 334 enthält die Zusammenstellung der Bruchfestigkeit, Streckgrenze, Dehnung und der Brinnelschen Härten, in Abb. 335 die Arbeitsfestigkeit (bis zum Bruche). Die Zusammensetzung des Messing war: Kupfer 72,2 v. H., Blei 0,04 v. H., Eisen 0,03 v. H., Zink 27,7 v. H. Arsen, Wismuth, Zinn waren nicht vorhanden. Die in die Schaulinien angeschriebenen Temperaturzahlen sind von uns auf Grund der Abb. 334 eingetragen. Man erkennt, daß durch Ausglühen in der Gegend von 450° C. eine

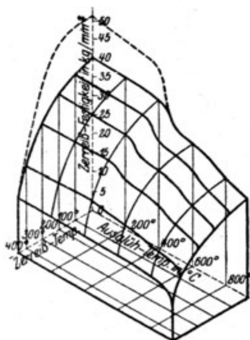


Abb. 336.

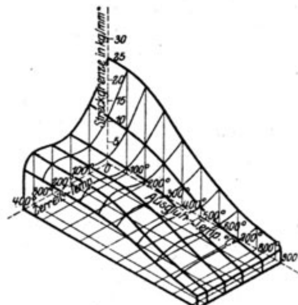


Abb. 337.

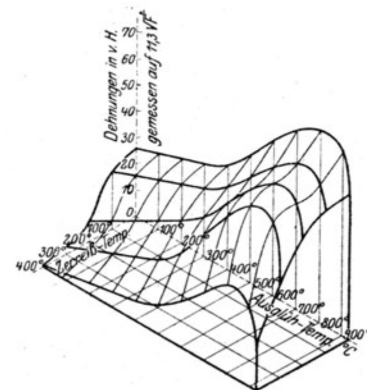


Abb. 337a.

Festigkeit des Messing bei höheren Temperaturen.

[1]) Jahrb. d. Schiffbautechn. Ges. 1916, S. 167.

besonders starke Veränderung der Eigenschaften vor sich geht. Die Arbeitsfähigkeit hingegen bleibt bis zu etwa 480° Glühtemperatur nahezu unverändert.

Wie sich die Festigkeit von vorher ausgeglühtem Messing ändert, wenn der **Bruch bei erhöhter Temperatur** stattfindet, lehren die Abb. 336—337a. Diese Angaben werden wesentlich unterstützt durch die mikroskopischen Metallschliffe Abb. 338—338b, von welchen die erste den als „halbhart" ange-

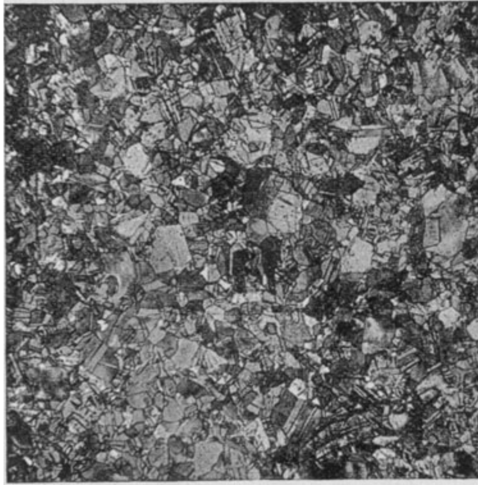


Abb. 338.

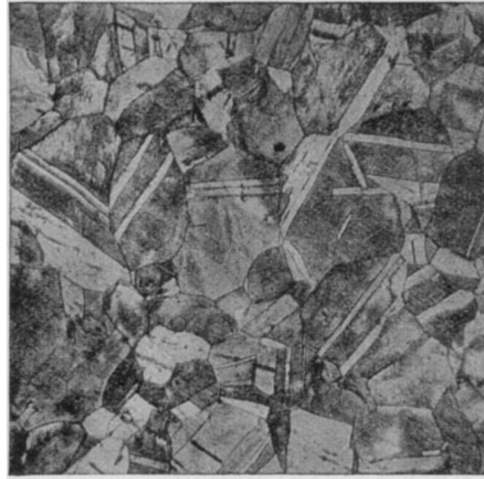


Abb. 338a.

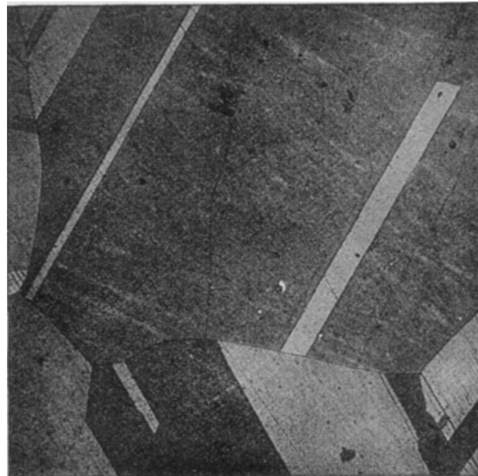


Abb. 338b.
Messinggefüge im ursprünglichen Zustand, und nach dem Ausglühen bei 600 und (unten) bei 800° C. (75-fache Vergrößerung).

lieferten Ursprungszustand, die zweite und dritte den Zustand nach Ausglühung bei 600°, bzw. 800° bei 75-facher Vergrößerung veranschaulichen. Die Veränderung, d. h. die Vergrößerung des Kristallgefüges ist so ausgesprochen, daß Roth in den Stand gesetzt wurde, die Änderung der Festigkeit und Härte in den allerkleinsten konstruktiven Teilen, beispielsweise im Nietkopf oder in den Lötstellen der Versteifungsdrähte durch mikroskopische Ätzschliffe nachzuweisen. So sind die in Abb. 339 eingetragenen Festigkeiten ermittelt worden, und zwar bei *a* für einen ungelöteten, bei *b* für einen überlöteten Schaufelnietkopf. Mit Recht hebt Roth hervor, daß durch geringe Unvorsichtigkeit beim Handhaben der Lötflamme das Messing seiner Festigkeit fast gänzlich verlustig gehen kann. Von ebenfalls ausschlaggebender Bedeutung ist das **Ausglühen auf die Dauerfestigkeit,** der heute mit Recht eine überaus große Wichtigkeit beigemessen wird. Gemäß Abb. 340 nimmt diese bei Bi-Metalldraht (ein mit Stahlseele versehener Messingdraht) in fast gleichem Verhältnisse ab, wie die einfache Bruchfestigkeit. In Abb. 340a ist für Messing und Bimetalldraht diese Abnahme in Abhängigkeit von der ursprünglichen Zerreißfestigkeit noch genauer dargestellt. Dabei bedeutet in Abb. 340 für die Abszisse 1 cm = 150000 Belastungswechsel, für die Ordinate 1 cm = 12 kg/mm²; in Abb. 340a für die Abszisse 1 cm = 12 kg/mm² für die

Ordinate 1 cm = 1,93 kg/mm². Die Dauerfestigkeit des Bi-Metalldrahtes ist bloß rd. 24 v. H. der ursprünglichen; beim Messingdraht sinkt sie von etwa 37 v. H. auf unter 20 v. H. der ursprünglichen Festigkeit.

Schließlich ist hervorzuheben, daß Messing, wie auch andere Kupferlegierungen bei mäßiger Temperaturerhöhung und längerer Belastungszeit in eine Art Fließen geraten und in erheblichem Maße an Bruchfestigkeit einbüßen. So sind in Abb. 341 Festigkeit und Dehnung für Warmzerreißversuche bei normaler Dauer und bei 6stündiger Belastungszeit für ungeglühtes Schaufelmessing dargestellt[1]). Wie ersichtlich, beträgt die Abnahme der Festigkeit bei 250° nahezu die Hälfte derjenigen bei normaler Dauer.

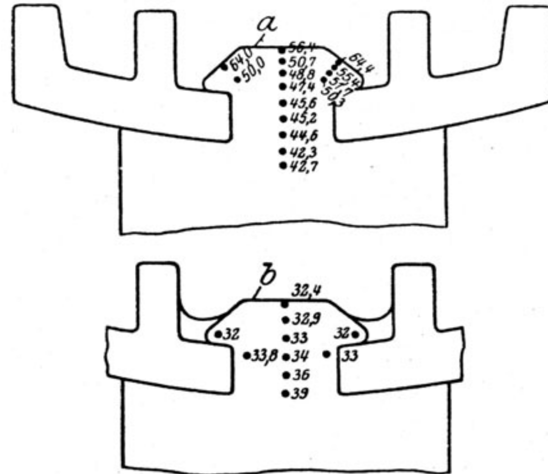


Abb. 339. Festigkeiten des gelöteten (*b*) und des ungelöteten (*a*) Nietkopfes.

Von anderweitigen Kupferlegierungen kommen in Frage[2]):

2. **Aluminiumbronze,** Zusammensetzung 88 v. H. Kupfer, 3 v. H. Aluminium (höchstens), 3 v. H. Eisen. Dieser Baustoff besitzt eine erheblich größere Festigkeit als Messing (rd. 65 kg/qmm), erwies sich jedoch gerade bei dem wichtigen Temperaturenabschnitt zwischen 140 und 70° C. als überaus empfindlich gegen chemische Einflüsse (säurehaltigen Dampf), so daß er heute als verlassen gelten kann. An seine Stelle tritt das

3. **Nickelmessing** mit einer Zusammensetzung von 50 v. H. Kupfer, 10 v. H. Nickel (höchstens 0,5 v. H. Eisen, 0,1 Blei) und 40 v. H. Zink. Die Festigkeitseigenschaften sind nach Abb. 342 günstig, insbesondere liegt die Streckgrenze genügend hoch, um auch für hochbeanspruchte lange Schaufeln auszureichen.

4. **Monelmetall,** stammt aus Amerika, wo es aus natürlich vorkommenden reinen Erzen hergestellt wird; besteht aus Nickel und Kupfer. Bei 65 v. H. Nickelgehalt besitzt es nach Lasche (a. a. O.) die in Abb. 342a dargestellten Eigenschaften. Als Vorteil ist anzuführen die Beständigkeit, die hohe Bruchfestigkeit auch bei hohen Temperaturen; nachteilig ist die verhältnismäßig niedrige Streckgrenze. Infolge seiner großen Härte ist das Metall zwar schwerer zu walzen und zu bearbeiten, jedoch besitzt es ausgezeichnete Widerstandsfähigkeit gegen chemische Einflüsse; selbst nach dem Rotwerden oxydiert es nicht und bleibt an der Oberfläche vollkommen glatt.

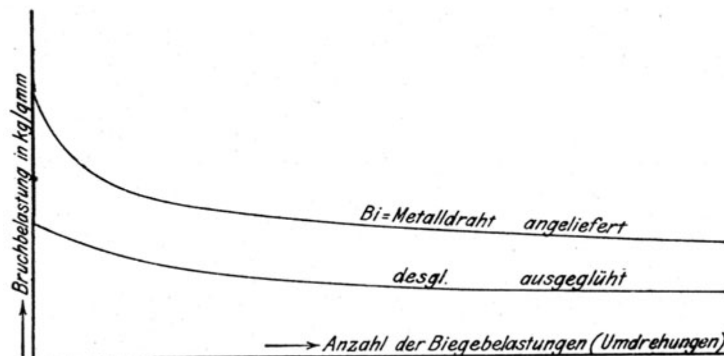


Abb. 340. Dauerfestigkeit von Bi-Metalldraht.

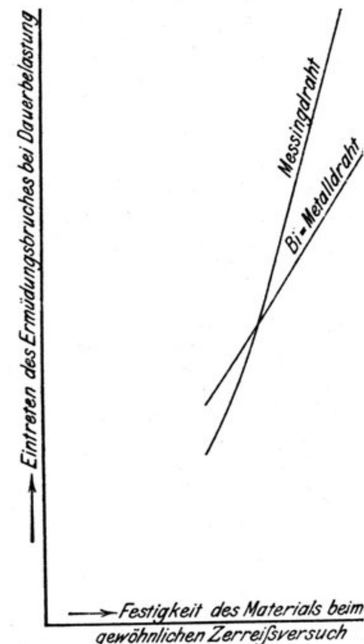


Abb. 340a. Abnahme der Dauerfestigkeit gegenüber dem ursprünglichen Zustand.

---

[1]) v. Bach nach Schulz in „Die Turbine" 1910, S. 89, Material der Dürener Metallwerke.

[2]) Nach Lasche, Erfahrungen in der Beschaffung von Dampfturbinen. Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1918, S. 605.

Die angeführten Baustoffe zeichnen sich durch große Bildsamkeit aus, so daß die Schaufeln als fertige Stäbe gewalzt, gepreßt oder gezogen werden können. Die endgültige Formgebung erfolgt allgemein durch den Ziehprozeß, wobei die Stäbe etwa 4 bis 6mal auf der Ziehbank gezogen und nach jedem Zug geglüht und gebeizt werden. Bei bloß vorgewalztem Material soll sogar ein 10—20maliges Ziehen erforderlich sein. Über die Ab-

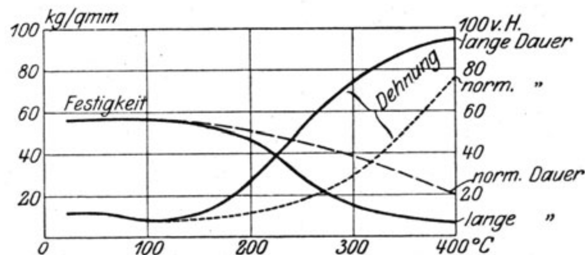
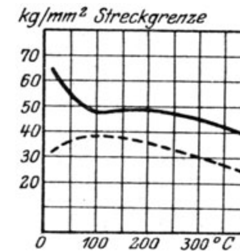


Abb. 341. Fließen des Messing bei langer Versuchsdauer.



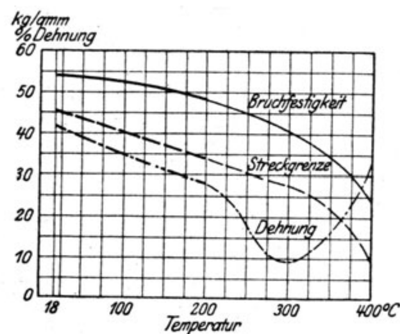
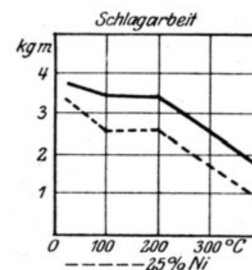
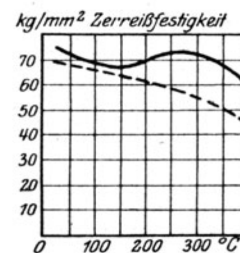


Abb. 342. Nickelmessing.





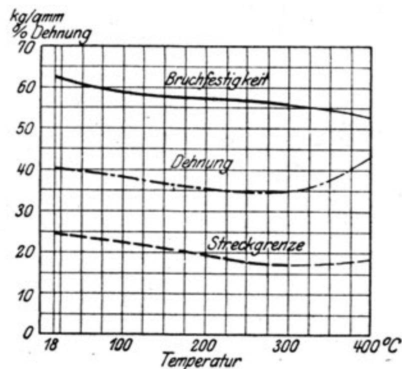


Abb. 342a. Monelmetall mit 65 v. H. Nickel.

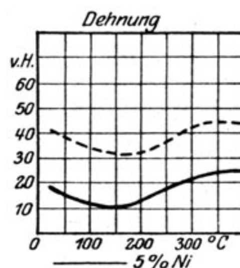


Abb. 343. Nickelstahl für Schaufeln.

stufungen der Querschnitte macht Schulz a. a. O. folgende Angaben: Der ursprüngliche Querschnitt einer bestimmten Schaufelform war 380 qmm und wurde in 6 Zügen auf die Querschnitte 360, 330, 290, 270, 250, 230 qmm herabgemindert. Die durchschnittliche Minderung betrug etwa 8 v. H. Auffallend ist der dritte Zug mit 14 v. H. Reduktion. Die Prüfung der Oberflächenhärte durch ein Rückprallgerät (Skleroskop) ergibt ziemliche Härtenunterschiede der Oberfläche; besonders groß sei die Härte am Schaufelrücken, wenn die Krümmung dort groß ist; auch tritt, was von selbst einleuchtet, eine starke Zunahme nach den Kanten der dünnwandigen Flanken ein. Diese Herstellungsart wurde vielfach übertragen auf den wichtigsten Schaufelbaustoff, nämlich den

5. Nickelstahl. Die Festigkeitseigenschaften desselben sind in Abb. 343 nach Lasche[1])

[1]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1911, S. 1201.

bei 5 v. H. Nickelgehalt durch die vollgezogenen, bei 25 v. H. Gehalt durch die gestrichelten Linien dargestellt. Die Vorzüge des Nickelstahles in Hinsicht der Festigkeit, der Temperaturbeständigkeit, der Streckgrenze sind in die Augen fallend. Bei der Übertragung des Ziehprozesses auf die Schaufelherstellung würde jedoch seine Bildsamkeit überschätzt, womit folgenschwerste Wirkungen verbunden waren. Insbesondere Stähle mit hohem Nickelgehalt erwiesen sich als durchaus unzuverlässig, und eine ganze Reihe von Turbinenanstalten



Abb. 344. Rißbildung in Schaufeln aus hochhaltigen Nickelstahl.

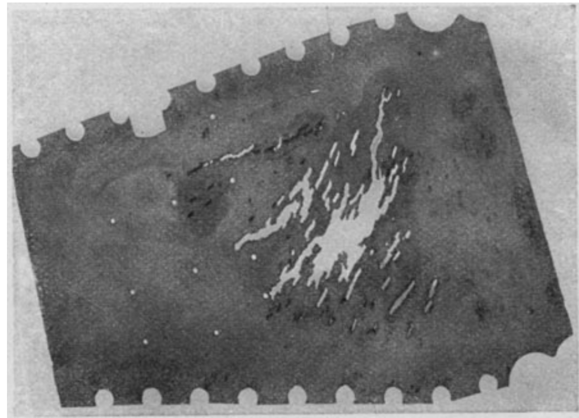


Abb. 345. Zerstörte Leitschaufel aus 30 v. H.-haltigem Nickelstahl.

und Elektrizitätswerken sind durch sozusagen epidemisch auftauchende Schaufelbrüche schwer geschädigt worden. Man ist geneigt, die Hauptschuld den Reckspannungen infolge der Kaltbearbeitung zuzuschreiben, die insbesondere von Heyn[1]) untersucht worden sind. Er stellte eine Menge von Rissen im Schaufelrücken fest, mit Reckspannungen, die der Zugfestigkeit nahekamen. In Abb. 344 ist nach Lasche eine noch nicht gebrochene Schaufel aus hochhaltigem Nickelstahl dargestellt, die nach dem Entschaufeln des Rades gebeizt wurde, wodurch die zahlreichen Risse und Riefeln zum Vorschein kamen. Lasche betont, daß am gleichen Rade eine ganze Anzahl von Schaufeln gänzlich unversehrt blieben und scharfe Biegungen um 90° aushielten, woraus hervorgeht, daß auch beim Kaltziehverfahren der Baustoff unversehrt bleiben kann[2]).

Wenn so auch die Hüttentechnik von dem Vorwurf, ein an sich unzuverlässiges Material geliefert zu haben, befreit werden kann, so bleiben doch noch der bedenklichen und unaufgeklärten Erscheinungen genug zurück. So berichtet Lasche a. a. O. über die Zerstörung von Leitschaufelblechen aus 30⁰/₀igem Nickelstahl, deren Aussehen im gebeizten Zustande Abb. 345 erkennen läßt. Es wurde festgestellt, daß, sobald die Bleche in einer Turbine brüchig zu werden anfangen, sich die Zerstörung über sämtliche Leitschaufeln der betreffenden Stufe ausdehnt, obschon das Temperaturgebiet bei einer Anlage hoch und bei der andern tief sei. Lasche spricht die Vermutung aus, daß, da eine Überbeanspruchung

[1]) Schiffbau-techn. Jahrb. 1913, S. 518.

[2]) Die verderbliche Wirkung des Kaltwalzens unter eigentümlichen Nebenumständen wurde letzthin in großem Maßstab anläßlich eines schweren Eisenbahnunfalles infolge Schienenbruches in den Vereinigten Staaten klargelegt. In einem als „Report of the Chief of the Bureau of Safety" im August 1918 herausgegebenen Bericht wird auf Grund der Untersuchung des „Engineer-Physicist" James C. Howard über den Spannungszustand der durch Bruch zerstörten Schienen Näheres mitgeteilt. Danach stieg die durch das Auswalzen der Schiene infolge erhöhten Raddruckes bewirkte Kompressionsspannung in der Mitte des Kopfes bis auf 1300 kg/qcm; in dem äußersten Teil des Fußes wurden Spannungen bis zu 600 kg/qcm festgestellt, welch letztere man der ungleichen Abkühlung während der Herstellung zuschreibt. Die Spannungen wurden ermittelt durch Heraushobeln der ganzen betreffenden Längsfaser und Vergleich ihrer Länge in freiem Zustand mit der Länge in der Schiene selbst.

der Schaufel als Ursache ausgeschlossen ist, Beimengungen des Speisewassers also die Dampfbeschaffenheit eine (elektrolytische?) Zersetzung der metallischen Legierung bewirken; allein im Wesen seien die Ursachen des Brüchigwerdens noch nicht restlos erkannt.

Die Firma Fried. Krupp A.-G. teilt mir über ihre Erfahrungen betreffend Rißbildung bei Dampfturbinenschaufeln aus hochprozentigem Nickelstahl folgendes mit:

„Die Rißbildungen können veranlaßt sein:

1. durch die Zusammensetzung der Stahllegierung,
2. durch die außerordentlich tief liegende Elastizitätsgrenze dieser Stahllegierungen,
3. durch die Wärmebehandlung,
4. durch die Kaltbearbeitung (Walzen, Ziehen, Biegen),
5. in Verbindung mit 4. auch durch Korrosion.

Da diese Faktoren einzeln oder in Zusammenwirkung auftreten können, so ergibt sich hieraus die große Schwierigkeit für eine vollständige Aufklärung der einzelnen Fälle, in welchen Turbinenschaufeln dieser Art versagt haben.

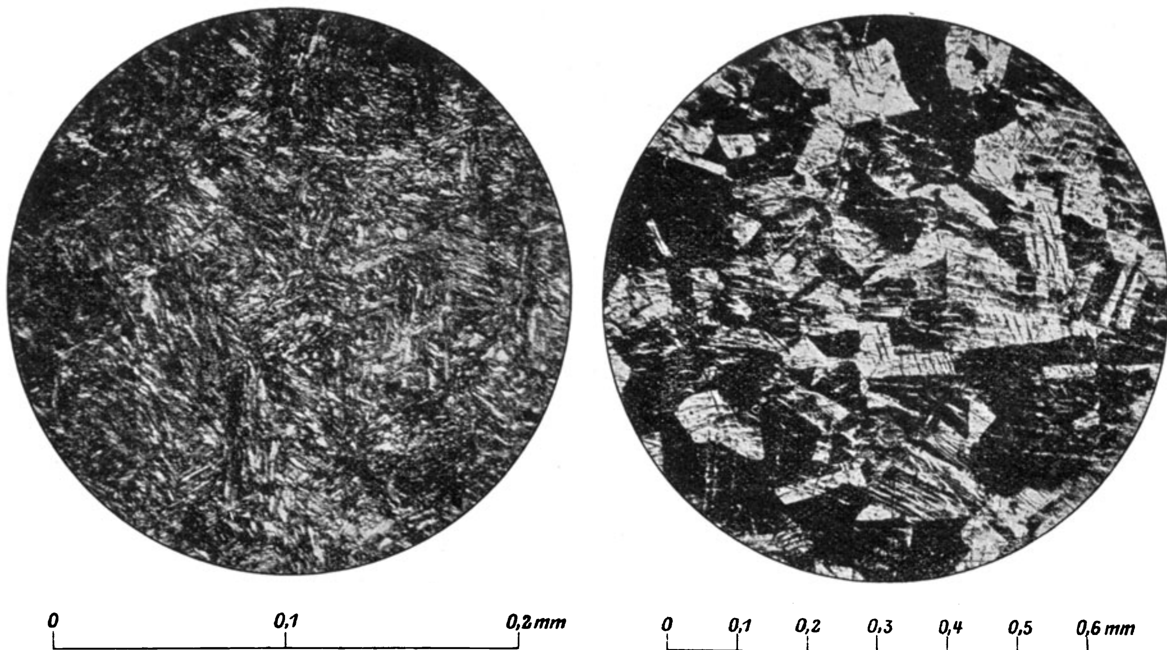


Abb. 346. Abb. 346a.
Gefügeänderung hochhaltigen Nickelstahles.

Zu Punkt 1 ist zu bemerken, daß je nach dem Gehalt an Nickel, Mangan und Kohlenstoff eine Legierung mit verschiedenem Gefüge und verschiedenen physikalischen Eigenschaften erhalten wird. Kleine Abweichungen in dem Gehalt der angegebenen Elemente können austensitisches oder martensitisches oder Übergangsgefüge verursachen und es ist für die weitere Verarbeitung erforderlich, die Gefügeart genau zu kennen.

Zu 2. Die hochprozentigen Nickelstahle haben keine ausgesprochene Streckgrenze. Bleibende Dehnungen treten bisweilen schon bei sehr geringen Spannungen, besonders bei den Temperaturen von 300^0 an aufwärts, ein.

Zu 3. Durch die Wärmebehandlung, z. B. das Wärmen zum Auswalzen eines Bleches oder das Glühen der Walzerzeugnisse entsteht leicht infolge Oberflächenentkohlung eine andere Gefügeart an der Oberfläche der Schaufeln. Verursacht durch diese Erscheinung wurden wiederholt Schaufeln von austensitischem Gefüge mit martensitischer Randschicht gefunden. Diese ist meist spröde und bildet die Ursache zu Anrissen.

Zu 4. Eine der Hauptursachen des Brüchigwerdens der Schaufeln aus hochprozentigem Nickelstahl im Betrieb wurde in den starken Reckspannungen gefunden, die beim Kaltwalzen, Ziehen oder Biegen im Material entstehen. Die Gefügeuntersuchung zeigte häufig starke Gleitlinien, die aus Zwillingsbildungen bestehen und durch die Kaltdeformation verursacht werden.

Zu 5. Wurmförmige Anfressungen wurden an solchen Turbinenschaufeln aus hochprozentigem Nickelstahl gefunden, die an der Oberfläche die stärksten Gleitlinien und den stärksten Rostbelag zeigten.

Wir haben nun festgestellt, daß man bei strenger Einhaltung einer bestimmten Zusammensetzung und Wärmebehandlung, sowie Vermeidung jeder Deformationswirkung einen hochprozentigen Nickelstahl mit guten Eigenschaften erhält, und so erklärt es sich auch, daß Turbinenschaufeln aus hochprozentigem Nickelstahl in einigen Fällen sich auch bewährt haben."

Beachtung verdient im Zusammenhang hiermit die schon vor Jahren von Guillet[1]) gemachte Feststellung über den Wechsel im Gefüge des Stahles bei wechselndem Nickelgehalt. Nach den ausgedehnten Versuchen dieses Forschers ist bei kohlenstoffarmen Nickelstählen der Bereich von 13 bis 25 v. H. Nickelgehalt durch Auftreten fast reinen martensitischen Gefüges, daher große Härte und Brüchigkeit gekennzeichnet. Unterhalb 13 v. H. weist der Stahl vorwiegend perlitisches, oberhalb 25 v. H. vorwiegend polyedrisches (γ-Eisen-)Gefüge auf. Mit zunehmendem Kohlenstoffgehalt nehmen beide Grenzwerte ungefähr linear ab, man kann daher den Stahl bei gleichem Nickelgehalt durch geeignetes Regulieren anderer Zusatzstoffe aus dem gefährlichen martensitischen Gefüge in das günstigere polyedrische Gefüge überführen. Dies wird durch die beiden mikroskopischen Ätzbilder (Abb. 346, 346a), die ich der Elektrostahlfabrik Paul Girod in Ugine verdanke, aufs beste illustriert. Beide Stähle enthalten 22 v. H. Nickel, allein in Abb. 346 erscheint infolge sehr kleiner sonstiger Beimengungen das nadelförmige martensitische Gefüge, während in Abb. 346a so viel Mangan und Kohlenstoff zugesetzt wurden, das polyedrisches Gefüge auftrat. Die zitierte Firma betont die Zuverlässigkeit des im elektrischen Ofen hergestellten Stahles, der während der Erzeugung auf seine Zusammensetzung hin geprüft wird.

6. Baustoffe für höchste Temperaturen, wie sie bei der Gasturbine, auf deren Entwicklung so viele Hoffnungen gesetzt werden, unvermeidlich zu sein scheinen, sind in erster Linie Kobalt-Chrom-Legierungen, die nach Tammann[2]) bei 25 v. H. Chrom, 75 v. H. Kobaltinhalt bei 720° C noch rd. 45 kg/qmm Festigkeit und 22 v. H. Dehnung; nach anderen Angaben sogar 65 kg/qmm Festigkeit und 46 kg/qmm Fließgrenze aufweisen. Ähnliche Eigenschaften sollen Nickel-Kobalt-Legierungen mit mehr als 50 v. H. Kobalt und 1 v. H. Silberinhalt besitzen). Endlich gibt Schulz a. a. O. an, daß die Deutschen Nickelwerke Schwerte eine „Chronin" genannte (Chrom-Nickel?) Legierung herstellen, die bei 1000° C noch 65 kg/qmm Festigkeit und 35 v. H. Dehnung besitzt[3]).

72a. Der Verschleiß und das Rosten der Schaufeln.

Für den Verschleiß der Schaufeln kommen als besonders wirksam in Betracht: a) nasser Dampf, b) schlamm- oder staubhaltiger Dampf, c) chemische Einflüsse. Reiner überhitzter Dampf scheint so gut wie unschädlich zu sein.

Die Wirkung nassen Dampfes wird durch „Dampfblaseversuche" untersucht, wie solche wohl zum ersten Male von Rob. Sulzer veranstaltet worden sind.

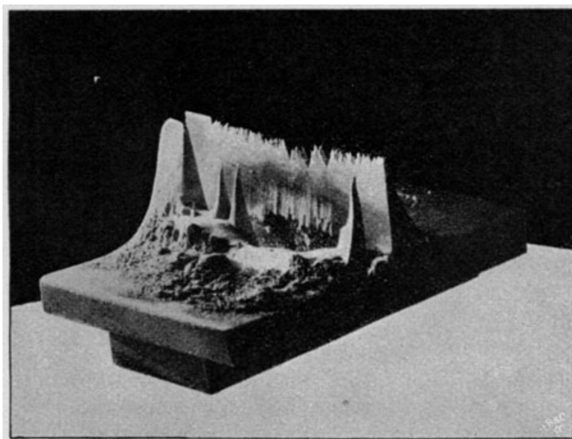


Abb. 347. Bleischaufel nach 6 Std. Blasedauer.

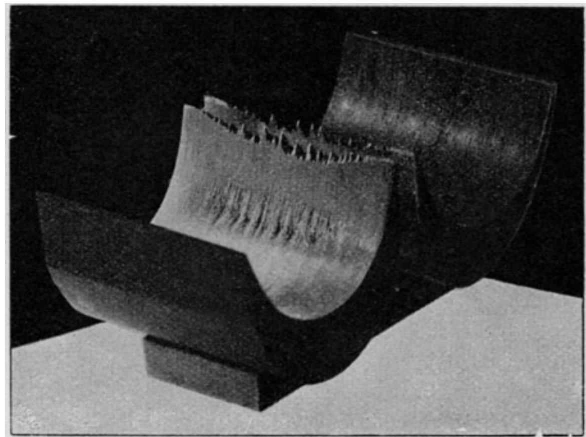


Abb. 347a. Deltametall nach $8^1/_2$ Std.

[1]) Etudes des alliages metalliques, Paris 1906, S. 278.

[2]) Schulz, Die Turbine, 1913, S. 268.

[3]) Für die Auskleidung der Verbrennungskammern käme nach Schulz a. a. O. ein feinporiger Ton der Deutschen Ton- und Steinzeug-Werke A.-G. Berlin in Frage, der 25 kg/qmm Zerreißfestigkeit aufweist. Daraus hergestellte, mit 50—60 m/sek Umfangsgeschwindigkeit laufende Säureventilatoren hätten bei 1100° C keine Formänderungen gezeigt, sollen jedoch gegen Temperaturwechsel empfindlich sein.

Die in Abb. 347 u. f. dargestellten Schaufeln aus verschiedenen Baustoffen waren im Vakuum von etwa 0,055 at abs. vor einer Düse mit rechteckigem Querschnitt, die mit Dampf von 10 at Überdruck beaufschlagt war, so befestigt, daß der Strahl senkrecht in die Mitte traf, zu einem Teil nach beiden Seiten abgelenkt wurde, zum kleineren Teil zwischen den Schaufeln hindurch konnte, um das fein ausgezogene Schaufelende allseitig zu bestreichen.

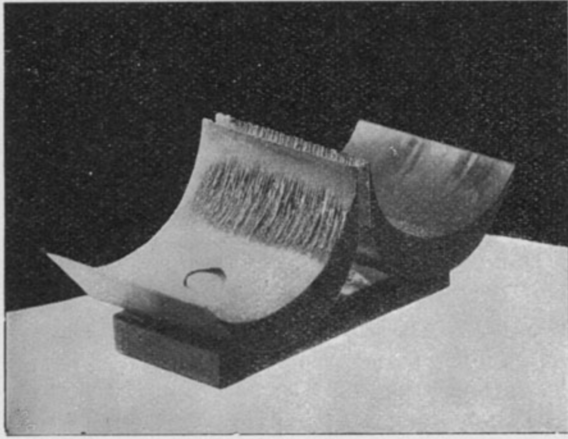


Abb. 347 b. Siemens-Martin-Stahl (gefräst) nach $8^1/_2$ Std. Blasedauer.

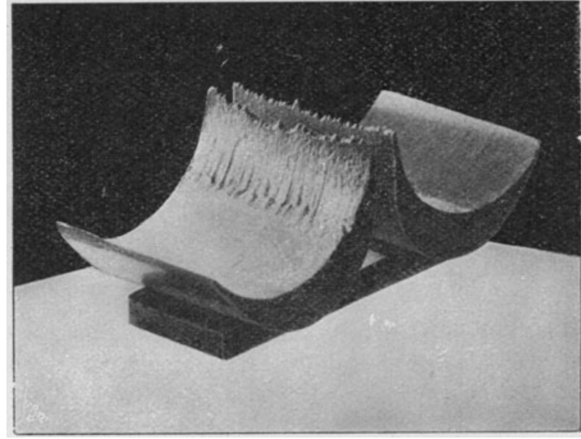
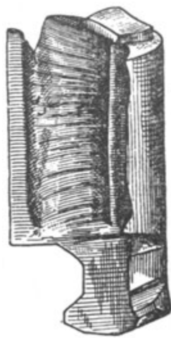


Abb. 347 c. Siemens-Martin-Stahl (im Gesenk geschmiedet) nach $8^1/_2$ Std.

In Abb. 347 war links eine Blei-, rechts eine Zinnschaufel. Nach bloß sechsstündiger Wirkung des Dampfes war die Zerstörung der ersteren eine vollständige. Die Schaufeln in Abb. 347 a bestanden aus Deltametall, von gepreßten Stäben abgeschnitten. Nach $8^1/_2$ stündiger Dauer sind die Stege stark ausgefressen, und in der Höhlung zeigen sich Vertiefungen. Siemens-Martin-Stahl von rd. 70 kg/qmm Zugfestigkeit und 12—15% Bruchdehnung zeigt nach $8^1/_2$ Stunden Dauer ebenfalls wesentliche Korrosionen, und zwar auf beiden Seiten des Steges Abb. 347 b. Die Schaufeln wurden von gezogenen Stäben abgeschnitten und gefräst. Abb. 347 c zeigt Schaufeln aus Siemens-Martin-Stahl von ähnlicher Beschaffenheit, es wurden aber die Schaufeln im Gesenk geschmiedet. Der Verschleiß ist nach $8^1/_2$ stündiger Dauer wesentlich größer als vorhin.



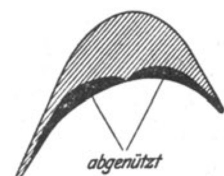


Abb. 348. Doppelte Anfressung einer Laufschaufel.

Sogar eine Anzahl von Werkzeug- und Schnelldrehstählen wurden schon nach achtstündiger Versuchsdauer angefressen. Diese scharfen Korrosionen so zäher Baustoffe stellen wohl alles in den Schatten, was der hydraulische Turbinenbau an Abnutzungen durch Sand und Wirbelung erlebt. Der Dampf war ursprünglich gesättigt, und infolge 40 m Leitungslänge trotz Wasserabscheiders etwas naß.

Die Abnutzung durch mitgeführten Staub, der nichts anderes ist als hartgebrannter Kesselschlamm, weist glatte, ja spiegelnde Oberflächen auf und mit Vorliebe einen Angriff gegen die Mitte der Schaufelhöhe, wo die Strömungsgeschwindigkeit offenbar am größten ist. Abb. 348 zeigt die merkwürdige (im Schnitte deutlicher dargestellte) Erscheinung, daß der Aufprall des Dampfes auf der Eintrittsseite zwei neue Krümmungsflächen erzeugt hat, die wohl durch die Strahlbilder, Abb. 152, zu erklären sein dürften und von ungünstiger Ablenkung des Strahles gegen den Schaufelrücken zeugen.

Die schlimmsten Abnutzungserscheinungen ruft endlich das Rosten hervor. Dies kann während des Betriebes oder während der Stillstände vor sich gehen. Das erstere kommt nur vor, wenn ungeeignete Brennstoffe verwendet werden oder wenn der Dampf unrein, chemisch wirksam ist.

So war die Aluminiumbronze, wie erwähnt, selbst in reinem Dampf der Zersetzung ausgesetzt. Während eines Stillstandes kann hingegen auch in reinem Dampf jede Art von Fluß- oder Gußeisen angegriffen werden. Die Unvertrautheit mit den Ursachen dieses Rostens hatte gewaltige Zerstörungen zur Folge, wie beispielsweise Lichtbild 349 zeigt, wo die Deckbänder auf große Strecken ganz weggefressen sind. In Abb. 350 ist die Stirnansicht eines Teiles des Laufrades dargestellt, und in 351 ein Teil eines Leitrades der gleichen Turbine. An letzterem erkennt man deutlich, daß nur der oberste Teil der

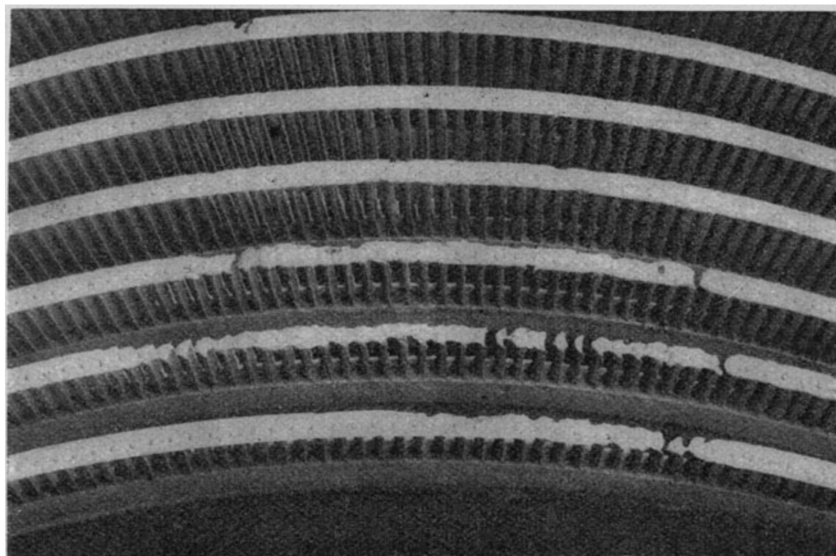


Abb. 349. Durch Rost weggefressene Deckbänder.

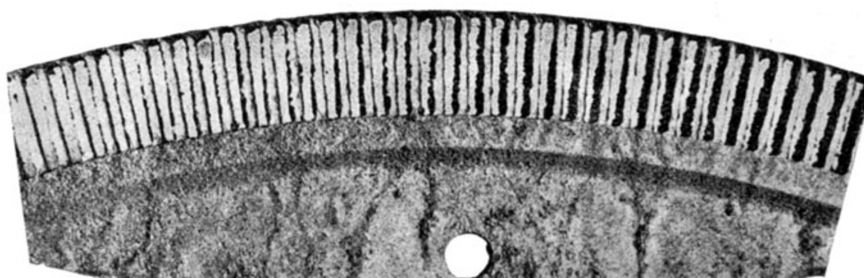


Abb. 350. Schaufelverrostung.



Abb. 351. Anrostungen an Leiträdern.

Schaufeln, wo warme Dampfschwaden hindurchstreichen, angegriffen wurde. Der Weg des sich bildenden Kondensates ist durch die senkrecht nach abwärts laufenden Riesellinien deutlich sichtbar. Weitere wertvolle Mitteilungen über ähnliche Betriebserfahrungen findet man bei Lasche[1]). Die Mittel der Verhütung behandeln wir im Abschn. 158.

[1]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1918, S. 628.

Die Firma Fried. Krupp A.-G. bringt neuerdings nicht rostende Stahle für Turbinenschaufeln auf den Markt. Die Marke *V1 M* besitzt eine hohe Streckgrenze; die Marke *V2 A* ist gegen chemische Einwirkungen besonders widerstandsfähig, insbesondere auch in feuchter Luft durchaus rostsicher. Die Festigkeitseigenschaften bei gewöhnlicher und bei höherer Temperatur sind in Zahlentafel 1 zusammengestellt.

Zahlentafel 1.

Bezeichnung	Temperatur °C	Festigkeit in kg/qmm	Streckgrenze in kg/qmm	Dehnung in v. H.	Kontraktion in v. H.
V1M . . .	20	85,3	69	11,2	58
V2A	20	79,4	38	46,4	54
V1M . . .	200	79,6	62	11,2	58
V2A	200	75,3	31	53,5	55
V1M . . .	300	77,5	61	9,9	56
V2A	300	70,2	26	47,0	54
V1M . . .	400	68,3	52	9,7	54
V2A	400	63,8	25	40,5	50
V1M . . .	500	48,1	23	15,5	72
V2A	500	58,3	24	22,4	47
V1M . . .	600	26,9	—	13,4	86
V2A	600	56,6	18	26,0	34

Über die Widerstandsfähigkeit gegen Rosten und Korrosion gibt Zahlentafel 2 Auskunft.

Zahlentafel 2.

Stoffart	Gewichtsabnahme bei			
	Rosten an der Luft	Korrosion in Seewasser	In Salpetersäure, 10 v. H. kalt	In Salpetersäure, 50 v. H. kochend
Flußeisen	100	100	100	100
5% Nickelstahl . .	—	—	97	98
9% „ . .	70	79	—	—
25% „ . .	11	55	69	103
V1M rostbeständig .	0,4	5,2	—	—
V2A „ .	0	0,6	0	0

Der rostsichere Stahl *V2 A* besitzt auch hohe Widerstandsfähigkeit gegen Einwirkung erhitzter Gase und Dämpfe. Bei Erhitzung in einem Ofen, unter Luftzutritt bei 1200° C, war nach 25 Stunden die Gewichtsabnahme von Flußeisen 250 g, von *V2A* Stahl 10 g.

Der Stahl *V1M* kann durch Abkühlen in Luft oder Öl von der Temperatur von 850—900 aus auf Federhärte (Brinelhärte etwa 400) gebracht werden. Eine Widerstandsfähigkeit gegen Schwefel- und Salzsäure ist nicht vorhanden.

73. Konstruktion der Leitvorrichtung.

Für die Konstruktion der Leitvorrichtung ist maßgebend: a) Die Erweiterung oder Nichterweiterung des Kanales; b) volle oder teilweise Beaufschlagung.

Die stärkste Erweiterung kommt bei den Düsen der einstufigen de Lavalschen Turbine vor. Abb. 352 stellt eine solche Düse mit ihrer durch eine Stopfbüchse gedichteten Ab-

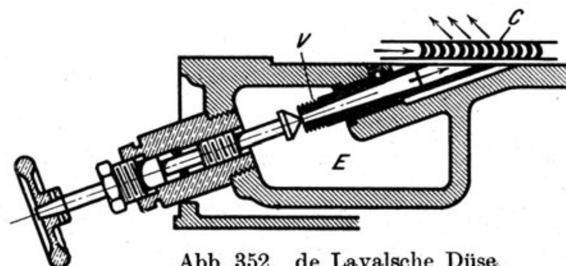


Abb. 352. de Lavalsche Düse.

schlußspindel dar. Die Düse dichtet metallisch in der sanft konischen Bohrung. Um sie herauszuheben, benützt man das bei *V* angedeutete Gewinde mit Preßschraube. Schon de Laval hat bemerkt, daß bei in größeren Abständen angeordneten Düsen die Strahlunterbrechung (wegen des Ansaugens des Dampfes der Umgebung in die Schaufelkanäle,

Abb. 353. Gußeisendüsen der A.E.G.

die die Düsen gerade verlassen und das Frischanfüllen derselben beim Eintritt vor die Düse) mit Verlust verbunden ist. Daher wurde später die notwendige Zahl von Düsen in einem massiven Bock dicht nebeneinander ausgebohrt. Vollen Erfolg bringt indes nur viereckiger Düsenaustritt, so daß die ausfließenden Dampfstrahlen bloß durch die unumgänglich notwendige Wandstärke der Düse voneinander getrennt sind. Die große Schwierigkeit der Bearbeitung der viereckigen Düsen hat man durch einen vollendet reinen Guß zu umgehen gelernt, wobei Gußeisen auch für hohe Überhitzung sich als Baustoff bewährt. Eine moderne Ausführung dieser Art von der Allgemeinen Elektrizitätsgesellschaft, Berlin ist in Abb. 353 dargestellt. Die gesamte Beaufschlagung besteht aus 15 Düsen und ist in drei Gruppen von je fünf aufgeteilt, die an die entsprechenden Dampfzuleitungskanäle angeschraubt werden. Die Wandstärke am Austritt beträgt bloß 3 mm. Der engste Querschnitt ist bemerkenswerterweise rund und geht auf der verhältnismäßig kurzen Strecke von 22 mm in eine nahezu quadratische Form über. Die Düsen beaufschlagen ein zweikränziges Curtis-Rad. Wie man in Abb. 354 erkennt, werden die Zwischenschaufeln dieses Rades in einem Ring *A* befestigt, der mittels Falz gegen die Düsensegmente an deren rippenförmigen Vorsprüngen *B* zentriert ist.

Abb. 354. Befestigung der Zwischenschaufeln.

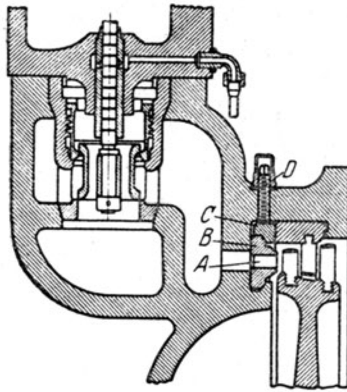
Die Maschinenfabrik Oerlikon hält bei teilweiser Beaufschlagung für erweiterte und nichterweiterte Kanäle an ausschließlicher Fräsarbeit fest. Demgemäß werden, wie Abb. 355

Abb. 355. Leitvorrichtung von Oerlikon.

zeigt, die mit angefrästen Nietköpfen versehenen Leitschaufeln zwischen zwei kreisbogenförmige Winkelprofile *A*—*B* eingenietet und obendrein mittels durchgehender Kopfschrauben *C* fest zusammengehalten. Das fertige Segment wird in einen in der Scheidewand ausgefrästen bogenförmigen Schlitz eingelegt, und durch Stiftschrauben *D* festgehalten.

Die A.-G. Brown, Boveri & Co. setzt die Leitvorrichtung aus drei Stücken *A*, *B*, *C*, Abb. 356, zusammen. In *A* sind gemäß Abb. 356a die Leitschaufeln eingefräst, *B* bildet den Abschluß nach oben, und *C* dient zur Befestigung, indem der durch die radialen Schrauben *D* ausgeübte Druck sich an der kegeligen Paßfläche in eine schräg gerichtete

Kraft umsetzt, deren Komponenten nach der Achsenrichtung und nach dem Halbmesser hin den erforderlichen Dichtungs- und Befestigungsdruck ergeben. Die Abbildung läßt



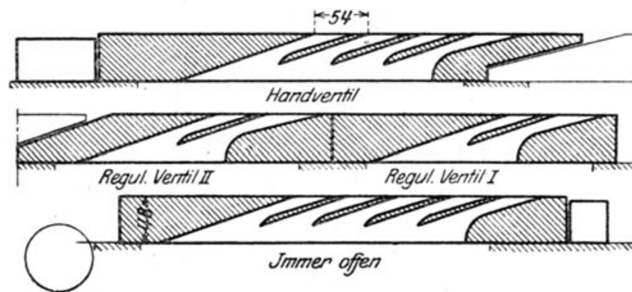


Abb. 356. Abb. 356a.
Leitvorrichtung von B.B.C.

erkennen, wie gleichzeitig die Zwischenschaufeln eines Curtisrades durch Beilage *C* festgehalten werden.

Für nichterweiterte (und bei vorgefrästen Schaufeln auch für mäßig erweiterte) Kanäle bewährt sich das bei der Zoellyturbine zuerst in großem Maßstabe angewendete Verfahren, die aus Nickelstahlblech gebogenen Leitschaufeln in die Gußeisenscheidewand einfach

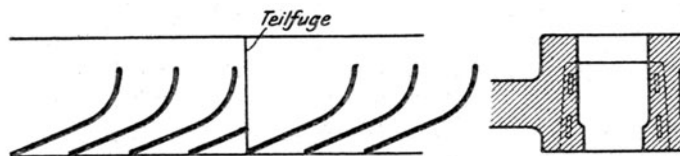


Abb. 357. **Teilung bei eingegossenen Leitschaufeln.**

einzugießen. Bei den heute so gut wie ausnahmslos in zwei Häften geteilten Scheidewänden wird nach Abb. 357 die Dampfführung bloß eines einzigen Kanales etwas beeinträchtigt. In Abb. 358 ist die Leitradhälfte einer Zoellyturbine eingeformt samt eingelegten Schaufeln und Kernen dargestellt. Der Guß muß tadellos gelingen, um die Nacharbeit der Flanken auf ein Mindestmaß zu beschränken. Man verwendet heute das

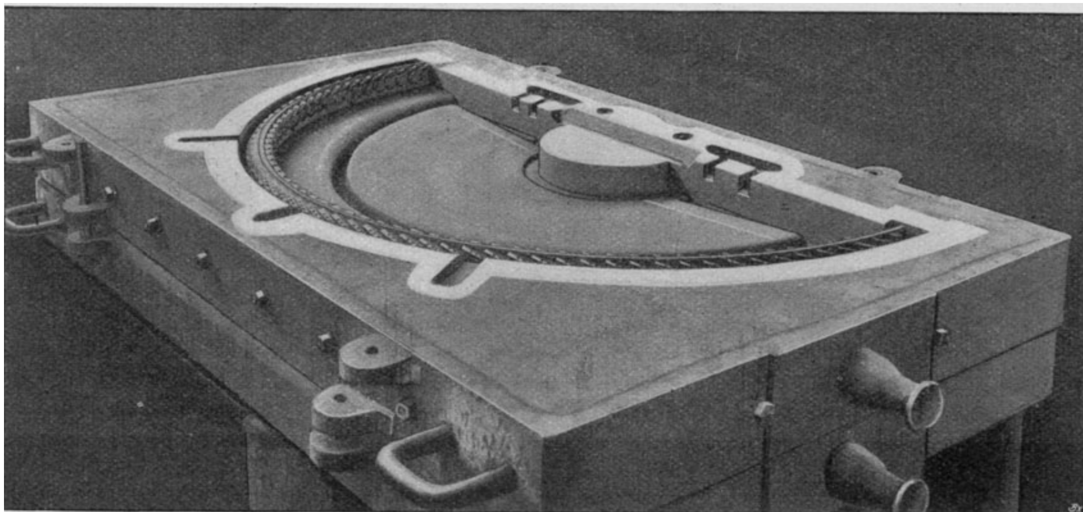


Abb. 358. Eingeformte Leitradhälfte.

Verfahren bis zu Schaufeln von unter 10 mm Höhe, wobei allerdings eine Nacharbeit zum Zwecke genauer Maßeinhaltung an den Flanken und der Zentrierung halber unvermeidlich ist. Dies wird durch kleine an den Kranz angeschraubte, von Hand oder elektrisch angetriebene Stoßmaschinchen bewerkstelligt. Die Leitkanäle werden eigentümlich windschief versetzt, von folgender im D.R.P. Nr. 235753 niedergelegten Überlegung ausgehend. Ist *abcd*, Abb. 358a, die Stirnansicht des Leitradaustrittes in Ebene *AB*, so liefert (bei Ausschluß von Spaltexpansion) der austretende Parallelstrahl den Schnitt *a'b'c'd'* mit der Eintrittsebene *CD* im Laufrad. Dieser Schnitt liegt schief gegen den Kranz, das Laufrad ist unrichtig beaufschlagt. Soll, wie man fordern muß, der Kranz so gut wie lückenlos (bis auf die Stegbreiten) vom Dampfstrahl getroffen werden, dann müssen die Leitkanäle, wie im unteren Teile der Abb. 358a dargestellt, je einzeln um einen Betrag verdreht werden, den man durch Rückwärtsprojektion entsprechender Laufkranzabschnitte ermittelt.

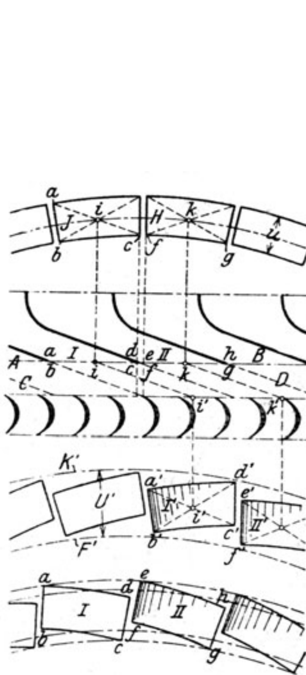


Abb. 358a. Versetzte Leitkanäle nach Zoelly.

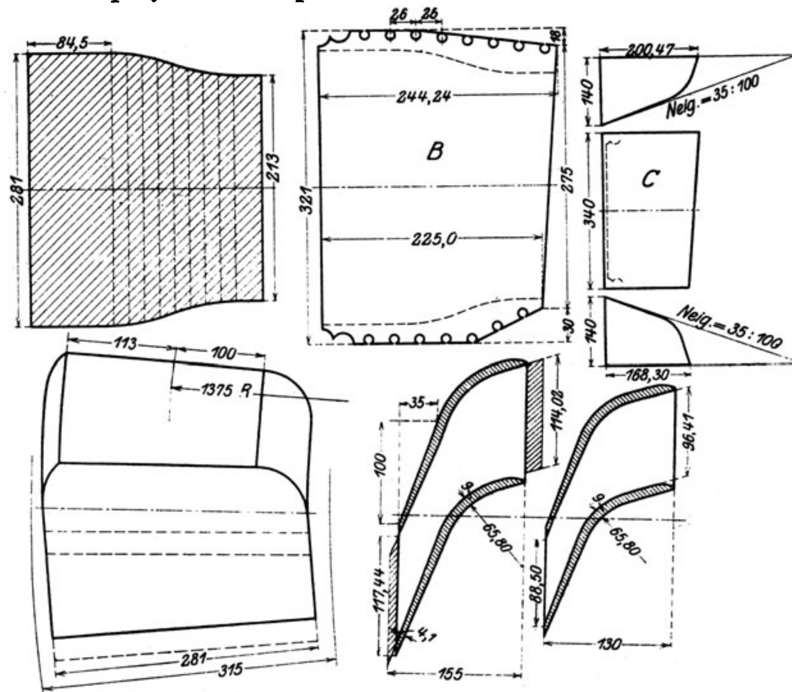


Abb. 358b. Leitschaufeln der A.E.G.

Die Zeichnung eines Leitkanales für eine große Turbine der Allgem. Elektriz.-Ges. ist in Abb. 358b dargestellt. Darin bedeutet *B* die Abwickelung des Leitschaufelbleches, *C* einen schmiedeeisernen Richtklotz. Um große Festigkeit zu erzielen, ist die Schaufelstärke mit 9 mm gewählt; damit der Strahl indes nicht durch so starke Stege unterbrochen wird, sind die Schaufeln am Austritt auf 4 mm abgefräst. Infolge seitlicher Einschnürung findet trotzdem keine Erweiterung statt.

Beanspruchung der Leitschaufeln bei Vollbeaufschlagung.

Wir nehmen zunächst an, die Zwischenböden seien als volle, ebene Wände mit unveränderlicher Wandstärke h ausgeführt. Die beidseitig eingegossenen Leitschaufeln werden nach Abb. 359 eine Verbiegung erleiden, die am Innenrand durch die Neigung β' des Zwischenbodens, am Außenrand durch die Verdrehung β des Außenringes mitbedingt ist. Im Grenzfall vollkommener Starrheit des Bodens und des Ringes wären $\beta' = \beta = 0$. Die Belastung besteht aus dem gleichmäßigen Überdruck p in kg/cm² und dem Rückdruck des austretenden Strahles, den wir vorerst der größeren Sicherheit halber vernachlässigen. Die inneren Kräfte im Endschnitt der Schaufel werden in der Stirnansicht des Außenrandes gemäß Abb. 360 durch die nach der Lot- und Wagerechten (d. h. nach der Achsen- und Umfangsrichtung) zerlegten Schubkräfte P_v und P_h und die Biegungsmomente dargestellt, deren nach den gleichen Richtungen zerlegte „Achsen" die Größen M_v, M_h be-

sitzen. Sind I und II die Hauptträgheitsachsen mit den Trägheitsmomenten $J_1 J_2$, so zerlegen wir alle Kräfte nach diesen Richtungen und erhalten

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= P_v \cos\alpha + P_h \sin\alpha; \qquad & M_1 &= M_v \sin\alpha + M_h \cos\alpha \\ P_2 &= P_v \sin\alpha - P_h \cos\alpha; \qquad & M_2 &= -M_v \cos\alpha + M_h \sin\alpha \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Die **statischen Beziehungen** zwischen diesen Kräften sind 1. $\Sigma P_v =$ Gesamtbelastung oder $P_v =$ Gesamtbelastung geteilt durch die Zahl der Schaufeln.

2. Die Summe der Momente für den Mittelpunkt des Leitrades $= 0$, oder mit Rücksicht auf Abb. 359 (Grundriß)

$$M_v = P_h r \quad (2)$$

Als unbekannte bleiben übrig: $P_h M_h \beta \beta' z$, die vermöge der **elastischen Formänderung** bestimmt werden.

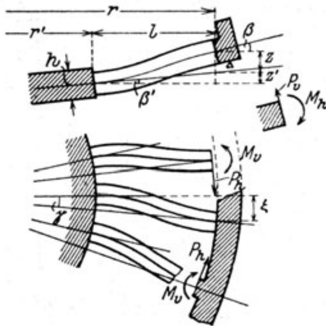


Abb. 359.

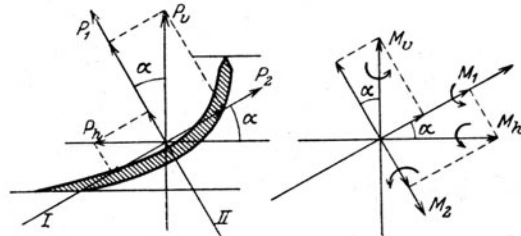


Abb. 360.

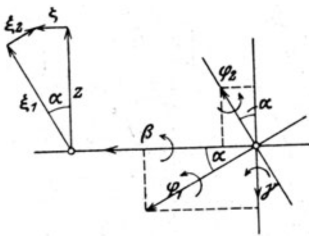


Abb. 361.

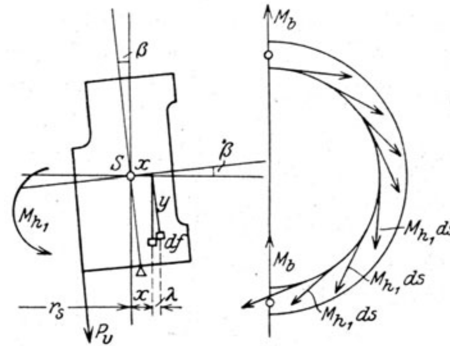


Abb. 362.

Beanspruchung eingegossener Leitschaufeln.

a) Formänderung des Bodens. Wie man z. B. nach Föppl ableiten kann, beträgt die Einsenkung des vollen Bodens z_0 in der Mitte, wenn die Neigung des Meridians β' am Scheibenrande vorgeschrieben wird

$$z_0 = \frac{3(1-\nu^2)\,p\,r'^4}{16 E h^3} + \frac{r'\beta'}{2} \quad (3)$$

Das zur Erzeugung der Neigung β' erforderliche Randmoment ist dabei für die Längeneinheit des Umfanges

$$M'_{h1} = -\frac{p r'^2}{8} + \frac{E h^3 \beta'}{12(1-\nu) r'} \quad (4)$$

Ist die Schaufelteilung am Innenrand t' und bezeichnet M_h' das entsprechende Moment für eine Schaufel, so ist hiernach

$$M_h' = M'_{h1} t' = P_v l - M_h \quad (5)$$

b) Die Formänderung der Schaufel besteht in einer Biegung um die Beträge $\xi_1 \cdot \xi_2$ nach den Richtungen I und II, und in einer Verdrehung des Endquerschnittes um die Beträge $\varphi_1 \varphi_2$, deren Drehachsen in Abb. 361 eingetragen sind. Es ergibt sich daraus die Verbiegung in wage- und lotrechter Richtung

$$\zeta = \xi_1 \sin\alpha - \xi_2 \cos\alpha; \qquad z = z' + \xi_1 \cos\alpha + \xi_2 \sin\alpha \quad (6)$$

Ähnlich sind die Verdrehungen um eine wage- bzw. lotrechte Achse

$$\beta = \varphi_1 \cos\alpha + \varphi_2 \sin\alpha + \beta'; \qquad \gamma = \varphi_1 \sin\alpha - \varphi_2 \cos\alpha \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Im einzelnen aber liefern die bekannten Biegungsformeln, wenn wir, um sicher zu gehen, von dem Anteil der dem Druck auf die Schaufellänge entspricht, absehen und nur die Endkräfte in Betracht ziehen:

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{P_1 l^3}{3 J_1 E} - \frac{M_1 l^2}{2 J_1 E}; \quad \varphi_1 = \frac{P_1 l^2}{2 J_1 E} - \frac{M_1 l}{J_1 E} \\ \xi_2 &= \frac{P_2 l^3}{3 J_2 E} - \frac{M_2 l^2}{2 J_2 E}; \quad \varphi_2 = \frac{P_2 l^2}{2 J_2 E} - \frac{M_2 l}{J_2 E} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

c) Die Formänderung des Außenringes. Durch die Verdrehung eines Querschnittes (Abb. 362) wird der Abstand des Flächenteilchens δf um den Betrag $y\beta$ vergrößert. Die Kreisfaser, deren Querschnitt δf ist, erleidet dadurch in Richtung des Umfanges die spezifische Ausdehnung $y\beta/(r_s + x)$ oder angenähert $\beta y/r_s = \varepsilon$; also ist die Umfangsspannung $\sigma_u = E\varepsilon$ dem Abstand y proportional. Die Gesamtresultierende der Elementarspannungen liefert mithin — wenn J_h das Widerstandsmoment um die wagerechte Schwerpunktsachse bedeutet, ein Biegungsmoment:

$$M_b = \Sigma \delta f \sigma y = \frac{\Sigma \delta f y^2 E \beta}{r_s} = \frac{J_h E \beta}{r_s} \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

Das Gleichgewicht der Außenmomente, die für die Längeneinheit $M_{h1} = M_h : t$, wo t die Teilung (außen) bedeutet, ausmachen, erfordert gemäß Abb. 362 an der einen Ringhälfte

$$2 M_b = 2 r M_{h1} = 2 r \frac{M_h}{t} \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

Durch Einsetzen von (9) erhält man

$$M_h = \frac{J_h E t}{r r_s} \beta \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

Die Schaufelkraft P_v wird durch den Gegendruck der Auflagerung aufgehoben.

d) Die Formänderungs-Bedingungen sind in den Gl. (6) u. (7) enthalten, und es kommt gemäß Abb. 359 noch die Forderung hinzu, daß, wenn die kreisrunde Form des Außenringes gewahrt sein, d. h. das Ende der Schaufel radial gerichtet bleiben soll,

$$\zeta = r\gamma \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

sein muß. Man wird $\xi_1 \xi_2 \varphi_1 \varphi_2$ nach (8) durch $P_1 P_2 M_1 M_2$ ausdrücken und in (6), (7) und (12) einschieben. Wenn man für $P_1 P_2 M_1 M_2$ die Werte (1) einsetzt, so sind $\beta\gamma\zeta$ durch die Unbekannten $P_h M_h$ ausgedrückt. Hierauf wird schließlich in der ersten Gl. (7)

$$\beta = \varphi_1 \cos\alpha + \varphi_2 \sin\alpha + \beta' \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

β mittels Gl. (11) und β' mittels Gl. (4) u. (5) ebenfalls durch M_h ersetzt. Die so umgeformten Gl. (12) u. (13) dienen zur Berechnung des statisch Unbekannten $P_h M_h$. Wollte man das schrittweise Ausscheiden der Zwischengrößen allgemein algebraisch durchführen. so entstünden verwickelte, lange Formeln und nutzlose Rechenarbeit. Man wird daher zweckmäßiger die gegebenen Zahlenwerte in die Grundformeln einsetzen, und das Ausscheiden erst dann nach dem eben beschriebenen Schema besorgen. Sind $P_h M_h$ bekannt, so können rückwärts die Zwischengrößen, die Beanspruchung der Schaufeln und die Formänderungen $z z' z_0$, also auch die gesamte Einsenkung

$$z_g = z_0 + z' + z \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

ermittelt werden.

Das Verfahren wird wesentlich vereinfacht, wenn man $\beta = \beta' = 0$ voraussetzen darf. Umgekehrt wird es nach Durcharbeitung obiger Darlegungen nicht schwer fallen, die vorläufig eingeführten Vernachlässigungen fallen zu lassen. Man müßte dann beachten, 1) daß infolge des Rückdruckes des austretenden Dampfstrahles eine Entlastung stattfindet, und zwar axial um den Betrag

$$P_a = m_1 (c_{1a} - c_{0a})$$

im Umfang um

$$P_u = m_1 (c_{1u} - c_{0u}).$$

worin $c_0 c_1$ die Zulauf- und die Austrittsgeschwindigkeit, m_1 die auf eine Schaufel entfallende sekundliche Masse bedeuten. Es ändert sich P_v und die Kraft P_u wird in die Momentengleichung (2) eintreten. Am Außenring müßte eine entsprechende „Befestigungskraft“ angreifen, damit sich der Ring nicht dreht. Die der Schaufellänge nach wirkenden Kräfte sind der Dampfüberdruck weniger dem Rückdruck. Die ihnen entsprechenden Formänderungsanteile sind $\xi_1' = Q_1 l^3/8 J_1 E$; $\varphi_1' = Q_1 l^3/6 J_1 E$, wenn Q_1 die ganze Druckkomponente für die Biegung von Achse I bedeutet, usf.

Eine übergroße Verfeinerung der Rechnung hat keinen praktischen Wert, da einmal die große Mehrzahl der Zwischenböden längs eines Durchmessers geteilt ist, und weil auch bei den ungeteilten noch die Gußspannungen, die sicher vorhanden sind, als letzte große Unbekannte auftreten.

74. Die Berechnung der Scheibenräder.

Die Beanspruchung eines Scheibenrades durch die zu übertragende Umfangskraft ist bei den großen Geschwindigkeiten immer gering, diejenige durch die eigenen Fliehkräfte ist ausschlaggebend und wird wie folgt ermittelt.

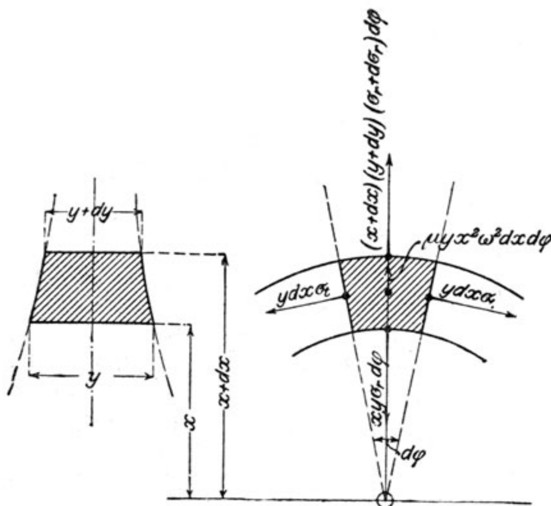


Abb. 363. Kräfte am Scheibenelement.

Es bedeutet in Abb. 363

x den radialen Abstand eines Punktes von der Achse,

y die Dicke der Scheibe im Abstande x,

σ_r die radiale Spannung, d. h. die Spannung für die Flächeneinheit einer koaxialen Zylinderfläche,

σ_t die Umfangs- (oder „tangentiale“) Spannung, d. h. die Spannung für die Flächeneinheit eines durch die Achse gehenden Schnittes,

$\mu = \gamma/g$ die spezifische Masse des Scheibenmateriales,

ω die Winkelgeschwindigkeit der Drehung,

$m = \frac{1}{\nu}$ das Verhältnis der Längenausdehnung zur sogenannten Querkontraktion; dabei ist für Flußeisen und Stahl $\nu = 0{,}3$. Für Gußeisen ist ν nach Nonnenmacher[1]) wie folgt veränderlich:

Bei einem Zug von $\sigma_z = 600$; 0; bei einem Druck von $\sigma_d = 300$; 1200 kg/qcm
$\nu = 0{,}197$; 0,234 $\nu = 0{,}25$; 0,28

Das Scheibenrad wird in bezug auf eine zur Achse senkrechte Ebene symmetrisch und die Dicke desselben als so wenig veränderlich vorausgesetzt, daß man die Neigung der radialen Spannungen gegen die Symmetrieebene des Rades vernachlässigen und sie über den Querschnitt gleichmäßig verteilt ansehen kann. Wir behandeln also die Radscheibe als einen „plattenförmigen“ Körper mit wenig veränderlicher Dicke, und vernachlässigen die Schubspannungen, die in zur Achse senkrechten Schnittflächen und in der Mantelfläche von zylindrischen Schnitten vorkommen.

Inwieweit diese Annahmen für die Anwendungen zulässig sind, wird weiter unten besprochen.

Das Gleichgewicht der Kräfte am Massenelement.

Das aus der Scheibe nach Abb. 363 geschnittene Teilchen besitzt den Rauminhalt

$$dV = y x d\varphi dx \qquad (1)$$

die Masse

$$dm = \mu dV \qquad (2)$$

[1]) Elastizität und Festigkeit des Gußeisens 1916.

und wird von folgenden Kräften ergriffen: die eigene Fliehkraft

$$dF = dm x \omega^2 \quad \ldots \quad (3)$$

(bei der unendlich kleinen Dicke dürfen wir den Schwerpunktshalbmesser mit x vertauschen)
Die Seitenkräfte

$$dT = y dx \sigma_t \quad \ldots \quad (4)$$

die radiale Kraft auf der inneren Stirnfläche

$$dR = y x d\varphi \sigma_r \quad \ldots \quad (5)$$

und die gleichartige Kraft auf der äußeren Stirnfläche

$$dR' = (y + dy)(x + dx) d\varphi (\sigma_r + d\sigma_r) \quad \ldots \quad (6)$$

wobei dy, $d\sigma_r$ algebraisch verstanden sind.

Das Gleichgewicht dieser Kräfte fordert das Verschwinden der radialen Komponenten, d. h.

$$dR' - dR - T d\varphi + dF = 0 \quad \ldots \quad (7)$$

Oder wenn wir (1) bis (6) einsetzen mit $dR' - dR = d(xy\sigma_r) d\varphi$:

$$\frac{d(xy\sigma_r)}{dx} - y\sigma_t + \mu\omega^2 x^2 y = 0 \quad \ldots \quad (8)$$

Diese Gleichung, die für jeden Abstand x von den Werten der Spannungen und der Scheibendicke y erfüllt sein muß, ist nun zu verbinden mit dem

Grundgesetz der Elastizität.

Es bezeichne

ξ die radiale Verschiebung im Endpunkte des Halbmessers x,
ε_r die spezifische Dehnung im Sinne des Halbmessers,
ε_t die spezifische Dehnung im Sinne des Umfanges.

Aus der Elastizitätstheorie wissen wir, daß, wenn ein elastischer Körper einer reinen Zugbeanspruchung unterworfen wird, durch welche in Richtung des Zuges die spezifische (d. h. auf die Längeneinheit bezogene) Dehnung ε hervorgerufen werde, in allen Richtungen senkrecht dazu eine Zusammenziehung eintritt, deren Betrag (ebenfalls für die Längeneinheit) $= \nu\varepsilon$ ist. Ein Element unserer Scheibe erfährt durch die radiale Spannung σ_r zunächst die radiale Ausdehnung $\sigma_r : E$. Die gleichzeitig wirkende Tangentialspannung σ_t ruft indessen die sich algebraisch summierende Querverkürzung $\nu\sigma_t : E$ hervor, und es ergibt sich in radialer Richtung die spezifische Ausdehnung:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_t)$$

ebenso findet man

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}(\sigma_t - \nu\sigma_r) \quad \ldots \quad (9)$$

Gleichzeitig wird die Scheibe auch eine Verkürzung in axialer Richtung erfahren, deren Betrag aus den beiden „Hauptspannungen" σ_r und σ_t für die Längeneinheit sich zu

$$\varepsilon_a = -\frac{\nu(\sigma_r + \sigma_t)}{E} \quad \ldots \quad (9a)$$

bestimmt, indessen praktisch belanglos ist.

Diese Dehnungen können durch die Verschiebung ξ ausgedrückt werden. Ein unendlich dünner Ring vom Halbmesser x besitzt vor der Ausdehnung den Umfang $2\pi x$; nach der Ausdehnung $2\pi(x + \xi)$, mithin ist die spezifische Dehnung im Umfange

$$\varepsilon_t = \frac{2\pi(x + \xi) - 2\pi x}{2\pi x} = \frac{\xi}{x} \quad \ldots \quad (10)$$

Da die Verschiebung des im Abstande x befindlichen Punktes A durch ξ gegeben ist, erhalten wir für den sich ursprünglich im Abstande $x + dx$ befindlichen Punkt B die Verschiebung

$$\xi' = \xi + \frac{d\xi}{dx} dx.$$

Die ursprüngliche Länge der Strecke AB ist dx; die nach der Ausdehnung

$$dx' = (x + dx + \xi') - (x + \xi) = \xi' - \xi + dx = \frac{d\xi}{dx}dx + dx.$$

Die spezifische Dehnung beträgt also

$$\varepsilon_r = \frac{dx' - dx}{dx} = \frac{d\xi}{dx} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

Setzen wir die Werte von ε_t und ε_r in Gl. (9) ein, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_t) = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{d\xi}{dx} + \nu\frac{\xi}{x}\right) \\ \sigma_t &= \frac{E}{1-\nu^2}(\nu\varepsilon_r + \varepsilon_t) = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\nu\frac{d\xi}{dx} + \frac{\xi}{x}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

Durch Einführung in Gl. (8) entsteht

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} + \left[\frac{d(\lg n\, y)}{dx} + \frac{1}{x}\right]\frac{d\xi}{dx} + \left[\frac{\nu}{x}\frac{d(\lg n\, y)}{dx} - \frac{1}{x^2}\right]\xi + Ax = 0 \quad \ldots \quad (13)$$

mit den abkürzenden Bezeichnungen

$$A = \frac{\mu\omega^2}{E'}, \qquad E' = \frac{E}{1-\nu^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13a)$$

Gl. (12) u. (13) dienen im Verein mit den Bedingungen, welchen die Spannungen oder die Dehnungen am inneren oder äußeren Rande der Scheibe unterworfen sind, zur Bestimmung derjenigen Größen. die unbekannt sind. wobei folgende Hauptfälle unterschieden werden können.

1. Man schreibt die Scheibenabmessungen d. h. $y = f(x)$ vor, und sucht die Spannungen.

2. Man schreibt die Spannungen vor, ferner die Scheibendicke in einem Punkt (etwa am „Kranz") und sucht die Scheibenform, d. h. y. In letzterem Fall ist es wichtig zu beachten, daß die Spannungen nicht voneinander unabhängig sind, da sie nach Gl. (12) durch eine und dieselbe Funktion ξ ausgedrückt werden. Scheiden wir diese aus, indem wir ξ nach (9) u. (10) als $\xi = (\sigma_t - \nu\sigma_r)x/E$ ausdrücken und die Ableitung hiervon nach (9) u. (11) dem Werte $d\xi/dx = (\sigma_r - \nu\sigma_t)E$ gleichsetzen, so folgt

$$\frac{d\sigma_t}{dx} - \nu\frac{d\sigma_r}{dx} = (1+\nu)\frac{\sigma_r - \sigma_t}{x} \quad \ldots \ldots \ldots$$

als die sogenannte **„Verträglichkeitsbedingung"** (Kompatibilitätsgleichung) der Spannungen. Ist die eine als Funktion von x angenommen, so bestimmt Gl. (14) den Verlauf der anderen.

Das Gesetz von Guest-Mohr.

Bis vor kurzem glaubte man die größte Dehnung als Maß der Beanspruchung betrachten zu sollen. Seit den ausgezeichneten Versuchen von Guest[1]) und der theoretischen Deutung derselben durch Mohr[2]) kann zumindest für zähdehnbare Stoffe diese Hypothese nicht mehr aufrecht erhalten, und muß die größte Schubspannung als Maß der Beanspruchungsgefahr anerkannt werden. Die größte Schubspannung ist aber nach der Elastizitätslehre der halbe Unterschied der algebraisch genommen größten und kleinsten Normalhauptspannung. Die mittlere Hauptspannung fällt daher ganz aus dem Spiel. Bei unseren Scheiben sind σ_r und σ_t zwei Hauptspannungen, die dritte, die zur Scheibenmittelebene senkrecht stünde, ist Null. Die größte Schubspannung ist daher $\sigma_r/2$ oder $\sigma_t/2$ je nachdem σ_r oder σ_t größer ist. und sie wirkt im ersten Falle in einer der beiden Ebenen. die durch die Tangente an den betreffenden Breitenkreis gehen und um 45° gegen die Achse geneigt sind: im zweiten Fall gehen die Ebenen durch den Halbmesser und schließen mit der Achse ebenfalls den Winkel von 45° ein. Infolge dieses einfachen Zusammenhanges ist mit der Bestimmung der Spannungen σ_r und σ_t auch die Schubspannung schon mitbestimmt, und es ist gleichgültig, ob wir z. B. für ein größtes σ_t den Wert 2000 kg/qcm oder für das größte τ ent-

[1]) Philos. Magaz. 1900, Juli.

[2]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1900, S. 1524f.

sprechend 1000 kg/qcm als Beanspruchung zulassen. Seither hat übrigens Bonte[1]) an Versuchen mit gleichzeitiger Zug- und Drehbeanspruchung die „größte Dehnungs"-Theorie als mit den Tatsachen am besten übereinstimmend gefunden. Bei der sehr symmetrischen Beanspruchung der Scheiben dürfte man trotzdem bis auf weiteres nach der alten Methode, d. h. mit den größten Normalspannungen rechnen.

75. Die Scheibe gleicher Festigkeit ohne Bohrung.

Gleiche Festigkeit bedeutet hier, daß die radiale und tangentiale Spannung überall denselben unveränderlichen Wert besitzen. Statt uns auf die allgemeine Integration der Gl. (13) einzulassen, führen wir besser die Werte

$$\sigma_r = \sigma_t = \sigma = \text{konst.}$$

in Gl. (8) ein, wodurch sich Beziehung

$$\frac{dy}{dx} + \frac{\mu\omega^2}{\sigma} xy = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8a)$$

und aus dieser durch Integration die Lösung

$$y = y_a e^{\frac{-\mu\omega^2}{2\sigma} x^2} = y_a e^{\frac{-\mu u^2}{2\sigma}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

ergibt, wenn y_a die Scheibendicke im Wellenmittel, u die Umfangsgeschwindigkeit im Abstande x bedeutet

Die spezifische Dehnung ist ebenfalls nach allen Richtungen gleich groß und die lineare Ausdehnung dem Abstand x proportional

$$\xi = \frac{1-\nu}{E} \cdot \sigma x \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

Berechnen wir mit diesem ξ die Spannungen σ_r, σ_t gemäß Gl. (12), so erweisen sie sich als $= \sigma$. Gl. (15) und (16) in Gemeinschaft befriedigen aber Gl. (13), was beweist, daß die Lösung richtig ist.

Es sei hierbei darauf hingewiesen, daß durch Vernachlässigung der Querverkürzung (d. h. durch die Annahme $\nu = 0$) in diesem Falle ein erheblicher Fehler begangen würde, wie insbesondere aus den Grenzbedingungen hervorgeht.

Die Scheibe gleicher Festigkeit eignet sich für die höchsten Umfangsgeschwindigkeiten und sollte aus einem weiter unten angegebenen Grunde „voll", d. h. ohne Bohrung für die Welle ausgeführt werden. Wie alsdann die Welle befestigt werden kann, sehen wir aus Abb. 365, welche ein de Lavalsches Turbinenrad darstellt. Die am Rande sichtbare Eindrehung ist eine der Maschinenbauanstalt Humboldt geschützte Sicherheitsmaßregel gegen Zerspringen. Beim „Durchgehen" der Turbine wird nämlich zuerst der Kranz abgeschleudert, und dadurch (da keine Schaufeln mehr vorhanden sind) der ungleich gefährlichere Bruch der Scheibe verhütet. Die Konstrukteure de Lavals kennen und benutzen Formel (15) seit langem.

Um die Scheibe vollkommen su bestimmen, haben wir zu achten auf die

Randbedingung.

Nach Formel (15) kann nämlich die Scheibe, wennschon mit endlos abnehmender Dicke, ins Unendliche fortgesetzt werden. Praktisch aber begrenzen wir die Scheibe durch einen zylindrischen Schnitt vom Halbmesser x_2, in welchem sie eine Dicke y_2 (Abb. 364), besitzt, und in einen Kranz mit dem Schwerpunkthalbmesser x_3, der Breite y_3 und dem Flächeninhalt f_3 übergeht.

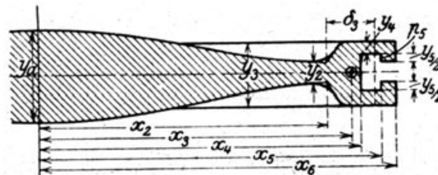


Abb. 364. Scheibe gleicher Festigkeit.

Mit δ_3 ist die reduzierte Kranzdicke bezeichnet, so daß $f_3 = y_3 \delta_3$ ist. Die eingesetzten Schaufeln mögen im Falz den spezifischen Fliehkraftdruck p_5 auf die Gesamtbreite y_5 ausüben. Schneiden wir ein Kranzstück von der (im Schwerpunktsumfang

[1]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1920, S. 1071.

gemessenen) Breite 1 aus, so wirkt auf dieses radial nach auswärts die Gesamtkraft

$$q_1 = \mu f_3 x_3 \omega^2 + p_5 y_5 \frac{x_5}{x_3} - \sigma y_2 \frac{x_2}{x_3} \quad \ldots \ldots \quad (17)$$

Das Gleichgewicht der am halben Kranz wirkenden Außenkräfte und Spannungen ergibt die Beziehung

$$\sigma_t = \frac{q_1 x_3}{f_3} \quad \ldots \ldots \quad (17\,\text{a})$$

Neben dieser Umfangsspannung sollte noch die radiale im Ringe herrschende Spannung berücksichtigt werden. Diese ist in den Außenflanken angenähert $\sigma_4 = p_5 y_5 / y_4$ und geht

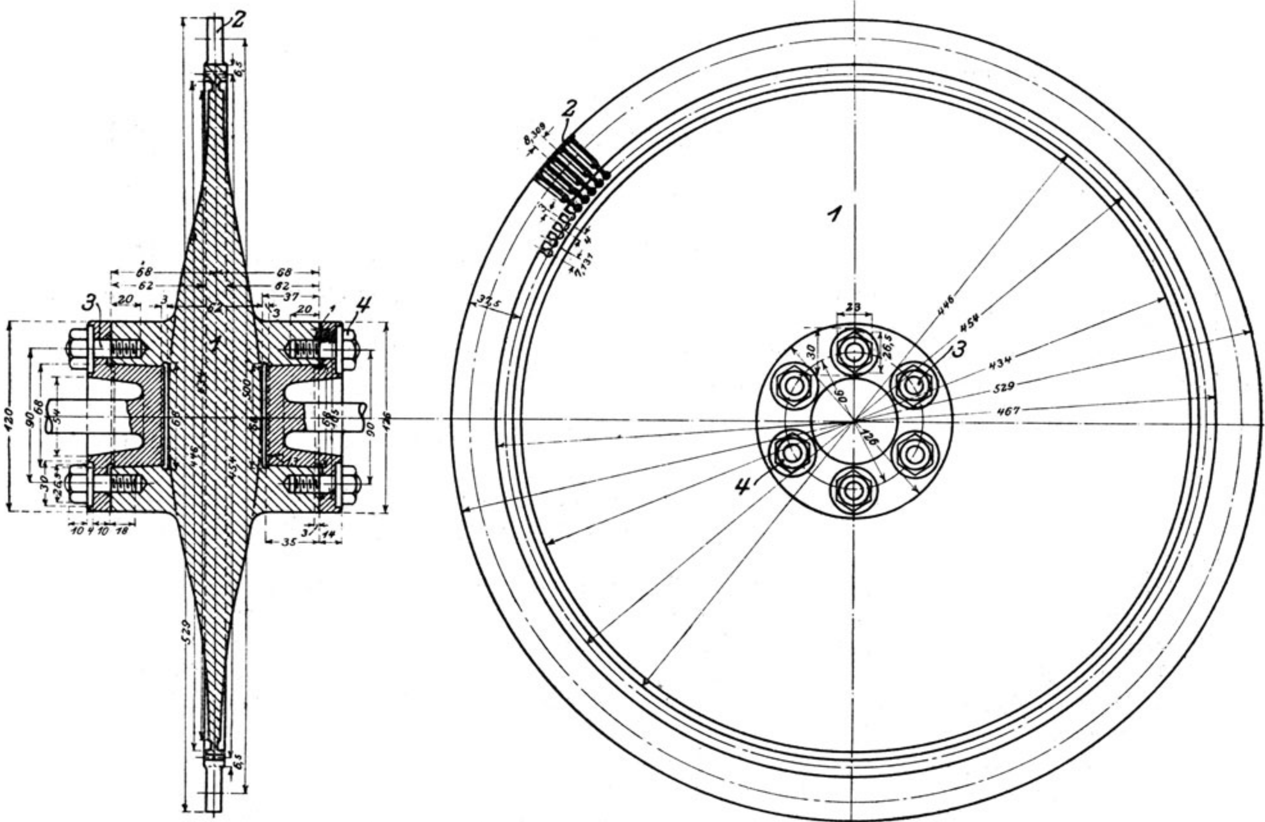


Abb. 365. de Lavalsches Turbinenrad gleicher Festigkeit.

allmählich in den Wert σ bei y_2 über. Bezeichnen wir den bloß einzuschätzenden Mittelwert hiervon mit $\bar{\sigma}_r$, so ist die Umfangsdehnung des Ringes $\varepsilon_t = (\sigma_t - \nu \bar{\sigma}_r)/E = \xi_3 / x_3$. Die radiale Verschiebung ξ_2' im Abstand x_2 kann man angenähert $= \xi_3$ setzen und erhält mithin

$$\xi_2' = (\sigma_t - \nu \bar{\sigma}_r) \frac{x_3}{E} \quad \ldots \ldots \quad (17\,\text{b})$$

Andererseits ist die Verschiebung des Randes infolge der elastischen Ausdehnung der Scheibe $\xi_2 = (1 - \nu)\, \sigma x_2 / E$. Da nun der Zusammenhang von Scheibe und Kranz nicht unterbrochen werden darf, erhalten wir als die „**Randbedingung**"

$$\xi_2' = \xi_2 \quad \ldots \ldots \quad (17\,\text{c})$$

Durch Einführen von Gl. (17) bis (17b) ergibt sich hieraus, wenn man angenähert $x_2 / x_3 \simeq 1$ setzt:

$$f_3 = \frac{\sigma y_2 x_2 - p_5 y_5 x_5}{\sigma_u - (1 - \nu)\, \sigma - \nu \bar{\sigma}_r} \quad \ldots \ldots \quad (18)$$

oder

$$\sigma = \frac{(\sigma_u - \nu \bar{\sigma}_r) f_3 + p_5 y_5 x_5}{y_2 x_2 + (1 - \nu) f_3} \quad \ldots \ldots \quad (18\,\text{a})$$

Darin bedeutet

$$\sigma_u = \mu \omega^2 x_3^2 = \mu u^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18\text{b})$$

diejenige Umfangsspannung, die im frei umlaufenden Kranz vorkommen würde. Über deren Größe gibt für $\mu = 8{,}10^{-6}\,\text{kg/cm}^{-4}\ \text{sek}^2$ nachfolgende Zahlentafel Auskunft

Umfangsgeschwindigkeit	m/sek	100	150	200	300	400
Umfangsspannung	kg/qcm	800	1800	3200	7200	10800

Im Ausdruck von f_3 kann $\nu \bar{\sigma}_r$ unbedenklich weggelassen werden. Der Zähler ist praktisch stets positiv; der Nenner nähert sich der Null, wenn $(1-\nu)\sigma$ nur wenig kleiner ist als σ_u. Das bedeutet, daß die Scheibe in diesem Bereiche einen „unendlich" großen Kranz zu „tragen" vermag. Wäre endlich $(1-\nu)\sigma > \sigma_u$ so käme ein negativer Querschnitt heraus. d. h. dieser Spannungszustand ist nicht verwirklichbar.

Die Stärke y_2 wird durch die Rücksicht auf Möglichkeit der Beschädigung während des Transportes bedingt. Ferner ist maßgebend die Bearbeitung; bei zu kleiner Stärke könnten sich die Scheiben beim Aufspannen verziehen, oder sich unter dem Einfluß von Innenspannungen eher werfen. Praktisch passende Werte sind etwa 7—12 mm bei 1 m Durchmesser, 25—40 mm bei 3 m Durchmesser. Innerhalb dieser Grenzen kann Gl. (17c) auch dazu benutzt werden, um y_2 zu dem konstruktiv gegebenen Kranz zu berechnen. Wird sowohl an f_3 wie an y_2 festgehalten, so liefert Gl. (18a) die Spannung mit der die Scheibe zu rechnen ist.

Würde man auf die Eigenspannung des Kranzes keine Rücksicht nehmen, also so rechnen, als ob er durch dicht stehende radiale Sägenschnitte in einzelne Teile aufgelöst wäre und seine Fliehkraft gerade die erforderliche Randspannung σ ergäbe, so kommt dies, wie man leicht nachweist, dem Weglassen von $(1-\nu)\sigma + \nu\bar{\sigma}_r$ in Gl. (18) gleich. Der Unterschied in der Größe von f_3 ist bei hohen Umfangsgeschwindigkeiten klein.

Beispiel. Eine Scheibe von 2 m Durchmesser bei 3000 Umdr./M. aus Nickelstahl zu konstruieren. Wir wählen $y_2 = 15$ mm und die Spannung $\sigma = 2000$ kg/qcm. Die spezifische Masse folgt aus dem spezifischen Gewicht $\mu = \gamma : g$. Rechnen wir in kg/cm/sek als Einheiten, so ist γ das Gewicht eines Kubikzentimeters, d. h. 0,0078 kg/ccm und $g = 981$ cm·sek^{-2}, mithin $\mu = 7{,}95 \cdot 10^{-6}$. Ferner wenn wir näherungsweise $x_2 = 100$ cm einsetzen: $u = 31420$ cm/sek und wir erhalten nach Formel (15) $y_a/y_2 = 7{,}11$; $y_a \cong 10{,}7$ cm. Das Rad soll mit zwei Schaufelkränzen versehen werden, die $y_3 = 8$ cm bedingen und eine Fliehkraft ausüben mögen, die ebenso groß ist, als wäre der Umfang mit Stahl in einer Dicke von 1 cm belegt. Das bedeutet, daß man sich den Kranz auf ein Rechteck $y_3\,\delta_3$ reduziert denkt. Dabei ist $y_5 = y_3$ und p_5 bedeutet die Fliehkraft von 1 ccm Stahl im Abstande von rd. 100 cm. d. h. $p_5 = \mu x_2 \omega^2 = 7{,}95\ 10^{-6} \cdot 100 \cdot (314{,}2)^2 = 78{,}48$ kg/qcm. Die im frei umlaufenden Ringe vom Halbmesser $x_3 \cong x_2$ herrschende Spannung wäre $\sigma_u = \mu\omega^2 x_3^2 = \mu u^2 = 7848$ kg/qcm, und mit der Annäherung $x_5 = x_2$ erhalten wir aus Gl. (18): mit $\nu = 0{,}3$ und $\bar{\sigma}_r = 0$

$$y_3\,\delta_3 = \frac{\sigma y_2 - p_5 y_3}{\sigma_u - (1-\nu)\sigma}\, x_2 = \sim 36{,}8\ \text{cm}^2, \text{ also } \delta_3 = \sim 4{,}60\ \text{cm}.$$

Schließlich ist die Ausdehnung des Halbmessers mit $E = 2200000$ kg/qcm

$$\zeta_2 = \frac{0{,}7 \cdot 2000 \cdot 100}{2200000} = 0{,}021\ \text{cm}.$$

Grenzen der Ausführbarkeit.

Als Grenzen für die Ausführbarkeit der Scheiben gleicher Festigkeit sind einerseits die größte zulässige Beanspruchung anzusehen, die durch den gewählten Baustoff bedingt ist, und für Siemens-Martin-Flußstahl mit etwa 1500 kg/qcm; für 3—5 v. H.-haltigen Nickelstahl mit etwa 2500 kg/qcm festgesetzt werden dürfen. Anderseits kommt es darauf an, die Hauptvoraussetzungen unserer Gleichungen zu erfüllen, daß man nämlich die radialen Spannungen der Länge der zylindrischen Erzeugenden nach als genügend gleichmäßig verteilt voraussetzen dürfe. Die Scheiben müssen daher im Meridianschnitt hinreichend „schlank" aussehen. Wie es hiermit steht, lehrt folgendes Zahlenbeispiel. Es sei $\sigma = 2500$ kg/qcm; dann erhält man die Zusammenstellung:

Umfangsgeschwindigkeit u m/sek	200	400	600	800	1000
$\log_{(10)} (y_a/y_2) =$	0,278	1,11	2,49	4,44	6,94
$y_a/y_2 =$	1,90	12,9	310	27500	—

Sobald man mit u über 400 m/sek hinausgehen will, ist y_a/y_2 so groß, daß die Scheibe in der Mitte „bauchig" erscheint, und schon bei $u = 600$ zu einem langen Umdrehungskörper ausartet. Wie wir in Abschnitt 184 nachweisen, steigt die Ungleichmäßig-

keit der Spannungsverteilung auf etwa $\pm$ 10 v. H. wenn die Scheibendicke in der Mitte etwa $^1/_4$ des Durchmessers beträgt. Bei so starker Ausbauchung wie für $u = 600$ m/sek erforderlich, würden die Seitenteile überhaupt nicht mehr zum Tragen herangezogen. Daraus folgt, daß praktisch auch mit $\sigma = 2500$ kg/qcm Scheiben mit über 400 m/sek Umfangsgeschwindigkeit kaum —, und schon bei 600 m/sek durchaus unausführbar sind. Was soll man also von Erfindervorschlägen halten, die uns freigebig mit Gasturbinen von 1000 m/sek Umfangsgeschwindigkeit beschenken?

Daß letztere Geschwindigkeit auch bei einem um seinen Schwerpunkt **rotierenden Stab gleicher Festigkeit** unerreichbar ist, lehrt eine einfache Rechnung. Ein durch die Querschnitte f und f' begrenztes Element des Stabes im Abstand x entwickelt die Fliehkraft $\mu f dx \cdot x\omega^2$, die der Resultierenden $f\sigma - f'\sigma' = -\frac{df\sigma}{dx}dx$ gleich sein muß. Daraus folgt, wenn σ unveränderlich sein soll

$$\frac{df}{f} = -\frac{\mu x \omega^2}{\sigma} \text{ und } \lg n \frac{f}{f_a} = -\frac{\mu x^2 \omega^2}{2\sigma} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (19\text{a})$$

oder: der Querschnitt des Stabes gleicher Festigkeit ist dieselbe Funktion des Abstandes vom Drehpunkt, wie die Dicke der Scheibe gleicher Festigkeit. Also wird auch hier durch die erforderliche Verdickung im Mittelpunkt eine Grenze für die Ausführbarkeit bei 400 m/sek überschreitenden Geschwindigkeiten gesetzt.

Andere Formen gleicher Festigkeit.

In einem allgemeinen Sinne aufgefaßt, liegt „gleiche Festigkeit" auch dann vor, wenn die Sicherheit gegen Bruch in jedem Punkt der Scheibe die gleiche ist. Je nachdem man die Dehnung, die Normal- oder die Schubspannung als maßgebend für den Bruch ansieht, ergeben sich verschiedene Konstruktionsbedingungen. Insbesondere kann man beispielsweise die Scheibenformen suchen, bei denen in allen Punkten dieselbe Umfangsspannung σ_t herrscht, während gleichzeitig die Radialspannung stets kleiner bleibt als σ_t, oder umgekehrt. Diese Aufgabe wurde in umfassender Weise von Basch und Leon gelöst[1]).

Die Scheibe gleicher Festigkeit als Speicher für kinetische Energie.

Der Wuchtinhalt eines sich drehenden Körpers ist

$$K = \frac{\Theta \omega^2}{2},$$

wo Θ das Massenträgheitsmoment bezeichnet.

Man kann sich die Aufgabe stellen, diejenige Körperform zu bestimmen, die bei gegebenem Baustoff, d. h. vorgeschriebener Höchstspannung mit dem geringsten Gewicht, also geringster Lager- (vielleicht auch geringster Luft-)reibung auskommt. Nach den Darlegungen des DRP. Nr. 251865 ist dies bei der Form gleicher Festigkeit der Fall, falls man zur Erzeugung der Randspannung einen rechteckigen Kranz mit der Breite y_2 anfügt. Da dieser Kranz eine große radiale Höhe aufweist, ist die strengere Form der Randbedingung, wie wir sie für eine Nabe in Abschn. 77 entwickeln, zu verwenden.

76. Die Scheibe gleicher Dicke.

wird durch den Wert $y = $ konst gekennzeichnet, wodurch Gl. (13) in die einfachere Form

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d\xi}{dx} - \frac{\xi}{x^2} + Ax = 0 \text{ mit } A = (1 - \nu^2)\frac{\mu\omega^2}{E} \quad \ldots\ldots (20)$$

übergeht, die auch als $\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(\xi x)\right] = -Ax$ geschrieben und sofort integriert werden kann. Man erhält zunächst

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(\xi x) = -\frac{Ax^2}{2} + 2b_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (20\text{a})$$

[1]) Über rotierende Scheiben gleicher Festigkeit. Sitzungsberichte der Kais. Akad. d. Wiss. Wien, Bd. CXVI, Abt. IIa. Dez. 1907.

indem man die willkürliche Konstante mit $2b_1$ bezeichnet. Hieraus schließlich

$$\xi = -\frac{A}{8}x^3 + b_1 x + \frac{b_2}{x} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (21)$$

worin b_1 und b_2 durch die Randbedingungen bestimmt werden müssen.

Für die Spannungen liefern Gl. (12) die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2}\left[-(3+\nu)\frac{Ax^2}{8} + (1+\nu)b_1 - (1-\nu)\frac{b_2}{x^2}\right] \\ \sigma_t &= \frac{E}{1-\nu^2}\left[-(1+3\nu)\frac{Ax^2}{8} + (1+\nu)b_1 + (1-\nu)\frac{b_2}{x^2}\right] \end{aligned}\right\} \ldots \ldots (22)$$

a) Durchlochte Scheibe mit freien Rändern.

Die Scheibe habe zur Aufnahme der Welle eine Bohrung vom Halbmesser r_1 und einen Außenhalbmesser r_2, sie sei an beiden Rändern frei, d. h. sowohl für $x = r_1$ wie für $x = r_2$ sei die Spannung $\sigma_r = 0$.

Indem wir dieser Randbedingung gemäß in die erste der Gl. (22) einmal $x = r_1$ dann $x = r_2$ einschieben und das Ergebnis gleich Null setzen, erhalten wir zwei Gleichungen zur Bestimmung der Integrationskonstanten b_1, b_2. Die Auflösung ergibt

$$b_1 = \frac{3+\nu}{1+\nu}\frac{A}{8}(r_2^2 + r_1^2); \quad b_2 = \frac{3+\nu}{1-\nu}\frac{A}{8}r_1^2 r_2^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (23)$$

Diese Werte in Gl. (22) eingesetzt, würden unübersichtliche Ausdrücke ergeben; daher empfiehlt sich, in der Anwendung die Zahlenwerte von b_1 und b_2 und mit diesen die Zahlenwerte von σ_r, σ_t zu berechnen.

Bemerkenswert ist der Fall, daß die zentrale Bohrung allmählich auf ein verschwindend kleines Loch zusammenschrumpft, d. h. daß wir zur Grenze $r_1 = 0$ übergehen. Es folgt wohl $b_2 = 0$, allein diesen Wert darf man nicht ohne weiteres in die Ausdrücke für die Spannungen einsetzen, sondern man hat den Grenzwert von $b_2 : x^2$ zu bilden, indem zunächst der vollständige Ausdruck von b_2 benutzt wird. Auf diese Weise erhält man

$$(1-\nu)\frac{b_2}{x^2} = \left(\frac{3+\nu}{8}A\frac{r_1^2 r_2^2}{x^2}\right)_{\text{für}\left\{\begin{smallmatrix} x=0 \\ r_1=0\end{smallmatrix}\right.} = \frac{3+\nu}{8}A r_2^2$$

und die Werte der Spannungen sind

$$\left.\begin{aligned} &\text{für } x = 0 \quad \sigma_r = 0 \quad \sigma_t = \frac{3+\nu}{4}\frac{EAr_2^2}{(1-\nu^2)} = \frac{3+\nu}{4}\sigma_u \\ &\text{für } x = r_2 \quad \sigma_r = 0 \quad \sigma_t = \frac{1-\nu}{4}\frac{EAr_2^2}{1-\nu^2} = \frac{1-\nu}{4}\sigma_u \end{aligned}\right\} \ldots \ldots \ldots (24)$$

wenn mit $\sigma_u = \mu\omega^2 r_2^2$ wieder die Spannung bezeichnet wird, die ein freier Ring vom Halbmesser r_2 bei gleicher Umlaufzahl erleiden würde.

b) Durchlochte ruhende Scheibe mit vorgeschriebenen Radialspannungen am Rande.

Setzen wir $\omega = 0$, was auch $A = 0$ zur Folge hat, so erhalten wir die für die ruhende Scheibe geltenden Formeln. Als Randspannungen seien für $x = r_1$; $\sigma_r = \sigma_1$ für $x = r_2$; $\sigma_r = \sigma_2$ vorgeschrieben. Durch Auflösung dieser Bedingungsgleichungen erhält man die Beiwerte $b_1\, b_2$, die in Gl. (22) eingesetzt:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \left[\sigma_2 r_2^2 - \sigma_1 r_1^2 - (\sigma_2 - \sigma_1)\frac{r_1^2 r_2^2}{x^2}\right]\frac{1}{r_2^2 - r_1^2} \\ \sigma_t &= \left[\sigma_2 r_2^2 - \sigma_1 r_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_1)\frac{r_1^2 r_2^2}{x^2}\right]\frac{1}{r_2^2 - r_1^2} \end{aligned}\right\} \ldots \ldots (23\text{a})$$

ergeben. Für eine Scheibe, an der bloß die Außenspannung $\sigma_2 = \sigma$ angreift, ist die Spannungsverteilung für verschiedene Werte des Halbmessers der innern Bohrung in Abb. 366 dargestellt. Bemerkenswert ist der Übergang zu immer kleineren Bohrungen bis schließlich $r_1 = 0$ wird. Es sind dann σ_r und σ_t überall, wo $x > r_1$ unveränderlich $= \sigma$, am innern Rand aber wird $\sigma_r = 0$ und $\sigma_t = 2\sigma$. Die graphische Darstellung lehrt diese Unstetigkeit durch die bei kleiner Bohrung sich einem rechten Winkel immer mehr anschmiegenden Kurven σ_r und σ_t leicht verstehen.

Für eine umlaufende Scheibe mit den Randspannungen $\sigma_1 \sigma_2$ ist die Beanspruchung die algebraische Summe aus der unter a) und b) ermittelten.

c) Volle Scheibe.

Hier muß für $x = 0$, $\xi = 0$ sein, was nach Gl. (21) allgemein $b_2 = 0$ ergibt. Aber auch der Grenzwert $b_2 : x^2$ ist $= 0$ für $x = 0$, weil in der Umgebung des Mittelpunktes und in diesem selbst $\sigma_r = \sigma_t$ sein muß. Für b_1 erhalten wir, falls der Rand frei ist,

$$b_1 = \frac{3+\nu}{1+\nu} \frac{A}{8} r_2^2.$$

Die Spannungen nehmen, wenn der Rand frei ist, folgende Werte an:

$$\text{für } x = 0 \quad \sigma_r = \sigma_t = \frac{3+\nu}{8} \sigma_u \quad \text{für } x = r_2 \quad \sigma_r = 0 \quad \sigma_t = \frac{1-\nu}{4} \sigma_u \quad . \; . \; (25)$$

Für die ruhende volle Scheibe, die am Rand der Radialspannung σ ausgesetzt ist, findet man $b_2 = 0$ und $b_1 = \frac{1-\nu}{E} \sigma$. Daraus folgt aber nach Gl. (22), daß in dieser Scheibe überall

$$\sigma_r = \sigma_t = \sigma \quad . \; . \; . \; . \; . \; (25\text{a})$$

ist und die Ausdehnung wird

$$\xi = \frac{1-\nu}{E} x \sigma \quad . \; . \; . \; . \; . \; (25\text{b})$$

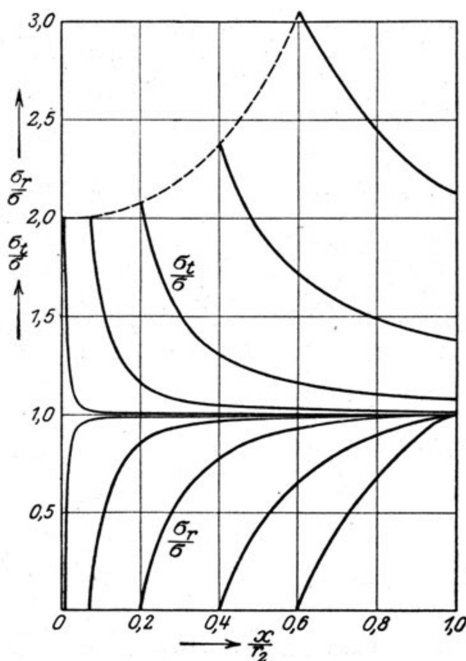


Abb. 366. Spannungsverteilung in der durchlochten, ruhenden, außen mit σ gespannten Scheibe gleicher Dicke.

d) Der Laibungsdruck aufgeschrumpfter Scheiben.

Wird eine Scheibe vom Halbmesser r_2 mit dem Bohrungsdurchmesser r_1 auf eine Welle vom Halbmesser $r_1 + \Delta$ aufgeschrumpft, und darf man angenähert annehmen, daß von der Welle das innerhalb der Bohrung befindliche Stück in seiner Zusammendrückung durch die Wellenfortsetzung nur unwesentlich behindert wird, so kann der Schrumpfungsdruck p wie folgt berechnet werden.

Für die Scheibe ist mit Rücksicht auf b) $\sigma_2 = 0$ und $\sigma_1 = -p$. Hieraus folgen die Beiwerte

$$b_1 = \frac{1-\nu}{E} \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} p; \quad b_2 = \frac{1+\nu}{E} \frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} p \quad (26)$$

In der Welle herrscht gemäß Gl. (25a) überall der Druck p, und die Verkürzung ist durch Gl. (25b) gegeben. Diese muß zusammen mit der Aufweitung der Scheibenbohrung das Schrumpfmaß Δ ergeben, d. h. es ist

$$\xi_{Scheibe} + \xi_{Welle} = \Delta \quad \text{oder} \quad b_1 r_1 + \frac{b_2}{r_1} + \frac{(1-\nu) r_1 p}{E} = \Delta \quad . \; . \; . \; . \; (26\text{a})$$

und man erhält

$$p = \frac{E \Delta (r_2^2 - r_1^2)}{2 r_1 r_2^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (26\text{b})$$

Ist p bekannt, so erhält man nach b) die Spannungen. Ist die Scheibe gegen die Bohrung praktisch „unendlich" groß, so erhalten die Spannungen folgende einfache Ausdrücke:

$$p = \frac{E \Delta}{2 r_1}; \quad \sigma_r = -p \left(\frac{r_1}{x}\right)^2; \quad \sigma_t = +p \left(\frac{r_1}{x}\right)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (26\text{c})$$

Die Gefahr der Anbohrung.

Vergleicht man die Ergebnisse (24) und (25), oder die Abb. 366, so erkennt man, daß die Umfangsspannung am Außenrand durch eine kleine Bohrung in der Mitte nicht verändert wird. Die tangentiale Spannung am Rande der inneren

Anbohrung hat hingegen, auch wenn das Loch noch so klein wäre, den doppelten Wert derjenigen, die in der vollen Scheibe herrscht. Dieses wichtige Ergebnis hat zuerst Grübler[1]) ausgesprochen. Kirsch[2]) hat des weiteren nachgewiesen, daß ein kreisrundes Loch in einer unendlich ausgedehnten Platte, die nach einer Richtung einem gleichmäßigen Zuge ausgesetzt ist, die Beanspruchung geradezu auf das Dreifache derjenigen, die in der vollen Platte entstehen würde, steigert, und zwar in den Endpunkten des zur Zugrichtung senkrechten Durchmessers der Bohrung. In den Endpunkten des zum Zuge parallelen Durchmessers tritt ein der vollen Zugspannung gleicher tangentialer Druck auf. Diese Ergebnisse wird man näherungsweise auf irgendeine kleine Bohrung in einem beliebigen Scheibenrad anwenden dürfen, und man erhält durch Summation der von den radialen und tangentialen Spannungen herrührenden Anteile, falls in der vollen Scheibe die Spannungen mit σ_r und σ_t bezeichnet werden:

in den Endpunkten eines radialen Durchmessers am Rande der kreisunden Bohrung die tangentiale Spannung

$$\sigma_t' = 3\,\sigma_t - \sigma_r;$$

in den Endpunkten des zum Halbmesser senkrechten Durchmessers die radial gerichtete Spannung

$$\sigma_r' = 3\,\sigma_r - \sigma_t.$$

Diese Formeln berechtigen mithin zu folgendem Schluß:

Die Durchbohrung eines Scheibenrades an irgendeiner Stelle steigert die Beanspruchung am Rande der Bohrung auf mindestens das Doppelte derjenigen, die ohne Bohrung vorhanden wäre. Ist im vollen Teile die radiale oder die tangentiale Spannung wesentlich überwiegend, so wird die Beanspruchung nahezu auf das Dreifache vergrößert.

Daß wir im Turbinenbau auch so stark durchlochte Scheiben vorfinden wie in Abb. 367 dargestellt ist, darf nicht als Widerspruch mit der Theorie aufgefaßt werden. Diese Scheiben gehören langsam laufenden Schiffsturbinen an und sind sehr geringer Fliehkraftbeanspruchung ausgesetzt.

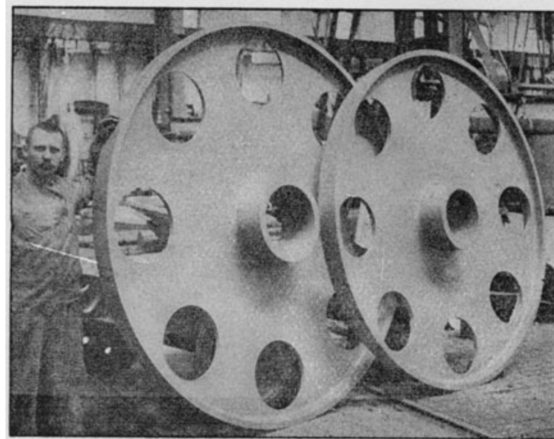


Abb. 367. Große Bohrungen sind nur in schwach beanspruchten Rädern zulässig.

Die von Kirsch entwickelten Formeln lauten, wenn a den Halbmesser des kreisrunden Loches, r den Leitstrahl vom Mittelpunkt zu einem beliebigen Punkt P, ϑ den Winkel, den der Leitstrahl mit der Zugrichtung bildet, σ die im vollen Teile (vor dem Anbohren) herrschende gleichmäßige Zugspannung; σ_r, σ_t, τ_{rt} die in P vorhandene Radial-, Tangential- und Schubspannung bedeuten

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{\sigma}{2}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\left[1+\left(1-3\frac{a^2}{r^2}\right)\cos 2\vartheta\right];\\
\sigma_t &= \frac{\sigma}{2}\left[\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)-\left(1+3\frac{a^4}{r^4}\right)\cos 2\vartheta\right];\\
\tau_{rt} &= -\frac{\sigma}{2}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\left(1+3\frac{a^2}{r^2}\right)\sin 2\vartheta
\end{aligned}\right\}\quad(27)$$

Die Lösung ist insofern unvollständig, als vorausgesetzt werden muß, daß senkrecht zur Scheibe noch die Zugspannung $\sigma_z = -2\nu\sigma\frac{a^2}{r^2}\cos 2\vartheta$ wirkt, welche in Wirklichkeit nicht vorhanden ist. Dieser Umstand beeinflußt indessen unsere Folgerung nur unwesentlich. — Die von Kirsch nicht veröffentlichte Ableitung obiger Formeln ist von A. Leon mit Verallgemeinerung auf räumliche Beanspruchung gegeben worden in der Studie „Über die Störungen der Spannungsverteilung durch Bohrungen und Bläschen", Wien 1900 (Selbstverlag). Leon gelangt zu folgenden Ergebnissen:

Eine kugelförmige Höhlung in einem auf Zug beanspruchten Stab erhöht die örtliche Beanspruchung auf das Doppelte des im unversehrten Stabe herrschenden Betrages. In einer nach allen Richtungen gleichmäßig gespannten Platte beträgt die Erhöhung noch mehr.

Ferner teilt Leon mit, daß in einem (theoretisch unendlich breiten) Blechstreifen, der auf Zug gleichmäßig beansprucht wird, durch eine am Rande angebrachte halbkreisförmige Kerbe die Beanspruchung rd. auf das Doppelte steigt. Dasselbe wäre also der Fall, wenn wir im Beispiele von Kirsch in der Zugrichtung einen durch den Mittelpunkt der Bohrung gehenden Schnitt führen würden.

[1]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1897, S. 860. [2]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1898, S. 798.

Ansichten über die „zulässige“ Beanspruchung in einer Bohrung.

In der technischen Literatur wird die zulässige Spannungsgrenze in der Hauptsache nur abhängig gemacht davon, ob die Beanspruchung eine ruhende oder wechselnde ist. Der Praktiker hat außerdem die Stärke und Häufigkeit von Stößen mit Recht seit jeher besonders berücksichtigt. Bei der Beurteilung der Anbohrungsgefahr kommt ein weiteres Moment hinzu, das bis anhin fast ganz unbeachtet geblieben ist.

Wenn wir eine Reihe von wohl eingebürgerten Maschinenelementen genauer untersuchen, so finden wir, daß an vielen Stellen **Überbeanspruchungen** zugelassen werden, sofern nur die Gewähr vorhanden ist, daß nach Eintritt des Fließens an der betroffenen Stelle ein Ausgleich der Spannungen möglich ist. Vor allem die scharfen, aber auch die ungenügend abgerundeten Ecken sind Stellen dieser Art.

Die Überbeanspruchung in einer Bohrung besitzt nun die Eigenschaft, die Spannung durch bleibendes Strecken der inneren Fasern auf die weiter außen gelegenen so zu verteilen, daß die größte Beanspruchung sinkt. Bei der Beurteilung, was zulässig ist, muß aber ein weiteres wichtigeres Kriterium hinzutreten: **die Ausdehnung der von der Überbeanspruchung betroffenen Stelle.**

Wenn in einer Scheibe von 2 m Durchmesser ein Loch von einem Millimeter Durchmesser gebohrt wird, wodurch die Spannung örtlich über die Fließgrenze gesteigert werden möge, so dürfte kein Praktiker an der Ungefährlichkeit dieser Maßregel zweifeln. Er traut dem plastischen Material und der durch die Streckung herbeigeführten Enlastung. Wie aber, wenn die Bohrung 200 mm lichte Weite hat und auf dem größten Teil des Umfanges über die Fließgrenze beansprucht wird? Dann wird die Toleranz wohl aufhören, und sie muß eine Grenze haben, da mit der Größe des überbeanspruchten Bezirkes die Möglichkeit von Fehlerstellen zunimmt, an welchen ein Riß sich ausbilden könnte, der unter allen Umständen als gefährlich angesehen werden muß. Die Grenze für die Ausdehnung des gefährlichen Bezirkes festzusetzen, muß vorläufig dem praktischen Ermessen überlassen werden. Wie weit das Fließen in die Tiefe geht, wird zahlenmäßig in Abschn. 183 untersucht.

77. Berechnung der Nabe.

a) Schwach beanspruchtes Rad mit großer Bohrung.

Man stellt sich die Nabe als einen Ring mit sehr kleiner radialer Dicke vor, der am Außenumfang der von der Scheibe herrührenden radialen Spannung σ_{r1} auf der Breite y_1 ausgesetzt ist; am Innenumfang soll vom Aufpressungsdruck während der Drehung ein Restbetrag p_0 für die Flächeneinheit übrig bleiben. Mit den Maßen der Abb. 368 ist dann die als gleichmäßig angesehene Tangentialspannung

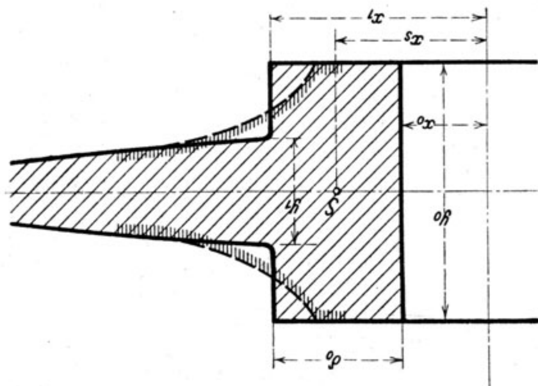


Abb. 368. Zur Berechnung der Nabe.

$$\sigma_{t0} = (\sigma_{r1} y_1 x_1 + \mu \omega^2 y_0 \delta_0 x_s^2 + y_0 p_0 x_0) \frac{1}{y_0 \delta_0} \quad (1)$$

und die radiale Ausdehnung

$$\xi_1'' = \frac{\sigma_{t0} x_s}{E} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Diese Ausdehnung soll übereinstimmen mit der, die der Halbmesser x_1, insofern als er zur Scheibe gehört, erfährt. Wäre die Scheibe, nach der Form gleicher Festigkeit gebaut, mit der Spannung σ, die dann auch $= \sigma_{r1}$ ist, so hätte man am Rand

$$\xi_1' = \frac{1 - \nu}{E} \sigma x_1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

und es müßte die Bedingung

$$\xi_1' = \xi_1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

bestehen. Aus dieser bestimmen wir die Unbekannte y_0, nachdem δ_0, somit auch x_0, x_s, x_1 probeweise angenommen worden sind.

Man erhält, wenn $\sigma_{u0} = \mu\omega^2 x_s^2$ eingeführt wird,

$$y_0 = \frac{\frac{x_1}{\delta_0}\sigma}{(1-\nu)\sigma\frac{x_1}{x_s} - p_0\frac{x_0}{\delta_0} - \sigma_{u0}} y_1 \quad \dots \dots \dots \quad (5)$$

Beispiel. Für eine mit 1500 Umdr. i. d. M. umlaufende Scheibe gleicher Festigkeit sei $y_1 = 2$ cm, $\sigma = 800$ kg/qcm, $p_0 = 50$ kg/qcm, $x_1 = 15$ cm, $x_0 = 10$ cm, $x_s = 12{,}5$ cm, $\delta_0 = 5$ cm, $\nu = 0{,}3$. Man findet $\sigma_{u0} = 30{,}6$ kg/qcm und $y_0 = 8{,}87$ cm. Hieraus hinwieder die mittlere tangentiale Spannung in der Nabe, nach Formel (1) $\sigma_{t0} = 671{,}8$ kg/qcm. Da nun die Spannungsverteilung in Wahrheit eine ungleichmäßige ist, so kann bei diesem nicht eben niedrigen Mittelwert der wirklich auftretende Höchstwert unter Umständen bedenklich werden. In unserem Beispiel wäre also die nachfolgende strengere Rechnung anzuwenden.

b) Stärker beanspruchtes Rad mit kleiner Bohrung.

Wenn die Bohrung kleiner ist, so daß das Verhältnis $x_1 : x_0$ wesentlich größer wird als 1, unterscheiden sich die Spannungen der Nabe in verschiedenen radialen Abständen zu stark, als daß obige Näherungsrechnung zulässig wäre. Man wird alsdann von den genauen Formeln Gebrauch machen, die im vorigen Abschnitt entwickelt wurden, denn die Nabe ist ja eine „Scheibe gleicher Dicke".

Wir haben mit Bezug auf Abb. 368 als gegeben anzusehen die Ausdehnung in Abstand x_1, welche $= \xi_1$ sei; am inneren Umfang für $x = x_0$ aber ist

$$\sigma_r = -p_0$$

durch den Rest p_0 des Aufpressungsdruckes (als ein negativer Wert) vorgeschrieben. Für ξ gilt Formel (21) und wir erhalten

$$-\frac{A}{8}x_1^3 + b_1 x_1 + \frac{b_2}{x_1} = \xi_1 \quad \dots \dots \dots \quad (6)$$

als erste Bedingung. Sodann nach Gl. (22)

$$\frac{E}{1-\nu^2}\left[-\frac{3+\nu}{8}Ax_0^2 + (1+\nu)b_1 - (1-\nu)\frac{b_2}{x_0^2}\right] = -p_0 \quad \dots \quad (7)$$

als zweite. Aus (6) und (7) berechnen wir die Unbekannten b_1, b_2 und erhalten die radiale Spannung σ_{r1}, die am äußeren Umfang wirken muß, um die gewünschte Verlängerung zu erzielen, und zwar

$$\sigma_{r1} = \frac{E}{1-\nu^2}\left[-\frac{3+\nu}{8}Ax_1^2 + (1+\nu)b_1 - (1-\nu)\frac{b_2}{x_1^2}\right] \quad \dots \quad (8)$$

Nun können wir die Nabenlänge y_0 näherungsweise aus der Bedingung berechnen, daß die bei gleichmäßiger Verteilung auf 1 cm des Umfanges wirkende Kraft $\sigma_{r1}y_0$ gleich sei derjenigen, die in Wirklichkeit von der Scheibe auf die Nabe übertragen wird, d. h. σy_1, und wir erhalten

$$\sigma_{r1} y_0 = \sigma y_1 \quad \dots \dots \dots \quad (9)$$

welche Gleichung indessen nur bei wenig voneinander abweichenden Werten y_0 und y_1 gebraucht werden darf.

Beispiel. Es sei wie im obigen Beispiel $x_0 = 10$ cm, $x_1 = 15$ cm, $y_1 = 2$ cm, $\nu = 0{,}3$, $\sigma = 800$ kg/qcm, $n = 1500$ i. d. M. Wir finden $A = 0{,}1786/E$, und wenn die Aufpreßspannung $p_0 = 50$ kg/qcm angesetzt wird, aus Gl. (6) und (7)

$$b_1 = 296{,}2/E; \quad b_2 = 60480/E.$$

Die Ausdehnung ξ_1 wird für die Scheibe und für die Nabe, wie erforderlich, nach Gl. (3) und (6) identisch $= 8400/E$. Nun erhalten wir die (ideelle) radiale Spannung am Außenumfang der Nabe nach Gl. (8) $\sigma_{r1} = 198{,}2$ kg/qcm, also

$$y_0 = y_1\frac{\sigma}{\sigma_{r1}} = 8{,}07 \text{ cm},$$

während die angenäherte Rechnung 8,87 cm ergab. Die tangentialen Spannungen berechnen sich nach Gl. (22) $\sigma_{t0} = 884$ kg/qcm; $\sigma_{t1} = 620$ kg/qcm. Der größte Wert der Spannung, d. h. σ_{t0}, übertrifft das im früheren Beispiel sich ergebende Mittel, d. h. 672 kg/qcm um rund $^1/_3$.

Wenn die Nabenlänge die Scheibendicke erheblich übertrifft, so wird die Nabe ungleichmäßig, d. h. in der Mitte bedeutend mehr gespannt als am Rande, und die Voraussetzungen unserer Formeln sind nicht mehr erfüllt. Um diesem Übelstande einigermaßen abzuhelfen, kann man, sofern die Unterschiede nicht größer sind als in der Abb. 368, durch das punktiert eingetragene Profil einen Ausgleich anstreben.

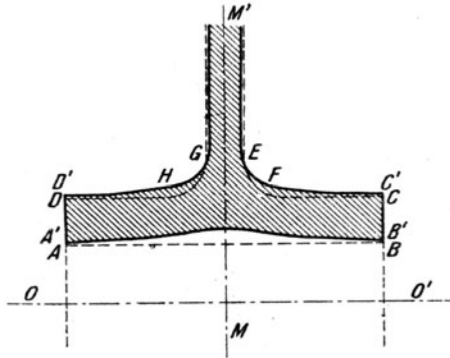


Abb. 369.
Formänderung einer langen Nabe.

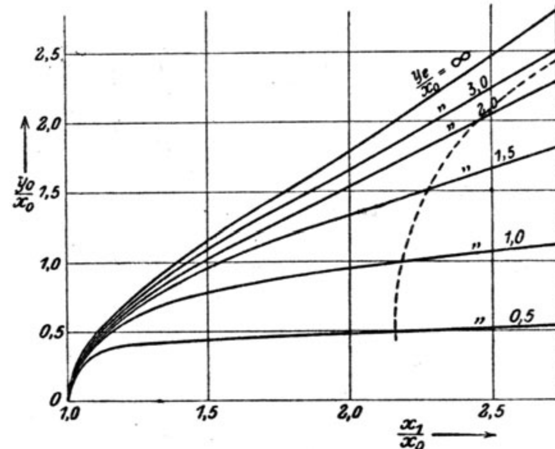


Abb. 370. Theoretische und effektiv tragfähige Länge bei dünner Nabe.

Bei größeren Längen erfährt die Nabe eine vom Verfasser an Kautschukscheiben näher untersuchte starke Einbuchtung (Abb. 369), die in Abschn. 196 einer Berechnung unterworfen werden soll. Eine schlanke Nabe muß länger gemacht werden als das oben erhaltene theoretische Maß y_0, damit sie ebensoviel trägt, wie die gleichmäßig gedehnte theoretische Nabe. Die effektive Nabenlänge y_e kann als Abhängige des Verhältnisses x_1/x_0 und y_0/x_0 der Abb. 370 entnommen werden. Fällt diese Länge zu groß aus, so muß die Rechnung mit einem größeren Verhältnis x_1/x_0 wiederholt werden. Will man die Nabe nur auf einer Seite der Radscheibe anordnen, so besitzt sie nur die halbe Tragfähigkeit der symmetrischen Nabe. Außerdem werden je nach Umständen gefährliche Biegungsspannungen auf die Scheibe übertragen.

78. Scheibe mit hyperboloidischem Profil.

Einen für die Rechnung ebenfalls einfachen Sonderfall bietet die Annahme, daß das Profil eines Meridianschnittes der Scheibe durch die Gleichung

$$y = c x^{-\alpha} \quad \ldots \quad (1)$$

ausdrückbar ist. In diesem Falle wird Gl. (13) Abschn. 74 integrabel und nimmt die Form

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} + \frac{1-\alpha}{x}\frac{d\xi}{dx} - \frac{\alpha\nu+1}{x^2}\xi + Ax = 0 \quad \ldots \quad (2)$$

an. Um das Glied mit x wegzuschaffen, setzen wir

$$\xi = z + a x^3 \quad \ldots \quad (3)$$

und erhalten, wie nach dem Einsetzen ersichtlich wird,

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{1-\alpha}{x}\frac{dz}{dx} - \frac{\alpha\nu+1}{x^2} z = 0 \quad \ldots \quad (4)$$

sofern man

$$a = \frac{-(1-\nu^2)\,\mu\,\omega^2}{E[8-(3+\nu)\alpha]} \quad \ldots \quad (5)$$

wählt. Die Lösung von (4) erfolgt durch den Ansatz $z = b x^{\psi}$, der zur Berechnung von ψ auf die Gleichung

$$\psi^2 - \alpha\psi - (1+\alpha\nu) = 0 \quad \ldots \quad (6)$$

führt. Es ergeben sich zwei Werte von ψ, und zwar

$$\psi_1 = \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \alpha\nu + 1} \qquad \psi_2 = \frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \alpha\nu + 1} \quad \dots \quad (7)$$

wovon (bei posit. α) ψ_1 stets positiv. ψ_2 stets negativ ist. Die Lösungen liefern mit (3) das vollständige Integral

$$\xi = a x^3 + b_1 x^{\psi_1} + b_2 x^{\psi_2} \quad \dots \quad (8)$$

worin b_1, b_2 durch die Randbedingungen zu bestimmende Festwerte sind. Wir bilden nun ξ/x und $d\xi/dx$, welche Ausdrücke, in Gl. (12) Abschn. 74 eingesetzt, die Ausdrücke der Spannungen

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2}\left[(3+\nu)\,a x^2 + (\psi_1+\nu)\,b_1 x^{\psi_1-1} + (\psi_2+\nu)\,b_2 x^{\psi_2-1}\right] \\ \sigma_t &= \frac{E}{1-\nu^2}\left[(1+3\nu)\,a x^2 + (1+\psi_1\nu)\,b_1 x^{\psi_1-1} + (1+\psi_2\nu)\,b_2 x^{\psi_2-1}\right] \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

ergeben.

Die Randbedingungen.

Bei positiven Werten von α nimmt die Scheibe die viel angewendete Form Abb. 371 an, die aus der Verbindung dieser Scheibe mit einer Nabe und einem verstärkten Außenringe (zur Aufnahme der Schaufeln) besteht. Doch wären bei einer so starken Verbreiterung, wie in der Abbildung, unsere Formeln nicht mehr genau genug.

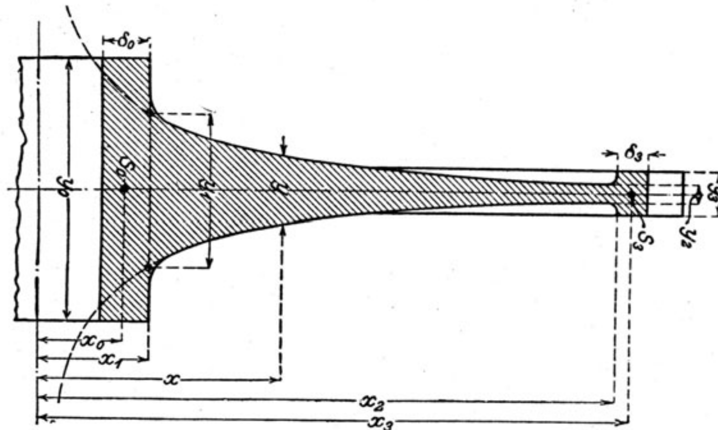


Abb. 371. Hyperbolische Scheibe.

Die aus einem Stücke mit dem Rade gedachten Schaufeln üben eine Fliehkraft aus die auf den Quadratzentimeter der zylindrischen Mantelfläche vom Halbmesser x_3 und der Breite y_3 mit σ_3 bezeichnet werde. Der Kranz erfährt unter dem Einflusse der eigenen Fliehkraft, der von der Scheibe auf die Breite y_2 ausgeübten radialen Spannung σ_{r2} und der Belastung σ_3 eine Ausdehnung ξ_2' ähnlich wie in Abschn. (75) allein unter Vernachlässigung der radialen Spannung im Ringe selbst:

$$\xi_2' = \frac{x_3^2}{E\,\delta_3 y_3}\left(\sigma_3 y_3 + \mu\omega^2 \delta_3 y_3 x_3 - \sigma_{r2}\frac{x_2 y_2}{x_3}\right) \quad \dots \quad (10)$$

wobei für σ_{r2} der Ausdruck aus Gl. (9) mit $x = x_2$ einzusetzen ist.

Ähnlich gilt für die Nabe, wenn wir von der Unstetigkeit des Überganges zwischen Scheibe und Nabe, sowie den radialen Spannungen in ihr absehen:

$$\xi_1' = \frac{x_0^2}{E\,\delta_0 y_0}\left(p_0 y_0 + \mu\omega^2 \delta_0 y_0 x_0 + \sigma_{r1}\frac{x_1 y_1}{x_0}\right) \quad \dots \quad (11)$$

worin p_0 den von der Welle auf die Nabe im Betrieb ausgeübten Aufpressungsdruck für den qcm der Mantelfläche $2\pi x_0 y_0$ bedeutet. Andererseits beträgt die radiale Dehnung der

Scheibe zufolge ihres eigenen Spannungszustandes bei x_1 bzw. x_2:

$$\left.\begin{aligned}\xi_1 &= a x_1^3 + b_1 x_1^{\psi_1} + b_2 x_1^{\psi_2}\\ \xi_2 &= a x_2^3 + b_1 x_2^{\psi_1} + b_2 x_2^{\psi_2}\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

und wie in früheren Beispielen muß

$$\xi_1 = \xi_1'; \qquad \xi_2 = \xi_2' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

sein, aus welchen linearen Gleichungen die Beiwerte b_1, b_2 zu bestimmen sind; doch ist diese Rechnungsart, wie oben bemerkt, nur bei mäßig beanspruchten Rädern zulässig. Wird größere Genauigkeit gefordert, so müßte man auf Nabe und Kranz die im vorigen Abschnitt erläuterte Methode anwenden.

Graphische Tafeln über die Beanspruchung der hyperboloidischen Scheiben findet man in Engineering 1912, Bd. II, S. 279. Ferner durchgearbeitete Formeln bei Holzer, Zeitschr. f. d. gesamte Turbinenwesen 1915, S. 4 u. f.

79. Beanspruchung der Scheibenräder bei ungleichmäßiger Erwärmung.

Man hat beobachtet, daß bei gewissen einstufigen Turbinen wegen der Wärmestrahlung des Düsenringes der Rand des Scheibenrades wesentlich höhere (bis um 100° verschiedene) Temperaturen annehmen kann als der Scheibenkörper, der an das kältere Gehäuse Wärme seitlich ausstrahlt. Deshalb wurden sogar Radkonstruktionen vorgeschlagen, bei denen der Kranz durch radiale Sägenschnitte in zahlreiche unabhängige Segmente getrennt werden sollte, damit er sich frei ausdehnen könne. Noch weit gefährlichere Beanspruchungen sind bei Betriebsunfällen denkbar, wie auch bei unsachgemäßer Bedienung, besonders bei unvorsichtigem Anlassen, vgl. Abschn. 198.

Die Untersuchung wird bedeutend vereinfacht durch die Bemerkung, daß die Spannungen, die von der ungleichen Erwärmung herrühren, nach dem Grundsatz der Übereinanderlagerung („Superposition") mit den Fliehkraftspannungen vereinigt werden dürfen, d. h. daß man dieselben berechnen kann, als wenn das Rad ruhen würde.

a) Kalter Kranz an heißer Scheibe gleicher Dicke.

Ein durchsichtiger Fall entsteht, wenn wir eine Scheibe mit unveränderlicher Dicke h untersuchen, deren Kranz mit dem Querschnitte f plötzlich um t^0 C gegenüber der gleichmäßigen Anfangstemperatur abgekühlt werde. Indem sich der Kranz zusammenzuziehen bestrebt, übt er auf die Scheibe einen radialen Druck p aus und wird selbst gespannt, genau wie ein Schrumpfring auf seiner Unterlage. Nehmen wir an, die Scheibe sei voll (ohne Bohrung), so wissen wir gemäß Früherem, daß die Druckspannung p nach allen Richtungen in der Scheibe gleich groß ist, und daß die lineare Zusammendrückung am Scheibenrande

$$\xi_r = \frac{1-\nu}{E} p r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

ist, worin r den Scheiben- und angenähert den Schwerpunktshalbmesser des Ringes bedeutet.

Dieser Halbmesser, dessen Größe ursprünglich r gewesen ist, würde durch die Abkühlung um t^0 C eine Verkleinerung um

$$\Delta r = r \varepsilon t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

erfahren, wenn ε die Wärmeausdehnungszahl bedeutet. Allein die Scheibe dehnt den Ring mit dem auf die Breite b wirkenden, noch unbekannten Druck p radial um den Betrag

$$\xi_r' = \frac{b p r^2}{E f} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

aus. Die Verkleinerung von r beträgt daher im ganzen $\Delta r - \xi_r'$ und muß dem Werte von ξ_r gleich sein. Nach Einsetzung der Werte (1), (2), (3) erhalten wir

$$\frac{1-\nu}{E} p r + \frac{b p r^2}{E f} = r \varepsilon t, \text{ woraus sich } p = \frac{E \varepsilon t}{(1-\nu) + \frac{b r}{f}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

berechnet. Die Spannung σ_1 im Ring erhalten wir näherungsweise aus der Belastung p auf der Innenseite desselben durch die sogenannte Kesselformel

$$\sigma_1 = \frac{r b p}{f} = \frac{E \varepsilon t}{(1-\nu)\frac{f}{r b} + 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Formel (4) und (5) haben die Eigentümlichkeit, daß die Spannungen nur vom Temperaturunterschied t und dem Produkte rb, nicht aber einzeln von der Größe des Halbmesserss abhängen. Eine doppelt so große, aber doppelt so dünne Scheibe erfährt mithin bei gleichstarkem und gleich-erhitztem Kranz die gleiche Beanspruchung.

b) Allgemeiner Fall.

Bei stetiger Verteilung der Temperatur müssen wir die elastischen Grundformeln benutzen. Daher ist zu beachten, daß darin ε_r und ε_t nur die nach Abzug der Wärmeausdehnung sich ergebenden spezifischen elastischen Dehnungen bedeuten, die man wie folgt berechnet. Es sei t der in allen Punkten des Kreises vom Halbmesser x gleiche Temperaturüberschuß über die Anfangstemperatur, eine Abhängige von x. Der Halbmesser nach erfolgter Anspannung und Erwärmung sei $x + \xi$. Ein Ring mit dem Halbmesser x würde durch die Wärme allein um

$$\xi' = \varepsilon x t \qquad (6)$$

ausgedehnt worden sein. Nur der Überschuß $\xi'' = \xi - \xi'$ bildet eine elastische Formänderung; mithin ist die tangentiale elastische Ausdehnung

$$\varepsilon_t = \frac{\xi''}{x} = \frac{\xi}{x} - \varepsilon t \qquad (7)$$

Gleicherweise ist die radiale Verschiebung eines Punktes, der im Abstande dx vom Erstbetrachteten liegt, $\xi^* = \xi + (d\xi/dx)\,dx$, und die gesamte Ausdehnung des Elementes dx ist $d\xi/dx \cdot dx$. Die Wärme allein ergibt aber den Anteil $\varepsilon t dx$, als elastische Dehnung in radialer Richtung haben wir also nur anzusehen

$$\varepsilon_r = \frac{\frac{d\xi}{dx}dx - \varepsilon t dx}{dx} = \frac{d\xi}{dx} - \varepsilon t \qquad (8)$$

Die Ausdrücke der Spannungen (Gl. 12, Abschn. 74) lauten mithin

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2}\left[\nu\left(\frac{\xi}{x} - \varepsilon t\right) + \frac{d\xi}{dx} - \varepsilon t\right] \\ \sigma_t &= \frac{E}{1-\nu^2}\left[\left(\frac{\xi}{x} - \varepsilon t\right) + \nu\left(\frac{d\xi}{dx} - \varepsilon t\right)\right] \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

und Hauptgleichung (13) nimmt mit $A = (1-\nu^2)\frac{\mu\omega^2}{E}$ die Form

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} + \left(\frac{d\ln y}{dx} + \frac{1}{x}\right)\frac{d\xi}{dx} + \left(\frac{\nu}{x}\frac{d\ln y}{dx} - \frac{1}{x^2}\right)\xi - (1+\nu)\varepsilon\frac{dt}{dx} - (1+\nu)\varepsilon t\frac{d\ln y}{dx} + Ax = 0 \qquad (10)$$

an. Die Integration läßt sich leicht bewerkstelligen für die

c) Scheibe gleicher Dicke ohne Kranz.

Mit $\omega = 0$, d. h. ruhender Scheibe und $y = h =$ konst., erhalten wir wie in Abschn. 76

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d\xi}{dx} - \frac{\xi}{x^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(x\xi)\right] = (1+\nu)\varepsilon\frac{dt}{dx} \qquad (10a)$$

woraus

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(x\xi) = (1+\nu)\varepsilon t + 2a_1,$$

wo $2a_1$ die erste Integrationskonstante ist. Nach Vermehrung mit x und Integration ergibt sich

$$\xi = \frac{(1+\nu)\varepsilon}{x}\int_{x_1}^{x} t x dx + a_1 x + \frac{a_2}{x} \qquad (11)$$

Das Integral darf als bestimmtes mit dem Halbmesser x_1 des inneren Randes als untere

Grenze aufgefaßt werden, indem dies nur den Wert des Beiwertes a_2 beeinflußt und die Schlußformel vereinfacht. Bilden wir $d\xi/dx$ und ξ/x, so erhalten wir für die Spannungen:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left[-\frac{(1-\nu^2)\,\varepsilon}{x^2}\int_{x_1}^{x} t x\,dx + (1+\nu)\,a_1 - (1-\nu)\frac{a_2}{x^2}\right] \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{(1-\nu^2)\,\varepsilon}{x^2}\int_{x_1}^{x} t x\,dx - (1-\nu^2)\,\varepsilon t + (1+\nu)\,a_1 + (1-\nu)\frac{a_2}{x^2}\right] \quad \ldots \quad (13)$$

Betrachten wir den Sonderfall, daß die Scheibe am Innen- und Außenrand spannungsfrei ist, so muß

$$\text{für } x = x_1 \quad \sigma_r = 0. \quad \text{für } x = x_2 \quad \sigma_r = 0 \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

sein. In der ersten dieser Bedingungen kommt das Integral $\int_{x_1}^{x_1} t x\,dx$ vor, das gleich Null ist. In der zweiten ist

$$\int_{x_1}^{x_2} t x\,dx = \tfrac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} t\,d(x^2)$$

gegebenenfalls, wenn t eine verwickelte Funktion von x wäre, graphisch zu ermitteln. Nach dem Mittelwertsatz kann man das Integral auch

$$= \tfrac{1}{2}\,(x_2{}^2 - x_1{}^2)\,t_m \quad \ldots \ldots \quad (15)$$

setzen, woraus t_m als **„Mittelwert der auf das Quadrat des Halbmessers bezogenen Temperatur"** berechnet werden kann.

Aus (14) findet man

$$a_1 = \frac{(1-\nu)\,\varepsilon}{2}\,t_m; \qquad a_2 = \frac{(1+\nu)\,\varepsilon}{2}\,x_1{}^2 t_m \quad \ldots \ldots \quad (16)$$

womit auch ξ und die Spannungen allgemein bestimmt sind. Der Höchstwert der Beanspruchung muß durch graphische Darstellung des ganzen Spannungsverlaufes ermittelt werden. Im allgemeinen wird er am inneren oder am äußeren Rande als Tangentialspannung auftreten, und zwar erhält man

$$\text{für } x = x_1 \quad \sigma_{t1} = E\varepsilon\,(t_m - t_1), \qquad \text{für } x = x_2 \quad \sigma_{t2} = E\varepsilon\,(t_m - t_2) \quad \ldots \quad (17)$$

Für einen Hohlzylinder von unendlicher Länge mit nur radial veränderlicher Temperatur hat R. Lorenz in Z. d. V. deutsch. Ing. 1907, S. 743 die entsprechenden allgemeinen Formeln abgeleitet, auf welchen Aufsatz hier besonders verwiesen sei. Da dort die Querschnitte als eben vorausgesetzt werden, entstehen axiale Spannungen und seine Ergebnisse unterscheiden sich formell von den obigen.

d) Hyperboloidische Scheibe.

Die allgemeine Differentialgleichung (10) für ξ wird noch in dem Falle leicht integrabel, wenn wir $y = c y^{-\alpha}$ setzen, und für die Temperatur das Gesetz

$$t = B x^n \quad \ldots \ldots \quad (18)$$

oder eine Summe von Potenzgliedern aufstellen. Man findet

$$\xi = a x^3 + b x^{n+1} + b_1 x^{\psi_1} + b_2 x^{\psi_2} \quad \ldots \ldots \quad (19)$$

wobei a, ψ_1, ψ_2 durch Gl. (5) und (7) Abschn. 78 definiert sind, während

$$b = \frac{(1+\nu)\,\varepsilon\,(n-\alpha)\,B}{n\,(n+1) + (1-\alpha)\,(n+1) - (\alpha\nu + 1)} \quad \ldots \ldots \quad (20)$$

bedeutet. Zur Bestimmung von b_1, b_2 dienen die Randbedingungen (wie in Abschn. 78) indessen mit Inbetrachtnahme der Temperaturunterschiede. An Gl. (19) kann man die Behauptung bewahrheiten, daß die Lösungen für die ruhende, aber erwärmte Scheibe, und für die rotierende Scheibe aber mit $t = 0$ einfach addiert werden dürfen. Es liegt dies daran, daß sowohl die Differentialgleichung wie auch diese Randbedingungen in ξ und seinen

Ableitungen linear sind. Man vergleiche hiermit die ausführlichere Begründung in Abschn. 84. Holzer hat sich in d. Z. f. d. gesamte Turbinenwesen 1913/1915 der dankenswerten Mühe unterzogen, die hier skizzierte Lösung für den praktischen Gebrauch ausführlich durchzuarbeiten.

80. Graphische Scheibenberechnung.

Das graphische Verfahren setzt sich zum Zweck, die für die Beanspruchung und Deformation der Scheibe maßgebende Gl. (13) Abschn. 74 auf zeichnerischem Wege zu integrieren.

a) Mit Hilfe der Formänderung.

Man nimmt ξ als Funktion von x derart an, daß die Randbedingungen erfüllt sind, und sucht die Gestalt der Scheibe, d. h. y. Zu diesem Zwecke wird aus ξ graphisch ξ', ξ'' abgeleitet, hieraus durch Rechnung nach Gl. (12) Abschn. 74 die Spannungen $\sigma_r \sigma_t$ für die ganze Ausdehnung der Scheibe. Durch geeignete Änderungen im Verlaufe der ξ-Kurve kann man auf tunlichst gleichmäßige Beanspruchung des Materials hinarbeiten.

Wir ordnen Gl. (13) unter Bezeichnung der Ableitungen mit $\xi' \xi''$ wie folgt:

$$\left(\xi'' + \frac{\xi'}{x} - \frac{\xi}{x_2} + Ax\right) + \frac{y'}{y}\left(\xi' + \nu\frac{\xi}{x}\right) = 0, \qquad \text{mit } A = \frac{(1-\nu^2)\,\mu\omega^2}{E}$$

Deren Auflösung ergibt

$$\frac{y'}{y} = \frac{d(\lg n\, y)}{dx} = -\frac{\xi'' + \dfrac{\xi'}{x} - \dfrac{\xi}{x^2} + Ax}{\xi' + \nu\dfrac{\xi}{x}} = F(x) \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Da $\xi' \xi''$ bekannt sind, kann man $F(x)$ ebenfalls graphisch darstellen. Hieraus folgt durch Integration

$$\lg n\left(\frac{y}{y_0}\right) = \int_{x_0}^{x} F(x)\,dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

wenn y_0 die Nabenlänge bezeichnet, die bei $x = x_0$ vorgeschrieben sei. Will man den Wert y_2 am Rande für $x = x_2$ vorschreiben, so hat man in umgekehrter Richtung zu integrieren und erhält

$$\lg n\left(\frac{y}{y_2}\right) = \int_{x_2}^{x} F(x)\,dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Die Annahme der ξ-Linie ist an sich willkürlich, bis auf die Randbedingungen. Für die innere Bohrung wird man wieder p_0 als Rest des Schrumpfungsdruckes und eine (größte) Tangentialspannung σ_{t0} vorschreiben, die mit ξ_0 und ξ_0' durch die Gleichungen

$$\xi'_0 = \frac{-p_0 - \nu\sigma_{t0}}{E}; \qquad \frac{\xi_0}{x_0} = \frac{\nu p_0 + \sigma_{t0}}{E}$$

zusammenhängen, wodurch für $\xi = f(x)$ die Anfangsordinate ξ_0 und die Anfangsneigung ξ_0' vorgeschrieben sind. p_0 ist mit dem negativen Zeichen eingeführt, weil positive Werte von σ Zug bedeuten. Für den Außenrand wird man grundsätzlich ebenfalls σ_{r2} und σ_{t2} vorschreiben können, woraus ξ_2 und ξ_2' gerechnet werden. Man verbindet die so bestimmten Anfangs- und Endpunkte mit ihren Tangenten durch eine stete Linie und ermittelt nunmehr die Zwischenspannungen und das Scheibenprofil. Bei nicht passenden Ergebnissen müssen die Annahmen entsprechend abgeändert werden.

Wenn die Pressung p_0 vernachlässigt wird, muß am inneren Rande $\sigma_{r0} = 0$ sein und dann selbstverständlich zunehmen. Nachdem also für diese Spannung eine Konstanz grundsätzlich ausgeschlossen ist, wäre man versucht, wenigstens $\sigma_t =$ konst. vorzuschreiben. Die zweite der Gleichungen (12) Abschn. 74 kann als Differentialgleichung

$$\nu\frac{d\xi}{dx} + \frac{\xi}{x} = \frac{1-\nu^2}{E}\sigma_t$$

für ξ aufgefaßt und leicht integriert werden. Berechnet man σ_r, so zeigt sich, daß dieser Wert vom Rande ab sehr rasch wächst und sich asymptotisch an σ_t anschmiegt. Man hätte also scheinbar eine sehr schöne Lösung mit nahezu „gleicher Festigkeit“, die indes praktisch leider nicht brauchbar ist, da sie für $x = x_0$ den Wert $y = \infty$, somit auch im weiteren Verlaufe unausführbar breite Nabendimensionen erheischt.

Da wir für die „Nabe“, d. h. den an die Wellenbohrung angrenzenden Teil der Scheibe aus konstruktiven Gründen ebene Seitenbegrenzung verlangen, ist es am zweckmäßigsten, dies im Verlaufe der ξ-Linie dadurch zum Ausdruck zu bringen, daß wir die Anfangswerte (von $x = x_0$ bis etwa $x = 1{,}5\,x_0$) mittels der für die Scheibe gleicher Dicke geltenden Gl. (21) Abschn. 76

$$\xi = -\frac{A}{8}x^3 + b_1 x + \frac{b_2}{x} \quad \text{mit} \quad A = (1-\nu^2)\frac{\mu\omega^2}{E} \qquad \ldots\ldots (5)$$

rechnen. Die Beiwerte b_1, b_2 werden wieder aus $\sigma_{r0} = -p_0$ und σ_{t0} gerechnet, indem man diese vorgeschriebenen Werte in Gl. (22) einsetzt. Ebenso verfahren wir mit dem Außenrand, wie am folgenden Beispiele klar wird.

1. Beispiel.

Die günstigste Annahme, die wir in bezug auf ξ machen könnten, scheint eine gerade Linie zu sein, die durch den Koordinatenanfang geht. Diese Annahme ergibt $\sigma_r = \sigma_t =$ konst., führt also, wenn keine Bohrung benötigt wird, auf den oben durch Rechnung erledigten Fall der Scheibe gleicher Festigkeit. Soll die Scheibe eine zentrale Bohrung erhalten, so könnte man meinen, daß einfach diese Gerade am inneren und am äußeren Rand entsprechend abzubiegen wäre, wodurch man wenigstens im mittleren Teile des Rades gleiche Beanspruchung nach allen Richtungen erhielte. Die Lösung konkreter Beispiele zeigt indessen, daß entweder die Spannungen am inneren Rande, oder aber die Länge der Nabe unzulässig groß werden, und man erkennt, daß es zweckmäßiger ist, die Form

$$\xi = -a + bx$$

zu wählen, die an den Rändern passend umgeformt wird.

In Abb. 372 (Tafel I) wurde ein derartiges Beispiel für die Angaben $n = 3000$ Umdr. p. Min., Scheibendurchmesser $= 2300$ mm durchkonstruiert. Die Tafel besitzt vier Koordinaten-Anfänge O, O_1, O_2, O_3, wovon O mit seinen Achsen für die Darstellung des Meridianschnitts oder „Profiles“ der Scheiben dient, während von O_1 aus ξ, ξ', ξ'', und y'/y, von O_2 aus $\lg n\, y$ und von O_3 aus die Spannungen σ_r, σ_t als Ordinaten zu zählen sind. Starke Krümmungen in der Deformationslinie sind zu vermeiden, da dann ξ'' und y'/y, also auch y', d. h. die Neigung des Profiles, groß werden.

Der Verlauf von ξ vom Rande der inneren Bohrung ab ist durch die Forderung $\sigma_r = 0$; $\sigma_t = 2050$ kg/qcm, gemäß Formeln (5) und (4) zwischen B_1 und C_1, festgesetzt worden. Dann schmiegt sich ξ allmählich an die bei F_1 beginnende probeweise angenommene Gerade an. Bei A_1 beginnt wieder eine Krümmung, die so zum äußersten Punkte E_1 leitet, daß dort σ_{r2} verschwindet, d. h. $-\xi' = \nu\xi/x$ wird, Nun läßt sich σ_t für Punkt E ausrechnen und ergibt $\sigma_{t2} = 1460$ kg/qcm. Aus σ_{r2} und σ_{t2} kann wieder mit Gl. (4) und (5) b_1, b_2 und ξ so gerechnet werden, daß für D_1E_1 die Seitenbegrenzung der Scheibe eben wird. Man vergewissert sich vor allem, wie hoch die Spannungen im Punkt A sind, da, wie aus dem weiteren hervorgeht, hier das Maximum auftritt. Es ergibt sich $\sigma_r = 2400$ kg/qcm und $\sigma_t = 2200$ kg/qcm. die wir als zulässig ansehen wollen.

Hierauf bestimmen wir graphisch für die ganze Ausdehnung der Scheibe ξ' und aus diesem ξ'', die in irgendeinem Maßstabe als Abhängige von x eingetragen werden. Nun wird gemäß Formel (1) $F(x) = y'/y$ ermittelt. Mit dieser Funktion erhalten wir durch graphische Integration $\lg n\,(y/y_a)$, wo y_a sich auf einen beliebigen Wert x_a bezieht. Am zweckmäßigsten wird die Stärke der Scheibe in der Nähe des äußersten Randes, da wo die veränderte Krümmung von ξ beginnt, und die auch durch Rücksichten auf Transport usw. bedingt ist, festgelegt. Man integriert dann die Funktion y'/y von $x = x_a$ nach einwärts, so daß im Punkt A_2 der Wert von $\lg n\,(y/y_a)$ Null ist und gegen den Koordinatenanfang zu wächst. Aus dem Logarithmus erhalten wir schließlich y selbst und können, wie in der Tafel unten geschehen, das Profil der Scheibe einzeichnen. Für den betrachteten Scheibenteil sind in unserer Tafel ξ'' und y'/y positiv eingetragen, obwohl sie in Wahrheit negativ sind.

Die Bestimmung des äußeren Randes erfolgt durch eine zweite Integration vom Punkte A weg im Sinne wachsender x. Bei der Annahme des zugehörenden ξ ist teilweise eine Parabel benutzt worden, für welche ξ'' eine Konstante wird. Es ergibt sich y'/y anfänglich negativ, daher y anfänglich etwas abnehmend, dann zunehmend. Für den Scheibenteil zwischen D und E ist eine besondere Ausrechnung von ξ'' überflüssig, da von vornherein bekannt ist, daß $y' = 0$ sein muß.

Hierdurch erhalten wir die äußere Breite y_2 und müssen Änderungen an den zwischen A_1 und E_1 liegenden Werten von ξ vornehmen, falls diese Breite konstruktiv nicht paßt. Man erwirbt, wenn erst einige Beispiele gelöst werden, raschen Überblick, in welchem Sinne ξ zu ändern ist.

Additional material from *Dampf- und Gasturbinen,*
ISBN 978-3-642-50544-7 (978-3-642-50544-7_OSFO1),
is available at http://extras.springer.com



Der im oberen Achsenkreuz dargestellte Verlauf der Spannungen zeigt, daß σ_r von 0 an steigend bald einen nahezu konstanten Wert erlangt, mit dem kurz hinter A_1 auftretenden Maximum $\sigma_r = 2400$ kg/qcm.

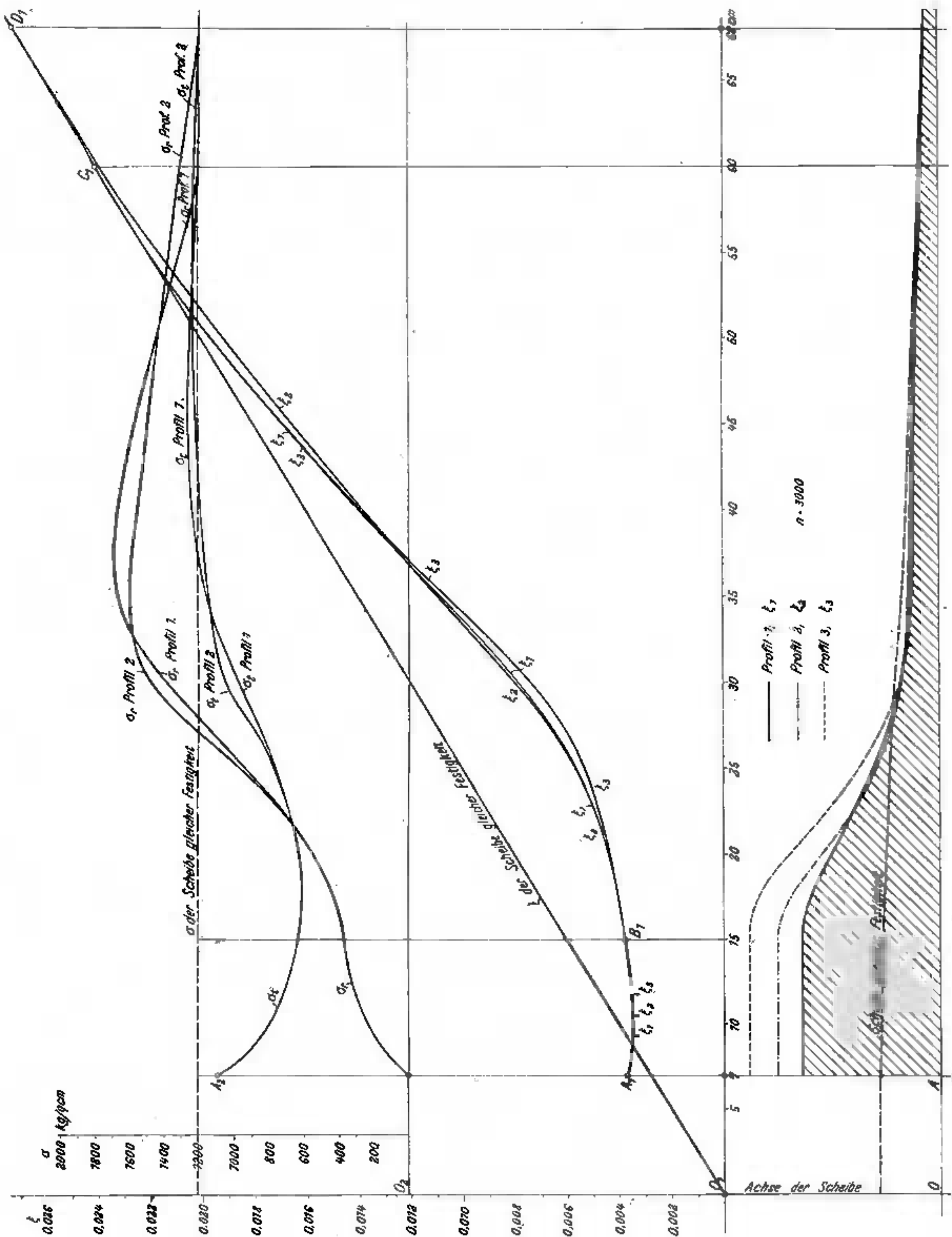


Abb. 373. Kleine Änderungen in der Annahme der Formänderung ξ beeinflussen das Scheibenprofil in starkem Maße.

Die Tangentialspannung sinkt in der Nabe mit wachsendem x bis auf etwa $^2/_3$ ihres anfänglichen Wertes, um dann ein Maximum von 2200 kg zu erreichen. Im mittleren Teil kann man die Scheibe als von nahezu gleicher Festigkeit ansehen.

Die Tafel enthält außerdem drei weitere Scheibenprofile, die folgenden Voraussetzungen entsprechen:

a) Unter Beibehaltung der Umdrehungszahl 3000 ist die Deformation durchweg 1,7 mal so klein angenommen worden, indem man den Maßstab der ξ änderte. Dies hat auch eine entsprechende Verkleinerung der Größen ξ', ξ'' und der Spannungen σ_r, σ_t zur Folge. Die Funktion y'/y nimmt wegen des nicht geänderten Gliedes Ax stärker zu und führt auf ein entsprechend stärkeres Profil, das durch schraffierten Rand kenntlich gemacht und mit der Überschrift: „Profil für $n = 3000$, kleine Spannung" versehen, indessen nur von A bis B durchgeführt ist. Die Abbildung lehrt, daß die Scheibendicke um ein Vielfaches der Spannungsermäßigung zunimmt. Es findet hier das gleiche statt wie bei der vollen Scheibe, wo die Exponentialfunktion in der Formel für y an dem raschen Wachstum der Scheibendicke schuld ist.

b) Die zwei letzten Profile beziehen sich auf eine Scheibe gleichen Durchmessers, indes mit bloß 1500 Umdr. p. Min., wodurch der Beiwert A geändert wird. Auch hier ist eine Ausführung mit großer Deformation, also großer Spannung, und eine mit kleiner Spannung untersucht. Während die Spannungen dieselben Werte erhalten wie bei 3000 Umdr., sehen wir die Scheibendicke in bedeutend kleinerem Verhältnis zunehmen wie oben, woraus deutlich hervorgeht, einen wie großen Einfluß die Fliehkraft der Scheibenmasse selbst besitzt.

2. Beispiel.

Daß die im 1. Beispiel benutzte Form der Dehnungslinie günstiger ist als die Annäherung an die Linie streng gleicher Festigkeit, geht aus den Schaulinien der Abb. 373 hervor. Hier stellt ξ die durch den Nullpunkt gehende Dehnungsgerade dar, der die im Meridianschnitt als „Scheibe gleicher Festigkeit" überschriebene Linie entspricht. Wählen wir nun vom inneren Rand bei A_1 ausgehend Schaulinie ξ_1 zunächst bis B_1 nach dem Gesetze $\xi_1 = ax^2 + b_1 x + b_2/x$, um ebene Nabenbegrenzung zu erhalten, und versuchen wir, uns durch allmähliche Krümmung der Linie ξ bis zum Punkte C_1 anzuschmiegen. Das Ergebnis ist der voll gezogene Scheibenumriß, der im mittleren Teile geringere Dicke aufweist, als die Scheibe gleicher Festigkeit, mithin wie die im Koordinatensystem O_2 aufgetragenen Werte dartun, größeren Spannungen ausgesetzt ist als besagte Scheibe.

Suchen wir den Anschluß etwas weiter, bei D_1 gemäß Linie ξ_2, so erhalten wir den strichpunktierten Umriß, mit ziemlich breiterer Nabe und ebenfalls zu hohen Spannungen.

Schaulinie ξ_3 soll endlich die Empfindlichkeit des Verfahrens beleuchten. ξ_3 weicht von ξ_1 nur unwesentlich ab; das ihm entsprechende Scheibenprofil (punktiert) ergibt trotzdem eine fast 1,4 mal dickere Nabe! Es geht also aus dieser Untersuchung hervor, daß die Annahme der Deformation nach Abb. 372 viel günstiger ist. Die letztere besitzt noch die von manchen für wichtig gehaltene Eigenschaft, daß man die Spannungen in der Mitte kleiner halten kann als die am Rande, damit, wenn die Turbine „durchgeht", der Bruch nicht in der Mitte beginne, also die ganze Scheibenmasse bei dieser „Explosion" nicht als Geschoß wirken könne. Allein ein am Außenrande beginnender Riß wird in der Mitte der Scheibe nicht haltmachen!

b) Verfahren von Holzer.

Holzer[1]) stellt den Grundsatz auf, daß eine Scheibe mit dem Mindestaufwand an Baustoff unter sonst gleichen Umständen dann herstellbar ist, wenn die aufgenommene Formänderungsarbeit in jedem Punkte möglichst groß ist. Es wäre erwünscht, für diesen Satz, der viel Wahrscheinlichkeit für sich hat, einen mathematischen Beweis zu erbringen, der vorläufig fehlt. In der praktischen Anwendung kommt er der einfachen Regel gleich, die Spannungen in jedem Punkte tunlichst nahe bis zum zulässigen Grenzwert zu steigern. Da im allgemeinen, wie auch die Beispiele unter a) lehren, die Spannung σ_r die größere zu sein pflegt, wird man diese tunlichst rasch von Null auf den Höchstwert wachsen lassen, und wird aus ihr σ_t bestimmen. Mit Hilfe der Gleichgewichts- und der Verträglichkeitsbedingung (Gl. 8 und 14 Abschn. 74) ist man in der Lage, diese Aufgabe zu lösen, ohne auf die Formänderung einzugehen, wobei das Rechnen mit Spannungen sich überdies für den Konstrukteur anschaulicher gestaltet.

Holzer nimmt demgemäß σ_r graphisch an, oder er rechnet dessen Verlauf in Stücken durch Reihenansätze

$$\sigma_r = f_r(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \qquad (6)$$

Die **Verträglichkeitsformel** nimmt hier, wo der Temperatureinfluß berücksichtigt werden soll, die Form

$$\frac{d\sigma_t}{dx} + (1+\nu)\frac{\sigma_t}{x} = \nu\frac{d\sigma_r}{dx} + (1+\nu)\frac{\sigma_r}{x} - E\varepsilon\frac{dt}{dx} = f(x) \qquad (7)$$

an, wie man an Hand der Gl. (9), Abschn. 79, leicht nachweist. Den Temperaturverlauf muß man als bekannt voraussetzen, also ist mit Rücksicht auf (6) die Funktion $f(x)$ bekannt, und Gl. (7) erlaubt σ_t zu bestimmen.

[1]) Z. f. d. gesamte Turbinenwesen 1913, S. 401 f.; 1915, S. 4 f.

Zu diesem Zwecke wird bekanntlich der Ansatz $\sigma_t = uv$ verwendet. Indem man Ableitungen durch Striche andeutet, entsteht

$$v u' + u \left[v' + (1+\nu)\frac{v}{x}\right] = f(x).$$

Man verfügt über v so, daß $v' + (1+\nu)v/x = 0$ wird, woraus sich $v = K_1 x^{-(1+\nu)}$ ergibt, und für u die Gleichung $vu' = f(x)$ übrig bleibt, so daß $u = \int \frac{f(x)\,dx}{v} + K_2$ wird. Im ganzen ist also, wenn man $K_1 K_2$ durch K ersetzt:

$$\sigma_t = x^{-(1+\nu)}\left[\int f(x)\,x^{(1+\nu)}\,dx + K\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Macht man vom Ansatz (6) Gebrauch, so kann das Integral ausgeführt werden und man erhält:

$$\sigma_t = a_0 + \frac{1+2\nu}{2+\nu}a_1 x + \frac{1+3\nu}{3+\nu}a_2 x^2 + \frac{1+4\nu}{4+\nu}a_3 x^3 + \ldots - x^{-(1+\nu)}\int E\varepsilon t' x^{(1+\nu)}\,dx + K x^{-(1+\nu)} \quad (9)$$

Auf ähnliche Weise ergibt sich, wenn man σ_t als Funktion von x vorschreibt,

$$\sigma_r = \frac{1}{\nu}x^{-\frac{1+\nu}{\nu}}\left[\int \varphi(x)\,x^{\frac{1+\nu}{\nu}}\,dx + K'\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

mit

$$\varphi(x) = (1+\nu)\frac{\sigma_t}{x} + \frac{d\sigma_t}{dx} + E\varepsilon\frac{dt}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

und die entsprechende Reihenentwicklung. Wir halten an Gl. (6) und (9) fest und haben nun die Scheibendicke zu ermitteln, was mittels der Gleichgewichtsbedingung gelingt, die wir in der Form

$$\frac{y'}{y} = \frac{\sigma_t - \mu\omega^2 x^2}{x\sigma_r} - \frac{1}{x\sigma_r}\frac{d(x\sigma_r)}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

anschreiben. Die Integration mit irgendeinem Zwischenhalbmesser x_z angefangen, dem die Größen y_z und σ_{rz} entsprechen, liefert:

$$\lg n\frac{y}{y_z} = \int_{x_z}^{x}\frac{\sigma_t - \mu\omega^2 x^2}{x\sigma_r}\,dx - \lg n\frac{x\sigma_r}{x_z\sigma_{rz}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Würde man für x_z den Halbmesser x_0 der Nabenbohrung einsetzen, so würde, falls man an deren Innenwand $\sigma_r = 0$ setzt (bei $\sigma_{r1} = -p_0$ etwas weiter einwärts), der Wert ∞ entstehen. Diese Schwierigkeit wird umgangen, wenn man voraussetzt, daß in der Nabe selbst die Temperatur überall gleich ist, was bei der im Verhältnis großen Dicke der Nabe zulässig sein dürfte. Dann sind die Formeln (21) und (22) Abschn. 76 im Bereich der Nabenlänge verwendbar, die, von Holzer in den Anfangsspannungen σ_{r0} σ_{t0} ausgedrückt, wie folgt lauten:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{\mu\omega^2 x_0^2}{8}\left[-(3+\nu)\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + 2(1+\nu) + (1-\nu)\left(\frac{x_0}{x}\right)^2\right] + \frac{1}{2}(\sigma_{r0}+\sigma_{t0}) + \frac{1}{2}(\sigma_{r0}-\sigma_{t0})\left(\frac{x_0}{x}\right)^2\\ \sigma_t &= \frac{\mu\omega^2 x_0^2}{8}\left[-(1+3\nu)\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + 2(1+\nu) - (1-\nu)\left(\frac{x_0}{x}\right)^2\right] + \frac{1}{2}(\sigma_{r0}+\sigma_{t0}) - \frac{1}{2}(\sigma_{r0}-\sigma_{t0})\left(\frac{x_0}{x}\right)^2\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Beispiel 1. In Abb. 374 ist nach Holzer die Durchrechnung einer Scheibe dargestellt für $n = 3000$ i. d. Min. mit 1350 mm Außendurchmesser, 160 mm Innendurchmesser und einer linearen Temperaturzunahme zwischen Nabe und Kranz von 108° C (Nabe unveränderlich 30° C, Kranz desgleichen 138°). Vorgeschrieben sind die kleinste Scheibendicke $\gtrless 10$ mm und die Kranzdicke 28 mm. Innerhalb der angenommenen Nabendicke zwischen $x = 8$ cm und 12 cm verlaufen mit der Annahme

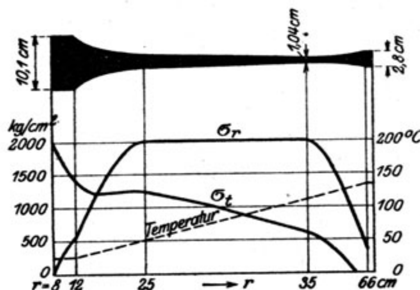


Abb. 374. Spannungsverlauf bei gegen den Kranz hin wachsender Temperatur.

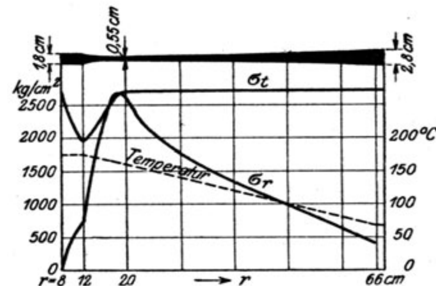


Abb. 375. Die heiße Nabe spannt die Außenteile und ermöglicht große Schlankheit.

$\sigma_{r_8} = 0$; $\sigma_{t_8} = 2000$ kg/qcm die Spannungen nach Gl. (14). Es ergibt sich $\sigma_{r_{12}} = 527$; $\sigma_{t_{12}} = 1432$. Nun wird für σ_r nach Gl. (6) vorgeschrieben 1. der Anfangswert $\sigma_{r_{12}} = 527$, 2. der Höchstwert, der im Abstand $x = 25$ erreicht werden soll $\sigma_{r_{25}} = 2000$; 3. die anfängliche Steigung $(d\sigma_r/dx)_{x=12} = 170$. 4. Tangierendes Endigen, d. h. $(d\sigma_r/dx)_{x=25} = 0$. Aus diesen vier Bedingungen ergeben sich die Vorzahlen a_0 a_1 a_2 a_3 in Gl. (6) und der Ausdruck von σ_t nach Gl. (9), dessen Verlauf mit $E\varepsilon = 28$ in Abb. 374 dargestellt ist und bei $x = 25$ cm den Wert $\sigma_{t_{25}} = 1229$ erreicht. Nun soll σ_r möglichst lange unveränderlich bleiben; doch ist die Länge der entsprechenden Strecke nicht willkürlich, da an deren Ende zugleich die kleinste Scheibendicke erreicht wird, die hier mit 1,0 cm vorgeschrieben ist und bei $x = 66$ cm wieder $y = 2{,}8$ cm werden muß. Der Spannungsverlauf muß so beschaffen sein, daß nach Gl. (13) die rechte Seite zwischen dem noch unbekannten x und $x = 66$ integriert den Wert lgn (2,8/1,0) ergibt und dort schließlich die vorgeschriebene Spannung $\sigma_{r_{66}} = 400$ auftritt. Um dies zu erreichen, müssen Erfahrungen von früheren Berechnungen her vorliegen oder man muß sich auf eine Anzahl Proberechnungen einlassen. Holzer findet mit $x = 55$ den gesuchten Anschluß, von wo ab σ_r nach einer Gleichung dritten Grades auf $\sigma_r = 400$ herabfällt, wobei sich nach (9) für σ_t der negative Wert -222 ergibt. Es liegt dies an der nach außen zunehmenden Temperatur, vermöge der der Kranz sich auszudehnen bestrebt ist und so schließlich eine Umfangsdruckspannung erzeugt, die bei größeren Beträgen unter Umständen zu einer Knickbeanspruchung führen könnte. Auch ist zu beachten, daß die größte Schubspannung dann als die Hälfte der Summe der Absolutwerte $= \frac{1}{2}([\sigma_r] + [\sigma_t])$ und nicht als $\sigma_r/2$ allein erscheint. Die Spannungen im eigentlichen Kranz werden von Holzer vernachlässigt.

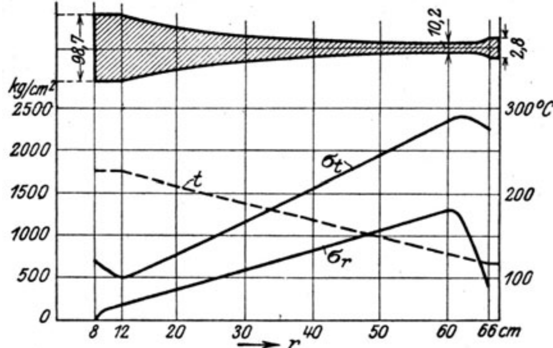


Abb. 376. Verbreiterung der heißen Nabe setzt die Spannungen erheblich herab.

Es ist bemerkenswert, wie sehr sich die Verhältnisse ändern, wenn die Temperatur gegen die Nabe hin zunimmt. Abb. 375 entspricht den Annahmen $t_1 = 258^0$ C, $t_2 = 138^0$ C. Die Ausdehnung der inneren Scheibenteile erzeugt in den Außenteilen Umfangsspannungen, die über σ_r stark überwiegen. Die Außenteile werden dadurch indes so gut ausgenützt, daß mit der freilich hohen Spannung $\sigma_t = 2700$ kg/qm die ungemein schlanke Scheibe der Abb. 375 sich tragfähig erweist. Da die schmale Nabe indessen keinen genügenden Halt darbietet, muß übrigens sowieso Material hinzugefügt werden, und dann dürfen σ_t und σ_r im Anfang stark herabgesetzt werden. Eine entsprechende Lösung ist in Abb. 376 dargestellt.

81. Beanspruchung einer gegebenen Scheibe.

Die Umkehrung der Aufgabe des Neuentwurfes einer Scheibe ist die Ermittelung der Beanspruchung eines in Zeichnung oder der Wirklichkeit vorliegenden Rades bei beliebiger Drehzahl. Hierfür stehen zur Verfügung:

a) Das rechnerische Verfahren.

Nach Grübler[1]) zerlegen wir die Scheibe in eine Anzahl von Teilen a, b, c ... Abb. 377, von welchen jeder einzelne durch eine hyperboloidische oder flach zylindrische Form so genau als möglich ersetzt wird. Wir wählen beispielsweise am Teil b die

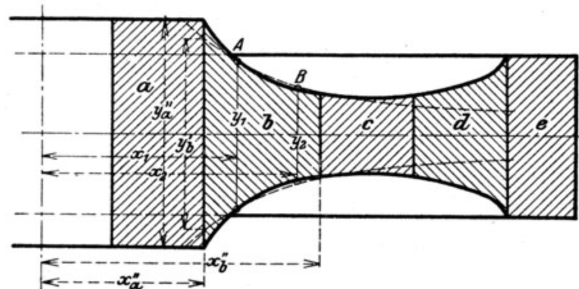


Abb. 377. Zerlegung in einheitliche Formen.

[1]) Z. d. V. deutsch. Ing. 1906 S. 535.

Punkte A und B mit den Halbmessern x_1, x_2 und den Dicken y_1, y_2. Soll die Gleichung den Umrissen der hyperbolischen Form entsprechen, so muß

$$y_1 = c x_1^{-\alpha}, \qquad y_2 = c x_2^{-\alpha}$$

erfüllt sein, woraus sich durch Teilung

$$\frac{y_2}{y_1} = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{-\alpha} \quad \text{oder} \quad \alpha = -\frac{\lg\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{\lg\left(\frac{x_2}{x_1}\right)} \qquad (1)$$

ergibt. Nun kann man den Umriß, wie punktiert angedeutet, einzeichnen und sich überzeugen, ob die Annäherung genügt. Auf diese Weise erhält man

$$\left.\begin{array}{ll} y_a = Y_a x^{-\alpha_1}; & \xi = a_0 x^3 + a_1 x^{\psi_1'} + a_2 x^{\psi_1''} \\ y_b = Y_b x^{-\alpha_2}; & \xi = b_0 x^3 + b_2 x^{\psi_2'} + b_2 x^{\psi_2''} \\ y_c = Y_c x^{-\alpha_3}; & \xi = c_0 x^3 + c_1 x^{\psi_3''} + c_2 x^{\psi_3''} \\ \ldots & \ldots \end{array}\right\} \qquad (2)$$

worin auch die flachzylindrischen Teile durch den Sonderwert $\alpha = 0$ eingeschlossen sind und die Größen ψ_1', ψ_1''; ψ_2', ψ_2'' und a_0, b_0, c_0 ... nach den Formel des Abschn. 78 berechnet werden. Die übrigen Größen a_1, a_2; b_1, b_2... sind durch die Randbedingungen wie folgt festgelegt. Am inneren Rand sei der Betriebsdruck p_0, woraus die Bedingung

$$(\sigma_{r0})_a = -p_0 \qquad (3)$$

folgt. Da wo die Teile a und b zusammenstoßen, sei für Teil a die Dehnung ξ_a'', die radiale Spannung σ_{ra}'', die Dicke y_a''; für Teil b seien dieselben Größen ξ_b', σ_{rb}', y_b'. Dann gelten die Bedingungen

$$\left.\begin{array}{l} \xi_a'' = \xi_b' \\ y_a'' \sigma_{ra}'' = y_b' \sigma_{rb}' \end{array}\right\} \qquad (4)$$

ähnlich für den Anschluß von b an c

$$\left.\begin{array}{l} \xi_b'' = \xi_c' \\ y_b'' \sigma_{rb}'' = y_c' \sigma_{rc}' \end{array}\right\} \qquad (5)$$

und so fort für die anderen Teile, bis man beim Außenrand angelangt ist, an dem der Schaufelzug die Spannung

$$\sigma_{ru}'' = \sigma \qquad (6)$$

bedingen möge. Die Zahl der so gewonnenen Bedingungen ist der Zahl der Unbekannten gleich, und sie sind alle linear. So einfach sich die Bestimmungsgleichungen anschreiben lassen, so umständlich ist die Zahlenrechnung selbst.

b) Rechnen mit kleinen Differenzen.

Jede Differentialgleichung kann bekanntlich angenähert aufgelöst werden, indem man an Stelle der Differentiale kleine endliche Differenzen setzt. Dabei kann man von der Formänderung ausgehen, oder mit den Spannungen rechnen, unter Benutzung des Gleichgewichts und der Verträglichkeitsbedingung. Letztere soll mit Rücksicht auf die Temperatur in der Form (7) Abschn. 80 verwendet werden. Wir teilen nach Abb. 378 die Scheibe in „Elemente“, die um so dünner sein sollen, je stärker y sich verändert. Die auf den Anfang eines Elementes Bezug habenden Größen werden mit dem Fußzeichen a versehen, die am Ende mit e. Der Differentialquotient $d(xy\sigma_r)/dx$ ist alsdann zu ersetzen durch den Differenzenquotienten $\Delta(xy\sigma_r)/\Delta x$. Hierin ist $\Delta(xy\sigma_r)$ der Unterschied zwischen dem End- und dem Anfangswert von $xy\sigma_r$ also $\Delta(xy\sigma_r) = (xy\sigma_r)_e - (xy\sigma_r)_a$. Indem wir in der Gleichgewichtsbedingung (8) Abschn. 74 mit Δx hinaufmultiplizieren, erhalten wir

$$(xy\sigma_r)_e = (xy\sigma_r)_a + (y\sigma_t)_m \Delta x - \mu\omega^2 (x^2 y)_m \Delta x \qquad (7)$$

Aus der Herleitung der Gleichgewichtsbedingung folgt, daß im 2. und 3. Glied rechts eigentlich die Werte eingeschoben werden sollten, die für die **Mitte des Elementes** gelten, was durch das Fußzeichen m angedeutet wurde. Um die Rechnung durchzuführen, muß man

die Spannungen $\sigma_{r1}\sigma_{t1}$ **für den Anfang der ersten Elemente versuchsweise wählen,** wobei $\sigma_{r1} = -p_0$ oder auch einfach $= 0$ der Wirklichkeit entspricht, σ_{t1} aber willkürlich angenommen werden muß. Man kennt also die Spannung für die Mitte noch nicht. Bei enger Teilung genügt es, wenn wir an Stelle von σ_{tm} den Wert σ_{ta} einsetzen. Man könnte indes mit Vorteil größere Teilungen wählen und σ_{tm} einschätzen, mit nachträglicher Berichtigung, falls die Abweichung sich als groß herausstellte. Gl. (7) liefert nun $(xy\sigma_r)_e$ und da $(xy)_e$ bekannt ist, die Endspannung

$$\sigma_{re} = \frac{(xy\sigma_r)_e}{(xy)_e} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7a)$$

Ähnlich ergibt sich aus der Verträglichkeitsbedingung, in der wir $\Delta\sigma_t = (\sigma_t)_e - (\sigma_t)_a$; $\Delta t = t_e - t_a$ setzen:

$$(\sigma_t)_e = (\sigma_t)_a + \nu(\sigma_{re} - \sigma_{ra}) + (1+\nu)\left(\frac{\sigma_r - \sigma_t}{x}\right)_m \Delta x - E\varepsilon(t_e - t_a) \quad \ldots \quad (8)$$

wobei der mit dem Fußzeichen m versehene Klammerwert ähnlich zu rechnen ist wie oben. Die Endwerte für das erste Element sind die Anfangswerte für das zweite, und so können Stufe für Stufe die Spannungen ermittelt werden[1]). Ist man beim letzten Element angelangt, so wird indessen die sich für das Ende desselben ergebende Spannung σ_{r2} im allgemeinen nicht mit der Spannung übereinstimmen, die durch die Fliehkraft der Schaufeln ausgeübt wird, und die man sich gleichmäßig über dem letzten Querschnitt ausgebreitet denkt. Denn für die Nabenbohrung wird die Annahme $\sigma_{r1} = 0$ der Wirklichkeit nahe entsprechen; hingegen wäre es reiner Zufall, wenn man mit der Annahme über σ_{t1} das Richtige getroffen hätte. Den Weg zur Abhilfe dieser Schwierigkeit hat v. Mises angegeben. Man rechnet die Beanspruchung für eine zweite Annahme von σ_{t1} und mit gleichem σ_{r1} wie vorhin, indessen mit $\omega = 0$ d. h. für die ruhende Scheibe durch. Diese Lösung werde mit $\sigma_r''\sigma_t''$ und die erste zum Unterschiede mit $\sigma_r'\sigma_t'$ bezeichnet, beide sind in Abb. 378 eingetragen. Die Spannungen $\sigma_r''\sigma_t''$ werden durch die (sich ergebende) Randspannung $\sigma_r''{}_2$ hervorgerufen, die Werte $\sigma_r'\sigma_t'$ durch die Randspannung σ_{r2}' und die Fliehkräfte. Man kann die Randkraft σ_{r2}'' auf den k-fachen Betrag erhöhen und mit σ_{r2}' wie mit den Fliehkräften vereint auf die Scheiben einwirkend denken; dann ist die resultierende Beanspruchung an irgendeiner Stelle die „Übereinanderlagerung“

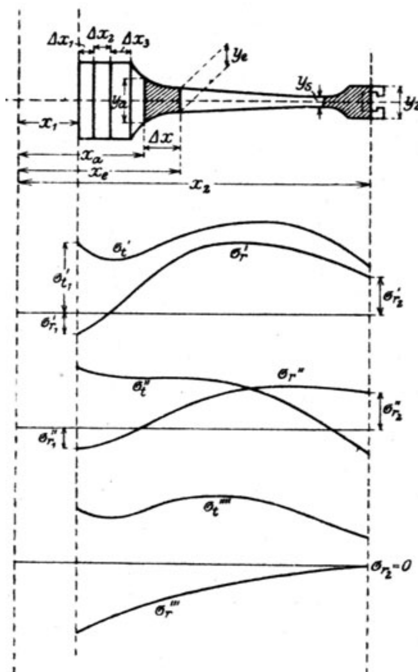


Abb. 378. Spannungsermittelung mittels Differenzenrechnung.

$$\sigma_r = \sigma_r' + k\sigma_r''; \qquad \sigma_t = \sigma_t' + k\sigma_t'' \quad . \; . \quad (9)$$

Sie wird eine „Lösung“ für den wirklichen Spannungszustand ergeben, falls am Außenrande σ_{r2} die vorgeschriebene Größe abnimmt. Es muß also

$$\sigma_{r2} = \sigma_{r2}' + k\sigma_{r2}'' \text{ sein, woraus } k = \frac{\sigma_{r2} - \sigma_{r2}'}{\sigma_{r2}''} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

folgt. Die hierauf mit k zu rechnenden Werte $\sigma_r\sigma_t$ sind in Abb. 378 nicht eingetragen. Am Innenrande ist von selbst $\sigma_r =$ dem vorgeschriebenen Wert σ_{r1}.

c) Scheiben mit Zusatzbelastung durch die Fliehkraft von Zwischenschaufeln.

Bei Radialturbinen und Verdichtern kommen Zwischenschaufeln vor, deren Fliehkraft am einfachsten durch diejenige eines Scheibenüberzuges mit der Dicke η (aus gleichem Baustoff) dargestellt wird.

---

[1]) Dieses Verfahren wurde erstmals vorgeschlagen von Dr. H. Keller in Schweiz. Bauztg. 1909, Bd. 54, S. 307, wobei man sich in der Wahl des anfänglichen σ_t nach dem aus Fliehkraft der halben Scheibe gerechneten Mittelwert dieser Spannung richtete.

Die Fliehkraft eines dem Zentriwinkel $d\varphi$ entsprechenden Elementes und der radialen Dicke Δx ist $(\mu x d\varphi y \Delta x) x \omega^2$, die Zusatzfliehkraft $= (\mu x d\varphi \eta \Delta x) x \omega^2$. Man muß mithin in Gl. (7) an Stelle des letzten Gliedes $\mu \omega^2 x_m{}^2 (y + \eta)_m \Delta x$ setzen, wobei η von vornherein für den ganzen Meridian ausgerechnet wird.

d) Inanspruchnahme der aufgepreßten Scheibe im Ruhezustand.

Für die drehende Scheibe sollte, wie erwähnt, der Anpressungsdruck in der Nabe nicht ganz auf Null herabgehen, damit die Scheibe nicht „schlottert". Aus der angenommenen Größe desselben $\sigma_{r1} = -p_0$, wofür 50 kg/qcm als Höchstwert hinreichen, und dem bekannten Wert von σ_{t1} berechnet sich die Aufweitung der Nabe

$$\xi_1 = \frac{\sigma_{t1} - \nu \sigma_{r1}}{E} x_1 = \frac{\sigma_{t1} + \nu p_0}{E} x_1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

Die Zusammendrückung der Welle ist im Betriebe

$$\xi_0 = \frac{(1 - \nu) p_0 x_1}{E} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

wohl vernachlässigbar. Mithin ist das anzuwendende Schrumpfmaß, d. h. der Unterschied von Wellen- und Nabenhalbmesser im Ruhezustand

$$\Delta = \xi_1 + \xi_0 = \frac{\sigma_{t1} + p_0}{E} x_1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

Um zu erfahren, wie groß die Beanspruchung infolge der Schrumpfung (bzw. des hydraulischen Aufpressens) im Ruhezustande ist, muß man einen dritten Belastungsfall untersuchen, bei dem $\omega = 0$ und die Radialspannung außen $\sigma_{r2}''' = 0$ ist. Man nimmt daher ein willkürliches σ_{t2}''' an und rechnet mit Gl. (7) und (8) vom Außenrand gegen den Innenrand hin (d. h. man löst nach $(x u \sigma_r)_a$ und $(\sigma_t)_a$ auf). Dies führt auf negative Werte σ_r''' Abb. 378, d. h. Druckspannurgen, insbesondere auf $\sigma_{r1}''' = -p_1$ am Innenrand. Die dort herrschende Tangentialspannung σ_{t1}''' ist dem σ_{t2}''' und mittelbar dem σ_{r1}''' proportional und man erhält die Verhältniszahl

$$k_1 = -\frac{\sigma_{t1}'''}{p_1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

Sind nun σ_{t1e} und p_{1e} die tatsächlich im Ruhezustand auftretenden Spannungen, so wird nach (14)

$$\sigma_{t1e} = -k_1 p_{1e} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14a)$$

sein. Ferner ergibt sich die Ausdehnung der Nabe $\xi_n = \frac{\sigma_{t1e} + \nu p_{1e}}{E} x_1$; die Zusammendrückung der Welle $\xi_w = \frac{(1-\nu) p_{1e} x_1}{E}$ und man erhält ähnlich wie bei (13)

$$\Delta = \xi_n + \xi_w; \text{ daraus folgt } p_{1e} = \frac{E \Delta}{(k_1 + 1) x_1} \quad \ldots \ldots \quad (15)$$

Die übrigen Spannungen verändern sich im gleichen Verhältnis; insbesondere wird die im allgemeinen größte innere Umfangsspannung (mit Rücksicht auf 13)

$$\sigma_{t1e} = \frac{k_1}{k_1 + 1} (\sigma_{t1} + p_0) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

e) Neuberechnung einer Scheibe mittels der Differenzenrechnung.

Als gegeben ist anzusehen: der Kranz, die von den Schaufeln ausgeübte Endspannung σ_{r2} und die äußerste Scheibenstärke y_s Abb. 378. Man wird die äußerste Spannung σ_{t2} versuchsweise annehmen; einwärts gegen den Schnitt y_s fortschreitend σ_r und σ_t ermitteln und die Annahme so lange abändern, bis in y_s die Spannung σ_{rs} den zulässigen Höchstwert erreicht. Von da an würde dieser bis in die Höhe der Nabe als unveränderlich vorgeschrieben und aus (8) $(\sigma_t)_a$; aus (7) $(x y \sigma_r)_a$ berechnet, welch letzteres

$$y_a = \frac{(x y \sigma_r)_a}{(x \sigma_r)_a} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

liefert. Für die Nabe müßte die Länge probeweise angenommen und abgeändert werden, bis $\sigma_{r1} = -p_0$ und σ_{t1} einen zulässigen Wert angenommen hat.

f) Verfahren von Donath[1]) mit Erweiterung auf veränderliche Temperatur.

Donath zerlegt die Scheibe in eine Anzahl von Ringen, Abb. 379, deren Dicke je dem Mittelwerte der Dicke des herausgeschnittenen Elementes entspricht. Ist eine Zwischenbelastung durch Schaufelfliehkräfte vorhanden, so muß sie, wie durch die (unendlich) dünnen Fortsätze angedeutet, auf die Trennungsfläche zweier Ringe übertragen werden, und möge z kg für die Längeneinheit des zugehörigen Kreisumfanges betragen. Die Spannungen unmittelbar vor und nach der Trennungsfläche seien mit $\sigma_t' \sigma_r'$ und $\sigma_t \sigma_r$, die Dicken mit y' und y bezeichnet. Die vom Trennungshalbmesser unendlich wenig verschiedenen Halbmesser x' und x bestimmen zwei Zylinderflächen, zwischen welchen ein unendlich dünner Zylinder übrig bleibt, der halb in das erste, halb in das zweite Element eingreift. Das Gleichgewicht an einem Stück dieses Ringes, das der Längeneinheit gleich ist, erfordert:

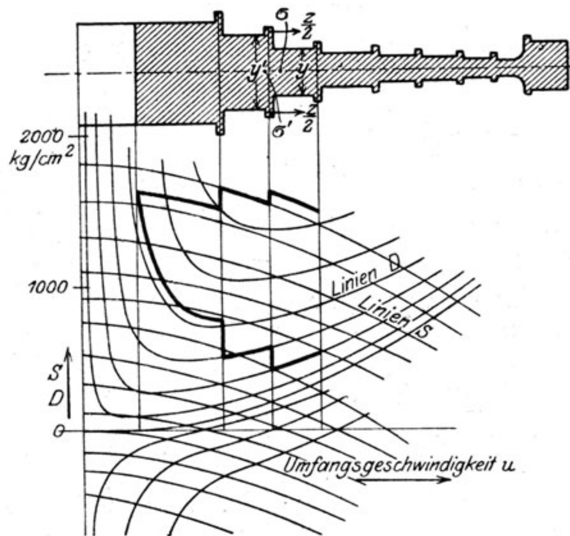


Abb. 379. Graphisches Verfahren von Donath.

$$y\sigma_r + z = y'\sigma_r' \quad . \quad . \quad (18)$$

Daraus folgt die Spannungszunahme radial:

$$\Delta\sigma_r = \sigma_r - \sigma_r' = \left(\frac{y'}{y} - 1\right)\sigma_r' - \frac{z}{y} \qquad \text{oder} = \left(1 - \frac{y}{y'}\right)\sigma_r - \frac{z}{y'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

durch σ_r' oder σ_r ausgedrückt. Die Umfangsspannung ist an die Bedingung, daß die Ausdehnung $\xi = \xi'$ sei, gebunden, also ist auch $\varepsilon_t = \xi/x = \varepsilon_t' = \xi'/x'$, was in der Grenze mit $x' = x$ auf

$$\frac{\sigma_t - \nu\sigma_r}{E} + \varepsilon t = \frac{\sigma_t' - \nu\sigma_r}{E} + \varepsilon t'$$

oder

$$\Delta\sigma_t = \sigma_t - \sigma_t' = \nu\Delta\sigma_r + E\varepsilon\Delta t \quad \text{mit} \quad \Delta t = t' - t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

führt. Die Temperatur, die wir hiermit in die Gleichungen von Donath einführen, soll hiernach von Ring zu Ring stufenweise plötzlich, wie oben die Dicke, abnehmen.

Ist die Spannung für das Ende eines Elementes bekannt, so kann sie nach Gl. (19) und (20) für den Anfang der folgenden berechnet werden. Um sie für das Ende dieser Elemente zu ermitteln, hat Donath die Integrale der Scheibe gleicher Dicke graphisch allgemein dargestellt. Diese können wir hier unverändert verwenden, da die Temperatur für je ein Element als gleichbleibend angenommen wurde, und die Verschiedenheit davon von Element zu Element nur die Elastizitätszahl unwesentlich beeinflußt. Die sinnreiche Lösung von Donath besteht darin, daß nicht $\sigma_r \sigma_t$ einzeln, sondern die Ausdrücke

$$S = \sigma_t + \sigma_r; \quad D = \sigma_t - \sigma_r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

als Funktionen der Umfangsgeschwindigkeit u dargestellt werden, wobei sich nach Gl. (22) Abschn. 76 die Ausdrücke

$$S = \beta_1(-u^2 + K_1); \quad D = \beta_2\left(u^2 + \frac{K_2}{u^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

ergeben, wo $\beta_1 \beta_2 K_1 K_2$ Unveränderliche bedeuten. Soll eine **gegebene Scheibe nachgeprüft** werden, so wird man $\sigma_t \sigma_r$ für den Anfang der ersten Elemente mit dem dort herrschenden Wert u annehmen; dann sind S und D bekannt und man sucht für diese Abszisse die Punkte mit den Werten S und D in der Tafel auf. Längs der entsprechenden Kur-

[1]) Die Berechnung rotierender Scheiben und Ringe. Berlin 1912.

ven fortfahrend erhält man am Ende bei u' die Werte $S'D'$, aus denen die dort herrschenden Spannungen

$$\sigma_t' = \frac{1}{2}(S' + D'); \quad \sigma_r' = \frac{1}{2}(S' - D') \quad \ldots \ldots \ldots \quad (23)$$

folgen. Nun werden mittels Gl. (19) u. (20) die Zunahmen $\Delta\,\sigma_r$ und $\Delta\,\sigma_t$ berechnet. Bezeichnen wir mit dem vorgesetzten Zeichen Δ allgemein die **Zunahme** als = **Endwert** — **Anfangswert**, so ist nach Gl. (21)

$$\Delta\,S = \Delta\,\sigma_t + \Delta\,\sigma_r; \quad \Delta\,D = \Delta\,\sigma_t - \Delta\,\sigma_r \quad \ldots \ldots \ldots \quad (24)$$

also ist für den Anfang des nächstfolgenden Elementes

$$S = S' + \Delta\,S; \quad D = D' + \Delta\,D \quad \ldots \ldots \ldots \quad (24\,\mathrm{a})$$

Man schreitet längs der entsprechenden Kurven bis ans Ende des neuen Elementes fort usw. Die vollständige Lösung erfordert je zweimalige Durchrechnung, wie wir unter b) erläutert haben.

Soll das Verfahren für den **Entwurf einer neuen Scheibe** benutzt werden, so empfiehlt es sich, mit dem Kranz zu beginnen, also die Dicke y als gegeben anzusehen. Hat sich, wie unter e) erläutert, ein befriedigender Anschluß an die Scheibe bei $y = y_s$ finden lassen, so wird man von da an σ_r' vorschreiben, und Gl. (18) jeweils zur Berechnung von

$$y' = \frac{y_s\,\sigma_r + z}{\sigma_r'} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (25)$$

verwenden, indem man σ_r' für das Ende des benachbarten Elementes der vorgeschriebenen Kurve von σ_r entnimmt. Aus Gl. (20) findet man $\Delta\,\sigma_t$, aus Gl. (24) $\Delta\,S$; $\Delta\,D$; und aus Gl. (24a) $S' = S - \Delta\,S$; $D' = D - \Delta\,D$, worauf man in der Tafel längs dieser Kurven zum Anfang des Elementes vorgeht, und das Verfahren wiederholt. An der Nabe müssen Länge und Dicke so lange abgeändert werden, bis $\sigma_r \approx 0$ und σ_t innerhalb der zulässigen Grenze liegt.

Ermittelung der Temperaturspannungen allein. Mit $\omega = 0$ erhält man nach Abschn. 76

$$S = 2(1 + \nu)\,E'\,b_1; \quad D = 2(1 - \nu)\,E'\,\frac{b_2}{x_2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (25)$$

Sind also S und D für den Anfang eines Elementes bekannt, so gilt für das Ende desselben

$$S' = S; \quad D' = D\left(\frac{x'}{x}\right)^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (26)$$

zu deren Ermittelung es keiner Schaulinien bedarf, und der Rechenschieber genügt. Gl. (23) liefert σ_t', σ_r', mit welchen Werten nach (19) u. (20) die Spannungen für den Anfang des nächsten Elementes, also auch die Werte S, D, gerechnet werden, usf.

82. Geometrisch ähnliche Scheibenräder.

Das gemeinsame Merkmal der entwickelten Formeln besteht darin, daß alle Spannungen nur vom Quadrate der Umfangsgeschwindigkeit und nicht von der absoluten Größe des Halbmessers abhängen. Diese Eigenschaft ist unabhängig von der Scheibenform, wie man durch folgende Überlegung nachweisen kann.

Vergleichen wir zwei geometrisch ähnliche Scheibenräder, von denen das zweite (mit Einschluß der Schaufeln usw.), k-fach so große lineare Abmessungen haben möge als das erste. Die Drehung der Scheiben erfolge mit der Winkelgeschwindigkeit ω bzw. ω'. Wir schneiden aus den Scheibenkörpern zwei ähnlich gelegene geometrisch ähnliche Elemente heraus. Das der zweiten angehörende hat ein k^3-mal so großes Volumen, eine k^3-mal so große Masse; der Abstand von der Achse ist k-mal so groß, also ist die gesamte Fliehkraft $k^4\,\omega'^2/\omega^2$-mal größer als bei dem Element der ersten Scheibe. Sind die spezifischen Spannungen gleich groß, so ergeben die Flächenkräfte nur eine k^2-mal so große Resultierende; das Gleichgewicht besteht falls $k^2 = k^4\,\omega'^2/\omega^2$ oder $\omega^2 = k^2\,\omega'^2$, d. h. $\omega' = \omega : k$ ist. Die elastische Aufgabe verträgt jedoch bei gegebenen Randbedingungen nur eine Lösung; also ist die geschilderte mögliche Spannungsverteilung zugleich die wirkliche. Nun ist aber die Geschwindigkeit des äußersten Umfanges der Scheiben gleich groß, und wir haben den Satz: Die Beanspruchung geometrisch ähnlicher Scheiben beliebiger Form ist bei gleicher Umfangsgeschwindigkeit in ähnlich gelegenen Punkten gleich groß.

Spalten wir eine symmetrische Scheibe durch ihre zur Achse senkrechte Symmetrieebene in zwei gleiche Teile, so sind die Fliehkräfte jeder Hälfte offenbar für sich im Gleichgewicht. Man müßte nur jede Hälfte zu einem in bezug auf die zur Achse senkrechte Ebene ebenfalls symmetrisch geformten Rade ummodellieren. Hieraus geht hervor, daß wir die axialen Dimensionen eines Rades (aber dann auch die der Schaufeln usw.) nach Belieben im gleichen Verhältnis vergrößern oder verkleinern können, ohne bei gleichbleibender Geschwindigkeit an der Beanspruchung etwas zu ändern. Vergrößern wir nun ein Rad geometrisch auf die zweifache lineare Dimension unter Beibehaltung der alten Umfangsgeschwindigkeit, so erhalten wir in ähnlich gelegenen Punkten gleiche Spannungen. Spalten wir es hierauf durch seine zur Achse senkrechte Symmetrieebene in zwei Teile, so gilt für jede Hälfte dasselbe. Diese Hälfte kann man aber aus der ursprünglichen Weite auch dadurch entstanden denken, daß alle radialen Abmessungen derselben verdoppelt wurden. Die beiden letzten Ergebnisse lassen sich im folgenden Satz vereinigen:

Bei gleichbleibender Umfangsgeschwindigkeit dürfen wir sowohl die axial als auch die radial genommenen Abmessungen eines Rades in beliebigem voneinander unabhängigen Verhältnis vergrößern oder verkleinern, ohne an der spezifischen Beanspruchung in ähnlich gelegenen Punkten etwas zu ändern.

Da die Fliehkraft hier (abgesehen von dem kleinen Anpressungsdruck $p_0 = -\sigma_{r1}$) die einzige Außenkraft bildet, so ist überdies selbstverständlich die Spannung der spezifischen Masse μ verhältnisgleich.

Auf mathematischem Wege gelangt man zu dem gleichen Ergebnis, indem man in die Grundgleichung (13) in Abschn. 74 an Stelle von x die Umfangsgeschwindigkeit u vermöge der Gleichung $x = u/\omega$ einführt und ξ durch eine Veränderliche η mittels Gl. $\xi = \frac{\mu}{\omega E'}\eta$ ersetzt. Jene Gl. (13) lautet dann, wenn die Striche Ableitungen nach u bedeuten:

$$\eta'' + \frac{\eta'}{u} - \frac{\eta}{u^2} + \frac{y'}{y}\left(\eta' + \nu\frac{\eta}{u}\right) + u = 0 \quad \ldots \quad (1)$$

Da y hier als Funktion von u auszudrücken ist, wird das Integral auch Funktion von u und sein. Gl. (12) erscheint in der Form

$$\sigma_r = \mu\left(\eta' + \nu\frac{\eta}{u}\right); \qquad \sigma_t = \mu\left(\nu\eta' + \frac{\eta}{u}\right) \quad \ldots \quad (2)$$

Geometrisch ähnlich sind hier Scheiben, für die y bis auf einen unveränderlichen Faktor die gleiche Funktion von u ist (mit den gleichen Anfangs- und Endgeschwindigkeiten $u_1\, u_2$). Bei gleichen Randbedingungen [die von den Schaufeln ausgeübte Spannung σ_{r2} wäre = konst. $\times\, u_2^2$] ist dann η stets dasselbe, also auch die Spannungen $\sigma_r\, \sigma_t$.

83. Die Rad-Trommeln.

Die Laufschaufeln der vielstufigen Überdruck-Turbinen werden überwiegend in Gruppen auf mehr oder weniger langen Trommeln befestigt. Zum Zwecke vollständigen Massenausgleiches wird die Trommel auch inwendig abgedreht und die Befestigung kann entweder durch eingeschobene Armkreuze oder durch Flanschen und an die Welle angeschmiedete oder aufgepreßte Endscheiben erfolgen. Die Beanspruchung einer so befestigten Trommel ist, wenigstens soweit deren Mitte in Betracht kommt, der Sicherheit halber wie die eines frei umlaufenden Ringes zu rechnen. Wie weit der Einfluß der verschraubten Enden die Festigkeit erhöht, werden wir in Abschn. 196 untersuchen.

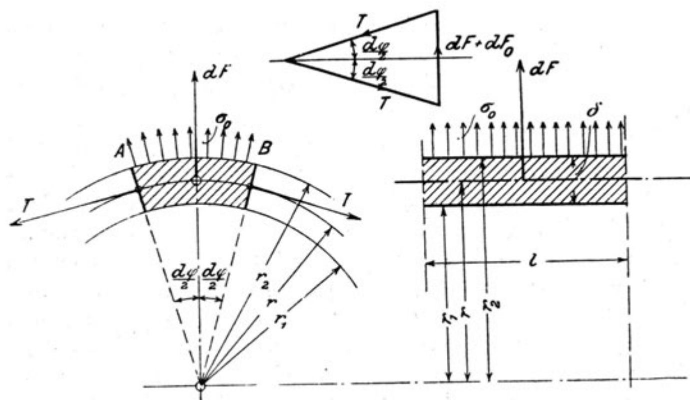


Abb. 380. Spannungen in einer Trommel.

Schneiden wir in Abb. 380 aus der zylindrischen Trommel von der Länge l durch die

unter $d\varphi/2$ geneigten axialen Ebenen das Element AB heraus, so findet sich dasselbe erstens durch die Fliehkraft der eigenen Masse

$$dF = (r\,d\varphi\,\delta\,l\,\mu)\,r\,\omega^2 \quad \ldots \quad (1)$$

beansprucht, worin $\mu = \gamma/g$ die spezifische Masse, ω die Winkelgeschwindigkeit bedeuten und die übrigen Größen in die Abbildung eingetragen sind.

Die Spannung σ_u in Richtung des Umfanges darf bei nicht zu großer Dicke δ als gleichmäßig angenommen werden und bildet eine auf die Seitenfläche $l\delta$ wirkende Resultierende

$$T = l\,\delta\,\sigma \quad \ldots \quad (2)$$

Gleichgewicht besteht, falls die radialen Komponenten gleich sind

$$dF = 2\,T \sin\frac{d\varphi}{2} = T\,d\varphi \quad \ldots \quad (3)$$

woraus

$$\sigma_u = \mu\,r^2\,\omega^2 = \mu\,u^2 \quad \ldots \quad (4)$$

folgt, wenn u die Umfangsgeschwindigkeit bedeutet. Es ergibt sich der wichtige Satz: **Die Beanspruchung eines frei umlaufenden Ringes durch die eigene Fliehkraft ist nur von der Umfangsgeschwindigkeit abhängig.**

Zwei Ringe mit gleicher Umfangsgeschwindigkeit werden gleich beansprucht, wie sehr auch ihre Durchmesser und Kranzstärken sein mögen. Für Flußeisen erhält man folgende abgerundete Zahlen

$u = 25$	50	75	100	150	200	400	m/sek
$\sigma_u = 50$	200	450	800	1800	3200	12800	kg/qcm.

Auch abgesehen von den Schaufelfliehkräften ist also für eine freie Trommel eine Geschwindigkeit über 100 m/sek kaum zulässig.

Die Fliehkraft der Schaufeln und ihrer Befestigungsteile, die wir gleichmäßig verteilt und für den Quadratzentimeter der mittleren Zylinderfläche (vom Halbmesser r) mit σ_0 bezeichnen wollen, wird auf das Element die radiale Kraft $dF_0 = r\,d\varphi\,l\,\sigma_0$ ausüben und eine Kranzspannung σ_s hervorgerufen, für die die Gleichung $dF_0 = 2\,l\,\delta\,\sigma_s \sin(d\varphi/2)$ gilt, und

$$\sigma_s = \frac{r\,\sigma_0}{\delta} \quad \ldots \quad (5)$$

ergibt. Die gesamte Kranzspannung ist die Summe dieser beiden Spannungen

$$\sigma = \sigma_u + \sigma_s \quad \ldots \quad (6)$$

Durch das Verstemmen der einzelnen Schaufelreihen kommt eine axiale Verspannung hinzu, deren Größe freilich schwer anzugeben ist. Sie kann zu Nebenerscheinungen bei Betrieb mit überhitztem Dampf Veranlassung geben, indem die Beilagen zufolge ungleich starken Stemmens bei ihrer Ausdehnung ungleiche axiale Drücke ausüben und die Trommel krummziehen können. Auch ursprüngliche Guß- (oder Schmiede-) Spannungen könnten ausgelöst werden, weshalb man neuerdings die Spindeln vor der Beschaufelung ausglüht und von dem früher verwendeten Stahlguß zugunsten von geschmiedetem Material abkommt.

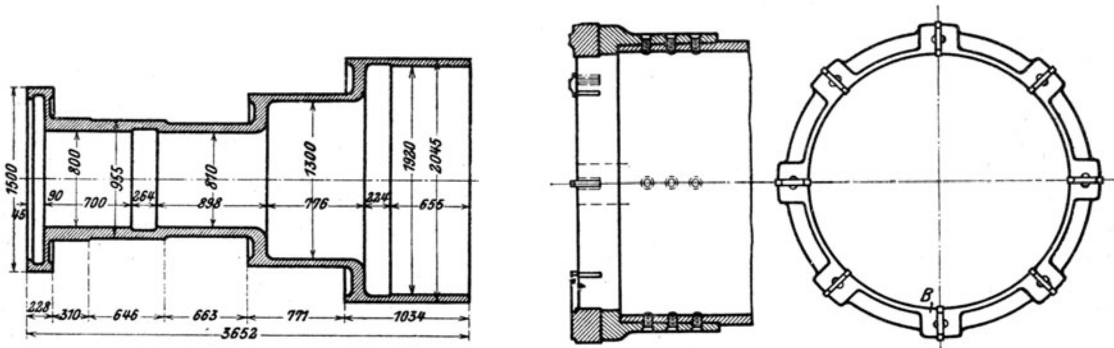


Abb. 381 und 382. Trommelform und Messerkopf.

Die Herstellung der geschmiedeten hohlen Trommeln erfolgt nach gleichen Methoden wie die der Geschützrohre. Verhältnismäßig einfach ist das Verfahren bei den zylindrischen Trommeln der Schiffs-

turbinen. Nach Mitteilung der Firma Friedr. Krupp A.-G. wird der Block in fester Umhüllung durch einen am Vorderende mäßig verdickten Stempel axial gelocht und der gelochte Butzen auf einem an den Enden gestützten glatten Dorn unter hydraulischer Presse auf das gewünschte Maß ausgeschmiedet.

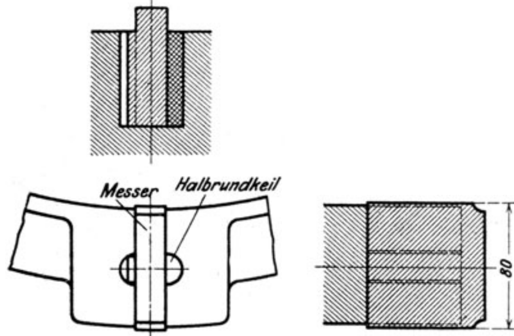


Abb. 383. Messerbefestigung.

Die nur an einem Ende hohlen Trommeln werden massiv geschmiedet; das hohle muß auf der Drehbank ausgebohrt werden. Gemäß dem D. R. P. Nr. 312455 kann jedoch der Block auch teilweise unter der Presse gelocht und das massive Ende ausgeschmiedet werden. Über die Herstellung einer dreimal abgesetzten Trommel nach Abb. 381 hat mir seinerzeit Herr Oberingenieur **Kraft** von den Cockerill-Werken folgendes mitgeteilt. Der rohe Stahlingot hatte 1,45 auf 1,55 m einbeschriebenen Durchmesser des Achteckes, 3,6 m Länge und rund 50 t Gewicht. Nachdem er auf den äußeren Fertigdurchmesser in der Mitte vorgeschmiedet war, wurde eine dem kleinsten Innendurchmesser entsprechende Seele herausgebohrt. Der verwendete Messerkopf (Abb. 382) enthält acht Messer am Umfang mit 80 mm Schneidenbreite. Die Messer werden, wie in Abb. 383 ersichtlich, durch Keile befestigt. Hierauf wurden die Enden „aufgedornt" (d. h. über einem Dorn ausgeschmiedet), um den vorgeschriebenen größeren Durchmesser zu erhalten, und das Stück konnte auf der Drehbank fertig bearbeitet werden. Schließliches Gewicht 10800 kg.

Auch die Schweißung von einzelnen gewalzten Trommeln soll auf gewissen Hüttenwerken geübt werden.

84. Befestigung der Trommel und der Welle.

Die von **Parsons** herstammende, sehr verbreitete Befestigungsart durch **Schrumpfung** ist im unteren Teil der Abbidung 384 dargestellt. Der mit etwa 1,25 v. T. Zugabe versehene

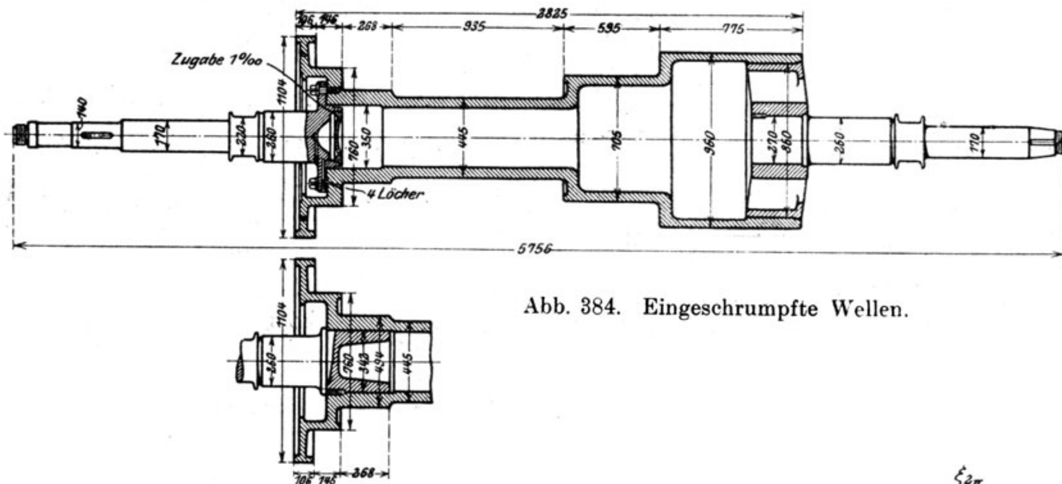


Abb. 384. Eingeschrumpfte Wellen.

hohle Zapfen wird in die mittels Gasflammen erwärmte Trommel eingesetzt und durch einige Stiftschrauben gegen Drehung gesichert.

Die Beanspruchung dieser Schrumpfverbindung ist an Hand der Formeln des Abschn. 76 unter vereinfachenden Annahmen leicht zu ermitteln. Betrachten wir zwei **ruhende zylindrische Ringe** (Abb. 385), deren aufeinander zu passende Durchmesser um den Betrag $2\,\Delta$ verschieden sind.

Nach dem Aufschrumpfen sei für Ring I (links) die radiale Dehnung (algebraisch)

$$\xi_I = a_1 x + \frac{a_2}{x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

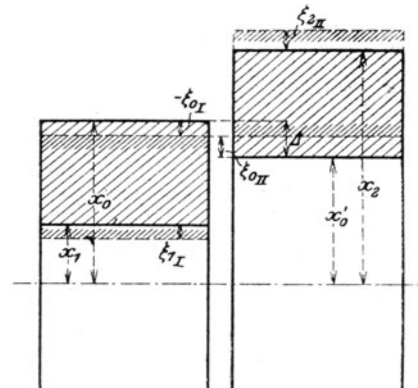


Abb. 385.
Dehnungen nach dem Schrumpfen.

für Ring II

$$\xi_{II} = b_1 x + \frac{b_2}{x} \quad \text{. . . . .} \quad (2)$$

und die auftretenden Spannungen sind mit der Abkürzung $E' = E/(1 - \nu^2)$ in Ring I

$$\sigma_r = E'\left[(1 + \nu)\, a_1 - (1 - \nu)\frac{a_2}{x^2}\right], \qquad \sigma_t = E'\left[(1 + \nu)\, a_1 + (1 - \nu)\frac{a_2}{x^2}\right] \quad \text{. .} \quad (3)$$

in Ring II

$$\sigma_r = E'\left[(1 + \nu)\, b_1 - (1 - \nu)\frac{b_2}{x^2}\right]; \qquad \sigma_t = E'\left[(1 + \nu)\, b_1 + (1 - \nu)\frac{b_2}{x^2}\right] \quad \text{. .} \quad (4)$$

Die Beiwerte a_1, a_2, b_1, b_2 werden aus folgenden Bedingungsgleichungen bestimmt:

Am inneren und äußeren Rand ist die radiale Spannung $= 0$. Die Summe der radialen Ausdehnung für Ring II und der negativ genommenen Ausdehnung, d. h. der Zusammendrückung für Ring I muß gleich sein der Zugabe Δ. In der Berührungsfläche, d. h. für I bei $x = x_0$, für II bei $x = x_0'$, sind die radialen Spannungen gleich groß. Dies führt auf die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &(1 + \nu)\, a_1 - (1 - \nu)\frac{a_2}{x_1^2} = 0; \quad (1 + \nu)\, b_1 - (1 - \nu)\frac{b_2}{x_2^2} = 0 \\ &a_1 x_0 - \frac{a_2}{x_0} + b_1 x_0' + \frac{b_2}{x_0'} = \Delta \\ &(1 + \nu)\, a_1 - (1 - \nu)\frac{a_1}{x_0^2} - (1 + \nu)\, b_1 + (1 - \nu)\frac{b_2}{x_0'^2} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{. . .} \quad (5)$$

Da $x_0' = x_0 - \Delta$ ist und Δ nur Tausendstel von x_0 ausmachen darf, kann hier unbedenklich $x_0' = x_0$ gesetzt werden, wodurch sich die Auflösung vereinfacht und auf die Werte

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= -\frac{(1 - \nu)}{2}\left(\frac{\Delta}{x_0}\right)\frac{x_2^2 - x_0^2}{x_2^2 - x_1^2}; \quad & a_2 &= -\frac{(1 + \nu)}{2}\left(\frac{\Delta}{x_0}\right)\frac{x_2^2 - x_0^2}{x_2^2 - x_1^2}\, x_1^2 \\ b_1 &= \frac{(1 - \nu)}{2}\left(\frac{\Delta}{x_0}\right)\frac{x_0^2 - x_1^2}{x_2^2 - x_1^2}; \quad & b_2 &= \frac{(1 + \nu)}{2}\left(\frac{\Delta}{x_0}\right)\frac{x_0^2 - x_1^2}{x_2^2 - x_1^2}\, x_1^2 \end{aligned}\right\} \quad \text{. . .} \quad (6)$$

führt. Hiermit erhält man die Spannung (d. h. den Druck) in der Berührungsfläche

$$\sigma_{r0} = -\frac{E\Delta}{2x_0}\frac{(x_0^2 - x_1^2)(x_2^2 - x_0^2)}{x_0^2(x_2^2 - x_1^2)} \quad \text{. . . . .} \quad (7)$$

und die gefährlichste Umfangsspannung an der inneren Zylinderfläche des äußeren Ringes σ_t für $x + x_0$.

$$(\sigma_{t0})_{II} = \frac{E\Delta}{2x_0}\frac{(x_0^2 - x_1^2)(x_0^2 + x_2^2)}{x_0^2(x_2^2 - x_1^2)} \quad \text{. . . . .} \quad (8)$$

Von gleicher Größenordnung ist die tangentiale (Druck-) Spannung an der inneren Faser des inneren Ringes

$$\sigma_{t1} = \frac{E\Delta}{x_0}\frac{x_0^2 - x_2^2}{x_2^2 - x_1^2} \quad \text{. . . . .} \quad (9)$$

Die übrigen Spannungen sind kleiner.

Sonderfall: Ist die Wandstärke beider Ringe gleich $= h$, so vereinfachen sich die Ausdrücke weiter zu

$$\sigma_{r0} = -\frac{E\Delta}{2x_0}\frac{h}{x_0}\left(1 - \frac{h^2}{4x_0^2}\right); \qquad \sigma_{t0} = \frac{E\Delta}{2x_0}\left[1 + \frac{h}{2x_0} - \frac{1}{4}\left(\frac{h}{x_0}\right)^3\right] \quad \text{. . .} \quad (10)$$

Die Ausdehnung in der Berührungsfläche ist für den Außenring

$$\xi_0 = \frac{\Delta}{2}\left[1 + (1 + 2\nu)\frac{h}{2x_0} - \frac{1 + \nu}{4}\left(\frac{h}{x_0}\right)^3\right] \quad \text{. . . . .} \quad (11)$$

Während der Anpressungsdruck nahezu im Verhältnis der Wandstärke wächst, ändert sich hiernach die größte Spannung σ_t in diesem Sonderfall nur wenig und erreicht übrigens

mit wachsendem h eigentümlicherweise einen Höchstwert bei etwa $h = 0{,}8\,x_0$. Es ist bemerkenswert, daß die Spannungen vom Werte der Querkürzung ν nicht abhängen. **Die Fliehkraftspannung ist der Schrumpfspannung (algebraisch) beizufügen.**

Beispiel. Eine Trommel von 400 mm innerem — 500 mm äußerem Durchmesser soll auf einen Zapfen aufgeschrumpft werden, den wir mit einer Bohrung von 300 mm lichter Weite versehen. Setzen wir für Flußeisen $E = 2\,200\,000$ kg/qcm, so ergibt sich für verschiedene Annahmen von Δ folgende Zahlentafel:

Radiale Zugabe Δ in mm			0,16	0,2	0,3
„ „ in Tausendstel des Halbmessers			0,8	1,0	1,5
Spannungen	Zapfen, innen	σ_{t1}	— 992	— 1240	— 1860 kg/qcm
	„ Mitte	σ_{t0}	— 755	— 965	— 1450 „
	„ „	σ_{r0}	— 216	— 271	— 406 „
	Trommel, Mitte	σ_{r0}	— 216	— 271	— 406 „
	„ „	σ_{t0}	+ 988	1237	1850 „
	„ außen	σ_{t2}	+ 772	965	1445 „

Von der Fliehkraftspannung abgesehen wäre demnach eine Zugabe von 0,2 mm im Halbmesser oder 0,4 im Durchmesser, d. h. 1 Tausendstel des Innendurchmessers zulässig, und das ist der Betrag, den auch die Praxis nur wenig zu überschreiten pflegt. Allein da die Fliehkraftspannung am Niederdruckende 1000 kg/qcm leicht erreicht und überschreitet, würde die Gesamtspannung rechnungsmäßig auf 2200 und bei 1,5 v. T. Zugabe auf 2850 kg/qcm steigen. Dieser hohe Betrag, zu dem noch die Biegungsspannung des Eigengewichtes, unter Umständen die durch Wellenschwingung hinzutritt, zeigt das Bedenkliche die Schrumpfverbindung an so schwer beanspruchter Stelle. Eine gewisse Ermäßigung entsteht durch das Ineinanderdringen der Unebenheiten der Oberflächen, die indes nicht abschätzbar ist, und nicht bedeutend sein dürfte. Der Grund für das Zulassen der hohen Spannungen wird durch nachfolgende Erörterung klargelegt.

Kann die Schrumpfverbindung bei zu raschem Anwärmen locker werden?

Bei raschem Anwärmen werden die Außenschichten der Trommel heiß, während der Zapfen kalt bleibt, und es ist lediglich eine Frage der Temperaturverhältnisse, ob die Dehnung der Trommel diejenige des Zapfens so weit überholt, daß die Berührung der Schrumpfflächen aufgehoben wird.

Die seitliche Ausbreitung der Wärme und die Verteilung der Temperatur untersuchen wir rechnerisch in Abschn. 198. Hier setzen wir voraus, daß für einen bestimmten Zeitpunkt der Temperaturverlauf gegeben sei, und untersuchen, wie die Spannungen und Dehnungen zu ermitteln sind.

Die für ξ maßgebende Differentialgleichung ist Gl. (10), Absch. 79, die wir für $y =$ konst. in der Form

$$\Phi(\xi, \xi', \xi'') = \xi'' + \frac{\xi'}{x} - \frac{\xi}{x^2} = F(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

schreiben können. Im Falle, daß nur die von der Schrumpfung herstammenden Dehnungen zu untersuchen sind, ist $F(x) = 0$, und wir haben soeben eine Lösung ξ_I und ξ_{II} gefunden, die den Bedingungen $(\sigma_{r1})_I = 0$, $(\sigma_{r2})_{II} = 0$, $(\sigma_{r0})_I = (\sigma_{r0})_{II}$, $(\xi_0)_I + \Delta = (\xi_0)_{II}$ genügt.

Denken wir uns nun als Fall II die Zugabe Δ weggedreht, was bei der Kleinheit von Δ für das folgende zulässig ist, die Zylinder ineinander geschoben, und als einen Körper so erwärmt, daß die betrachtete Temperaturverteilung zustande kommt. Für diesen Fall ist $F(x)$ die rechte Seite der Gl. (10a) Abschn. 79 und Absatz c) desselben Abschnittes liefert uns die Lösung ξ für die Bedingungen $(\sigma_{r1})_I = 0$, $\sigma_{r2II} = 0$, wobei selbstverständlich auch $(\sigma_{r0})_I = (\sigma_{r0})_{II}$ und $(\xi_0)_I = (\xi_0)_{II}$ sind.

Endlich wollen wir als Fall III die vorhin ineinander gesteckten Zylinder, als ein Stück gedacht, unerwärmt in Drehung versetzen; dann bedeutet $F(x) = -Ax$ und die Formeln des Absch. 76 liefern eine Lösung für ξ, die den Bedingungen $(\sigma_{r1})_I = 0$, $(\sigma_{r2})_{II} = 0$ genügen, wobei auch hier selbstverständlich die Beziehungen $(\sigma_{r0})_I = (\sigma_{r0})_{II}$ und $(\xi_0)_I = (\xi_0)_{II}$ erfüllt sind.

Aus der linearen Natur des Ausdruckes $\Phi(\xi, \xi', \xi'')$ folgt, daß die Summe der so gefundenen Lösungen für ξ eine Lösung der Differentialgleichung (12) ist, wenn darin auf der rechten Seite $F(x)$ als Summe der für die drei Einzelfälle geltenden Funktionswerte eingesetzt wird, wie das zu geschehen hätte, wenn wir die Schrumpfung, Erwärmung und Drehung vereinigt untersuchen wollten. **Die Lösung des allgemeinen Falles ist daher die Übereinanderlagerung der Lösungen für die Einzelfälle.** In der Tat überblickt man leicht, daß die Bedingungsgleichungen alle richtig erfüllt werden.

Ergibt nun diese Rechnung, daß im Abstand $x = x_0$ die radiale Gesamtspannung positiv ist, d. h. einen Zug bedeutet, so wird die Berührung wieder aufgehoben, es tritt (zeitweise) eine Lockerung ein.

Beispiel. Wir nehmen an, daß die im vorigen Abschnitt behandelte Trommel nach längerem Betriebsstillstand plötzlich mit scharfem Dampfstrom von 300° Temperatur angewärmt wird, und daß die ältere Konstruktionsart vorliegt, bei der nur die Außenfläche der höheren Temperatur ausgesetzt wird, so daß die Innentemperatur der Einfachheit halber anfangs $=0$ angenommen werden darf.

Weiterhin wollen wir annehmen, daß der Wärmestrom im Innern den gleichen Verlauf nehme wie bei der in Abschn. 198 unter c) behandelten Aufgabe. Wohl ist hier die „Wand" nicht eben, doch stellt sich heraus, daß für den kritischen Spannungszustand die Wärme noch wenig tief eingedrungen ist, daher diese Annäherung um so eher zulässig ist, als wir in der erwähnten Aufgabe angenommen hatten, daß die zweite Endfläche für Wärme undurchdringlich ist, so daß sich dort ein größerer Temperaturstau einstellt, als in Wirklichkeit, wo der Zapfen gegen das Lager hin Wärme ableitet.

Als maßgebend ist also die Temperaturverteilung Abb. 1033 zu betrachten, deren Abszissenwerte für unsere Aufgabe gerade passen, da die Summe der Trommel- und Zapfenwandstärke 10 cm ausmacht.

Die von der Erwärmung herstammende Radialspannung in der Berührungsfläche für $x=x_0$ besitzt gemäß Formel 12, Abschn. 79, nach Einsetzen der Konstanten gemäß der dortigen Gl. (16) mit den Bezeichnungen

$$t_m = \frac{1}{x_2^2 - x_1^2}\int_{x_1^2}^{x_2^2} t\, d(x^2); \qquad t_{m0} = \frac{1}{x_0^2}\int_{x_1}^{x_0} t\, x\, dx,$$

wobei die Verschiedenheit der Grenzen dieser Integrale zu beachten ist, den Wert

$$\sigma_{r0} = E\varepsilon\left[-t_{m0} + \left(1 - \frac{x_1^2}{x_0^2}\right)\frac{t_m}{2}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

Aus Abb. 1033 ist auf graphischem Wege t_m und t_{m0} daraufhin σ_{r0} für die verschiedenen Zeitpunkte des Anwärmens ermittelt und in Abb. 386 aufgetragen worden. Hiernach tritt nach etwa 50 Sekunden ein Höchststand der mittleren Spannung auf, der allgemein den Wert

$$(\sigma_{r0})_{max} = +0{,}985\, t_a \sim \text{rd. } t_a$$

besitzt, wenn t_a die Temperatur der Außenschicht bedeutet, und es ist nun leicht anzugeben, ob und wann eine Trennung der Schrumpfverbindung eintritt. Sehen wir von der Drehung ab, da beim Vor-

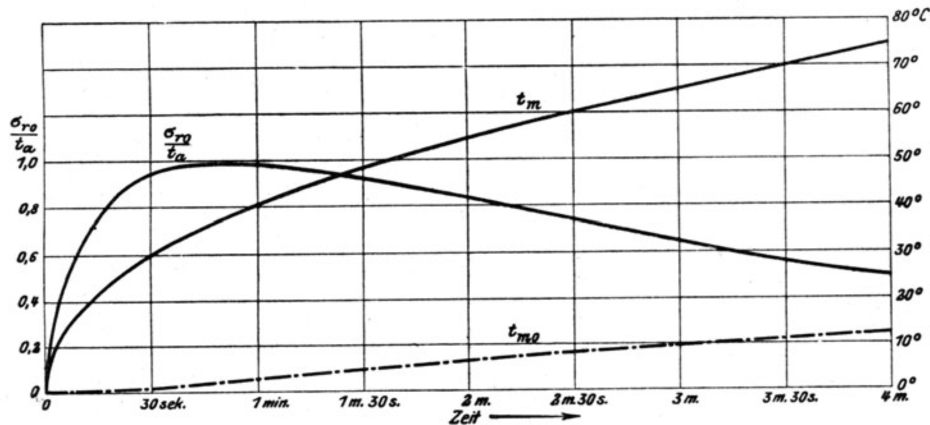


Abb. 386. Zugspannungen in der Schrumpffuge.

wärmen die Umlaufzahl nur allmählich gesteigert wird, so stellt sich bei 0,16 mm Zugabe und 300° Anfangstemperatur nach etwa 12 Sekunden die Spannung $\sigma_{r0} = 216$ kg/qcm ein; da aber nach unserer Tabelle die Schrumpfung gerade den Druck von 216 kg/qcm in der Berührungsfläche erzeugt hat, so tritt schon nach diesen 12 Sekunden eine Lockerung ein.

Bei 0,2 mm Zugabe ist die kritische Spannung 271 kg/qcm, und es beträgt diese Zeitdauer etwa 23 Sekunden. Bliebe die Wärmeströmung unverändert, so würde die Lockerung etwa 90 Sekunden andauern, bis wieder der Wert von σ_{r0} auf den Schrumpfungsbetrag gesunken ist, — in Wahrheit viel länger, da der Wärmeübergang durch die entstehende Fuge gehemmt wäre. Weiter erkennen wir, daß **bei 0,2 mm, d. h. einer Zugabe von einem Tausendstel des Durchmessers schon eine Anfangstemperatur von 275° C genügt, um eine Lockerung hervorzurufen.**

Man kann hieraus ermessen, welche Gefahren durch rasches Anwärmen bei der alten Methode der Befestigung heraufbeschworen werden konnten. In der Tat wurde in Fachschriften wiederholt von eingetretenen Lockerungen berichtet. Es wird auch verständlich, daß man in gewissen Zentralen die Turbinen lieber 24 Stunden lang durchlaufen ließ, als sie abzustellen und wieder anzuwärmen, weil sie, wie mir von glaubwürdiger Seite mitgeteilt wurde, jedesmal die Auswuchtung verloren. Dies führte alsbald zu der verbesserten Befestigung, bei der auch die Innenfläche des Zapfens durch Dampf von hoher Temperatur bestrichen wird, siehe Abb. 384 oben, so daß sich der Zapfen von Anfang an ausdehnen muß und der Lockerung wirksam entgegenarbeitet.

Neue Ausführungsarten.

Die radikale Abhilfe gegen die Gefahr der Lockerung ist die Herstellung der Spindel in einem Stück. In Abb. 387 ist eine Ausführung dieser Art von Willans und Robinson dargestellt. Der Verschluß des Niederdruckendes, dessen Erwärmung, die gefährlich werden kann, erfolgt nach wie vor durch Schrumpfung, doch werden in Schlitze eingelegte Schrauben in größerer Zahl zur Unterstützung angewendet, wobei man die Bolzen in der Mutter vernietet.

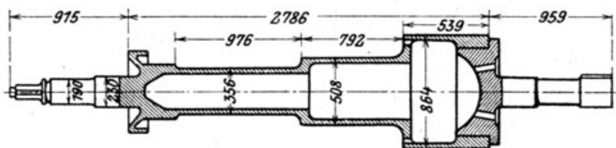


Abb. 387. Trommel mit der Hochdruckwelle in einem Stück geschmiedet.

F. Tosi (Abb. 384 oben) verbessert wie erwähnt, bei großen Turbinen die Parsonssche Schrumpfverbindung dadurch, daß einerseits der Wellenzapfen nach dem Einfügen verdreht und durch Bayonettverschluß sehr

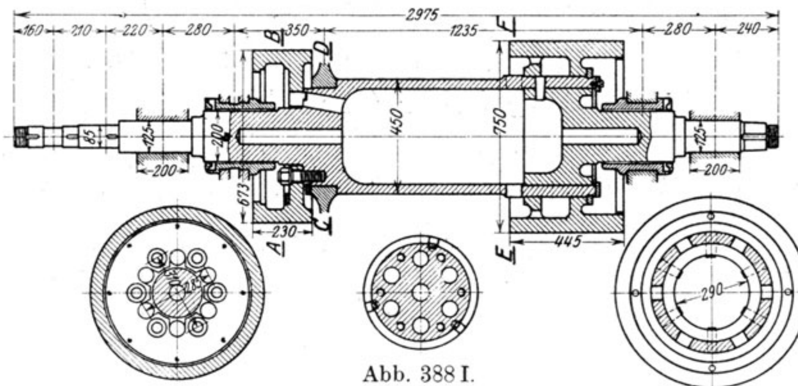


Abb. 388 I.

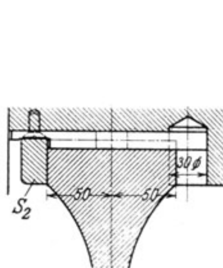


Abb. 388 II.

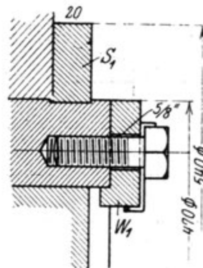


Abb. 388 III.
Doppeltrommel.

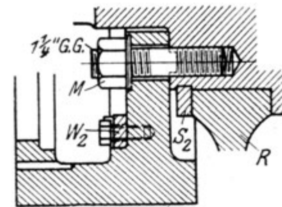


Abb. 388 IV.

sicher festgehalten wird, anderseits Frischdampf durch Bohrungen in das Innere des Zapfenhohlraumes dringt und diesen von innen erwärmt. Als Abfluß ist eine Verbindung zum Labyrinthkolben vorgesehen.

Brown Boveri & Cie. führen am Hochdruckende die Welle und Trommel grundsätzlich als ein Stück aus. Am Niederdruckende wird gemäß Abb. 388 eine doppelte Schrumpfung zugelassen, wobei der Zapfen gegen die Trommel und diese gegen den Ring je 1,2 v. T. Schrumpfzugabe erhalten. Die Trommel wird zur Sicherheit gegen Verschiebung durch 6 konische Stifte gehalten; der Außenmantel ist durch Einlegen des Schrumpfringes S_1 in eine 1,5 mm tiefe Nute gesichert. In gleicher Weise dient am vorderen Ende Schrumpfring S_2 zur Sicherung des Curtisrades R, das seiner-

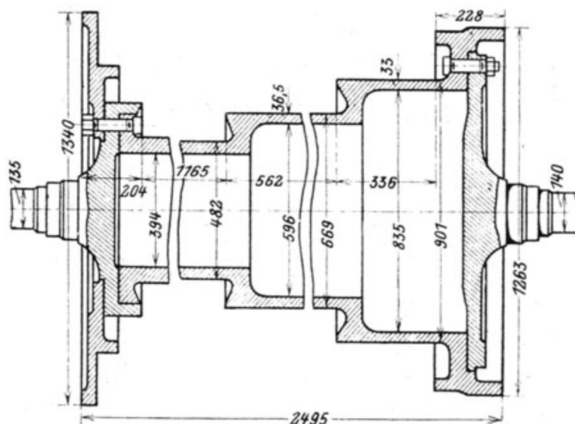


Abb. 389. Verschraubte Trommel.

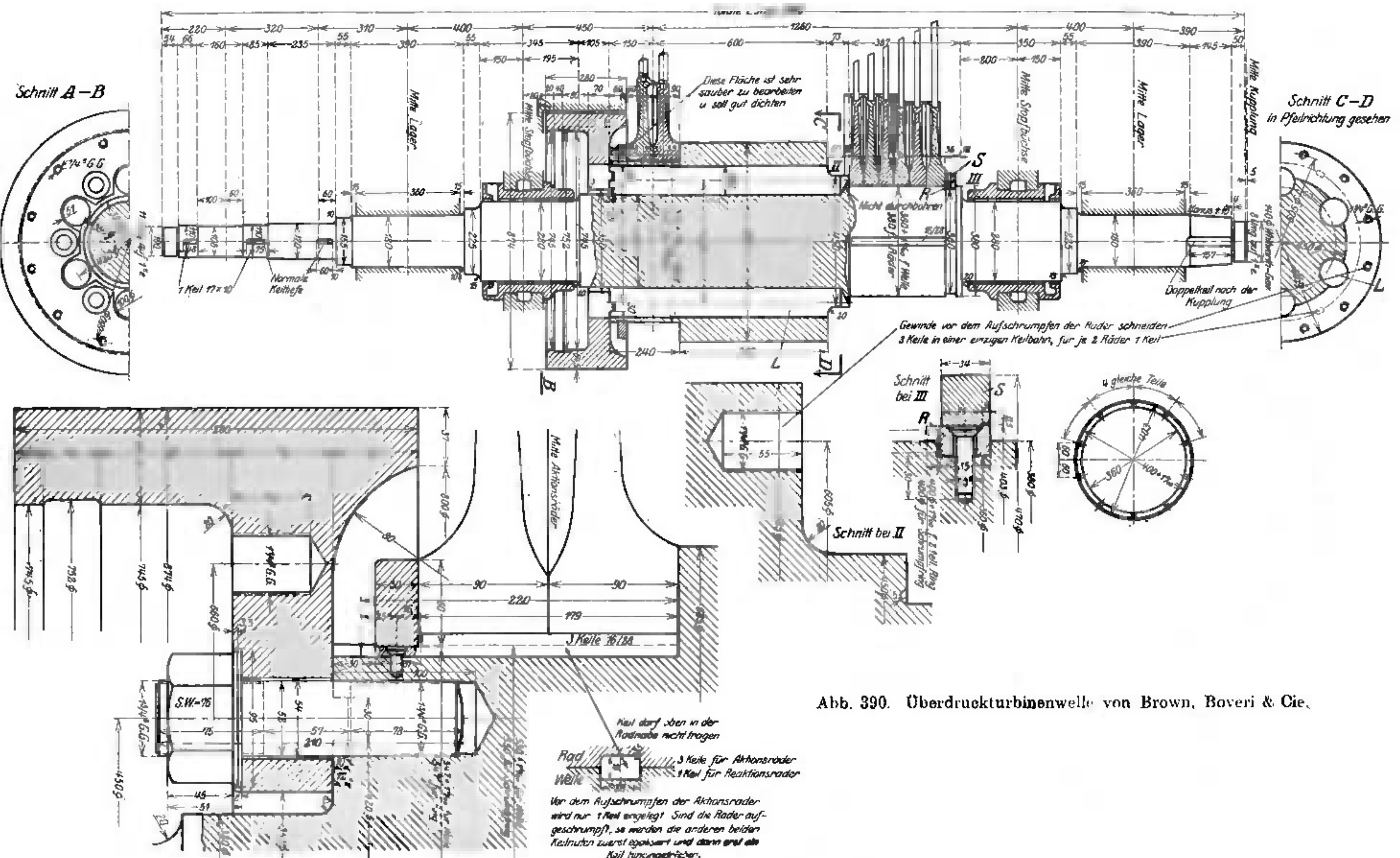


Abb. 390. Überdruckturbinenwelle von Brown, Boveri & Cie.

seits mit 1,0 v. T. (neuerdings bis 1,4 v. T.) Zugabe aufgeschrumpft wird. W_1 W_2 sind für das Auswuchten vorgesehene Gewichte. Die Befestigungsmuttern *M* erhalten einen zylindrischen Ansatz und werden durch Umnietung des Lochrandes über diesen Ansatz gesichert (vergl. Abb. 390 links unten).

Manche Konstrukteure ersetzen die Schrumpfung durch möglichst zuverlässig ausgebildete Verschraubungen. So die Brush Elektr. Eng. Co. nach Abb. 389. Man vergleiche auch die Welle der Thyssen-Röder-Turbine, Abschn. 120.

Am sichersten wird wohl die Ausführung in einem Stück sein, wie die Welle Abb. 390 von Brown Roveri & Co., bei der die sonst erforderliche Trommel im Mittelteil durch ein massives, zum Zwecke der Erleichterung mit Bohrungen *L* versehenes Stück ersetzt wird. Die Bohrungen dienen zugleich zum Druckausgleich. Am Niederdruckende sind 6 Überdruckräder mit je 1 v. T. Zugabe aufgeschrumpft, und an axialer Verschiebung durch den zweiteiligen Ring *R* verhindert, der durch Schrumpfring *S* zusammengehalten wird.

Die unvergleichlich schwierigere Ausführung der gewaltigen Schiffsturbinentrommeln, die bereits nahezu 4 m Durchm. erreicht haben, beschreiben wir in den Abschn. 135 u. f.

84a. Baustoffe und Beanspruchungen.

Bei Umfangsgeschwindigkeiten unter 200 m werden die Laufscheiben meist in Siemens-Martinstahl gewöhnlicher oder veredelter Art ausgeführt. Darüber hinaus muß man zu Sonderstählen, insbesondere zu Nickel- und Chromnickelstählen Zuflucht nehmen, da andernfalls die Scheiben an der Nabe zu große Abmessungen erhalten, also zu schwer würden. Über die Festigkeitseigenschaften dieser Stahlarten gibt die nachfolgende Zahlentafel, die ich der Firma Fried. Krupp A.-G. verdanke, Auskunft.

Zahlentafel 1.

Nr.		Festigkeit in kg/qmm	Streckgrenze in kg/qmm	Dehnung v. H.
1	Martin-Sonderstahl, Nr. 12	52—60	30	18
2	Martinflußeisen I „ 9	40—47	22	22
3	„ II „ 9	45—52	25	20
4	Spezial-Martinstahl (mit besonderer Wärmebehandlung)	60—70	35	18
5	Mittelprozentiger Nickelstahl . . .	62—70	38	18
6	Hochfester Nickelchromstahl I . .	60	42	18
7	„ „ II . .	70	50	15
8	Chromnickelstahl	75	60	13
9	Spezial-Manganstahl $C_{46}O$	70	45	15

Die unter Nr. 1 bis 3, 5 bis 7 angeführten Ziffern entsprechen den Materialvorschriften der Deutschen Kriegsmarine vom Jahre 1915. Bei den Turbinenlaufrädern wird von den Hüttenwerken besondere Sorgfalt darauf verwendet, sie vor und nach der ersten Bearbeitung durch Glühen bei genau festgesetzten Temperaturen vollkommen spannungsfrei zu machen. Für Turbinentrommeln verwendet man Martinflußeisen folgender Beschaffenheit:

	Festigkeit in kg/qmm	Streckgrenze in kg qmm	Dehnung v. H.
Martin Flußeisen	40—47	22	22
Spezial-Martinstahl	52—60	32	18

Weiterhin teilte mir Krupp schon vor längerem mit, daß es allerdings Nickelstahl mit noch höherer Festigkeit, natürlich bei entsprechend geringerer Dehnung, gebe, und daß man bei Schmiedestücken von geringeren Abmessungen sogar Festigkeiten von über 200 kg/qmm und über 160 kg/qmm an der Elastizitätsgrenze erreichen kann. Unter andern wurden folgende Zahlen festgestellt:

Zerreißfestigkeit kg/qmm	Dehnung v. H.	Elastizitätsgrenze kg/qmm	
180	7,0	96	100 mm Meßlänge und 12 mm Stabdurchmesser.
178	5,5	108	
177	6,0	148	
182	4,1	160	
149	6,8	132	
219	?[1]	150	

Der Turbinenbau ist auf die Verwendung so harten Nickelstahles indes mit Recht nicht eingetreten.

Die Beanspruchung ist bei Scheiben, soweit die volle Fleischstärke in Betracht kommt, im allgemeinen am größten in der Innenfaser der Nabenbohrung. Es dürfte am zweckmäßigsten sein, sie in Bruchteilen der Streckgrenze anzusetzen; man findet die Werte

0,25 bis 0,40 $\times$ Streckgrenze

für die normale Geschwindigkeit. Sind Ventilationslöcher vorhanden, so bildet die nach den Formeln von Kirsch gerechnete Spannung meist den Höchstwert. Man findet die Werte

0,35 bis 0,60 $\times$ Streckgrenze.

Die Wahl der Beanspruchung wird wesentlich durch die Geschwindigkeit des „Ausschleuderns", die mit einer um mindestens 15 v. H. und bis um 50 v. H. über der normalen liegenden Drehzahl erfolgt, beeinflußt. Die Erhöhung bis auf 50 v. H. Übergeschwindigkeit ist, insbesondere für die Dynamoanker und für die Laufräder der Kreiselverdichter von der Allgemeinen Elektrizitätsgesellschaft eingeführt worden. Die Beanspruchung steigt auf das 2,25fache der normalen und es wird als unvermeidlich betrachtet, daß hierbei die Streckgrenze nahezu erreicht oder sogar überschritten wird. Insbesondere die Beanspruchung in den zahlreichen Nietlöchern der Kreiselverdichterräder übertrifft die Streckgrenze ganz erheblich, so daß ein Fließen des Baustoffes stattfindet mit gegenüber dem elastischen Verhalten gänzlich veränderter Spannungsverteilung. Wie wir in Abschn. 183 nachweisen, erstreckt sich jenes Fließen auf einen verhältnismäßig geringen Teil vom Lochrande aus gemessen. Diese Überbeanspruchung ist zu einem Teil die Veranlassung geworden, daß die meisten großen Turbinenbauanstalten eine fortlaufende Prüfung der Baustoffeigenschaften an den fertigen Stücken eingeführt haben. Zu diesem Behufe wird die Nabenbohrung um so viel kleiner angegeben, daß aus der Nabe durch Ausdrehen des Überschusses Probestücke hergestellt werden können. Da an der Nabe die Durchschmiedung die mindest vollkommene ist, so kann jenen Ergebnissen wohl getraut werden. Bei vorzüglichen und hochwertigen Baustoffen, wo die Streckgrenze etwa 80 v. H. der Bruchfestigkeit nicht überschreitet und eine Dehnung von mindestens 10 bis 15 v. H. vorhanden ist, ist man mit der normalen Beanspruchung bis auf 0,45 bis 0,5 der Streckgrenze gegangen. Es versteht sich von selbst, daß die bleibenden Dehnungen, die beim Ausschleudern mit hohen Übergeschwindigkeiten auftreten, durch genaues Ausmessen der Scheiben vor und nach dem Ausschleudern fe tzustellen sind, um allenfalls unzulässig stark gedehnte Räder ausscheiden zu können. Auch ist klar, daß die Fertigbearbeitung, insbesondere der Nabenbohrung erst nach dem Ausschleudern erfolgen kann. Da insbesondere die Kreiselverdichterräder im fertig zusammengebauten Zustande ausgeschleudert werden, so findet bei der Überschreitung der Streckgrenze ganz sicher bis zu einem gewissen Grade eine Lockerung der (meist auf kaltem Wege hergestellten) Vernietung statt. Wenn auch das Fließen an sich unschädlich ist, so frägt es sich doch, ob vom Standpunkt des Abnehmers, wie von dem des Konstrukteurs die Überzeugung, daß die Räder die erwähnten Geschwindigkeiten „ausgehalten haben", den Nachteil der allgemeinen Lockerung der Nietung aufwiegen kann. Die Möglichkeit für das Auftreten von feinen Haarrissen ist zweifelsohne in erhöhtem Maße gegeben, wenn das Material an so vielen Stellen ins Fließen gekommen ist. Es muß weiterer Erfahrung und Erprobung im großen vorbehalten bleiben, in dieser Hinsicht den richtigen Mittelweg ausfindig zu machen.

---

[1]) Dehnung wurde nicht gemessen, weil der Stab in der Körnermarke dicht am Kopfe brach.

85. Die Kupplung zwischen Turbine und Dynamo.

Diese Kupplung wird entweder fest oder beweglich konstruiert. Im ersten Fall kann ein Lager gespart werden, es besteht aber die Gefahr, daß bei unvollkommener Auswuchtung eines Teiles die Erschütterung sich auf den zweiten Teil überträgt und das Auffinden des Fehlers erschwert. An die beweglichen Kupplungen muß die Forderung gestellt werden, daß sie gegenüber Richtungsverschiedenheiten und Höhenverschiebungen der Wellen Nachgiebigkeit besitzen sollen. Man erreicht dieses Ziel durch Verwendung elastischer Übertragungsteile (Leder, Stahldrähte) oder Zahnkupplungen mit kleinem Spiel. Die Zahnkupplung wirkt grundsätzlich wie ein sog. Hooksches Gelenk, und bei diesem

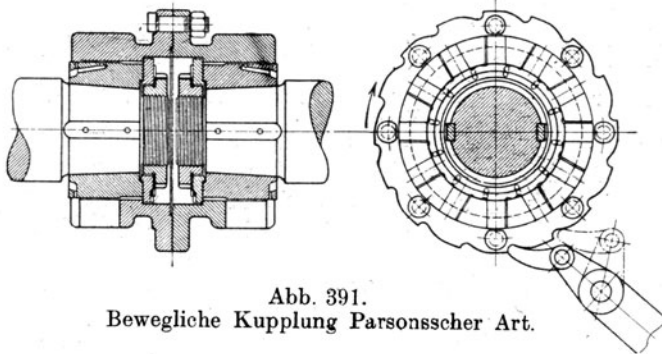


Abb. 391.
Bewegliche Kupplung Parsonsscher Art.

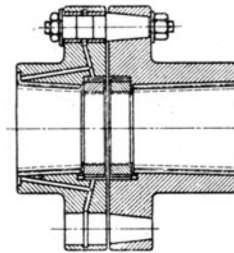


Abb. 391a. Bewegliche Kupplung mit Bolzen in Bronzebüchsen.

ist, sofern die Wellen einen Winkel bilden, das Übersetzungsverhältnis, wie bekannt, veränderlich. Außerdem wird ein periodisches biegendes Moment übertragen, wie man leicht einsieht, wenn man sich den Winkel, den die Wellen bilden, groß denkt und die Hauptstellungen betrachtet, wo die Gabeln wage- bzw. senkrecht stehen. Allerdings ist die praktisch bei noch so ungenauer Aufstellung mögliche Schiefstellung sehr klein; trotzdem sind schlecht ausgeführte Kupplungen schon Quellen großer Anstände gewesen.

Die festen Kupplungen bestehen entweder aus angeschmiedeten Flanschen, oder sie werden auf das kegelig abgedrehte Wellenende aufgepreßt und durch Muttern festgehalten.

Unter den beweglichen Kupplungen hat diejenige von Parsons die meiste Verbreitung erlangt. Sie besteht nach Abb. 391 in der Ausführung von Brown Boveri & Co. aus zwei festen mit Klauen versehenen Naben, die durch ein gemeinsames Hohlstück ver-

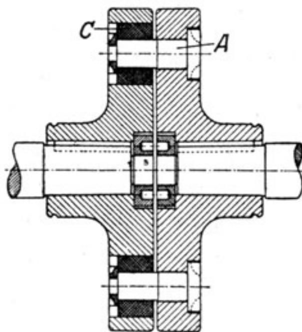


Abb. 391b. Elastische Kupplung mit Kautschukfederung.

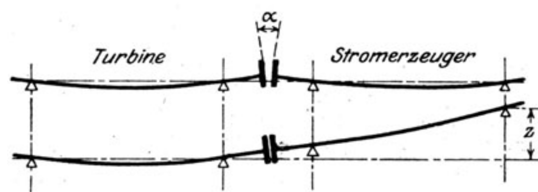


Abb. 392. Wellenausrichtung mit biegungsfreier fester Kupplung.

bunden sind. Die Zweiteilung des letztern erlaubt, indem man in den Klauen entsprechendes axiales Spiel vorsieht, leichten Ausbau der Wellen nach dem Auseinanderschrauben. Die Mittelflansche ist, wie in dem Seitenbild dargestellt, als Schaltzahnkranz ausgebildet zum Zwecke des Andrehens der Turbine mittels Handhebel.

Eine ebenfalls nachgiebige Ausführung ist die „Bolzenkupplung“ Abb. 391a der Gutehoffnungshütte. Die eine Kupplungshälfte trägt eine Anzahl mittels Konus zuverlässig befestigter Bolzen, die andere ist mit Bronzebüchsen ausgestattet, die gegen die Kupplungsbohrung und gegen den Bolzen Spiel haben. Das durch Bohrungen zugeführte Schmieröl füllt den Zwischenraum aus und wirkt bei Lagenänderungen des Bolzens als Bremsmittel.

Als „elastisch“ kann man die **Kupplung** von de Laval, Abb. 391b, bezeichnen, da die Kraft von den eingewindeten **Bolzen** A auf **Kautschukringe** C, die in entsprechend weiten Bohrungen der zweiten **Kupplungshälfte** untergebracht sind, übergetragen wird.

Richtet man bei Stützung in je zwei Lagern die Lagermitten genau in eine Wagerechte aus, so werden, wie Abb. 392 zeigt, infolge der Durchbiegung der Wellen die Kupplungsflanschen klaffen. Bei beweglichen Kupplungen ist α der Winkel, der durch die Kreuzgelenkwirkung auszugleichen ist. Bei festen Kupplungen wird vielfach etwa die Stromerzeugerwelle schief aufgestellt, so daß die Kupplungsflanschen ohne Zwang aufeinanderpassen und auch im Betrieb keine Biegung durch die Kupplung übertragen wird, die bei nicht angeschmiedeten Flanschen leicht zu einer Lockerung führen könnte. Man muß dann, wie die untere Skizze in Abb. 392 veranschaulicht, mit Erhebungen z des äußeren Lagers bis zu 4 mm rechnen, falls die kritischen Drehzahlen tief liegen.

86. Der Massenausgleich rasch umlaufender starrer Körper.

Neben genügender Festigkeit ist bei der Konstruktion und Ausführung der Turbinentrommeln und -räder vor allem auf die Abwesenheit von Erschütterungen zu sehen. Die Größe der hier drohenden Gefahr geht z. B. aus der Angabe hervor, daß bei einem Lavalschen Rade von 760 mm Durchmesser und 420 m/sek Umfangsgeschwindigkeit ein

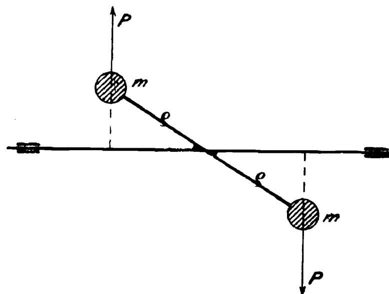


Abb. 393.
Erschütterung trotz in der Achse liegendem Schwerpunkt.

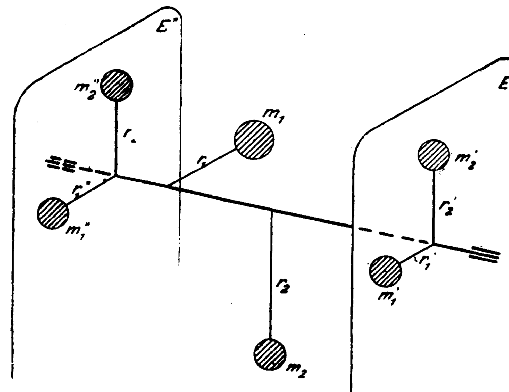


Abb. 393 a.
Auswuchtung durch Zusatzmassen in zwei Ebenen.

am Umfange vorhandenes Übergewicht von 0,1 kg eine Fliehkraft von nahezu 5000 kg erzeugt. Es muß deshalb durch nachträglich angebrachte Zusatzgewichte oder das sog. „Auswuchten“ eine derartige Verteilung der Massen um die Drehachse angestrebt werden, daß die Fliehkräfte sich so vollkommen als nur erreichbar das Gleichgewicht halten.

Selbst falls man die Drehachse als starr ansehen darf, ist für den vollständigen Massenausgleich keineswegs hinreichend, daß der Schwerpunkt aller Massen in die Achse falle. Gegenüber noch immer vielfach vorhandenen Mißverständnissen verweisen wir auf Abb. 393. Der Schwerpunkt der beiden gleich großen und in gleichen Abständen befindlichen Massen m fällt wohl in die Achse, ihre Fliehkräfte aber gleichen sich nicht aus, sondern bilden ein Moment und rufen in den Lagern Gegendrücke hervor. Es muß daher die Bedingung hinzugefügt werden, daß auch die Momente der Zentrifugalkräfte verschwinden müssen.

Wäre die Lage der „Überwucht“ im umlaufenden Körper (Abb. 393a) genau bekannt, z. B. durch m_1 und m_2 darstellbar, so ließe sich vollkommener Ausgleich erreichen, indem man in zwei Hilfsebenen E' und E'' Zusatzmassen unterbringt. Die Wirkung der Masse m_1, am Halbmesser r_1, wird durch die Zusatzmassen m_1' und m_1'' an den Halbmessern r_1', r_1'' ausgeglichen, falls $r_1\, r_1'\, r_1''$ in derselben Ebene liegen, und die Fliehkräfte von m_1, m_1', m_1'' sich das Gleichgewicht halten. Es müssen mithin die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} m_1\, r_1\, \omega^2 &= m_1'\, r_1'\, \omega^2 + m_1''\, r_1''\, \omega^2 \\ m_1'\, r_1'\, \omega^2\, a_1' &= m_1''\, r_1''\, \omega^2\, a_1'' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

erfüllt sein, wo $a_1' \, a_1''$ die Abstände der Ebenen $E' \, E''$ von m_1 bedeuten. Diese Forderung wird insbesondere befriedigt, falls man

$$m_1 = m_1' = m_1'' \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

wählt und die Halbmesser aus den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= r_1' + r_1'' \\ r_1' a_1' &= r_1'' a_1'' \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

bestimmt; was nichts anderes besagt, als daß die Halbmesser $r_1' \, r_1''$, in deren Endpunkten die mit m_1 gleich großen Zusatzmassen untergebracht sind, als Kräfte betrachtet mit r_1 im Gleichgewicht sein müssen. Ebenso verfahren wir mit m_2 und weiteren etwa vorhandenen Überwuchtmassen. Die Einzelmassen $m_1' \, m_2' \ldots m_k' \ldots$ in E', ebenso $m_1'', m_2'' \ldots$ in E'' werden je durch eine in ihrem gemeinsamen Schwerpunkte angebrachte Masse, deren Größe gleich ihrer Gesamtsumme ist, ersetzt.

Obwohl dies Verfahren wegen Unkenntnis der Lage der Überwuchtmassen nicht ohne weiteres durchführbar ist, verdient doch das Ergebnis die Beachtung des Konstrukteurs, **daß bei starrer Drehachse durch Hinzufügen von zwei geeigneten Zusatzmassen in zwei sonst willkürlichen zur Achse senkrechten Ebenen vollkommener Massenausgleich erzielt werden kann.**

Für das Ausfindigmachen der Lage und Größe der Überwuchtmassen bietet uns die theoretische Mechanik Hilfsmittel dar, die darauf hinauslaufen, z. B. durch Pendelversuche die Trägheitsmomente und aus diesen durch Rechnung die sog. Zentrifugalmomente zu bestimmen. Es darf indessen als nahezu sicher angesehen werden, daß bei den hier in Frage kommenden schweren Maschinenteilen diese Methoden keine hinreichend genauen Ergebnisse liefern würden.

Bedeutend mehr Erfolg hat das in der Praxis fest eingebürgerte „dynamische Auswuchten", das darin besteht, daß man die Trommeln, nachdem ihr Schwerpunkt mittels Zusatzmassen auf die gewohnte Art in die Drehachse versetzt worden ist, durch senkrecht geführte Riemen in Lagern, die auf Rollen wagerecht verschieblich sind, in Drehung versetzt. Die Trommel führt hierbei Schwingungen um eine lotrechte Achse aus, so daß die Stelle größten Anschlages durch Ankreiden bezeichnet und auf die Lage der Überwuchtmassen geschlossen werden kann. Man hat die Empfindlichkeit des Verfahrens dadurch zu erhöhen verstanden, daß man auf die Lager je zwei wagerechte einander gegenüberstehende Federn wirken läßt, die in der Mittellage des Lagers im Gleichgewichte stehen, bei einer Verschiebung hingegen eine gegen die Mittellage gerichtete Kraft ausüben. Auch das einfache Unterschieben von weichen Kautschukklötzen unter die Lager genügt.

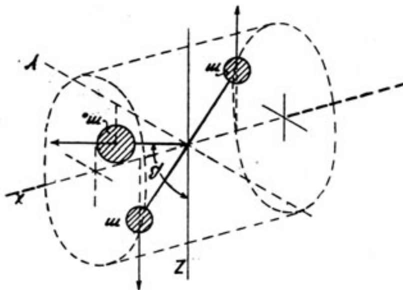


Abb. 394.
Freie Fliehkraft und freies Moment.

Erreicht die Umlaufzahl die Höhe der Eigenschwingung des aus Trommel und Federn bestehenden Systems, so tritt die „Resonanz" ein, d. h. die Schwingung wird bis zu einem durch die Luftreibung u. a. bedingten Maße vergrößert, so daß schon sehr kleine Fehlermassen hinreichen, um sichtbare Ausschläge zu geben. Diese Vorgänge werden unten durch Rechnung näher untersucht. Die Praxis zieht mit Recht den Weg des Probierens vor.

Bei diesem versuchsweisen Vorgehen dürfte es zweckmäßig sein, sich vor Augen zu halten, daß man die Wirkung einer freien Fliehkraft und eines Momentes auszugleichen hat. Man darf sich die nicht ausgeglichenen Massen durch Abb. 394 veranschaulichen, wo von m_0 die freie Fliehkraft und von den beiden gleich großen Massen m des Moment geliefert wird. Die Ebene der m kann zufällig mit der von m_0 zusammenfallen, im allgemeinen tut sie das nicht. Man bestimmt auf gewöhnliche Weise das Gegengewicht zu m_0. Hierauf sollte mit zwei weiteren, aber gleich großen Massen m', die bezüglich des Schwerpunktes zentrisch symmetrisch in den Stirnebenen der Trommel unterzubringen sind, der Versuch gemacht werden, das Moment der Massen m aufzuheben, wobei man sowohl die Größe wie die Lage von m' variiert, bis durch Laufenlassen der Trommel nachgewiesen ist, daß der Ausgleich gelang. Man pflegt die Ausgleichsmassen in

zwei Ringnuten zu befestigen, um eine Nachstellung bei einer durch Erschütterung nachträglich nicht selten verursachten Verschiebung des Schwerpunktes, insbesondere bei Dynamoankern, zu ermöglichen.

Der Arbeitsgang bei der Benützung einer Ausgleichvorrichtung mit Federn ist nach Mitteilungen der Allgem. Elektr.-Gesellsch. Berlin und des Herrn Ing. Beyer von Manchester der folgende: Nachdem die gewöhnliche Auswuchtung (die „statische", wie die Praktiker zu sagen pflegen) erledigt ist, wird die Trommel zum „dynamischen" Ausgleich auf die Vorrichtung gebracht und die Umlaufzahl bis zur Resonanz gesteigert. An jedem Ende wird durch Anlegen z. B. eines Rotstiftes die Stelle größter Auslenkung bezeichnet. Diese Stelle pflegt um rund 90° hinter dem Ort, wo sich die Überwucht befindet, zurückzubleiben. Zur größeren Sicherheit läßt man die Trommel hierauf rückwärts laufen und bezeichnet die schlagende Stelle abermals. Die an jedem Ende notwendigen Gegengewichte müssen dann in der Halbierungsebene des durch die beiden Marken bestimmten Winkels liegen, den Marken jeweils (mit Bezug auf den Drehungssinn) nacheilend.

Erwähnung verdient, daß nach einer Mitteilung von W. H. Martin, Engg. 1920, II, S. 865, die rein statische Auswuchtung sehr erfolgreich zu sein vermag, wenn sie wirklich sorgfältig ausgeführt wird. Die übliche Lagerung des Läufers auf wagerechten Linealen sei bei großem Gewicht wegen der verhältnismäßig bedeutenden rollenden Reibung zu ungenau. Martin stützt den Läufer einerseits am Ende eines äußerst empfindlichen Wagebalkens, anderseits in einem Kugelgelenk. Man verdreht den Läufer je um einen bestimmten kleinen Winkel (z. B 30°) und ermittelt in jeder Stellung das Gewicht. Entsprechend der Kreisbahn, die die Überwuchtmasse beschreibt, ergibt sich eine um den mittleren Auflagerdruck sinusförmig schwankende Linie, aus der sowohl die Größe wie die Lage des anzubringenden Gegengewichtes ermittelt werden. Immerhin gibt auch Martin die Notwendigkeit des dynamischen Auswuchtens in besonderen Fällen zu.

Theorie der Federausgleichvorrichtung.

In Abb. 395 sei an der auszuwuchtenden Trommel die Überwucht durch die beiden gleich großen, gleich weit abstehenden Massen m dargestellt, die selbstverständlich als sehr klein vorausgesetzt werden. In den Lagerstellen B_1 B_2 wirkt einer Auslenkung ξ die Federkraft $P = a\xi$ entgegen[1]).

Die von m ausgeübte Fliehkraft $mr\omega^2$ zerlegen wir in wage- und lotrechte Komponenten, welch letztere durch die Lager unmittelbar aufgehoben werden, während die wagerechten ein Moment

$$\mathfrak{M}_h = mr\omega^2 b \cos\psi$$

ergeben. Durch dieses Moment wird die Trommelachse um den Winkel φ schief gestellt, wobei angenommen sei, daß der Schwerpunkt in der Mitte der Lagerentfernung liegt, so daß die Verschiebung in jedem Lager den Betrag $\xi = c\varphi$ ausmacht. Hiernach wirken die Federn mit einem Momente

$$\mathfrak{M}_p = 2Pc = 2ac^2\varphi$$

zurück, zu dem noch das Moment der Luftreibung $\mathfrak{M}_R$ (indes nur soweit diese durch die horizontale Schwingung verursacht wird) hinzutritt, das der Einfachheit halber der Schwingungsgeschwindigkeit $d\varphi : dt$ proportional gesetzt werde:

$$\mathfrak{M}_R = R\frac{d\varphi}{dt}.$$

Das Trägheitsmoment der Trommel (mit Ausschluß der Überwucht) bezogen auf die durch S gehende Lotrechte, $= \Theta$, bleibt für alle Winkel ψ gleich, und so darf man mit Vernachlässigung von m die Bewegungsgleichung in der Form

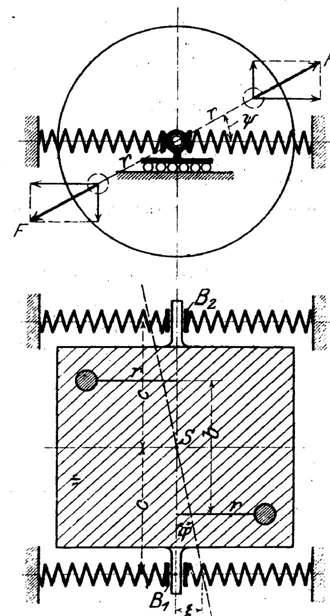


Abb. 395. Auswuchtvorrichtung mit federnden Lagern.

$$\Theta\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \mathfrak{M}_h - \mathfrak{M}_p - \mathfrak{M}_R,$$

oder

$$\Theta\frac{d^2\varphi}{dt^2} + R\frac{d\varphi}{dt} + 2ac^2\varphi = mbr\omega^2\cos\psi \quad (4)$$

ansetzen. Ebenso ist es gestattet, ψ angenähert als mit unveränderter Winkelgeschwindigkeit ω be-

[1]) Wobei augenscheinlich die Wirkung doppelt so groß ist, als wenn bloß eine (ungespannte) Feder vorhanden wäre, d. h. wenn für eine Feder allein die Kraft P' mit der Auslenkung ξ' durch die Gleichung $P' = a'\xi'$ zusammenhängt, so ist $a = 2a'$ und innerhalb der Elastizitätsgrenze ist a unabhängig von der anfänglichen Spannung der Feder.

schrieben anzusehen, so daß $\psi = \omega t$ wird. Die Auflösung von Gl. (4) wird in bekannter Weise gewonnen, indem man

$$\varphi = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + u$$

setzt, worin $C_1 C_2$ Festwerte, u eine Funktion der Zeit sind. Letztere ist die „Eigenschwingung", und verschwindet sehr bald, d. h. wird auf Null „abgedämpft", weil Exponentialglieder mit negativen Zeitexponenten vorkommen. Es genügt also, die Größen $C_1 C_2$ durch unmittelbares Einsetzen zu bestimmen, und man findet

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= -\frac{A(\Theta\omega^2 - B)\,\omega^2}{(\Theta\omega^2 - B)^2 + R^2\omega^2} \\ C_2 &= \frac{A R \omega^3}{(\Theta\omega^2 - B)^2 + R^2\omega^2} \end{aligned}\right\} \text{ mit den Bezeichnungen } A = mbr; \quad B = 2ac^2 \quad \ldots \quad (4\text{a})$$

Der Wert von φ kann vereinfacht

$$\varphi = C \cos(\omega t - \alpha) \quad \ldots \quad (4\text{b})$$

geschrieben werden, wenn man

$$C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \text{ und } \operatorname{tg}\alpha = \frac{C_2}{C_1} \quad \ldots \quad (4\text{c})$$

setzt. Formel (4b) verdient wegen ihrer universellen Bedeutung für Schwingungsvorgänge aller Art eine Besprechung im einzelnen.

Betrachten wir erstens die **reibungslose Bewegung**, d. h. setzen wir $R = 0$ aber in der Meinung, daß noch ein ungemein kleiner Betrag an Reibung vorhanden sei, der die nicht „synchronen" Schwingungen der Trommel abdämpft, dann ist auch $C_2 = 0$, $\alpha = 0$, und die Schwingung wird durch Gleichung

$$\varphi = C_1 \cos \omega t = -\frac{A\omega^2}{\Theta\omega^2 - B}\cos\omega t \quad \ldots \quad (5)$$

dargestellt. Wird eine Winkelgeschwindigkeit ω_0 gewählt, die den Nenner zu Null macht, d. h. der Gleichung

$$\Theta\omega_0^2 - B = 0 \quad \ldots \quad (5\text{a})$$

entspricht, so erhält man für φ unendlich große Werte. Dies ist der Fall der **„Resonanz"**, bei der die Umlaufzahl mit der Zahl der Eigenschwingung unseres Systems übereinstimmt (in der Tat ist die Gleichung der Eigenschwingung $\Theta \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -B\varphi$, durch die unsere Behauptung leicht bewahrheitet wird). Diese Eigenschwingung erhält bei jeder Umdrehung durch die Fliehkraft der Überwuchtmassen neue Impulse, so daß die Schwingungsweite (theoretisch) ins Unendliche zunimmt. B ist ein Maß für die Härte der Feder: je größer B, um so größer die Kraft, die zur Kürzung der Feder um einen bestimmten Betrag gehört, desto härter ist die letztere. Haben wir eine unter der Resonanz liegende Umlaufzahl, so ist $\Theta\omega^2 - B < 0$ und

$$\varphi = +C \cos \omega t\,,$$

wenn mit C die „Amplitude" in Formel (5) bezeichnet wird. Hier erreicht φ bei $t = 0$, d. h. $\psi = 0$, den Höchstwert; zur gleichen Zeit befindet sich aber die in Abb. 395 rechts dargestellte Masse m in der äußersten Lage rechts, oder mit einer Bezeichnung der Elektrotechnik: die Projektion der Überwuchtmasse und das ihr zunächst gelegene Lager bewegen sich „phasengleich."

Ist ein anderes Mal $\Theta\omega^2 - B > 0$, d. h. befinden wir uns über der Resonanz, so wird

$$\varphi = -C \cos \omega t$$

für $t = 0$ ist $\varphi = -C$, d. h. die Lagerschwingung und die „Überwucht" haben entgegengesetzte Phase. Sobald **merkliche Reibung** vorhanden ist, verändern sich die Verhältnisse wesentlich. Der Fall der Resonanz, d. h.

$$\Theta\omega_0^2 - B = 0$$

ergibt

$$C_1 = 0, \qquad C_2 = \frac{A\omega_0}{R}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \infty, \qquad \varkappa = 90^0, \qquad \varphi = C_2 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad \ldots \quad (6)$$

Die Amplitude C_2 der Schwingung ist also endlich, kann aber große Beträge erreichen, wenn R klein ist. Für $t = 0$ ist $\varphi = 0$, und der Höchstwert wird erst erreicht, wen $\omega t = \frac{\pi}{2}$ geworden ist, d. h. die Phase der Überwucht eilt der Lagerschwingung um 90^0 vor.

Unterhalb der Resonanz $(\Theta\omega^2 - B < 0)$ wird $C_1 > 0$, $\operatorname{tg}\alpha > 0$, $\alpha < \pi/2$ oberhalb der Resonanz umgekehrt $C_1 < 0$, $\alpha > \pi/2$, und dies Ergebnis beweist die Zweckmäßigkeit des geschilderten Arbeitsverfahrens. Wenn man nämlich die Trommel einmal vorwärts, einmal rückwärts treibt, ist es nicht notwendig, daß man die Resonanz genau erreicht habe. Wenn nur beide Male die Umlaufzahl gleich groß war, ist auch die Abweichung der Marke von der Überwucht gleich groß, die Überwucht liegt also, wie angegeben, in der Halbierungsebene.

Über die bei dieser Ableitung vernachlässigte, aber je nach Umständen bedeutende Wirkung der Kreiselkräfte vergleiche man Abschn. 89.

Man könnte glauben, daß aus Formeln (6) die Überwuchtmasse selbst auf rechnerischem Wege zu bestimmen wäre. Man brauchte nur den größten Ausschlag φ_{max} bei Resonanz zu beobachten, und hätte

$$C_2 = \varphi_{\max}, \quad \text{somit} \quad A = mbr = \frac{R\,\varphi_{\max}}{\omega_0} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Diese Bestimmung ist aber hinfällig, weil R nicht auf einfache Weise ermittelbar ist. Die Ausgleichvorrichtung kann also nur die Aufgabe lösen: die Ebene der Überwucht (d. h. des Minimums des Zentrifugalmomentes) anzugeben, und in dieser Ebene müssen zwei Zusatzmassen, deren Schwerpunkt mit dem Schwerpunkt des Körpers zusammenfällt, deren Fliehkräfte also ein reines Moment ergeben, mit probeweise angenommener Größe untergebracht und so lange abgeändert werden, bis der Ausschlag auch bei Resonanz unmerklich ist.

Die Bearbeitung der Räder und Wellen hat heute einen solchen Grad der Genauigkeit erlangt, daß oft eine Nachhilfe gar nicht erforderlich ist. Anderseits ist die Übung des immer mit der Auswuchtung beschäftigten Arbeiters so groß, daß in einigen Anstalten nur bei der Inbetriebsetzung, in den eigenen Lagern der Turbine ausgewuchtet wird.

Verfahren von Lawaczek-Heymann.

Die Auswuchtmaschine von Lawaczek-Heymann[1]) bezweckt die Bestimmung sowohl der freien Fliehkraft wie der Zentrifugalmomente auf dynamischem Wege in verfeinerter Weise. Der hierzu ursprünglich in Aussicht genommen gewesene Weg war der folgende:

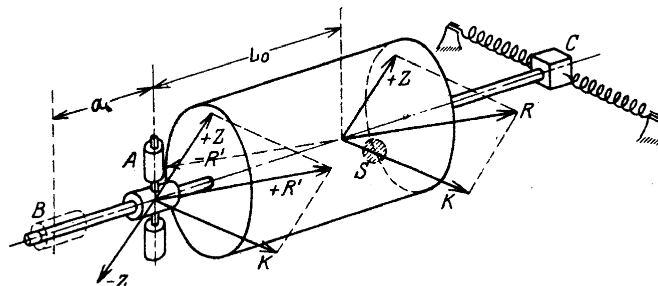


Abb. 396. Auswuchtvorrichtung von Lawaczek.

Die wagerechte Achse des auszuwuchtenden Körpers ist nach Abb. 396 bei A in einem um die Lotrechte drehbaren, bei C in einem wagerecht verschiebbaren Lager gestützt. Der Antrieb erfolgt mittels biegsamer Welle von einem Elektromotor aus. Es sei K die freie am Schwerpunkt angreifende Fliehkraft; $+Z-Z$ das Zentrifugalmoment, durch ein Kräftepaar derart dargestellt, daß $+Z$ die Kraft K schneidet,

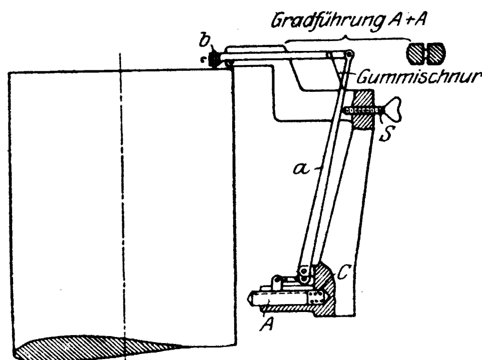


Abb. 397. Schreibvorrichtung.

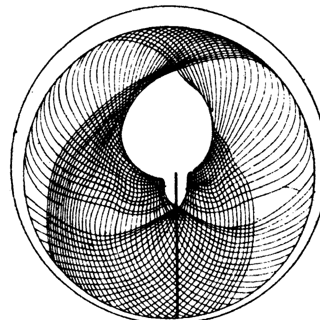


Abb. 397a. Polares Bild des Ausschlages.

während $-Z$ durch A hindurchgeht. K und $+Z$ liefern die Resultierende R, die durch ihre jeweilige wagerechte Komponente das federnd gehaltene Lager in Schwingung versetzt. Durch Beobachtung des

[1]) Hergestellt von C. Schenk, Eisengießerei und Maschinenfabrik Darmstadt.

Ausschlages kann, wie oben geschildert wurde, die Ebene von R bestimmt und durch Hinzufügen von **zwei gleich großen** entgegengesetzt gleich weit abliegenden Massen, die in den dafür vorgesehenen Ebenen (Nuten des Läufers) untergebracht werden, ein Moment erzeugt werden, bis die Schwingung verschwindet. Dieses Moment kann durch das auf den Abstand L_0 bezogene Kräftepaar $+R' - R'$ dargestellt werden, wobei $R' = R$ ist und somit die Kraft R aufgehoben wird. Ersetzt man die durch A gehende Kraft $+R'$ durch ihre Komponenten $+Z$ und K, so heben sich $+Z$ und $-Z$ auf und die Wirkung der zugefügten Auswuchtmassen besteht schließlich darin, daß das Zentrifugalmoment aufgehoben und die freie Fliehkraft K nach A verschoben worden ist. Hierauf muß Lager A nach B versetzt und die nunmehr durch K erzeugte Schwingung durch eine einzige Zusatzmasse ausgeglichen werden. Aus der Größe, dem Halbmesser und dem Hebelarme (bezüglich B) dieser Masse kann die Größe von K durch Rechnung bestimmt und K nach Entfernung jener Versuchsmasse durch zwei neue Massen in den hierzu vorgesehenen Ebenen (wie in Abb. 393a) ausgeglichen werden.

In der Wirklichkeit werden die Schraubenfedern der Abb. 396 durch eine Blattfeder, an der das Lager aufgehängt ist, ersetzt. Die Ausschläge werden in Gestalt eines Polardiagrammes mittels der in Abb. 397 dargestellten Schreibvorrichtung auf ein auf die Stirnseite der Welle gespanntes Papier gezeichnet. Infolge der Eigenbewegung des Papieres mit der Welle ist das Vergrößerungsverhältnis des Ausschlages um 1 größer als dem Hebelverhältnis entspricht. Die Darstellung in Abhängigkeit vom Drehwinkel ergibt, wie in Abb. 398 ersichtlich, eine fast genaue Sinuslinie. Im Polarschaubild, Abb. 397a, wird nur ein Teil des Ausschlages festgehalten, indem man das Schreibzeug der Welle so weit nähert, daß erst bei äußerster Auslenkung eine Berührung mit dem übertragenden Kolben A stattfindet. Abb. 397a enthält eine Kurvenschar, die während des freien „Auslaufens" von einer hohen Drehzahl durch die Resonanz hindurch und zwar für Vorwärts- und Rückwärtsdrehung entstand. Die festgezogene Symmetrielinie der beiden Scharen stellt die Ebene der Überwucht (bzw. der Resultierenden R) dar.

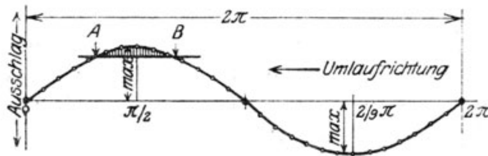


Abb. 398. Ausschlag in Abhängigkeit vom Drehwinkel.

Nach einer Untersuchung von Heymann[1]) ist der Genauigkeitsgrad der Vorrichtung so hoch, daß bei einer aus zwei Scheiben bestehenden Masse von 150 g Gewicht eine Schwerpunktsverlegung von 1/1000 mm nachweisbar war.

Im Laufe der Zeit wurde das Verfahren von Heymann wie folgt weiter ausgebildet.[2]) Die Umstellung des Lagers A nach B entfällt, statt dessen wird auch A mit einer Federung wie C versehen, die jedoch während des ersten Teiles des Anschwingens durch Stellschrauben außer Spiel gesetzt wird. Nachdem die Schwingung von C durch ein Gegengewicht in der Stirnebene des Schwungkörpers aufgehoben worden ist, wird Lager C festgelegt, A freigegeben, und die Schwingung durch ein Gegengewicht in der bei A gelegenen Stirnfläche ausgeglichen.

Das Kräftespiel ist dabei das folgende. Es bedeute P und Q, Abb. 398a, das resultierende Kräftekreuz vor dem Auswuchten (wie vorhin R und Z) in allgemeiner Lage. Durch Hinzufügen von $+P$, $-P$

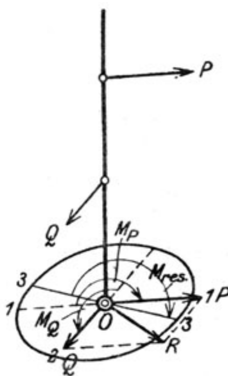


Abb. 398a.

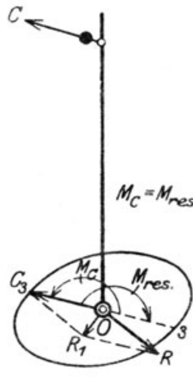


Abb. 398b.

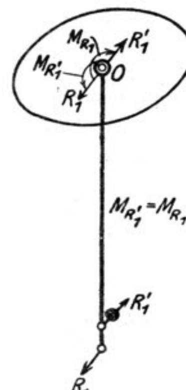


Abb. 398c.

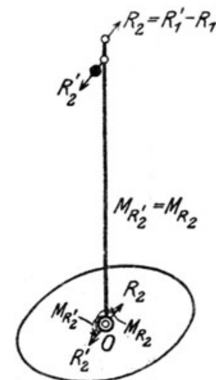


Abb. 398d.

[1]) Schwingungsvorgänge beim Auswuchten rasch umlaufender Massen. Dissertation. Darmstadt 1916.

[2]) Elektrotechn. Zeitschr. 1919. S. 234 u. f.

und $+Q$, $-Q$ in der Ebene des festen Lagers A erhält man die Kräfte $+P$, $+Q$ und deren Resultierende R in jener Ebene, wie auch zwei Momente, deren Resultierende, mit M_{res} bezeichnet, in einer anderen Achsialebene liegen wird, als R. Durch Vor- und Rückwärtslauf bestimmt man am federnden Lager die Ebene, in der das Gegengewicht anzubringen ist, welches die Schwingung ausgleicht, dessen Fliehkraft C mithin für O das gleiche Moment liefert wie M_{res}. Denkt man in O, Abb. 398b, die Kräfte $+C$ $-C$ angebracht, so heben sich die Momente alle auf, und es bleibt die neue Resultierende R_1 aus R und $+C$, als freie, aber nur Lagerdruck hervorrufende Kraft übrig. Nun wird die Federung des unteren Lagers freigegeben, das obere aber wird festgelegt. Könnte man in der Ebene von R_1 durch ein Gegengewicht eine ihm gleiche, aber entgegengesetzte Fliehkraft erzeugen, so wäre die Auswuchtung eine vollkommene. Da jedoch praktisch nur die untere Stirnfläche hierfür zu Gebote steht, so wird eine Fliehkraft R_1', Abb. 398c, erzeugt, die das Moment von R_1 in bezug auf das obere Lagermittel ausgleicht, allein nach Anfügen von $+R_1'$, $-R_1'$ die freie Kraft $R_2 = R_1' - R_1$ dortselbst bestehen läßt. Diese pflegt nach Heymann genügend klein zu sein, um oft vernachlässigt werden zu können. Doch kann man noch vollkommenere Auswuchtung erreichen, wenn man nach Abb. 398d abermals das untere Lager festlegt, und in der oberen Stirnfläche ein Zusatzgewicht mit der Fliehkraft R_2', die das Moment von R_2 aufhebt, unterbringt u. s. f. Die Ebenen von R_1, R_1', R_2, R_2' ... fallen zusammen, brauchen daher nicht erneut ermittelt zu werden. Heymann gibt an, daß die Fliehkräfte R_1, R_2, R_3 ... sich etwa wie 100 : 11 : 1 verhalten. Das Verfahren weist also eine rasche Konvergenz auf und kann durch ungeschulte Hilfskräfte, ohne jede Zwischenrechnung, ausgeführt werden.

Verfahren von Akimoff.

Akimoffs Auswuchtmaschine[1]) bezweckt die Bestimmung der freien Fliehkraft und der Zentrifugalmomente ohne Änderung der Lagerung des Versuchskörpers.

Sie besteht nach Abb. 399 aus einem durch Federn in senkrechter Lage erhaltenen Rahmen A, der um die Lager $B_1 B_2$ schwingen kann und den Versuchskörper C trägt, der in den Lagern $D_1 D_2$ gestützt ist. D_1 kann um eine wagerechte Achse schwingen, D_2 ist in der Senkrechten geführt und zwischen Federn im Gleichgewicht erhalten. Wird Lager D_2 festgelegt und der Körper in Drehung versetzt, so wird die Wirkung des Zentrifugalmoments durch die feste Achse $B_1 B_2$ aufgehoben, und die freie Fliehkraft wird ausgeglichen, indem man ein Gegengewicht G_1 so lange nach Lage und Größe verändert, bis die Schwingung auf ein Mindestmaß gesunken ist. Hierauf wird der Rahmen festgelegt und Lager D_2 spielen gelassen, so daß das Fliehkraftmoment Schwingungen hervorruft. Das Moment besteht dabei aus seinem ursprünglichen Betrage und dem durch Anfügen von G_1 entstandenen, geometrisch zu summierenden Zusatzbetrag. Wird durch Gegengewicht G_2 (in einer anderen Ebene) die Schwingung hinreichend vermindert, so wird voller Ausgleich erzielt, indem man zum Schluß $-G_2$, wie punktiert angedeutet, über D_1 am gleichen Hebel wie $+G_2$, beziehentlich ein mit $+G_2 - G_2$ gleichwertiges Massenmoment anbringt.

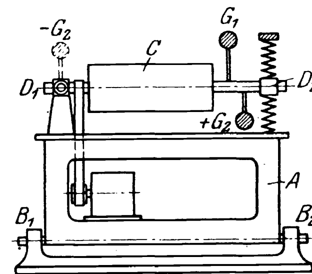


Abb. 399. Ausgleichvorrichtung von Akimoff.

87. Die Berechnung der Wellen.

Soweit bei der Welle die Beanspruchung durch biegende und drehende Momente in Frage kommt, unterscheidet sich ihre Berechnung in nichts von der jeder anderen Welle. Die alte Formel für das „ideelle Biegungsmoment“

$$M_i = \frac{1}{2}\frac{m-1}{m} M_b + \frac{1}{2}\frac{m+1}{m}\sqrt{M_b^2 + M_t^2} \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

wo $m = 1/\nu$ die Poissonsche Zahl, M_b das biegende, M_t das verdrehende Moment ist, wird aufzugeben sein, falls in der Tat nach Guest und Mohr für die Beanspruchung zäher Baustoffe die größte Schubspannung

$$\tau = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{M_b^2 + M_t^2}}{W_b}; \text{ mit } W_b = \frac{\pi}{32} d^3 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

maßgebend ist, wo d den Wellendurchmesser bedeutet. Diese Ansicht wurde gut bestätigt durch die Untersuchungen von W. Scoble[2]), der gefunden hat, daß auch bei Biegung und

[1]) Trans. of Amer. Soc. of Mech. Eng. Vol. 39, 1918, S. 779.
[2]) Phil. Magaz., Dez. 1906.

Torsion, wenn die Streckgrenze erreicht wurde, die Schubspannung τ stets denselben Wert annahm. Demgegenüber ist auf die gegenteiligen in Abschn. 74 angeführten Ergebnisse von Bonte hinzuweisen. Als zulässigen Wert von τ dürfte man rund die Hälfte desjenigen Betrages nehmen, der bei der Rechnung mit dem ideellen Moment für die „reduzierte Biegungsspannung" als zulässig angesehen wurde. Für Siemens-Martinstahl würde τ wohl $= 400$ kg/qcm gewählt werden dürfen. Nun dürfte die Verbiegung der Welle gewisse von den Spielräumen der Räder, der Scheidewände usw. abhängige Beträge nicht überschreiten, die auch der Beanspruchung eine Grenze setzen. Endlich kommt die Erscheinung der kritischen Geschwindigkeit hinzu, die unabhängig von Beanspruchung und Verbiegung durch rein dynamische Wirkungen hervorgerufen wird und bei der Bemessung der Wellenstärke die allergrößte Rolle spielt.

88. Kritische Geschwindigkeit für ein einzelnes Rad auf gewichtsloser Welle. Die biegsame Welle von de Laval.

Da auch bei sorgfältig ausgewuchteten Rädern der Ausgleich kein vollkommener ist, bleibt stets eine freie Fliehkraft übrig, die bei Erhöhung der Winkelgeschwindigkeit auf einen genügend hohen Betrag die Welle bis zum Bruch beanspruchen kann. Die eigentümlichen Verhältnisse, die sich hier darbieten, wurden wissenschaftlich von Rankine, Reynolds, Dunkerley[1]) und Föppl[2]) klargelegt und unabhängig hiervon von de Laval in seiner Dampfturbine verwertet.

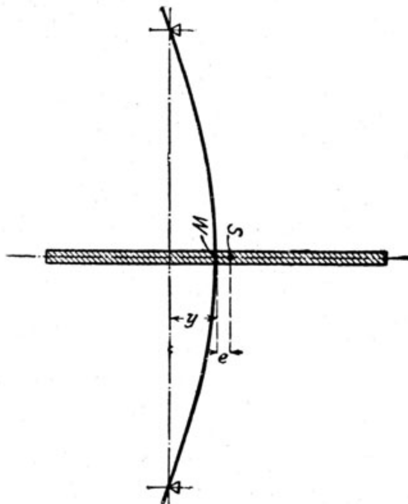


Abb. 400. Schwerpunktlage unterhalb der kritischen Drehzahl.

Es sei eine (sonst symmetrische) Scheibe mit einem um den Betrag e exzentrisch liegenden Schwerpunkt (Abb. 400) auf einer gewichtslos gedachten lotrechten Welle in solcher Lage befestigt, daß sie bei einer Biegung der Welle sich selbst parallel bleibt. Bei der Drehung wird die Welle durch die Fliehkraft um einen Betrag y durchgebogen, den wir aus der Bedingung zu bestimmen haben, daß die Fliehkraft $m(y+e)\omega^2$, worin m die Masse der Scheibe bedeutet, gleich sein müsse der von der Welle entwickelten elastischen Gegenkraft, die wir der Durchbiegung verhältnisgleich setzen dürfen. Wenn α eine aus Wellenlänge, Lagerungsart usw. zu berechnende Verhältniszahl ist, so ist die elastische Gegenkraft

$$P = \alpha y \qquad (1)$$

und die Gleichgewichtsbedingung lautet

$$m(y+e)\omega^2 = P = \alpha y \qquad (1a)$$

woraus sich die Durchbiegung

$$y = \frac{m\omega^2 e}{\alpha - m\omega^2} \qquad (2)$$

ergibt. Steigern wir die Winkelgeschwindigkeit, bis $\alpha - m\omega^2$ verschwindet, d. h. bis ω den Betrag

$$\omega = \omega_k = \sqrt{\frac{\alpha}{m}} \qquad (3)$$

erreicht, so wird y unendlich groß, d. h. die Fliehkraft würde die Welle bis zum Bruche verbiegen. Diesen Betrag von ω_k bezeichnen wir als „kritische" Winkelgeschwindigkeit und sprechen ebenso von der kritischen Umlaufzahl. Rechnen wir in den Einheiten cm·kg·sek, so bedeutet α gemäß (1) die Kraft in kg, die die Welle um 1 cm verbiegt. Bedeutet ferner $G = mg$ das Gewicht des Rades in kg, so findet man für die minutliche Umlaufzahl mit $g = 981$ cm/sek² die Formel von Föppl

$$n_k = \frac{30\,\omega_k}{\pi} = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{981\,\alpha}{G}} = 300\sqrt{\frac{\alpha}{G}} \qquad (3a)$$

[1]) Siehe die Quellenangaben in Phil. Transact. of the Royal Soc. London, Bd. 185, Jahrg. 1895, S. 281.
[2]) Civil-Ingenieur 1895, S. 333.

Beispielsweise ist mit J als Trägheitsmoment für die frei aufliegende Welle mit in der Mitte der Spannweite $2l$ befindlicher Scheibe

$$y = \frac{1}{6}\frac{Pl^3}{JE} \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{6JE}{l^3}$$

für die „eingespannte" Welle unter gleichen Umständen

$$y = \frac{1}{24}\frac{Pl^3}{JE}; \quad \alpha = \frac{24JE}{l^3} \qquad (3\,b)$$

für die an einem Ende eingespannte, am andern Ende frei aufliegende Welle

$$y = \frac{7}{96}\frac{Pl^3}{JE}; \quad \alpha = \frac{96}{7}\frac{JE}{l^3}$$

Ist die Welle wagerecht gelagert, so entsteht durch das Eigengewicht der Scheibe und Welle eine Verbiegung y_0 (Abb. 401) und die Form der elastischen Linie ist AOB. Die hinzutretende Fliehkraft vergrößert diese Biegung um y, das so zu rechnen ist, als ob die Schwere nicht vorhanden wäre. Der Schwerpunkt beschreibt einen Kreis s um den ursprünglichen Wellenmittelpunkt O und nicht um den vermeintlichen Drehpunkt O'. Für jene von O aus gerechnete Verbiegung y bleibt die Beziehung (1a), also auch die Formel der kritischen Drehzahl nach (3) unverändert. Allerdings ruft die periodische Hebung und Senkung des Schwerpunktes eine Schwankung der Winkelgeschwindigkeit und damit eine Störung der einfachen Kreisbahn hervor, die, wie wir in Abschn. 191 nachweisen, sogar zu stark zunehmenden Ausschlägen, d. h. einem besonderen kritischen Zustand führen kann. Für die im Dampfturbinenbau praktisch in Betracht fallenden Verhältnisse ist indessen die Schwankung äußerst gering und ihr Einfluß auf die oben abgeleitete kritische Drehzahl ein verschwindend kleiner. Man darf daher den Satz aussprechen:

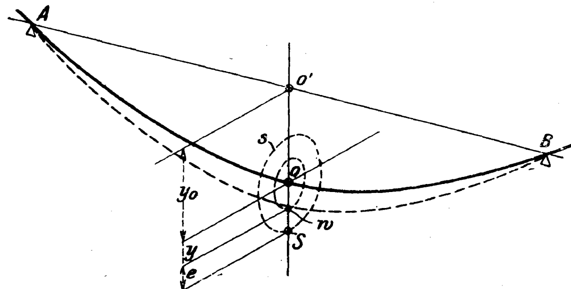


Abb. 401. Einfluß der Schwerkraft.

Die Verbiegung der Welle durch das Gewicht der Scheibe beeinflußt die (gewöhnliche) kritische Drehzahl nicht in merklichem Maße. Ob die Welle wagerecht oder senkrecht oder schief aufgestellt ist, die kritische Drehzahl bleibt dieselbe.

Praktisch können wir die kritische Umlaufzahl ohne Bruchgefahr erreichen, wenn Führungen vorhanden sind, die ein übergroßes Ausbiegen der Welle verhindern. Dann können wir die kritische Umlaufzahl sogar überschreiten, und es fragt sich, wie sich die Welle dabei verhält? Theorie und Erfahrung beweisen übereinstimmend die überraschende Tatsache, daß sich dann ein neuer stabiler Gleichgewichtszustand einstellt, bei dem der Wellendurchstoßpunkt W und der Schwerpunkt S ihre Lagen vertauschen, wie in Abb. 402 angedeutet. Die Größe der Durchbiegung berechnet man aus der Gleichung $m(y - e)\,\omega^2 = \alpha y$ und erhält

$$y = \frac{m\omega^2 e}{-\alpha + m\omega^2} = \frac{e}{1 - \dfrac{\alpha}{m\omega^2}} \qquad (4)$$

Je mehr man ω steigert, desto kleiner wird y, um bei unendlich rascher Drehung mit e zusammenzufallen. Führen wir die kritische Geschwindigkeit ω_k ein, so wird $y = e : (1 - \omega_k^2/\omega^2)$, und die Größe der noch vorhandenen Fliehkraft, die auf die Lager übertragen wird, ergibt sich zu

$$P = \alpha y = \frac{me\omega^2}{\dfrac{\omega^2}{\omega_k^2} - 1} \qquad (4\,a)$$

Durch geeignete Wahl von ω/ω_k, d. h. bei gegebenem ω durch Verkleinerung von ω_k sind wir mithin in der Lage, P nach Belieben zu verkleinern, ohne Rücksicht auf die

Exzentrizität e, die indes in Wirklichkeit selbstverständlich ebenfalls so klein als irgend möglich gemacht wird. Dies war der Weg, den de Laval mit seiner berühmten **„biegsamen Welle“** beschritten hat. die bei knappstem Durchmesser eine so weite Lagerung erhält, daß die Winkelgeschwindigkeit des Betriebes etwa den 7 fachen Wert von ω_k erreicht. Der gute Gang Lavalscher Turbinen hat die Richtigkeit dieser Wahl vollkommen bestätigt.

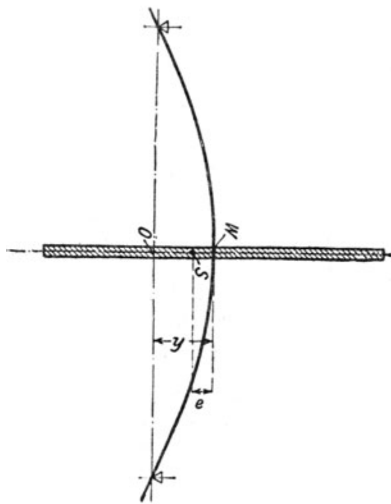


Abb. 402. Schwerpunktlage über der kritischen Drehzahl.

Daß die in Abb. 402 dargestellte Gleichgewichtslage in der Tat eine stabile ist, hat Föppl durch eine theoretische Untersuchung unter vereinfachenden Annahmen erwiesen. Der allgemeine Beweis, den wir in Abschn. 192 geben, führt auf die Tatsache, daß die Stabilität erst bei einer gewissen Größe des Massenträgheitsmomentes der Scheibe vorhanden ist; eine punktförmige, in S konzentrierte Masse würde, wie die Anschauung uns zwingend nahelegt, bei der geringsten Störung der in Abb. 402 dargestellten Lage umkpipen. Das Gleichgewicht über der kritischen Geschwindigkeit ist also zu erklären als das **Bestreben der großen Schwungmasse um ihre „freie Achse“, d. h. den Schwerpunkt, zu rotieren.**

Im **Grenzfalle vollkommenen Ausgleiches,** wenn $e = 0$ gesetzt werden darf, erhält man bei der „kritischen“ Umlaufzahl für jedes y; $m y \omega^2 = P = \alpha y$, d. h. die Fliehkraft und die elastische Gegenkraft sind bei jeder Auslenkung einander gleich, die **Scheibe befindet** sich in **jeder Lage im indifferenten Gleichgewicht.**

Diese Bemerkung benutzen wir im folgenden, um die kritische Umlaufzahl nicht als das Kennzeichen unendlich großer Auslenkung, sondern mit der Annahme $e = 0$ aus der Bedingung, daß die Verbiegung y unbestimmt (beliebig) sein müsse, zu berechnen.

Schließlich besteht ein bemerkenswerter Zusammenhang zwischen der Größe der durch **das Eigengewicht G bewirkten Verbiegung** und der kritischen Geschwindigkeit. Bei wagerechter Aufstellung ist nämlich nach Grundformel (1) der Biegungspfeil $y_0 = G/\alpha$; da aber $G = mg$ und $\alpha = m\omega_k^2$, so folgt

$$y_0 = \frac{g}{\omega_k^2} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (5)$$

Bei einer neu zu berechnenden Welle, für die wir die kritische Geschwindigkeit vorschreiben, ist also durch deren Annahme auch die Verbiegung durch das Eigengewicht bestimmt. unabhängig davon, welche Abmessungen die Welle im einzelnen besitzt.

Beispiel 1. De Lavalsche Welle.

Es ist die Welle einer Lavalschen Turbine zu berechnen, die an einem Ende als eingespannt, am anderen als frei aufliegend gelten kann. Die Konstruktion des Rades habe ein Gewicht desselben (samt Kupplungsflanschen) $G = 98$ kg, also $m = 98/981 \simeq 0{,}1$ kg/cmsek^{-2} ergeben und die Welle soll $N_i = 500$ PS bei $\omega = 1000$ (d. h. bei ungefähr 10000 Uml./min) übertragen. Wir wählen als kritische Winkelgeschwindigkeit $^1/_7$ der normalen, $\omega_k = 143$, und erhalten nach Gl. (5) die statische Verbiegung $y_0 = 981/143^2 = 0{,}048$ cm oder rund $^1/_2$ mm, was praktisch zulässig ist. Ferner folgt aus der Bedingung $\alpha = m\omega_k^2$ mit Rücksicht auf Gl. (3a)

$$J = \frac{7}{96} \cdot \frac{m\omega_k^2}{E} l^3 \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (\alpha)$$

Nun ist die Beanspruchung der Welle in Betracht zu ziehen, die zunächst durch das Torsionsmoment $M_t = \frac{7500\, N_i}{\omega}$ und nach der Theorie der Biegung durch das biegende Moment $M_b = \frac{3}{8} Gl$ bedingt wird. Rechnen wir nach Guest, so ist die größte Schubspannung maßgebend gemäß Formel

$$\tau = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{M_b^2 + M_t^2}}{W_b} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (\beta)$$

worin $W_b \sim d^3 : 10$ das Widerstandsmoment für Biegung bedeutet. Wir haben zwei Gleichungen zur Verfügung und können zwei von den Abhängigen d, l, τ berechnen. Das natürliche wäre, τ vorzuschreiben und die Gleichungen nach d, l aufzulösen. Da dieser Weg nicht glatt gangbar ist, nehmen wir l versuchsweise an, berechnen d aus (1), τ aus (2), und ändern l so lange ab, bis die Verhältnisse befriedigen. Man findet $M_t = 3750$ cmkg und

mit der halben Spannweite	$l = 100$	80	60	50 cm
den Wellendurchmesser	$d = 6{,}06$	5,14	4,14	3,6 cm
die größte Schubspannung	$\tau = 117$	177	308	447 kg/qcm.

Die größte Schubspannung sollte etwa die Hälfte der zulässigen größten Normalspannung erreichen dürfen; wir werden also zwischen den Werten $l = 50$ bis 60 cm zu wählen haben. Durch eine veränderte Annahme über die kritische Winkelgeschwindigkeit können wir l, d nach Wunsch beeinflussen.

Eigenschwingung der ruhenden Welle und kritische Umlaufzahl.

Erteilen wir der Scheibe in Abb. 400 oder 401 senkrecht zur Welle einen Impuls, so wird sie in Schwingungen geraten, für die (mit der Annahme $e = 0$) die Gleichung

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -P = -\alpha y \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

gilt, wenn man y von der Gleichgewichtslage rechnet, die der Biegung durch das Eigengewicht entspricht. Das Integral dieser Gleichung ist bekanntlich $y = A \cos t\sqrt{\alpha/m} + B \sin t \sqrt{\alpha/m}$, wo A und B von den Anfangsbedingungen abhängen; daraus folgt die Dauer einer vollen Hin- und Herschwingung $T = 2\pi\sqrt{m/\alpha}$ und die Schwingungszahl i. d. Sekunde

$$n = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\alpha}{m}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Die kritische Umlaufzahl ist aber, wenn wir sie auf die Sekunde beziehen,

$$n' = \frac{\omega_k}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\alpha}{m}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

d. h. n und n' sind ein und dasselbe.

Man könnte also in diesem einfachen Falle die kritische Drehzahl durch Beobachtung der Eigenschwingungszahl ermitteln.

Das gleiche Ergebnis leitet man aus der Anschauung wie folgt ab: Wenn $e = o$ ist, beeinflußt die Drehung der Scheibe die Schwerpunktsbewegung nicht. **Der Schwerpunkt schwingt unter dem Einflusse der Wellenkraft wie ein einfacher Massenpunkt;** sind die Schwingungen nach zwei zueinander senkrechten Ebenen gleich groß, so entsteht eine Kreisbahn, sonst eine Ellipse. Da die Kreisbahn identisch ist mit der oben betrachteten Drehung während des kritischen Zustandes im indifferenten Gleichgewicht, muß die Eigenschwingungszahl identisch sein mit der kritischen Drehzahl. Dabei kann die Winkelschnelle der Eigendrehung der Scheibe (und der Wellenmasse um die gekrümmte Wellenmittellinie) von ω_k beliebig abweichen. Sobald $e > o$, ist die Bewegung eine durch die freie Fliehkraft „erzwungene" (Kreis-) Schwingung; die Eigenschwingung wird durch die Bewegungswiderstände vernichtet.

Kann sich die Scheibe schief stellen, so treten Störungen auf, die wir in Abschn. 89 betrachten.

Einfluß der Bewegungswiderstände.

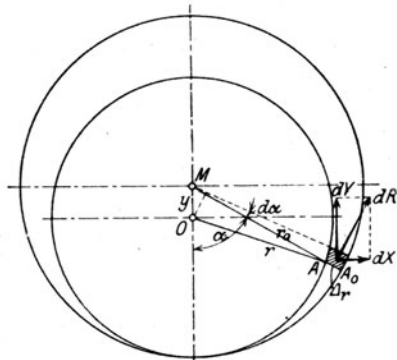
Die Bewegungswiderstände erzeugen ein Reibungsmoment und eine Einzelkraft. Das erstere wird durch die nützliche Umfangskraft (oder durch ein von außen mittels der Welle übertragenes Drehmoment) überwunden; die letztere beeinflußt das Gleichgewicht, wie wir unten beweisen, in dem Sinne, daß **die Auslenkung auch bei der kritischen Drehzahl endlich bleibt.**

Dies liegt daran, daß jene Reibungskraft mit der Auslenkung sehr nahe in gleichem Verhältnis wächst. Es sei nämlich in Abb. 403 O der Durchstoßpunkt der geometrischen Achse, M der Mittelpunkt der kreisförmigen Scheibe, r_0 deren Halbmesser, r der Halbmesser des von O aus einbeschriebenen Kreises. Der Reibungswiderstand eines Flächenelementes der Scheibenfläche sei $dR = df \cdot \eta u^2$, wo u die Anfangsgeschwindigkeit bedeutet. Dann liefert die innerhalb der Kreises r gelegene Fläche ein reines Moment, im sichelförmigen Teil aber zerlegen wir für das schraffierte Element dR in die Komponenten dX; dY. Aus Symmetriegründen ist die $\Sigma dY = 0$, während

$$\Delta r = r_0 - r - y\cos\alpha = y(1 - \cos\alpha), \text{ und } \int dX = \int_0^{2\pi} dR\cos\alpha = \int \Delta r \cdot r_0\, d\alpha\, \eta\, (r_0\omega)^2 \cos\alpha = -\pi\eta r_0^3\omega^2 y$$

wird; also ist die resultierende Einzelkraft für die beiden Stirnflächen $= 2X$, fortan mit R bezeichnet, wenn wir $m' = 2\pi\eta r_0^3 \omega^2$ setzen

$$R = m' y \omega^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (9)$$



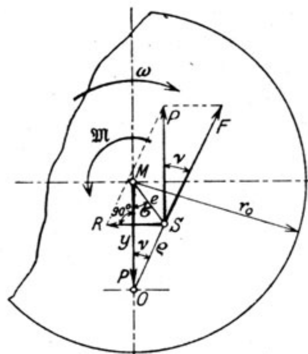


Abb. 403. Abb. 403a.
Einfluß der Zähigkeit des umgebenden Mittels.

In den meisten Fällen wird M mit dem Wellendurchstoßpunkt W, Abb. 403a, übereinstimmen, während der Schwerpunkt S um e davon abweicht. Fügen wir R an S an, so wird die Gesamtheit der Reibungskräfte durch R und ein Moment $\mathfrak{M}$ dargestellt. Außerdem wirken die Fliehkraft $F = m\varrho\omega^2$, die Wellenkraft $P = \alpha y = m y \omega_k^2$ und ein zu $\mathfrak{M}$ entgegengesetztes treibendes Moment. Das Gleichgewicht der Kräfte erfordert, daß die Resultierende aus R und F an S gleich und entgegengesetzt sei mit P an M, oder mit Einführung des Winkels ν

$$R = F \sin\nu;\quad P = F\cos\nu \quad \ldots (10)$$

Wenn wir die Werte für R und F einsetzen, erhält man, mit den Bezeichnungen

$$\mu = m'/m;\quad \gamma = \omega_k^2/\omega^2 \quad \ldots (11)$$

die Beziehungen:

$$\mu y = \varrho \sin\nu;\quad \gamma y = \varrho\cos\nu \quad \ldots (12)$$

Hierzu tritt aus dem Dreieck von $e\varrho y$:

$$\varrho^2 + y^2 - 2\varrho y \cos\nu = e^2 \quad \ldots (13)$$

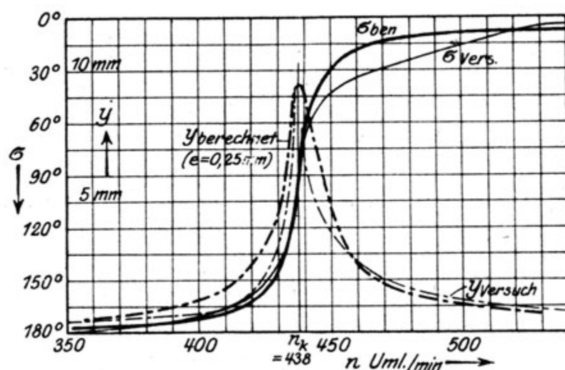


Abb. 403b. Stellungswechsel von W und S beim Durchgang durch die kritische Drehzahl.

Gl. (12) und (13) bilden 3 Beziehungen zur Bestimmung von y, ϱ, ν. Man erhält aus (12) $\operatorname{tg}\nu = \mu/\gamma$, und $(\mu^2 + \gamma^2)\, y^2 = \varrho^2$ und hiermit aus (13)

$$y = \frac{e}{\sqrt{(\gamma - 1)^2 + \mu^2}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (14)$$

Erreicht man die kritische Drehzahl, so ist $\gamma = 1$ und y nimmt den **endlichen Wert**

$$y = \frac{e}{\mu} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (15)$$

an. Dabei berechnet sich der von y und e gebildete Winkel σ aus den Gleichungen

$$e\sin\sigma = \varrho\sin\nu;\qquad e\cos\sigma = y - \varrho\cos\nu$$

zu

$$\operatorname{tg}\sigma = \frac{\varrho\sin\nu}{y - \varrho\cos\nu} = \frac{\operatorname{tg}\nu}{\frac{1}{\gamma} - 1} = \frac{\mu}{1-\gamma} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (16)$$

Bei der kritischen Drehzahl ist $\operatorname{tg}\sigma = \infty$, d. h. **$e$ und y bilden einen rechten Winkel.**

Durch Versuche in unserem Maschinenlaboratorium[1]) wurden die in Abb. 403b dargestellten Ergebnisse gewonnen. Eine Scheibe von 500 mm Durchm. 9,55 kg Gewicht war in der Mitte einer auf 1500 mm Länge in Kugelschalen frei gestützten Welle von 20 mm Durchm. angeordnet. Während der Drehung wurde durch sanft angedrückten Rotstift die am weitesten ausgelenkte Stelle des Umfanges bezeichnet. Diese Marke, mit W verbunden, ergibt die Richtung WO, und da WS bekannt ist, auch den

[1]) Schweiz. Bauztg. 28. Okt. 1916.

Winkel σ. Beim Vergleich der wirklichen Werte mit den gerechneten mußte über μ und e eine solche Annahme getroffen werden, daß sich eine möglichst gute Übereinstimmung herausstellt. Wie ersichtlich, ist σ bei 400 Umdr./min nahezu 180° und schon bei 480 Umdr. sehr klein, während die kritische Drehzahl 438/Min. beträgt. Der Bewegungswiderstand der atmosphärischen Luft beeinflußt mithin die geradlinige Stellung der Punkte O, W, S nur in naher Nachbarschaft des kritischen Zustandes.

Einfluß der Lagerlänge auf die kritische Drehzahl.

Ist die Verbiegung der Welle in der Nähe, oder während der kritischen Drehzahl beträchtlich und ist das Spiel auch an der oberen Schale klein, so kann es dazu kommen, daß sie beim Schwingen am inneren Schalenrand aufliegt, wodurch die kritische Drehzahl erhöht werden müßte. Im allgemeinen schwimmt die Welle im Lager auf dem Öle und wird durch das Eigengewicht der Scheiben so fest angedrückt, daß ein Abheben nicht stattfindet. Machen wir die Annahme, daß dabei die spezifische Pressung der Länge nach eine gleichmäßige bleibt, so ist der Unterschied gegen die Auflagerung in einem Punkt der, daß nach Abb. 404 die Stützkraft $\frac{P}{2}$ auf die Lagerlänge l' gleichmäßig verteilt wirkt. Die Biegung des Mittelteiles bleibt unverändert. Im Lagermittel ist bei punktweiser Stützung die Einsenkung von der Tangente t gerechnet

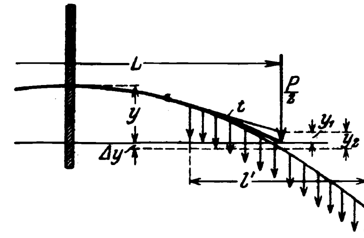


Abb. 404. Abnahme der kritischen Drehzahl bei großer Lagerlänge.

$$y_1 = \frac{Pl'^3}{48JE} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

Bei gleichmäßiger Verteilung

$$y_2 = \frac{17}{16 \cdot 48} \frac{Pl'^3}{JE} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

Demnach ist der Mehrbetrag der Biegung im letzten Fall

$$\Delta y = y_2 - y_1 = \frac{Pl'^3}{16 \cdot 48\, JE} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (19)$$

Die gesamte Biegung bei punktförmiger Stützung ist

$$y = \frac{PL^3}{48JE} = \frac{P}{\alpha} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (20)$$

bei gleichmäßiger

$$y' = y + \Delta y = y\left(1 + \frac{\Delta y}{y}\right) = \frac{P}{\alpha'} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (21)$$

Die alte kritische Geschwindigkeit ist $\omega_k = \sqrt{\alpha/m}$; die neue $\omega_k' = \sqrt{\alpha'/m}$ und es wird

$$\frac{\omega_k'}{\omega} = \sqrt{\frac{\alpha'}{\alpha}} = \sqrt{\frac{y}{y'}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{\Delta y}{y}}} = \sim 1 - \frac{1}{2}\frac{\Delta y}{y} = 1 - \frac{1}{32}\left(\frac{l'}{L}\right)^3 \quad \ldots \ldots \quad (22)$$

Selbst bei sehr langen Lagern, z. B. $l' = L/4$, ist mithin die Abnahme der kritischen Winkelgeschwindigkeit nur 1/2048, also vernachlässigbar.

Falls der Flächendruck an der Stelle, wo die Ölschicht zusammengedrückt wird, wie es in Wirklichkeit wohl der Fall ist, merklich steigt, würde die mittlere Stützweite während der Schwingung sich ändern, was die Entstehung eines unruhigen Ganges begünstigen könnte.

89. Kreiselwirkung infolge der Schiefstellung der Scheiben.

Sofern man die Laufscheiben als starr ansehen kann, bilden sie Kreisel, die jeder Änderung ihrer Achsenrichtung einen Widerstand entgegensetzen[1]). Bleibt die Scheibe während der Auslenkung sich selbst parallel, so tritt keine Kreiselwirkung auf; im allgemeinen ist jedoch ihre Achse durch die Wellenbiegung gezwungen einen Kegel zu beschreiben (wobei für die wagerechte Anordnung als Kegelwinkel die von der statischen Durchbiegung aus gerechnete Neigung zu gelten hat). Die Scheibe muß eine „Präzessionsbewegung" ausführen, wodurch ein in der Biegungsebene gelegenes, die Biegung hemmendes oder unterstützendes Kreiselmoment entsteht.

Um diese Bewegung richtig zu verstehen, muß man genau unterscheiden:

[1]) Man vergleiche die Darstellung in Abschn. 190.

1. **Die materielle Drehung der Welle** und des **Laufrades** erfolgt mit einer und derselben Winkelgeschwindigkeit ω, weil sie miteinander fest verbunden sind; sie findet jeweils um die Tangente an die elastische Biegungslinie der Welle statt.

2. Die **elastische Linie** selbst kann **schwingen**, so daß ihre Punkte geradlinige, elliptische oder **kreisförmige** Bahnen beschreiben, wobei im letzten Fall auch von einer Winkelgeschwindigkeit (des Fahrstrahles) gesprochen werden kann, die jedoch unabhängig ist von der „materiellen" Drehung der Scheibe.

Im allgemeinen dreht sich die elastische Linie mit gleicher Geschwindigkeit und in gleichem Sinne wie die Scheibe, weil jede Eigenschwingung durch die Bewegungswiderstände ertötet wird. Wir wollen diese Bewegung als **„synchrone Präzession im Gleichlauf"** bezeichnen. Es können aber vorübergehend oder dauernd die Winkelgeschwindigkeiten voneinander abweichen, insbesondere den entgegengesetzten Drehsinn haben, und es entsteht die **„Präzession im Gegenlauf"** die synchron oder nichtsynchron sein kann.

a) Synchrone Präzession im Gleichlauf.

Gemäß Voraussetzung beschreibt der „Wellendurchstoßpunkt" W in Abb. 405 eine Kreisbahn mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit ω, mit der sich die Scheibe dreht. Von einem sich um O mit ω drehenden Raume aus betrachtet, wird W und der Schwerpunkt S ruhen,

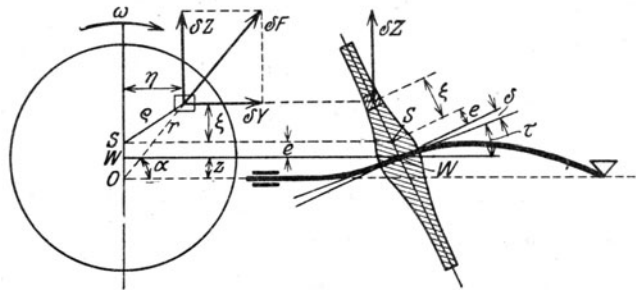


Abb. 405. Kreiselmoment bei synchroner Präzession im Gleichlauf.

und man muß als Ergänzungskräfte bloß die Fliehkräfte hinzufügen, damit Gleichgewicht herrsche. Es bezeichnete

τ den Neigungswinkel der elastischen Linie,
δ den durch ungenaue Ausführung verursachten Aufkeilungswinkel, um den die Scheibenachse von der Wellenachse abweicht.

Dann ist, da man $\cos(\tau+\delta)=1$ und $\sin(\tau+\delta)=\tau+\delta$ setzen darf, die lotrechte Komponente der Fliehkraft am Element δm:

$$\delta Z = \delta m\,\omega^2 r \sin\alpha = \delta m\,\omega^2 (z+e+\zeta) \quad \ldots \quad (1)$$

ähnlich

$$\delta Y = \delta m\,\omega^2 \eta \quad \ldots \quad (2)$$

Die Resultierenden sind: $Z=\Sigma\delta Z=\omega^2(z+e)\Sigma\delta m+\omega^2\Sigma\delta m\zeta$, wobei $\Sigma\delta m\zeta=0$ als statisches Moment in bezug auf eine Schwerpunktebene, also

$$Z = m\omega^2 (z+e);\ \text{und}\ Y=0 \quad \ldots \quad (3)$$

Das Moment der Fliehkräfte in bezug auf die zur Biegungsebene senkrechte Schwerpunktsachse (positiv im Sinne der Uhrzeigerbewegung) ist nun das eigentliche **Kreiselmoment:**

$$\mathfrak{M}_f = \Sigma\delta Z\zeta(\tau+\delta) = \omega^2(\tau+\delta)\ [(e+z)\Sigma\delta m\zeta + \Sigma\delta m\zeta^2] = \Theta_d\omega^2(\tau+\delta)\ . \quad (4)$$

worin Θ_d angenähert das auf einen Durchmesser bezogene Massenträgheitsmoment der Scheibe bezeichnet. Aus Symmetriegründen ist $\Sigma\delta m\zeta^2=\Sigma\delta m\eta^2$ und das polare Massenmoment ist mithin

$$\Theta = \Sigma\delta m\varrho^2 = \Sigma\delta m(\eta^2+\zeta^2) = 2\,\Theta_d \quad \text{oder} \quad \Theta_d = \frac{1}{2}\Theta \quad \ldots \quad (5)$$

Insbesondere ist für eine Scheibe mit der gleichmäßigen (kleinen) Dicke h und dem Durchm. D : $\Theta_d=(\pi/64)D^4h\mu$.

Soll die kritische Drehzahl einer Welle unter den gegebenen Umständen berechnet werden, so muß man die Verbiegung unter Inbetrachtnahme der Fliehkraft und des Kreiselmomentes ausdrücken und untersuchen, wann sie über alle Grenzen wächst.

Beispiel: Die fliegende Scheibe.

Gemäß Abb. 405a wirken auf die (von der Welle abgetrennte) Scheibe die Fliehkraft F, das Kreiselmoment $\mathfrak{M}_f$ und die Gegenkraft der Welle P mit dem Biegungsmoment M. Das Gleichgewicht fordert, wenn wir $\delta = 0$ voraussetzen

$$P = F = m(z + e)\,\omega^2; \quad M = \mathfrak{M}_f = \Theta_d \omega^2 \tau \quad . \; . \quad (6)$$

Die Formänderung der Welle ergibt sich nach den Biegungsformeln:

$$z = \frac{1}{JE}\left[\frac{Pl^3}{3} - \frac{Ml^2}{2}\right]; \quad \tau = \frac{1}{JE}\left[\frac{Pl^2}{2} - Ml\right] \quad . \; . \quad (7)$$

daraus folgt durch Auflösung

$$P = \frac{JE}{l^3}\left[12z - 6l\tau\right]; \qquad M = \frac{JE}{l^2}\left[6z - 4l\tau\right] \quad . \quad (8)$$

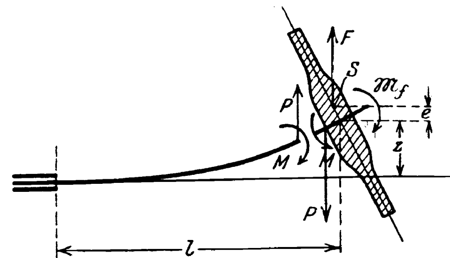


Abb. 405a.
Fliegende Scheibe im „Gleichlauf".

oder in (6) eingesetzt:

$$\left.\begin{aligned} (2\alpha^2 - \omega^2)\,z - \alpha^2(l\tau) &= e\omega^2 \\ 3\beta^2 z - (2\beta^2 + \omega^2)(l\tau) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

mit den Bezeichnungen

$$\alpha^2 = \frac{6JE}{ml^3}; \quad \beta^2 = \frac{2JE}{\Theta_d l} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

Die Auflösungen z, $l\tau$ von (9) wachsen ins Unendliche, wenn die Nenner der betreffenden Ausdrücke (d. h. die „Determinante" der Gleichungen) verschwindet. Dies führt auf

$$\omega^4 + 2(\beta^2 - \alpha^2)\,\omega^2 - \alpha^2\beta^2 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

deren einzige positive Wurzel

$$\omega_{gl}^2 = -(\beta^2 - \alpha^2) + \sqrt{(\beta^2 - \alpha^2)^2 + \alpha^2\beta^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

das gesuchte kritische Geschwindigkeitsquadrat für den Gleichlauf ist. Für eine punktförmige Masse wäre $\Theta_d = 0$, was nach vorheriger Teilung von (11) mit β^2 für $\beta^2 = \infty$

$$\omega_k^2 = \frac{\alpha^2}{2} = \frac{3JE}{ml^3} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

d. h. die gewöhnliche kritische Geschwindigkeit ergibt. Je mehr Θ_d wächst, also β^2 abnimmt, um so mehr nimmt ω^2 zu, bis schließlich bei $\Theta_d = \infty$

$$\omega_\infty^2 = 2\alpha^2 = \frac{12JE}{ml^3} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

erreicht wird. Dabei steht die Scheibe lotrecht, da das unendlich große Kreiselmoment unter der Wirkung des endlichen Wellenmomentes nur eine unendlich kleine Neigung zuläßt.

b) Präzession im Gegenlauf.

Die Drehschnelle ω der Scheibe ist durch die Drehzahl der Turbine gegeben. Mit derselben Geschwindigkeit drehen sich die Elemente der Wellenmasse um die jeweilige Tangente an die elastische Linie. Nun soll sich diese elastische Linie mit einer von ω verschiedenen und im entgegengesetzten Sinne gerichteten Winkelschnelle λ drehen, Abb. 405b. Dabei kommt zugleich eine „Lockerung" der Nabe zur Darstellung, wie sie infolge der Aufweitung durch die Fliehkräfte bei ungenügendem Anfangsschrumpf vorkommen kann, und der Scheibe eine zusätzliche Schiefstellung um den Winkel δ gestattet. Die Aufweitung ist praktisch immer sehr klein, so daß die Keile in Eingriff bleiben und die Scheibe mit der Welle gleiche Drehzahl besitzt. Von einer Exzentrizität sehen wir, um die mathematische Entwicklung zu vereinfachen, ab.

Die Präzessionsgeschwindigkeit wird durch den Winkel $d\varphi$ definiert, den der Fahrstrahl OS im Zeitteilchen dt beschreibt, so daß

$$\lambda = \frac{d\varphi}{dt} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

ist. Die relative Winkelschnelle gegenüber dem Raum, der sich hier mit λ (also nicht mit ω) um 0 dreht, wird durch den in der Scheibenebene gemessenen Winkel $d\chi_r$ gemessen, als

$$\omega_r = \frac{d\chi_r}{dt} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (13\text{a})$$

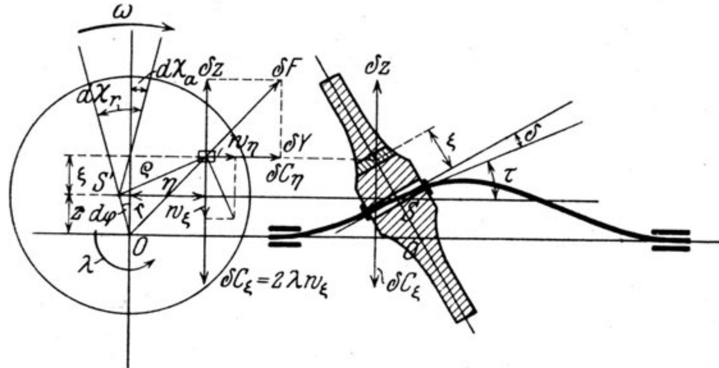


Abb. 405 b. Gegenläufige Präzession.

Die absolute Winkelschnelle ω endlich entspricht dem Winkel $d\chi_a$, den die ursprünglich mit der Scheibe festverbundene Radialebene mit der im Raume festen Ebene OS einschließt, und es ist

$$\omega = \frac{d\chi_a}{dt} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (13\text{b})$$

Infolge der Kleinheit von $\tau + \delta$ darf man $\delta\chi_r = d\chi_a + d\varphi$, oder

$$\omega_r = \omega + \lambda \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

setzen. Die Komponenten der Fliehkraft sind ähnlich wie unter a)

$$dZ = dF \sin\alpha = \delta m \lambda^2 (z + \zeta); \qquad dY = dF \cos\alpha = \delta m \lambda^2 \eta \quad \ldots \quad (15)$$

Da das Element δm die relative Geschwindigkeit $w_r = \varrho\,\omega_r$ mit den Komponenten $w_\eta = \zeta\,\omega_r$; $w_\zeta = \eta\,\omega_r$ besitzt, treten noch die Coriolisschen Ergänzungskräfte δC_η; δC_ζ hinzu, von denen die ersteren sich wegen der Symmetrie der Scheibe das Gleichgewicht halten, die letzteren jedoch für die durch S gehende, zu η parallele Querachse das Moment

$$\mathfrak{M}_c = \sum \delta C_\zeta \zeta (\tau + \delta)$$

ergeben. Nun ist

$$\delta C_\zeta = 2\,\delta m \lambda w_\eta = 2\,\delta m \lambda \omega_r \zeta \quad \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

und bekanntlich so gerichtet, daß es nach Drehung am 90^0 im Sinne von λ in die Richtung von w_η fällt. Also ist mit Rücksicht auf (14)

$$\mathfrak{M}_c = 2\,\lambda(\omega + \lambda)(\tau + \delta) \sum \delta m \zeta^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

worin wir wieder angenähert

$$\sum \delta m \zeta^2 = \Theta_d \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

dem auf den Durchmesser bezogenen Massenmoment gleich setzen. Zu diesem tritt das Fliehkraftmoment $\mathfrak{M}_F$ wie bei a) hinzu, und es wird im ganzen

$$\mathfrak{M}_k = \mathfrak{M}_c - \mathfrak{M}_f = (2\,\lambda\omega + \lambda^2)\,\Theta_d(\tau + \delta) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (19)$$

gegen den Uhrzeigersinn drehend, d. h. **auf eine Vergrößerung von τ hinwirkend.** Ein gleichgroßes Moment, aber im Uhrzeigersinn wirkend, müssen die äußeren oder von der Wellenbiegung stammenden Kräfte auf die Scheibe ausüben.

Die synchrone Präzession bedeutet

$$\lambda = \omega,$$

und für diese erhalten wir als Kreiselwirkung

$$\mathfrak{M}_k = 3\,\omega^2\,\Theta_d(\tau + \delta), \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (20)$$

also **ein dreimal so großes Moment als beim Gleichlauf.**

Die Ableitung ändert sich übrigens nicht, auch wenn λ das Vorzeichen wechselt, d. h. wenn die Präzession im Gleichlauf vor sich geht, so daß $\mathfrak{M}_k = (\lambda^2 - 2\,\omega\,\lambda)\cdot\Theta_d\,(\tau + \delta)$ wird. Insbesondere erhält man bei Synchronismus $\mathfrak{M}_k = -\,\omega^2\,\Theta_d\,(\tau + \delta)$, womit Gl. (4) übereinstimmt, aber durch das Vorzeichen andeutet, daß dieses Moment den Winkel τ zu verkleinern strebt.

Wird die Welle mit der Scheibe von der Ruhelage aus in Bewegung gesetzt, so wird sich im allgemeinen die synchrone Präzession im Gleichlauf einstellen, weil stets eine gewisse Exzentrizität vorhanden ist und die durch die freie Fliehkraft erzwungene, in den Kreis übergehende Schwingung die Überhand bekommt. Sobald jedoch Störungskräfte irgendwelcher Art vorhanden sind, deren Periode mit der Präzessionsgeschwindigkeit des Gegenlaufes übereinstimmt, so wird sich der Gegenlauf einstellen und zu kritisch großen Ausschlägen führen können. Nach Beobachtungen im Eidg. Masch.-Lab. können solche Kräfte auf noch nicht ganz abgeklärte Weise selbsttätig entstehen, sobald die Nabe locker sitzt, ein Fall, der im Dampfturbinenbetrieb nicht ausgeschlossen ist.

c) Ableitung der Kreiselmomente aus dem Vektor des Dralls.

Für die Bewegung eines starren Körpers um seinem Schwerpunkt gilt der Satz, daß die elementare geometrische Zunahme des Drallvektors, geteilt durch die Dauer des zugehörigen Zeitelementes, die Größe und Richtung der Achse des auf den Körper wirkenden Drehmoments ergibt. Ist ω_1 die Drehgeschwindigkeit um die Achse des Hauptträgheitsmomentes Θ_1, so ist der Drallvektor die Strecke $\Theta_1\,\omega_1$ in Richtung der Achse in solchem Sinn aufgetragen, daß die Drehung vom Endpunkte aus gesehen z. B. gegen den Uhrzeigersinn geht. Ähnlich wären $\Theta_2\,\omega_2$, $\Theta_3\,\omega_3$ die Vektoren für die Einzeldrehungen um die zwei anderen Hauptachsen. Finden die Drehungen gleichzeitig statt, so ist der resultierende Vektor die geometrische Summe der Einzelvektoren.

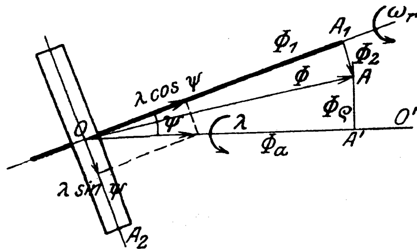


Abb. 405 c.

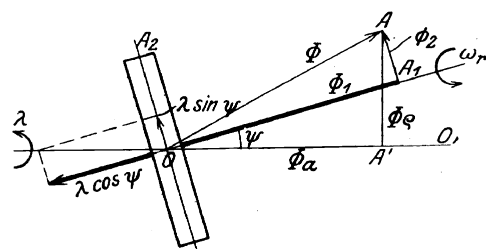


Abb. 405 d.

Drall-Vektoren und Kreiselkräfte.

Auf den Fall der umlaufenden Scheibe angewendet, sei gemäß Abb. 405 c ω_r die relative Drehgeschwindigkeit um die Hauptachse OA_1 und λ die gleichsinnige Präzessionsgeschwindigkeit um die geometrische Drehachse OO'. Man muß diese nach den Hauptachsen zerlegen, und erhält als Drallvektoren um OA_1 und OA_2

$$\Phi_1 = \Theta_p\,(\omega_r + \lambda\cos\psi) \quad \text{und} \quad \Phi_2 = \Theta_d\,\lambda\sin\psi\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20\,\mathrm{a})$$

Die Resultierende hieraus ist $\Phi = OA$ mit den axialen und radialen Komponenten Φ_a, Φ_ϱ. Im Beharrungszustand bleibt die Größe der Vektoren unverändert, es dreht sich aber Φ mit der Geschwindigkeit λ um OO'. Am Ende der Zeit dt beträgt die geometrische Zunahme die zur Bildebene senkrecht stehende Strecke $\Phi_\varrho\,\lambda\,dt$, die die Lage und den Sinn des auf die Scheibe wirkenden Drehmomentes angibt. Die Größe desselben ist

$$\mathfrak{M} = \Phi_\varrho\,\lambda = [\Theta_p\,(\omega_r + \lambda\cos\psi)\sin\psi - \Theta_d\,\lambda\sin\psi\cos\psi]\,\lambda$$

oder bei kleiner Neigung ψ mit $\Theta_p \simeq 2\,\Theta_d$ angenähert

$$\mathfrak{M} = [2\,(\omega_r + \lambda) - \lambda]\,\lambda\,\Theta_d\,\psi$$

und mit $\omega = \omega_r + \lambda$ als absoluter Drehschnelle

$$\mathfrak{M} = (2\,\omega\,\lambda - \lambda^2)\,\Theta_d\,\psi$$

und schließlich bei synchroner Präzession im Gleichlauf, d. h. $\lambda = \omega$

$$\mathfrak{M}_{gl} = \omega^2\,\Theta_d\,\psi\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20\,\mathrm{b})$$

Bei einer Präzession im Gegenlauf ändert gemäß Abb. 405d λ sein Vorzeichen. Es wird also

$$\Phi_1 = \Theta_p (\omega_r - \lambda \cos \psi); \quad \Phi_2 = \Theta_d \lambda \sin \psi .$$

Die Zerlegung des resultierenden Φ liefert, wenn wir von Anfang an ψ als klein voraussetzen,

$$\Phi_\varrho = \Phi_1 \psi + \Phi_2 = [\Theta_p (\omega_r - \lambda) + \Theta_d \lambda] \psi .$$

Hieraus folgt mit $\Theta_p = 2\,\Theta_d$ und $\omega = \omega_r - \lambda$ die Größe des Drehmomentes

$$\mathfrak{M}_{gn} = \Phi_\varrho \lambda = [2\,\omega \lambda + \lambda^2]\, \Theta_d \psi \,. \quad \ldots \ldots \quad (20c)$$

Dieses ist als von der Welle oder von äußeren Kräften auf die Scheibe ausgeübt zu denken; sein Sinn ist demgemäß der der Uhrzeigerbewegung. Bei synchroner Gegenpräzession ist mit $\lambda = \omega$

$$\mathfrak{M}_{gn} = 3\,\Theta_d\, \omega^2 \psi \quad \ldots \ldots \quad (20d)$$

in Übereinstimmung mit Gl. (20).

Beispiel für Gegenlauf: die fliegende Scheibe.

Gemäß Abb 406 wirken auf die Scheibe die Fliehkraft F und die Wellengegenkraft P, das Kreiselmoment $\mathfrak{M}_k$ und das Biegungsmoment M. Exzentrizität e und Lockerungswinkel δ sind $= 0$ vorausgesetzt. Das Gleichgewicht fordert

$$P = F = m z \omega^2; \quad M = \mathfrak{M}_k = 3\,\Theta_d \omega^2 \tau \quad \ldots \ldots \quad (21)$$

Mit Rücksicht auf das veränderte Vorzeichen von $\mathfrak{M}_k$ erhält man ähnlich wie in Gl. (9) mit (10)

$$\left.\begin{aligned} (2\,\alpha^2 - \omega^2)\, z - \alpha^2 (l \tau) &= 0 \\ 3\,\beta^2 z + (3\,\omega^2 - 2\,\beta^2)(l \tau) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (22)$$

Es findet indifferentes Gleichgewicht statt, falls das Verhältnis z/τ in beiden Gleichungen dasselbe ist. Aus dieser Bedingung ergibt sich

$$3\,\omega^4 - 2\,(3\,\alpha^2 + \beta^2)\,\omega^2 + \alpha^2 \beta^2 = 0 \quad \ldots \ldots \quad (23)$$

und deren Auflösung

$$\omega_{gn}^2 = \frac{1}{3} \left[(3\,\alpha^2 + \beta^2) \pm \sqrt{(3\,\alpha^2 + \beta^2)^2 - 3\,\alpha^2 \beta^2} \right] \quad \ldots \ldots \quad (24)$$

liefert **zwei Werte der kritischen Geschwindigkeit bei Gegenlauf.** Die höhere davon entspricht der Form b der elastischen Linie Abb. 406, wobei ein starkes Kreiselmoment die Scheibe im entgegengesetzten Sinne schief stellt wie bei der tieferen Drehzahl nach a. Dieser kritische Zustand, der dem natürlichen mechanischen „Gefühl" so sehr widerspricht, war gänzlich unbekannt. Sein Bestehen wurde durch Versuche des Verfassers erwiesen. Er stellt sich ein, sobald man auf die Scheibe eine periodische Kraft von derselben Periode wie ω_{gn} einwirken läßt. Er wurde auch einmal beobachtet, als man der Nabe ein kleines Spiel gewährte, wodurch sie auf der Welle in eine ähnliche Relativbewegung geriet, wie ein rollendes Geldstück am Boden kurz vor dem Zurruhekommen. Bei Wiederholung des Versuches später blieb allerdings die Lockerung der Nabe wirkungslos.

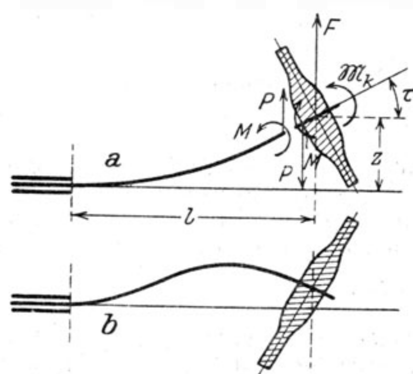


Abb 406. Zwei kritische Geschwindigkeiten bei gegenläufiger Präzession.

Es erwies sich nebenbei gesagt als fast unmöglich, die fliegende Welle im Lager durch große Länge desselben oder zwei nebeneinander angeordnete Büchsen tatsächlich „einzuspannen". Es ergibt sich immer eine zusätzliche Federung, wodurch die Beobachtungswerte von den theoretischen Werten Gl. (24) abweichen.

Angenäherte Werte von ω, wenn α **klein ist gegen** β, was meist zutreffen dürfte. Durch Entwicklung der Wurzeln in Gl. (12) und (24) und Vernachlässigung höherer Potenzen von α/β erhält man für den Gleichlauf

$$\omega_{gl}^2 = \frac{\alpha^2}{2} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)$$

und für den Gegenlauf, indem man die Wurzel mit dem —-Zeichen vorausnimmt,

$$\omega_{gn_1}^2 = \frac{\alpha^2}{2} \left(1 - \frac{9}{4} \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right), \quad \omega_{gn_2}^2 = \frac{2}{3} \left(\frac{9}{4}\alpha^2 + \beta^2\right) \quad \ldots \ldots \quad (25)$$

Da die gewöhnliche kritische Geschwindigkeit den Wert $\omega_k^2 = \alpha^2/2$ besitzt, so ist die Reihenfolge, wie ersichtlich, die, daß zunächst die tiefere Gegenlauf-, dann die gewöhnliche, dann die Gleichlauf- und schließlich die höhere Gegenlauf-Geschwindigkeit sich einstellen.

d. Kreiselwirkung beliebig geformter Schwungmassen.

Von der Scheibenform abweichende Schwungmassen sind insbesondere die Trommeln der Überdruckturbine, die infolge ihres erheblichen Flächenträgheitsmomentes als starr angesehen werden dürfen. Die entwickelte Kreiselwirkung kann nach den oben entwickelten Formeln behandelt werden, doch besteht nicht mehr die Beziehung $\Theta_p = 2\,\Theta_d$, es wird im Gegenteil Θ_d im allgemeinen $> \Theta_p$. Da indes oben vorausgesetzt wurde, daß die Drehachse eine Hauptachse der Schwungmasse ist, wollen wir der Allgemeinheit halber für den **Fall der synchronen Präzession** eine von dieser Annahme unabhängige Ableitung beifügen. Es sei in Abb. 406a $y + e$ der Abstand des Schwerpunktes in der ausgelenkten Lage; in dieser wird die X-Achse eines im Körper festen Koordinatensystems $XYZS$, die ursprünglich der Drehachse parallel war, um den Winkel τ schief gestellt. Wir haben daher, da τ sehr klein (d. h. $\cos\tau = 1$; $\sin\tau = \tau$) ist

$$\xi' = \xi - \zeta\tau; \qquad \zeta' = \xi\tau + \zeta \quad \ldots \quad (26)$$

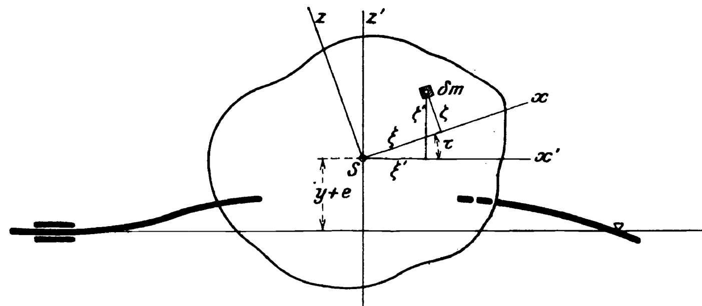


Fig. 406a. Kreiselkräfte beliebig geformter Schwungmassen.

Die Zusammensetzung der Fliehkräfte ergibt die Einzelkraft $P = m\,(y + e)\,\omega^2$ im Schwerpunkt, und das (gegen den Uhrzeiger positiv gerechnete) Moment

$$\mathfrak{M} = \omega^2 \Sigma\delta m\,\xi'\zeta' = \omega^2\Sigma\delta m\,(\xi - \zeta\tau)\;(\xi\tau + \zeta) = \omega^2\tau\,(\Sigma\delta m\,\xi^2 - \Sigma\delta m\,\zeta^2) + \omega^2\,(1 - \tau^2)\,\Sigma\delta m\,\xi\zeta$$

oder mit der Bezeichnung

$$A = \Sigma\delta m\,\xi^2; \qquad B = \Sigma\delta m\,\zeta^2; \qquad C = \Sigma\delta m\,\xi\zeta \quad \ldots \quad (27)$$

und Vernachlässigung von τ^2 gegen 1

$$\mathfrak{M} = [(A - B)\,\tau + C]\,\omega^2 \quad \ldots \quad (28)$$

Nun muß nach den Lehren der Biegungsfestigkeit ausgerechnet werden, welche Formänderung die elastischen Wellenenden unter der Einwirkung von P und $\mathfrak{M}$ erfahren. Jedenfalls hängen sie mit y und τ linear zusammen, und man wird die Gleichungen

$$y = aP + b\,\mathfrak{M}; \qquad \tau = a'P + b'\,\mathfrak{M}$$

aufstellen können. Setzt man die Werte von P und $\mathfrak{M}$ ein, so entsteht

$$(1 - am\omega^2)\,y - b\,(A - B)\,\omega^2\tau = ame\omega^2 + bC\omega^2; \; a'm\omega^2 y + [1 - b'\,(A - B)\,\omega^2]\,\tau = a'me\omega^2 + b'C\omega^2 \quad (29)$$

und diese Gleichungen führen auf unendlich große Werte von y und τ, falls die Determinante der Beiwerte verschwindet, d. h. falls

$$(1 - am\omega^2)\,[1 - b'\,(A - B)\,\omega^2] + a'b\,(A - B)\,m\omega^4 = 0 \quad \ldots \quad (30)$$

ist. Aus dieser Gleichung ergeben sich im allgemeinen zwei mögliche Werte der kritischen Geschwindigkeit ω_k. Es ist bemerkenswert, daß diese vom anfänglichen Wert des Zentrifugalmomentes C nicht abhängen.

Das Trägheitsmoment A übt eine dem Moment B entgegengesetzte Wirkung aus. Hierin kommt eine der Anschauung vertraute Unstabilität der Drehung zum Ausdruck. Ersetzen wir nämlich den Körper durch ein in der Richtung der Drehachse langgestrecktes Rotationsellipsoid, so liegt nahe zu vermuten, daß dieses Ellipsoid bei einer Auslenkung trachten wird, die Drehung um die Achse des größten Trägheitsmomentes vor sich gehen zu lassen, wie man in einem bekannten Versuche der Physik vorzuführen pflegt. Die Verhältnisse liegen rechnerisch erheblich verwickelter und können an Hand der in Abschn. 190 gegebenen Entwicklungen beurteilt werden.

90. Kritische Winkelgeschwindigkeit bei zwei oder mehreren Einzelrädern auf masseloser Welle.

Es möge Abb. 407 den zur Winkelgeschwindigkeit ω ohne Rücksicht auf Kreiselkräfte gehörigen Gleichgewichtszustand darstellen. Im mitumlaufenden Koordinatensystem XYZ seien O_1, O_2 die Durchstoßpunkte der die Lager verbindenden geometrischen Drehachse

x_1, y_1 die Koordinaten des Nabenmittelpunktes der einen, x_2, y_2 desgl. der anderen Scheibe. Für die nach diesen Punkten verschobenen parallelen Achsen der ξ und η seien ξ_1, η_1 und ξ_2, η_2 die Koordinaten der Schwerpunkte S_1, S_2, mithin e_1, e_2 deren „Exzentrizitäten“

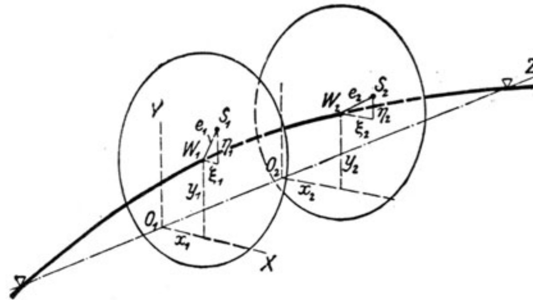


Abb. 407. Zwei Scheiben auf masseloser Welle.

Die Verdrehung der Welle ist gegenüber der Biegung wohl immer so gering, daß von einer Änderung des ursprünglich von e_1 und e_2 gebildeten Winkels abgesehen werden kann. Die von den Scheibenmassen m_1, m_2 entwickelten Fliehkräfte können in die Komponenten

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= (x_1 + \xi_1)\, m_1 \omega^2, \qquad Y_1 = (y_1 + \eta_1)\, m_1 \omega^2 \\ X_2 &= (x_2 + \xi_2)\, m_2 \omega^2, \qquad Y_2 = (y_2 + \eta_2)\, m_2 \omega^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (1)$$

zerlegt werden. Unter ihrer Einwirkung erfährt die Welle eine Einbiegung

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_{11} X_1 + a_{12} X_2, \qquad y_1 = a_{11} Y_1 + a_{12} Y_2 \\ x_2 &= a_{21} X_1 + a_{22} X_2, \qquad y_2 = a_{21} Y_1 + a_{22} Y_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (2)$$

wo $a_{12} = a_{21}$ gesetzt werden kann und für die Beiwerte a lediglich die Kenntnis der Wellenabmessungen und der Lagerungsart erforderlich ist. Setzen wir die Ausdrücke der Kraftkomponenten ein, so ergeben sich die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} m_1 \omega^2 - 1) x_1 + a_{12} m_2 \omega^2 x_2 + a_{11} \xi_1 m_1 \omega^2 + a_{12} \xi_2 m_2 \omega^2 &= 0 \\ a_{21} m_1 \omega^2 x_1 + (a_{22} m_2 \omega^2 - 1) x_2 + a_{21} \xi_1 m_1 \omega^2 + a_{22} \xi_2 m_2 \omega^2 &= 0 \\ (a_{11} m_1 \omega^2 - 1) y_1 + a_{12} m_2 \omega^2 y_2 + a_{11} \eta_1 m_1 \omega^2 + a_{12} \eta_2 m_2 \omega^2 &= 0 \\ a_{21} m_1 \omega^2 y_1 + (a_{22} m_2 \omega^2 - 1) y_2 + a_{21} \eta_1 m_1 \omega^2 + a_{22} \eta_2 m_2 \omega^2 &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots (3)$$

Die hieraus ermittelten Werte $x_1 x_2 y_1 y_2$ wachsen ins Unendliche, falls die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} (a_{11} m_1 \omega^2 - 1), & a_{12} m_2 \omega^2 \\ a_{21} m_1 \omega^2, & (a_{22} m_2 \omega^2 - 1) \end{vmatrix}$$

verschwindet. Es gibt also im allgemeinen zwei Werte der kritischen Geschwindigkeit ω_k, deren Quadrate aus der Gleichung

$$D = (a_{11} m_1 \omega_k^2 - 1)\,(a_{22} m_2 \omega_k^2 - 1) - a_{12}^2 m_1 m_2 \omega_k^4 = 0 \quad \ldots \ldots (4)$$

zu berechnen sind. **Ihr Wert hängt nicht ab von der Größe und Lage der Exzentrizitäten.**

Wir haben hiermit die kritische Geschwindigkeit aus einer Lage der Welle hergeleitet; aber es ist offenbar, daß in jeder anderen Lage, die aus der ersteren durch Drehung entstehe, ähnliche Kraftverhältnisse vorliegen werden. Wichtiger ist die Bemerkung, daß die Kräfte $X_1\, Y_1\, X_2\, Y_2$ in bezug auf die geometrische Wellenachse im allgemeinen ein Moment ergeben werden, welches wir durch ein am Wellenende angreifendes, im Gegensinn drehendes Moment ausgeglichen denken müssen. Da wir die Torsionssteifigkeit der Welle sehr groß voraussetzen, macht dies für die kritische Umlaufzahl nichts aus. Sollten wir verlangen, daß die Fliehkräfte in sich selbst Gleichgewicht halten, so würden wir auf verwickelte Rechnungen geführt, die aber dasselbe ω_k ergeben.

Für den Fall gleicher Massen $m_1 = m_2 = m$ von symmetrischer Anordnung (auch hinsichtlich Wellenstärke und Lagerung) wird $a_{11} = a_{22} = a$; $a_{12} = b$ und $a m \omega_k^2 - 1 = \pm b m \omega_k^2$, woraus

$$m \omega_{k1}^2 = \frac{1}{a - b}, \qquad m \omega_{k2}^2 = \frac{1}{a + b} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (5)$$

folgt. Diese Auswertung geben wir, in elementarer Weise durchgeführt, im nachfolgenden Beispiel wieder.

Beispiel: Symmetrische Welle mit mittlerer Verstärkung.

Wir betrachten den in Ab. 408 dargestellten Fall, wo zwei gleiche Scheiben in je $^1/_4$ der Spannweite einer frei aufliegenden, an den Enden vom Trägheitsmoment J auf J' abgesetzten Welle angebracht sind. Gemäß Abschn. 88 kann die kritische Umlaufzahl auch mittels der Bedingung gefunden werden, daß sich die Fliehkräfte der vollkommen zentrisch aufgekeilt gedachten Räder mit den elastischen Kräften im indifferenten Gleichgewicht befinden. Es gibt hier offenbar zwei solche Gleichgewichtslagen: eine als Verbiegung nach bloß einer Seite (*a*), die andere mit S-förmiger, elastischer Linie nach (*b*). Für den ersten Fall haben wir zunächst die Biegung zu berechnen, die durch zwei beliebige (aber wegen der Symmetrie gleich große) Kräfte P, die an Stelle der Fliehkräfte angreifen, hervorgebracht wird. Denkt man sich die Welle, wie in Nebenfigur *c* angedeutet ist, in der Mitte eingespannt, so wirkt im Schnitt *a* nur ein Kräftepaar Pl und erzeugt die Neigung $\varphi_1 = Pl^2/JE$. Wäre aB starr, so hätte man $y_1 = \varphi_1 l$; infolge der Biegung durch P kommt $y_2 = Pl^3/3J'E$ hinzu. Auf y_0 kommt es nicht an; im ganzen ist also

$$y = y_1 + y_2 = \frac{Pl^3}{3JE}\left(3 + \frac{J}{J'}\right) = \frac{P}{\alpha}$$

mit

$$\alpha = \frac{3JE}{l^3\left(3 + \frac{J}{J'}\right)} \quad \ldots\ldots (6)$$

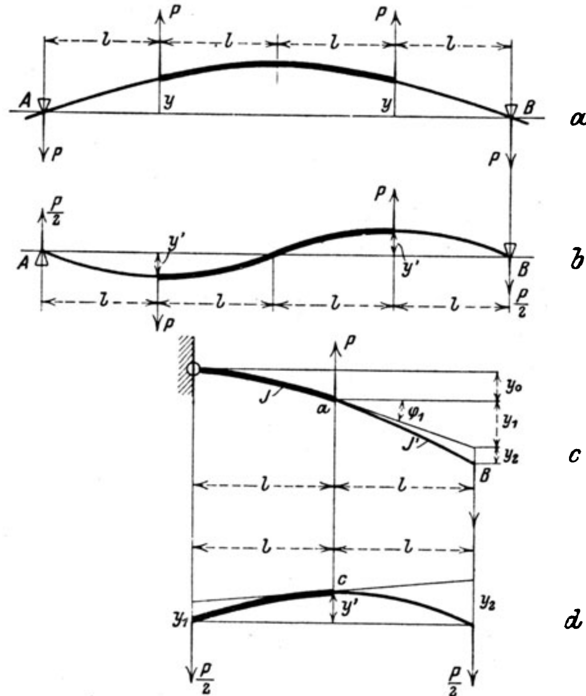


Abb. 408.
Beispiel mit zwei symmetrisch liegenden Scheiben.

Nun muß die Fliehkraft $my\omega_k^2$ der elastischen Rückwirkung gleich sein, woraus

$$my\omega_k^2 = P = \alpha y; \quad \omega_k = \sqrt{\frac{\alpha}{m}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

folgt. Betrachten wir die Verbiegung (*b*), so herrscht in der Mitte ein Moment $= 0$, weil dort eine Wendetangente vorhanden ist. Man kann also die halbe Welle für sich als frei aufliegenden Träger behandeln und findet mit Nebenfigur *d*, wenn die Welle im Punkte C eingespannt gedacht wird:

$$y_1 = \frac{Pl^3}{6JE}; \qquad y_2 = \frac{Pl^3}{6J'E};$$

$$y' = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{Pl^3}{12JE}\left(1 + \frac{J}{J'}\right) = \frac{P}{\alpha'} \quad \text{mit} \quad \alpha' = \frac{12(JE)}{l^3\left(1 + \frac{J}{J'}\right)} \quad \ldots\ldots (8)$$

Es gilt also wie oben

$$my'\omega_k'^2 = P = \alpha' y', \text{ woraus } \omega_k' = \sqrt{\frac{\alpha'}{m}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Bilden wir das Verhältnis der beiden Winkelgeschwindigkeiten, so wird

$$\frac{\omega'}{\omega} = \sqrt{\frac{\alpha'}{\alpha}} = 2\sqrt{\frac{3 + J/J'}{1 + J/J'}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Die Trägheitsmomente verhalten sich wie die 4. Potenzen der Durchmesser d und d'. Wir erhalten folgende Zahlenwerte

d/d'	$= 1$	1,2	1,5	2,0
J/J'	$= 1$	2,08	5,05	16,0
ω'/ω	$= 2{,}83$	2,57	2,31	2,12

Aus dieser Zusammenstellung geht der große Einfluß des Wellenabsatzes klar hervor

Beliebig viele Einzelräder.

Sind n Räder auf der (massenlos gedachten) Welle vorhanden, so lauten die Formänderungsgleichungen für die y-Koordinate:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = a_{11} Y_1 + a_{12} Y_2 + \ldots a_{1n} Y_n \\ y_2 = a_{21} Y_1 + a_{22} Y_2 + \ldots a_{2n} Y_n \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ y_n = a_{n1} Y_1 + a_{n2} Y_2 + \ldots a_{nn} Y_n \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (11)$$

wobei $a_{k\lambda} = a_{\lambda k}$ ist, nach Einführung der Y-Werte liefert die Nullsetzung der Determinante

$$D = \begin{vmatrix} (a_{11} m_1 \omega^2 - 1) & a_{12} m_2 \omega^2 \ldots & a_{1n} m_n \omega^2 \\ a_{21} m_1 \omega^2 & (a_{22} m_2 \omega^2 - 1) \ldots & a_{2n} m_n \omega^2 \\ - \quad - & - \quad - \quad - & - \quad - \\ a_{n1} m_1 \omega^2 & a_{n2} m_2 \omega^2 \ldots & (a_{nn} m_n \omega^2 - 1) \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots \ldots (12)$$

die Gleichung zur Bestimmung der kritischen Geschwindigkeiten, aus der sich im allgemeinen n verschiedene Werte derselben ergeben.

Über die Größe der Einsenkungen bei endlos zunehmenden ω leitet v. Mises[1]) folgenden wichtigen Satz ab: Man schreibe in (11) die linken Seiten als $(y_1 + \eta_1) - \eta_1$; $(y_2 + \eta_2) - \eta_2 \ldots$, wo η_1, η_2, ... die Exzentrizitäten bedeuten. Löst man die Gleichungen nach den Unbekannten $(y_1 + \eta_1)$; $(y_2 + \eta_1)$; ... auf, so ergibt sich $y_1 + \eta_1 = D_1/D$, wo D die oben angeschriebene Determinante (12), D_1 die aus ihr hervorgehende, wenn man die erste Kolonne durch $-\eta_1 - \eta_2 \ldots$ ersetzt, bedeutet. D ist in ω^2 n-ten Grades, D_1 bloß $(n-1)$-ten Grades, also ist bei $\omega = \infty$; $y_1 + \eta_1 = 0$.

Bei unbeschränkt gesteigerter Geschwindigkeit nähern sich die Massenschwerpunkte unbegrenzt der Achse, die Welle „zentriert" sich selbsttätig.

91. Stetig belastete Welle (ohne Rücksicht auf Kreiselkräfte).

Die als prismatischer Stab mit ungleichen Hauptträgheitsmomenten vorausgesetzte Welle sei durch über die ganze Länge verteilte Strecken belastet. Wir denken uns jede davon in unendlich viele unendlich dünne Scheiben gespalten und gleichmäßig verteilt, so daß die Belastung als eine stetige angesehen werden kann. Wir betrachten die Bewegung relativ zu einem mit ω sich drehenden Raum, und es bedeute:

Abb. 409. Kräfte am Wellenelement.

- m_1 die Masse der Scheiben, einschließlich den zugehörigen Wellenanteil für die Längeneinheit
- XYZ die Koordinatenachsen, wobei X die Verbindungsgerade der Lagermittel Y wage-, Z lotrecht, und zwar parallel zu den Hauptachsen der Querschnitte, gerichtet sind.
- $J_y\ J_z$ die Hauptquerschnitts-Trägheitsmomente,
- $e_y\ e_z$ die Komponenten der Exzentrizität nach der Y- und Z-Richtung,
- $M, S,$ das Biegende Moment und die Schubkraft in einem Querschnitt.

Infolge der unregelmäßig verteilten Exzentrizität nimmt die elastische Linie die Gestalt einer Raumkurve an. Abb. 409 stellt Aufriß und Grundriß dar, wobei, da von der Schwere abgesehen wird, die Verbindungslinie der Lagermittel, d. h. OX die Drehachse ist, somit für ein Element dx die Masse $= m_1 dx$ und die Fliehkraftkomponenten durch die Ausdrücke

$$dY = q_y dx = m_1 dx (y + e_y) \omega^2; \quad dZ = q_z dx = m_1 dx (z + e_z) \omega^2 \quad \ldots . (1)$$

[1]) Monatshefte f. Math. u. Phys. XXII, 1911, S. 43.

gegeben sind. Das Gleichgewicht der Kräfte und Momente (für den Elementenmittelpunkt) in der wagerechten Ebene erfordert:

$$S_y' - S_y + q_y\,dx = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dS_y}{dx} = -q_y \quad \ldots \quad (2)$$

$$M_y' - M_y + S_y'\frac{dx}{2} + S_y\frac{dx}{2} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dM_y}{dx} = -S_y \quad \ldots \quad (3)$$

Die Grundformel der Biegung aber lautet bekanntlich:

$$J_y E\frac{d^2 y}{dx^2} = M_y \quad \ldots \quad (4)$$

wobei bei dem angenommenen Biegungssinn das positive Vorzeichen von M gilt. Aus (2) und (3) folgt

$$\frac{d}{dx}\left(J_y E\frac{d^2 y}{dx^2}\right) \quad \text{und} \quad \frac{d^2 M_y}{dx^2} = q_y \quad \ldots \quad (4a)$$

Indem wir M_y aus (4) in 4a einsetzen:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(J_y E\frac{d^2 y}{dx^2}\right) = q_y = m_1 (y + e_y)\,\omega^2 \quad \ldots \quad (5)$$

Eine ähnliche Gleichung, die von (5) unabhängig ist, gilt für die senkrechte Ebene. Es bestehen für die beiden Hauptachsenrichtungen voneinander unabhängige kritische Biegungszustände[1]). Um verwickelte Rechnungen zu vermeiden, machen wir die vereinfachende Annahme

$$J_y = J_z = J = \text{unveränderlich} \quad \ldots \quad (6)$$

ebenso

$$m_1 = \text{unveränderlich},$$

und behandeln zunächst den

1. Fall. $e_y = e_z = \text{überall} = 0$.

Gleichung (5) vereinfacht sich zu

$$JE\frac{d^4 y}{dx^4} = m_1\,\omega^2 y \quad \ldots \quad (7)$$

und die kritische Drehzahl wird die sein, bei der die Welle sich in bestimmter Form im indifferenten Gleichgewicht befindet. Daß solches möglich ist, haben wir an Hand von Gl. (7) nachzuweisen.

Bekanntlich ist $y = a e^{\varphi x}$ eine Lösung von (7), nach deren Einsetzen sich $\varphi^4 = m_1\omega^2/JE$ als Bedingung für φ ergibt. Ist nun

$$k = +\sqrt[4]{\frac{m_1\,\omega^2}{JE}} \quad \ldots \quad (8)$$

so ist nicht etwa einfach $\varphi = k$, sondern wir haben die vollständige Wurzelzahl: $\varphi_1 = +k$; $\varphi_2 = -k$; $\varphi_3 = ik$; $\varphi_4 = -ik$ in Betracht zu ziehen, und das allgemeine Integral als

$$y = a e^{\varphi_1 x} + a' e^{\varphi_2 x} + a'' e^{\varphi_3 x} + a''' e^{\varphi_4 x}$$

anzusetzen. Indem man für $a''\,a'''$ konjugiert komplexe Ausdrücke einführt, ergibt sich in bekannter Weise

$$y = a e^{kx} + a' e^{-kx} + b\cos kx + b'\sin kx \quad \ldots \quad (9)$$

Die Beiwerte $a\,a'\,b\,b'$ ergeben sich aus den Bedingungen der Aufgabe (insbesondere der Lagerungsart wie folgt:

α) **Die beiderseits frei aufliegende Welle** von der Länge L. Wir verlegen den Koordinatenanfang in das linke Lagermittel; dann muß die elastische Linie folgenden Bedingungen genügen:

für $x = 0$ muß $y = 0$ und $M = 0$, d. h. $d^2y/dx^2 = 0$ sein,
„ $x = L$ „ „ „ „ „ „ „ „ „.

Nun ist

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= k\,[a e^{kx} - a' e^{-kx} - b\sin kx + b'\cos kx] \\
\frac{d^2 y}{dx^2} &= k^2\,[a e^{kx} + a' e^{-kx} - b\cos kx - b'\sin kx] \\
\frac{d^3 y}{dx^3} &= k^3\,[a e^{kx} - a' e^{-kx} + b\sin kx - b'\cos kx]
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (10)$$

[1]) Vgl. Abschn. 191.

Wir führen die Abkürzungen

$$e^{kL} = p; \quad e^{-kL} = m; \quad \cos kL = c; \quad \sin kL = s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

ein. Dann schreiben sich die Bedingungsgleichungen

$$\left.\begin{array}{ll} a + a' + b = 0 & ap + a'm + bc + b's = 0 \\ a + a' - b = 0 & ap + a'm - bc - b's = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

Damit diese für endliche Werte von $aa'bb'$ bestehen können, muß bekanntlich die Determinante ihrer Beiwerte verschwinden. Man gelangt in unserem Fall zum Endergebnis einfacher durch allmähliches Ausscheiden der Beiwerte. Die beiden linksstehenden Gleichungen liefern durch Subtraktion $b = 0$. Damit folgt aus der ersten $a' = -a$, dies in die rechtsstehenden eingesetzt liefert $a(p-m) + b's = 0$; $a(p-m) - b's = 0$, aber durch Addition $a(p-m) = 0$ woraus $a = 0$, sodann

$$b's = b' \sin kL = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Aus dieser Gleichung ist zu folgern, daß entweder $b' = 0$ oder $\sin kL = 0$ sein muß. Das letztere kann nur in isolierten Punkten, bei den ausgezeichneten Werten

$$kL = \pi; \quad 2\pi; \quad 3\pi; \ldots n\pi \ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

stattfinden, und hieraus ergeben sich mit (8) die **kritischen Geschwindigkeiten**

$$\omega_{kn} = (n\pi)^2 \sqrt{\frac{JE}{m_1 L^4}} = (n\pi)^2 \sqrt{\frac{JE}{ML^3}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

wo $M = m_1 L$ die gesamte Masse von Scheiben und Welle bedeutet. Die Verhältnisse der Geschwindigkeiten sind:

$$\omega_{k1} : \omega_{k2} : \omega_{k3} : \ldots = 1 : 2^2 : 3^2 : \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

Der tiefste Wert stimmt bemerkenswert nahe mit demjenigen überein, den man erhält, wenn man die Hälfte der gesamten Masse in der Mitte der gewichtslos gedachten Welle vereinigt. Dann ist nach Abschn. 88

$$\omega_{k1} = \sqrt{\frac{96\,JE}{ML^3}} = 9{,}80 \sqrt{\frac{JE}{ML^3}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

während nach (15) der Beiwert vor der Wurzel $\sim 9{,}88$ ausmacht. Durch Auflösung findet man aus (15) den Wellendurchmesser

$$D = 0{,}6762 \sqrt[4]{\frac{ML^3 \omega_{k1}^2}{E}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

Das Verhalten der Welle ist folgendes: Unterhalb von ω_{k1} muß $b' = 0$ sein, die Welle bleibt (in senkrechter Aufstellung) gerade; bei ω_{k1} ist $\sin \cdot kL = 0$ somit kann b′ einen beliebigen Wert besitzen, die Form der elastischen Linie ist

$$y_1 = b' \sin \pi \frac{x}{L} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

eine reine Sinuslinie zwischen $0 - \pi$. Für $\omega_{k1} < \omega < \omega_{k2}$ ist die Welle wieder vollkommen gerade, bei ω_{k2} ist wieder b' beliebig, und die Form der elastischen Linie

$$y_2 = b' \sin 2\pi \frac{x}{L} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

eine vollständige Sinuslinie zwischen $0 - 2\pi$. So wechseln die gerade Linie und die Sinusform mit $n - 1$ Zwischen-Knotenpunkten miteinander ab. Die Welle nimmt die in Abb. 409a dargestellten Formen an. Dabei ist zu beachten, daß die Sinusverbiegung nicht von selbst entstehen wird, sondern nur wenn ein äußerer Anstoß die Welle aus der Mittellage auslenkt. Bei wagerechten Wellen zählt die Verbiegung wie wir in Abschn. 190 nachweisen, von der durch die Schwerebelastung erzeugten (statischen) elastischen Linie ab.

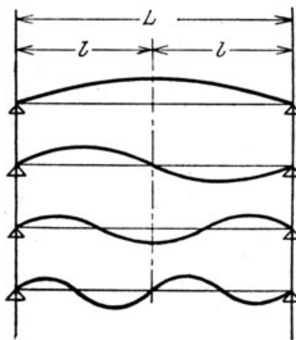


Abb. 409a. Wellenbiegungsformen bei freier Auflage.

Die Verbiegung nach der z-Richtung ist von der nach y unabhängig: man wird also im Fall (20) $z_2 = c' \sin 2\pi \frac{x}{L}$ erhalten, dessen Zusammensetzung mit y_2 die resultierende Verbiegung

$$\varrho = \varrho' \sin 2\pi \frac{x}{L} \quad \text{mit} \quad \varrho' = \sqrt{b'^2 + c'^2} \quad \ldots\ldots (21)$$

liefert; die elastische Linie liegt in einer Ebene.

β) **Die beiderseits eingespannte Well** muß den Bedingungen

für $x = 0$ sei $y = 0$ und $dy/dx = 0$
für $x = L$ sei $y = 0$ und $dy/dx = 0$

genügen. Somit ergeben sich mit Rücksicht auf (10) und (11) die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{ll} a + a' + b = 0 & ap + a'm + bc + b's = 0 \\ a - a' + b' = 0 & ap - a'm - bs + b'c = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (22)$$

Beim allmählichen Ausscheiden gelangt man auf

$$(p + m)\,c = 2,$$

was die Einführung des hyperbolischen Kosinus

$$\cos h(kL) = \frac{1}{2}(p + m) = \frac{1}{2}(e^{kL} + e^{-kL}) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (23)$$

für den in der „Hütte" Tabellenwerte ausgerechnet vorliegen, geraten erscheinen läßt und die Bedingung

$$\cos h\,(kL)\cos(kL) = 1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (24)$$

ergibt. Zeichnet man sich den Verlauf der linksstehenden Funktion von kL graphisch auf, so sieht man, daß der erste Wurzelwert bei rd. $kL = 1{,}506\,\pi$, also rd. $3\pi/2$ liegt; die übrigen fast genau bei $5\pi/2$; $7\pi/2$ ... allgemein bei $(2n + 1)\pi/2$; also ist der Wert der kritischen Geschwindigkeit

$$\omega_{kn} = \left[\frac{(2n+1)\pi}{2}\right]^2 \sqrt{\frac{JE}{ML^3}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (25)$$

wobei M wieder die Gesamtmasse der Scheiben samt der Welle bedeutet. Die tiefste davon ist

$$\omega_{k1} = 22{,}38\sqrt{\frac{JE}{ML^3}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (26)$$

Setzt man voraus, daß die Welle infolge falsch ausgerichteter Lager mit der geometrischen Achse einen kleinen Winkel einschließt, so ergibt die Rechnung eigentümlicherweise dasselbe ω_k wie bei richtiger Einspannung. Die Verhältnisse der aufeinanderfolgenden kritischen Drehzahlen sind

$$\omega_{k1} : \omega_{k2} : \omega_{k3} : \ldots = 3^2 : 5^2 : 7^2 : \ldots = 1 : 2{,}8 : 5{,}4 : 9 : \ldots \quad \ldots \ldots \ldots (27)$$

γ) **Die auf einer Seite eingespannte auf der anderen in Kugelschalen gestützte** Welle von der Länge l führt, wenn der Anfangspunkt mit dem eingespannten Ende übereinstimmt, auf die Bedingungen:

für $x = 0$ sei $y = 0$ und $dy/dx = 0$
für $x = l$ sei $y = 0$ und das Moment, d. h. $d^2y/dx^2 = 0$.

Die Ausrechnung liefert

$$\operatorname{tg}h\,(kl) = \operatorname{tg}(kl) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (28)$$

mit den Wurzeln

$$kl = \frac{5}{4}\pi;\quad \frac{9}{4}\pi;\quad \frac{13}{4}\pi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (29)$$

Dabei ist die tiefste kritische Drehzahl

$$\omega_{k1} = \left(\frac{5}{4}\pi\right)^2 \sqrt{\frac{JE}{Ml^3}} = 15{,}42\sqrt{\frac{JE}{Ml^3}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (30)$$

Das Verhältnis der Drehzahlen ist

$$\omega_{k1} : \omega_{k2} : \ldots = 5^2 : 9^2 : 13^2 : \ldots = 1 : 3{,}23 : 6{,}75 : \ldots \quad \ldots \ldots \ldots (31)$$

Diese Ergebnisse könnten ohne Rechnung aus dem Falle β) abgeleitet werden, denn die Wellenform γ) stimmt bei $L = 2l$ mit jenen Wellenformen β) überein, die ungeraden Funktionen von x, d. h. einem Knotenpunkt in der Mitte entsprechen.

δ) **Die überhängende, einseitig eingespannte Welle** von der Länge l gehorcht, wenn der Koordinatenanfang mit dem Einspannungspunkt übereinstimmt, den Bedingungen:

für $x = 0$ sei $y = 0$ und $dy/dx = 0$
für $x = l$ sei $d^2y/dx^2 = 0$ und S, d. h. $d^3y/dx^3 = 0$.

Die Ausrechnung ergibt

$$\cos h\,(kl)\cdot\cos(kl) + 1 = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (32)$$

Die kleinste Wurzel in $kl = 1{,}875$ oder rd. $1{,}194\,(\pi/2)$, die übrigen sind sehr nahe $\frac{3}{2}\pi$; $\frac{5}{2}\pi$; ... Demnach ist die tiefste kritische Drehzahl

$$\omega_{k1} = 3{,}516\sqrt[2]{\frac{JE}{Ml^3}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots 33)$$

Das Verhältnis der Drehzahlen ist

$$\omega_{k1} : \omega_{k2} : \ldots = 1{,}194^2 : 3^2 : 5^2 \ldots = 1 : 4{,}38 : 17{,}5 : \ldots \quad \ldots \ldots \ldots (34)$$

2. Fall. Die Exzentrizität ist unveränderlich $= e_0$, die Schwerpunkte liegen in einer Ebene.

Wir machen jene Ebene zur XOY-Ebene und erhalten als Grundgleichung

$$JE\frac{d^4y}{dx^4} = m_1\,\omega^2(y + e_0) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (35)$$

Das Integral wird wie bei (7) abgeleitet, wenn man vorher

$$\eta = y + e_0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (35a)$$

setzt, woraus für η die Gl. (9) und im ganzen

$$y = a e^{kx} + a' e^{-kx} + b\cos kx + b'\sin kx - e_0 \quad \ldots \ldots \quad (35b)$$

folgt. Beschränken wir uns auf die an beiden Enden frei aufgelagerte Welle von der Länge L mit dem Koordinatenanfang im linken Endpunkt, so ergeben dieselben Endbedingungen wie im Falle 1) unter α) die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{ll} a + a' + b = e_0; & ap + a'm + bc + b's = e_0 \\ a + a' - b = 0; & ap + a'm - bc - bs = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (36)$$

Nach Auflösung derselben erhält man

$$y = \frac{e_0}{2}\left\{\frac{1 - e^{-kL}}{e^{kL} - e^{-kL}}\,e^{kx} + \frac{e^{kL} - 1}{e^{kL} - e^{-kL}}\,e^{kx} + \cos kx + \frac{1 - \cos kL}{\sin kL}\sin kx - 2\right\} \quad . \quad (37)$$

Diese Formel lehrt anschaulich, daß es „unendlich" große Auslenkungen gibt, sobald die Schwerpunkte verlegt sind, u. zw. treten diese auf, wenn $\sin(kL) = 0$, während gleichzeitig $\cos kL \neq 1$ ist, d. h. für die Werte

$$\left.\begin{array}{l} kL = \pi;\ 3\pi;\ 5\pi \ldots \\ kL = 2\pi;\ 4\pi;\ 6\pi \ldots \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (38)$$

während bei der vorletzte Ausdruck die Form $0:0$ annimmt, d. h. der ihm entsprechende Auslenkungsanteil eine beliebige Größe besitzen kann, aber nicht selbstätig annehmen wird. Das Gleichgewicht in Bezug auf diesen Anteil ist „indifferent". Die Reihe der zu den Werten (38) gehörenden Winkelgeschwindigkeiten ist aber nichts anderes als die durch (15) und (16) ausgedrückte kritische Reihe. Warum für $kL = 2\pi \ldots 4\pi \ldots$ die Auslenkung nicht unendlich wird, werden wir im folgenden unter 3) erklären. Um mittels Gl. (37) die wirkliche Form der elastischen Linie zu ermitteln, kann man ihr eine einachere Form erteilen, wenn man den Koordinatenanfang in den Wellenhalbierungspunkt verlegt, was auf den Ersatz $x = l + x'$ wo $l = L/2$ hinausläuft. Die zwei ersten Glieder lassen sich zu $\operatorname{Cos} kx' : \operatorname{Cos} kl$ zusammenziehen, wo das Zeichen Cos den hyperbolischen Kosinus bedeutet. Für $(1 - \cos kL)/\sin kL$ erhält man $\sin^2 kl/(\sin kl \cos kl)$. Das dritte und vierte Glied ergeben dann zusammen $\frac{\sin kl \cos kx'}{\sin kl \cos kl}$, wo mit $\sin kl$ gekürzt werden darf, solange diese Ausdruck nicht $= 0$ geworden ist, also für alle Werte von kl mit Ausnahme von $kl = \pi,\ 2\pi,\ 3\pi \ldots$. Im ganzen erhält man

$$y = \frac{e_0}{2}\left[\frac{\operatorname{Cos} kx'}{\operatorname{Cos} kl} + \frac{\cos kx'}{\cos kl} - 2\right] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (39)$$

gültig für alle kl **mit Ausnahme der isolierten Werte** $kl = \pi,\ 2\pi,\ 3\pi \ldots$, bei denen das zweite Glied mit der willkürlichen Zahl $\frac{0}{0}$ vermehrt erscheint, also ein indifferentes Gleichgewicht besteht.

Berechnen wir nach Gl. (39) die Durchbiegung in der Wellenmitte für verschiedene Werte ω/ω_{k1}, wobei mit Rücksicht auf Gl. (8) und (15)

$$\frac{\omega}{\omega_{k1}} = \left(\frac{Lk}{\pi}\right)^2 = \left(\frac{2lk}{\pi}\right)^2 \quad \text{oder} \quad kl = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\omega}{\omega_{k1}}} \quad \ldots \ldots \quad (40)$$

gesetzt wird. Man erhält für

$\omega/\omega_{k1} =$	0,5	0,90	0,95	0,99	1,0	1,01	1,05	1,10,
$y/e_0 =$	0,54	5,4	11,5	56,7	∞	$-$ 56,7	$-$ 11,9	$-$ 5,8.

Diese in Abb. 409b dargestellten Auslenkungen bedingen die Größe der entwickelten Fliehkräfte $m_1(y + e_0)\,\omega^2$ für die Längeneinheit, somit die Lagerbelastung und Erschütterungsgröße. Man könnte leicht ermitteln, bei welcher Exzentrizität das Eigengewicht des „Läufers"

durch die Fliehkräfte überwunden und die Welle in den Lagern auf und ab geschleudert wird. Allein schon bevor dies eingetreten ist, kann die Erschütterung unzulässig werden.

In Abb. 409c sind die Biegungsformen der Welle für verschiedene Werte von kL dargestellt. Die Schwerpunkte im stets gleichen Abstand e_0 sind durch schwarze Punkte veranschaulicht. Bis zu $kL = \pi$ wächst die Biegung mit von der Drehachse abgewendeten Schwerpunkten; für $kL > \pi$ aber $< 2{,}5\,\pi$ liegen die Schwerpunkte innerhalb der Welle und der geometrischen Achse[1]), wie bei der einfachen Scheibe, wenn diese über der gewöhnlichen kritischen Geschwindigkeit umläuft. Bei $kL = 2\pi$ wurde der Grenzwert des unbestimmten Ausdruckes $0:0$ in Gl. (37) oder (39) als $= 1$ angenommen. Über $kL = 2\pi$ fängt die Welle an eine S-Linie zu bilden, und geht in der Nähe von $kL = 3\pi$ wieder „unendlich" großen Verbiegungen entgegen.

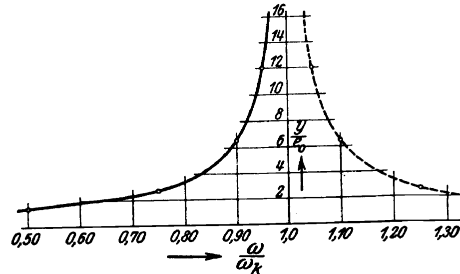


Abb. 409b. Biegungsgröße in der Nähe der kritischen Drehzahl.

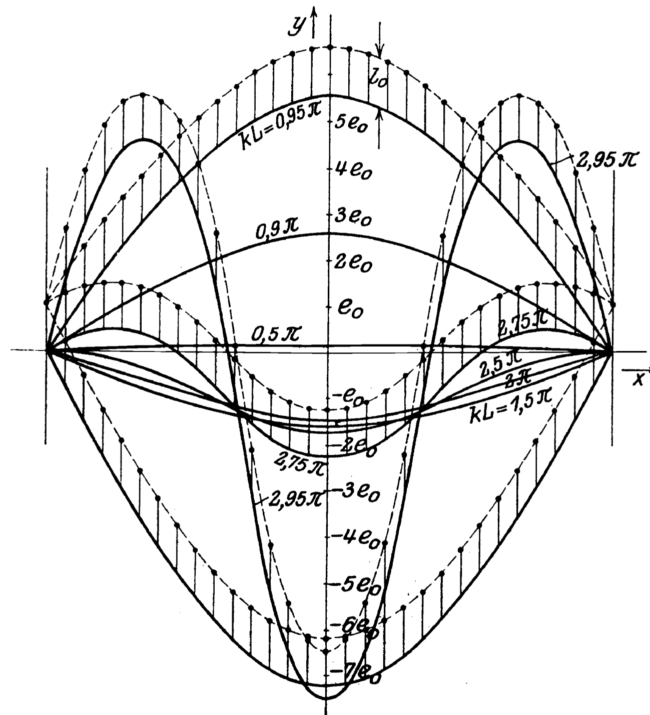


Abb. 409c. Biegungsformen bei überall gleicher und gleichgerichteter Exzentrizität.

3. Fall. Beliebig verteilte Exzentrizität.

Man zerlegt die Exzentrizität einerseits in die Komponenten $e_y\,e_z$ und denkt sich jede für sich als abhängige von x durch eine Fourierreihe über die Länge L, d. h. durch Vielfache der Periode $\pi/L = \lambda$ ausgedrückt:

$$e_y = \Delta_1 \sin \lambda x + \Delta_2 \sin 2\lambda x + \ldots + \Delta_0 + \Delta_1' \cos \lambda x + \Delta_2' \cos 2\lambda x + \ldots \quad (41)$$

mit der Bezeichnung $k^4 = \frac{m_1 \omega^2}{JE}$ lautet dann die Grundgleichung

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = k^4 y + k^4 e_y \quad (42)$$

[1]) Die unterste Linie entspricht dem Wert $kL = 1{,}05\,\pi$. An der obersten ist l_0 in e_0 zu berichtigen.

Das allgemeine Integral hiervon setzt sich aus dem partikulären Integral von e_y und dem Integral der „homogenen“ Gleichung zusammen. Für ein Glied $\Delta_n \sin n\lambda x$ würde der Ansatz

$$y_n = c_n \sin n\lambda x \qquad (43)$$

wenn Δ_n allein vorhanden wäre, zu dem Ergebnis

$$c_n (n\lambda)^4 \sin(n\lambda x) = k^4 c_n \sin(n\lambda x) + k^4 \Delta_n \sin(n\lambda x)$$

führen, woraus man

$$c_n = \frac{k^4 \Delta_n}{(n\lambda)^4 - k^4} \qquad (44)$$

erhält. Da das Integral der homogenen Gleichung das gleiche wie Gl. (9) ist, so wird im ganzen

$$\left.\begin{array}{l} y = ae^{kx} + a'e^{-kx} + b\cos kx + b'\sin kx - \Delta_0 + c_1 \sin\lambda x + c_2 \sin 2\lambda x + \ldots \\ \qquad + c_1' \cos\lambda x + c_2' \cos 2\lambda x + \ldots \end{array}\right\} . \qquad (45)$$

Die Beiwerte sind durch die Endbedingungen zu bestimmen. Beschränken wir uns auf den Fall der frei aufliegenden Welle und es sei Δ_0 und alle $c = 0$ bis auf c_n, so sind die Bedingungsgleichungen, wie man leicht nachweist, dieselben wie Gl. (12) für Fall (1), und man erhält mithin $a = a' = b = 0$ und $b' \sin kL = 0$, also ist bei $\sin kL = 0$, d. h. für die früher aufgestellten kritischen Drehzahlen jeweils b' willkürlich. Das Zusatzglied mit c_n bleibt stets endlich mit Ausnahme der n-ten kritischen Drehzahl, denn für diese ist $kL = n\pi$, also $k = n\pi/L$ und

$$c_n = \frac{k^4 \Delta_n}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4} = \infty \qquad (46)$$

Daraus folgt, daß die harmonischen Komponenten der Exzentrizität **eine auswählende Wirkung auf die kritischen Drehzahlen ausüben**, in dem Sinne, daß die n-te Komponente nur bei der n-ten kritischen Drehzahl den Ausschlag unendlich groß werden läßt. Ohne diese bestimmte Komponente bleibt er trotz dem Vorhandensein aller übrigen endlich, beziehungsweise er ist nur im Sinne des „indifferenten“ Gleichgewichtes willkürlich. Die gleichen Folgerungen wie für y gelten auch für die Koordinate z.

Der Knesersche Massenausgleich.

Kneser[1]) hat nachgewiesen, daß bei einer stetig belasteten Welle mit beliebig gruppierten Schwerpunkten der einzelnen Scheiben, durch geeignete Änderung der Schwerpunktsabstände und zwar nur auf einem begrenzten Teil der Wellenlänge, die tiefste und beliebig viele der höheren kritische Umlaufzahlen unschädlich gemacht werden können. Diese besondere Gruppierung bringt die Wirkung hervor, daß sich bei der kritischen Umlaufzahl Welle und Scheibe im indifferenten Gleichgewicht befinden; die Unschädlichkeit des Ausgleiches beschränkt sich also darauf, die Ausschläge nicht von selbst ohne Ende zunehmen zu lassen, indes wäre die Welle bei der betreffenden Umlaufzahl doch mit der Besonderheit behaftet, daß sie einem Impuls, z. B. einem Wasserschlag, keinen Widerstand entgegensetzt.

Würde ein Impuls bei jeder Umdrehung an derselben Stelle wiederkehren, so könnte freilich die Verschiebung stark anwachsen, es ist also zu prüfen, ob die Möglichkeit eines solchen Vorkommnisses im praktischen Betrieb gegeben ist oder nicht.

Der allgemeine mathematische Nachweis des Kneserschen Theorems ist recht verwickelt und muß in der Originalabhandlung nachgelesen werden. Die unter 3. gegebene Darstellung vermittelt eine Vorstellung davon, von welchen Grundgedanken Kneser ausgeht. Der Vorschlag hat vorläufig bloß theoretisches Interesse, da wir noch keine Mittel kennen, um die Lage der Schwerpunkte im zusammengebauten Läufer zu ermitteln; doch erklärt er anderseits, warum in der Praxis bei einzelnen Ausführungen eine kritische Umlaufzahl überhaupt nicht feststellbar war: Die Scheibenschwerpunkte der betreffenden Turbinen haben zufällig die Knesersche Gruppierung angenommen. Denn der sonst denkbare Fall, daß alle Exzentrizitäten genau $= 0$ waren, ist weit weniger wahrscheinlich.

4. Die glatte Welle unter dem Einflusse ihrer Eigenmasse.

Ist eine sonst unbelastete (z. B. lotrecht angeordnete) Welle von Anfang an verbogen, so wird sie durch die Fliehkraft weiter ausgelenkt, und die ausgeübte elastische Gegenkraft ist dem Unterschied zwischen der wahren und der anfänglichen Durchbiegung proportional. Die Welle wird sich verhalten, als wäre eine ideale geradlinige Achse vorhanden, die die elastischen Kräfte hergibt, während die Flieh-

[1]) Zeitschr. f. Math. u. Phys. 1904. S. 264.

kräfte durch die exzentrisch gelagerten (im übrigen frei gedachten) Massen der Welle ausgeübt werden. Wir können die entwickelten Formeln ohne weiteres anwenden und haben für die beidseitig frei aufliegende Welle von der Länge $2l$ in Formel (15) einzusetzen

$$M = \mu \pi r^2 2l,$$

wobei unter μ die spezifische Masse zu verstehen ist. Wir erhalten für die tiefste Geschwindigkeit mit $L = 2l$

$$\omega_{k1} = 1{,}234 \frac{r}{l^2}\sqrt{\frac{E}{\mu}} \quad \text{und} \quad r = 0{,}811\, \omega_{k1} l^2 \sqrt{\frac{\mu}{E}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (47)$$

Für die beidseitig eingespannte Welle

$$\omega_{k1} = 2{,}776 \frac{r}{l^2}\sqrt{\frac{E}{\mu}} \quad \text{und} \quad r = 0{,}360\, \omega_{k1} l^2 \sqrt{\frac{\mu}{E}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (48)$$

Für die einseitig überhängende Welle von der Länge l ist

$$M = \mu \pi r^2 l,$$

daher

$$\omega_{k1} = 1{,}747 \frac{r}{l^2}\sqrt{\frac{E}{\mu}} \quad \text{und} \quad r = 0{,}5724\, l^2 \omega_{k1} \sqrt{\frac{\mu}{E}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (49)$$

Schließlich ergibt sich für Flußeisen mit $\mu = 0{,}0078 : 981$; $E = 2150000$ und mit Einführung der minutlichen Drehzahl n in den drei Fällen

$$r = \frac{1{,}633}{10^7} l^2 n \quad \text{bzw.} \quad \frac{0{,}725}{10^7} l^2 n \quad \text{bzw.} \quad \frac{1{,}147}{10^7} l^2 n \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (50)$$

für r und l in Zentimetern. Beispielsweise ist für die frei aufliegende Welle bei $n = 1500$ und $l = 100$ cm; $r = 2{,}45$ cm.

5. Durchbiegung durch das Scheibengewicht und kritische Geschwindigkeit.

Nach der Biegungstheorie ist die Einsenkung der wagerechten Welle unter dem Einflusse des gleichmäßig verteilten Gesamtgewichtes G für die unter α, β, δ behandelten Lagerungsarten, indem wir $L = 2l$ und für G der Reihe nach $2m_1 lg$, $2m_1 lg$, $m_1 lg$ setzen

$$y_0 = \frac{5}{48}\frac{2m_1 l^4 g}{JE}, \quad \text{bzw.} = \frac{1}{48}\frac{2m_1 l^4 g}{JE}, \quad \text{bzw.} = \frac{1}{8}\frac{m_1 l^4 g}{JE}.$$

Für die tiefste kritische Umlaufzahl fanden wir in gleicher Reihenfolge

$$k^4 l^4 = \frac{m_1 \omega_k^2 l^4}{JE} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^4, \quad \text{bzw.} = \left(\frac{3\pi}{4}\right)^4, \quad \text{bzw.} = \left(\frac{1{,}19\,\pi}{2}\right)^4.$$

Aus diesen Beziehungen können wir $m_1 l^4/JE$ berechnen, in die Formel für y_0 einsetzen, und gelangen auf die Ausdrücke

$$y_0 = \frac{1{,}275 g}{\omega_{k1}^2} \quad \text{für die frei aufliegende Welle,}$$

$$= \frac{1{,}294 g}{\omega_{k1}^2} \quad \text{„ „ beidseitig eingespannte Welle,}$$

$$= \frac{1{,}545 g}{\omega_{k1}^2} \quad \text{„ „ einseitig überhängende Welle.}$$

Von K. Baumann stammt die (mittels des unten erläuterten graphischen Verfahrens gewonnene) Regel, daß für die bei wirklichen Gleichdruckturbinen vorkommende Massenverteilung und Wellenform

$$y_0 \simeq \frac{1{,}07 g}{\omega_k^2}$$

zu sein pflegt. Die obigen Verbiegungen sind durchweg stärker als bei einer Welle mit konzentrierter Belastung und gleichem ω_k, weil die Fliehkräfte der in der Nähe der Auflager befindlichen Massen infolge kleinerer Halbmesser stark herabgesetzt werden. Die absoluten Beträge der Einsenkung sind bei langsam laufenden Turbinen (unter 1500 Uml./min) bedeutend, insbesondere wenn man die kritische Geschwindigkeit kleiner macht als die normale.

Beispielsweise wird eine frei aufliegende Welle, deren kritische Drehzahl 1000 i. d. Min. beträgt, eine statische Durchbiegung $y_0 = 1{,}275 \cdot 981/104{,}5^2 = 0{,}114$ cm oder 1,14 mm aufweisen, wie kräftig sie auch sonst scheinen mag. Rechnet man die Erschütterung hinzu, die bei unvollständiger Auswuchtung auftritt, so ergibt sich ein ansehnliches Maß, um das die Laufräder gegenüber den zentrisch bleibenden Leiträdern verschoben werden, und so kann ohne jede weitere Erfahrung festgestellt werden, daß so tiefe kritische Drehzahlen überhaupt unzulässig sind.

6. Eigenschwingung der stetig belasteten Welle und kritische Drehzahl.

Der Schwerpunkt des Massenelementes dx Abb. 409 an der diesmal nicht umlaufenden, sondern in schwingender Bewegung befindlichen Welle besitzt die Beschleunigung $\partial^2 y/\partial t^2$, die beschleunigende Kraft ist $S_y' - S_y = dS_y$, also lautet die Bewegungsgleichung

$$(m_1 dx)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = dS_y \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (51)$$

Außerdem führt das Element eine Drehung mit der Winkelbeschleunigung $\partial^2 \tau/\partial t^2$ aus, wenn $\tau = \partial y/\partial x$ den Neigungswinkel der elastischen Linie bedeutet. Es sei Θ_1 **das auf den Durchmesser bezogene Massenträgheitsmoment der Scheiben für die Längeneinheit,** also $\Theta_1 dx$ das auf das Element entfallende Massenmoment. Das Drehmoment ist $M_y' - M_y + (S_y' + S_y)\,dx/2$, somit lautet die Drehungsgleichung

$$\Theta_1 dx \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} = dM_y + S_y dx \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (52)$$

Dazu gehört wieder die Biegungsgleichung

$$JE\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = M_y \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (53)$$

Aus (51)—(53) sollen die unbekannten y, M_y, S_y als abhängige von x und t bestimmt werden. Wir scheiden S_y durch Einsetzen aus (52) in (51) aus und setzen für M_y den Wert (53) ein. Dies ergibt

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(JE\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\,\Theta_1\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) - m_1\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \ldots \ldots \quad (54)$$

Eine einfache harmonische Schwingung wird durch den Ansatz

$$y = f(x)\cos\lambda t \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (55)$$

dargestellt, dessen Einführung in (54)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[JE\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\right] = -\lambda^2\frac{\partial}{\partial x}\left[\Theta_1\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right] + \lambda^2 m_1 f(x) \quad \ldots \ldots \quad (56)$$

ergibt. Vernachlässigen wir die Drehungsträgheit, indem wir $\Theta_1 = 0$ setzen, so bleibt eine mit Gl. (5) identische Beziehung übrig, falls wir $y = f(x)$; $\lambda = \omega$ und $e_y = 0$ annehmen. Ist obendrein J unveränderlich, so entsteht

$$JE\frac{d^4 f(x)}{dx^4} = m_1\lambda^2 f(x) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (56\text{a})$$

was mit Gl. (7) übereinstimmt. Dieses Ergebnis lautet in Worten:

Ist Θ_1 vernachlässigbar, so nimmt die elastische Linie der schwingenden Welle dieselbe Form an wie bei der kritischen Geschwindigkeit, und die Schwingungszahl stimmt überein mit der Zahl der kritischen Umläufe in der Sekunde. (Letzteres ist durch Gleichung $\lambda = \omega$ ausgedrückt[1]).

Wir werden später sehen, daß die Wirkung der Kreiselkräfte der umlaufenden Scheiben sich mit der oben durch Θ_1 ausgedrückten „Drehungsträgheit" nicht deckt.

---

[1]) Über diesen Gegenstand hat C. Chree im Philos. Magaz., Mai 1904, eine beachtenswerte Studie veröffentlicht, die auf den allgemeinen Lagrangeschen Gleichungen und gewissen akutischen Methoden von Rayleigh fußt.

92. Graphische Ermittelung der kritischen Drehzahl bei beliebigen Massen und beliebig veränderlicher Wellenstärke.

a) Ohne Rücksicht auf Kreiselkräfte.

Da die Rechnung bei veränderlichen Scheibengrößen oder Wellendruckmessern undurchführbar oder sehr umständlich wird, so ist es ein wahres Glück, daß wir die allgemeine Aufgabe auf graphischem Wege, wenn auch nur in Form einer planmäßigen Annäherung, lösen können[1]). Wir setzen die gründliche Kenntnis des Mohrschen Satzes zur Bestimmung der elastischen Linie eines gebogenen Balkens voraus und schlagen folgenden Weg ein.

Eine Welle mit beliebiger Lagerung sei durch die zur Balkenachse senkrechten Kräfte P_1, P_2, ... belastet, die an ihren Angriffspunkten die Durchbiegungen y_1, y_2, ... hervorrufen. Werden alle Kräfte P auf das k-fache ihres Betrages gebracht, so wachsen auch die Durchbiegungen auf das k-fache. Die Welle trage eine Anzahl Massen, deren Schwerpunkte je in das Wellenmittel hereinfallen; die Kräfte P seien die Fliehkräfte, die durch die Massen entwickelt werden, wenn die Welle sich dreht und um die Beträge y_1, y_2, ... ausgelenkt ist. Solange die Winkelgeschwindigkeit ω klein ist, sind die Fliehkräfte ungenügend, um die Welle durchzubiegen; erst bei der kritischen Umlaufzahl besteht Gleichgewicht zwischen Fliehkräften und den elastischen Kräften. Ist dies für eine Gruppe von Auslenkungen y_1, y_2, ... der Fall, **so trifft es auch für das k-fache hiervon zu,** denn mit der Vergrößerung von y wachsen im gleichen Verhältnis auch die P, oder wie schon früher ausgedrückt: **die Welle befindet sich bei der kritischen Drehzahl für jede Auslenkung bei affin ähnlicher elastischer Linie im indifferenten Gleichgewicht.** Von den Kreiselkräften wird vorerst abgesehen.

Das Verfahren besteht darin, daß wir die elastische Linie der in ihren Abmessungen gegebenen Welle probeweise so aufzeichnen, daß den Bedingungen der Lagerungsart entsprochen wird. Besonders einfach ist der Fall freier Stützung in zwei Lagern. Hierauf werden mit einer willkürlichen Winkelgeschwindigkeit ω aus den angenommenen Durchbiegungen y_1, y_2, ... die Fliehkräfte P_1, P_2, ... berechnet.

Aus den Kräften ergibt sich mit Hilfe des „Kräfteplans" das „Seileck", und durch dessen Schlußlinie die Biegungsmomentenfläche, deren Ordinaten mit dem Polabstand H des Kräfteplans (im Kräftemaßstabe gemessen) vermehrt das Biegungsmoment M liefern. Nun muß man am Element Δl der Wellenlänge die Größe $M \Delta l = \Delta \Phi$ als „Kraft" angreifend denken, und einen zweiten Kräfteplan der $\Delta \Phi$ mit dem Polabstand JE entwerfen, wo J das Trägheitsmoment des Wellenquerschnittes bedeutet. Ist J veränderlich, so greift man ein mittleres J_0 heraus und vermehrt jedes Moment mit dem Verhältnis J_0/J, so daß $J_0 E$ als für alle Teile gleicher Polabstand benützt werden darf. Um übrigens eine deutliche Zeichnung zu erhalten, muß man statt $J_0 E$ den Polabstand $J_0 E/n$ wählen, wo n eine große Zahl (10^3, 10^4, ...) ist, so daß die Ordinaten des nun zu konstruierenden zweiten Seilecks n-fach vergrößert herauskommen.

Das zweite Seileck ist die wahre elastische Linie, die den angenommenen Belastungskräften entspricht. Ihre Ordinaten y_1', y_2', ... werden sich von den ursprünglich angenommenen Werten unterscheiden. Wir können indes einen davon, z. B. den in der Mitte der Lagerentfernung, dessen Größe y_m' sei, mit dem ursprünglichen Wert y_m (der etwa größer als y'_m sein mag) in Übereinstimmung bringen, indem wir statt ω die neue Geschwindigkeit

$$\omega' = \omega \sqrt{\frac{y_m}{y_m'}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

angewendet denken, weil hierdurch alle Kräfte im Verhältnis $y_m : y_m'$ vergrößert werden. Vergrößern wir auch die übrigen Ordinaten im Verhältnis $\omega'^2 : \omega^2$, so müßte die so erhaltene „berichtigte" elastische Linie mit der angenommenen übereinstimmen, wenn wir schon das erste Mal richtig geraten hätten. In diesem Falle wäre ω' die kritische Geschwindigkeit. In Wahrheit werden die beiden Linien abweichen, und wir müssen das Verfahren wiederholen, indem wir nun die vorhin erhaltene elastische Linie als zweite Annahme gelten lassen. Eine mehr als zweimalige Wiederholung wird wohl nie erforderlich werden.

---

[1]) Eine Methode gleicher Art wurde angewendet von Vianello, um Knickungsaufgaben zu lösen, und Delaporte beschreibt ein verwandtes Verfahren in „Revue de mécanique" 1903, Bd. III, S. 517.

Zahlenbeispiel. Scheinbarer Widerspruch mit der Theorie.

Die in Abb. 410 dargestellte Ankerwelle einer Gleichstrommaschine hat folgende Gewichte zu tragen

Ankerbleche	438 kg
Kupferwicklung	242 „
Stütztrommeln hierzu . .	204 „
Kommutator (vollst.) . .	282 „
Welle	288 „
Insgesamt	1454 kg

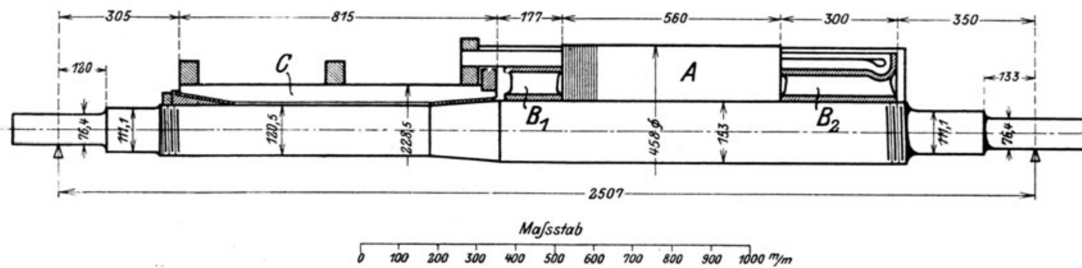


Abb. 410. Abmessungen des Dynamoankers.

Wir denken uns die Massen der Welle und der Kupferwicklung zu den auf der Welle sitzenden Teilen im Verhältnis zugeschlagen und die Masse des Kommutators in zwei

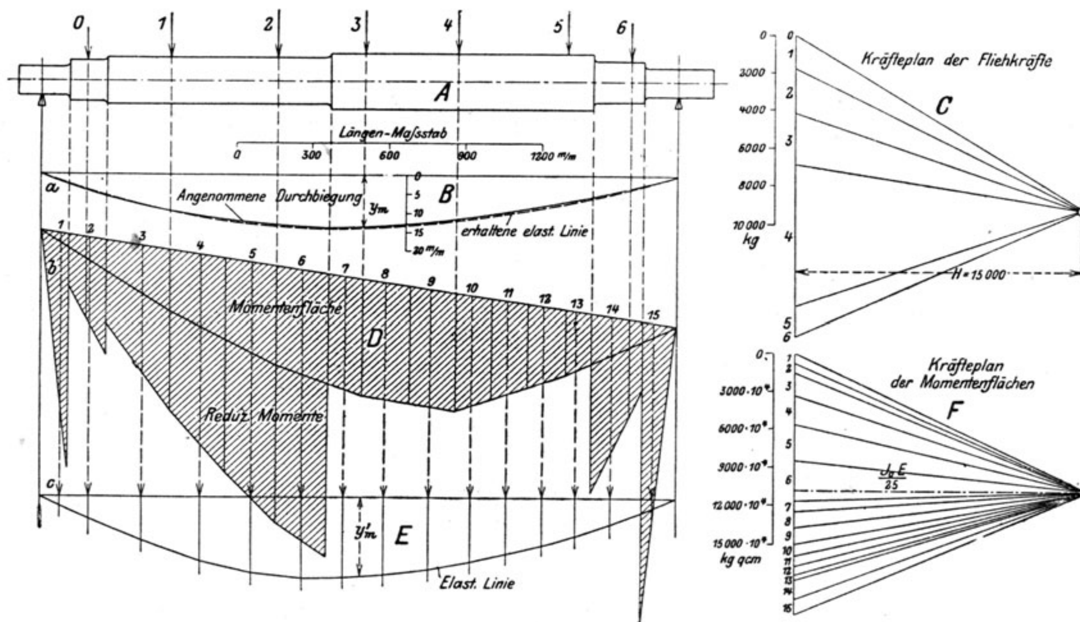


Abb. 411. Kräftepläne und Seilecke, wenn die Welle allein trägt.

Komponenten zerlegt, die je in den Stützflächen konzentriert sind. Hierauf zeichnen wir die in Abb. 411 als „angenommen" bezeichnete Durchbiegung, die wir zur Grundlage machen wollen.

I. Die Welle ist frei biegsam,

d. h. wir sehen von der versteifenden Wirkung der Ankerteile ab. Wir messen die angenommene Durchbiegung am besonders angegebenen Vertikalmaßstab B und nehmen als vorläufige Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = 100$$

an. Es ergeben sich folgende Fliehkräfte:

Angriffspunkt	0	1	2	3	4	5	6
Angenommene Durchbiegung y . . . . cm	0,39	0,98	1,31	1,37	1,14	0,65	0,31
Konzentriertes Einzelgewicht . . . . . kg	18,8	174,6	174,6	195	641	226,4	23,5
Masse $m = G/g$ . . . . kg/cm/sek²	0,0192	0,178	0,178	0,199	0,636	0,230	0,024
Fliehkraft $m y \omega^2$ . . . . kg	74,9	1741	2335	2720	7450	1498	74,5

Nun wird der Kräfteplan C konstruiert, dessen Polabstand im angenommenen Maßstab $H = 15\,000$ kg bedeutet, worauf als Seilkurve das Momentenpolygon D entsteht. Um für alle Teile das gleiche Trägheitsmoment benutzen zu können, reduzieren wir die Ordinaten der Momentenfläche im Verhältnisse J_0/J, wo J_0 das Trägheitsmoment des mittleren Wellenteiles (A), J dasjenige des jeweiligen Schnittes bedeutet. Diese neue Momentenfläche wurde in 15 Teile geteilt und deren Flächeninhalt bestimmt. Zu diesem Behufe ist die mittlere Höhe h des jeweils entstehenden Trapezes in wahrer Länge mit dem Polabstand H zu vermehren (man muß daher h im beigegebenen Maßstab der Längen ausmessen), wodurch man das reduzierte Moment M erhält. Nun werden ebenso die jeweiligen Breiten Δx in wahrer Größe abgenommen (d. h. am Längenmaßstab in cm gemessen) und die Momentenflächen $F = M \Delta x$ in kg/cm² gewonnen. Diese sind im Kräfteplan der Momentenflächen (F) summiert, worauf mit dem Polabstand $J_0 E/25$, welche Größe im gleichen Maßstab wie die F abzutragen ist, die elastische Linie als Seileck entworfen wird. Man erhält folgende Zahlenbeträge:

Nummer d. Momentenflächenabschnittes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Wellendurchmesser mm	76,4	111,1	120,55				153,0						111,1		76,4
Trägheitsmomente cm⁴	167	746	1037				$2682 = J_0$						746		167
Reduzierte Momentenfläche F in $\frac{\text{kgcm}^2}{10^7}$	0,802	0,681	1,817	2,330	2,804	3,160	0.901	1,257	1,250	0,900	0,770	0,645	0,354	1,486	1,222

Mit $J_0 = 2682$ und $E = 2{,}125 \cdot 10^6$ ist $J_0 E = 570 \cdot 10^7$ kgcm² und infolge der Verkleinerung auf $J_0 E/25$ erscheinen die Ordinaten der elastischen Linie 25 mal vergrößert. Vergleichen wir zunächst die Form der elastischen Linie E mit der Annahme B durch ähnliches Umzeichnen, so zeigt sich, daß die beiden fast vollkommen übereinstimmen, so daß eine Wiederholung des Verfahrens entbehrlich wird. Nun ist indes beispielsweise in der Mitte, im Längenmaßstabe, ausgemessen $y_m' = 307$ mm, also in Wahrheit $= 307/25 = 12{,}3$ mm, während das ursprüngliche (im vertikalen Sondermaßstabe gemessen) $y_m = 13{,}5$ mm gewesen ist. Wir müssen demnach die Fliehkräfte vergrößern, d. h. eine Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_k = 100 \sqrt{\frac{13{,}5}{12{,}3}} = 104{,}8$$ wählen, was die kritische Umlaufzahl

$$n_k = \textbf{rd. 1000} \text{ i. d. Min.}$$

ergibt.

Der Konstrukteur des Ankers, Herr J. C. Macfarlane von Chelmsford in England, teilte mir in dankenswerter Weise mit, daß die Erprobung des Ankers auf eine kritische Umlaufzahl von 2600—2900 i. d. Min. führte, was einen **Widerspruch der Theorie mit der Wirklichkeit zu bedeuten scheint.** Sobald man indessen die versteifende Wirkung des Ankers und des Kommutators in Betracht zieht, verschwindet dieser Widerspruch vollständig, wie durch nachstehende Untersuchung nachgewiesen wird.

II. Versteifende Wirkung des Ankers.

Von Herrn Macfarlane wurde mir weiter mitgeteilt, daß die Ankerscheiben und Stütztrommeln zusammen ausgebohrt und in vorgewärmtem Zustande auf die Welle mit etwa 1,5 t hydraulischem Druck aufgepreßt wurden. Das gleiche war mit dem Kommutator der Fall, dessen Lamellen mit den radialen Zuführungsstäben ein Stück bilden und nach Verbindung mit der Wicklung durch einen weiteren Schrumpfring zusammengepreßt wurden.

Obschon die angegebene axiale Pressung nur kleine Druckspannungen auf den Quadratzentimeter erzeugt, so daß der Anker bei nicht sehr großen Biegungsmomenten zu klaffen anfangen würde, ist man doch berechtigt, ihn als „massiv" anzusehen, da bei guter Auswuchtung auch während der kritischen Umlaufzahl die Verbiegung nur klein ausfallen darf. Um so mehr wird man den Kommutator und die Stütztrommeln mit der Welle als ein Stück betrachten. So ergeben sich nach den Maßen von Abb. 410

auf die Achsenlängen von	120	180	840	157	560	300	217	133 mm
die Trägheitsmomente	167	746	13880	47540	214000	47540	746	167 cm⁴

Die auf Grund einer Vorprobe nach Abb. 412 im Mittelverlauf steifer angenommene elastische Linie deren Ordinaten im beigefügten Vertikalmaßstab zu messen sind, führen auf die ähnlich zu berechnenden Fliehkräfte, die im Kräfteplan C' summiert wurden und die Momentenfläche D' ergeben haben. Während diese sich von der obigen wenig unterscheidet, tritt bei der reduzierten Momentenfläche der Einfluß der

Versteifung sehr augenfällig zutage. Indem wir das gleiche J_0 wie vorhin zur Umrechnung benutzen, verschwindet die Momentenfläche im mittleren Bereiche der Welle fast ganz, und nur die Wellenenden liefern noch Beiträge zur Biegung. Daher denn auch die neue elastische Linie E' in der Mitte ganz flach

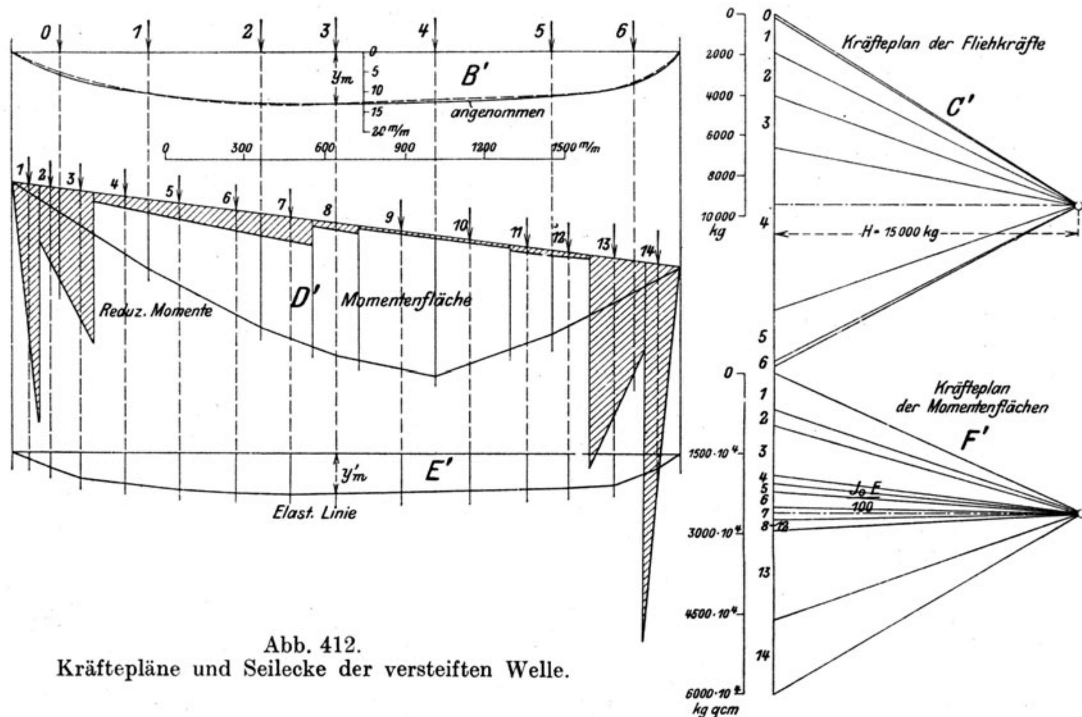


Abb. 412.
Kräftepläne und Seilecke der versteiften Welle.

verläuft. Die Übertragung derselben in die Figur B' (punktiert) zeigt, daß auch hier die Übereinstimmung genügt. Nun war ursprünglich angenommen $y_m = 13{,}1$ mm, in E' ergab sich (im Längenmaßstabe gemessen) $y_m' = 150$ mm, oder in Wahrheit, da wir mit $J_0 E/100$ statt mit $J_0 E$ konstruiert haben, $y_m' = 1{,}5$ mm, und wir müssen die Winkelgeschwindigkeit von $\omega = 100$ erhöhen auf

$$\omega_k = 100 \sqrt{\frac{13{,}1}{1{,}5}} = 296, \text{ woraus } \boldsymbol{n_k = 2820} \text{ i. d. Min.}$$

folgt. Dieses Ergebnis steht mit dem Versuch in gutem Einklang und beweist, daß unsere Anschauung über die versteifende Wirkung der Ankerbestandteile den Tatsachen entspricht. Man vermutete ursprünglich, daß diese hohe Umlaufzahl die zweite kritische Geschwindigkeit der Welle bildet, wir sehen indes, daß die Abweichung der Wirklichkeit gegen die zu ungünstige Rechnung mit frei biegsamer Welle auf natürliche Weise aufgeklärt werden kann.

Die gleichwertige konzentrierte Masse.

In Abb. 412a sind die kritischen Drehzahlen einer glatten und einer, wie in der Abbildung ersichtlich, abgesetzten Welle zusammengetragen, die unter der Annahme ermittelt wurden, daß die stets gleichmäßig verteilten Scheiben nur die Länge L_1 der zwischen den Lagermitten die Länge L aufweisenden Welle bedecken, wobei jede Scheibe über die Länge einer Teilung in unendlich viele dünne Scheiben gespalten gemeint ist. Das Verhältnis $L_1 : L$, welches wir den „belasteten Wellenanteil" nennen, beginnt mit dem Wert Null, der einer Konzentration aller Scheiben in der Mitte der Spannweite entspricht. Das Verhältnis der jeweiligen kritischen Geschwindigkeit zu derjenigen im Falle $L_1 : L = 1$ ist als Abhängige von $L_1 : L$ aufgetragen. Noch anschaulicher ist die Angabe derjenigen **„gleichwertigen"** Masse m, die in der Mitte der Spannweite angebracht, die gleiche kritische Drehzahl ergibt, wie die gleichmäßig über die Länge L_1 verteilte Gesamtmasse μ. Bei $L_1 : L = 1$ ist das Verhältnis $\frac{m}{\mu}$, für die glatte Welle wie schon oben festgestellt $= 0{,}5$, für die abgesetzte etwa 0,51. Die vollen Linien beziehen sich auf die glatte, die punktierten auf die abgesetzte Welle.

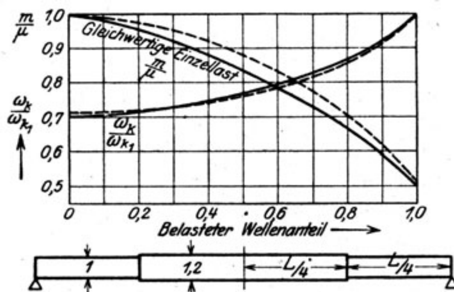


Abb. 412a. Gleichwertige in der Mitte zu konzentrierende Einzelmaße.

b) Mit Berücksichtigung der Kreiselkräfte.

Die Kreiselkräfte ergeben für jede Scheibe ein Moment, welches nach Gl. (19), Abschn. 89 allgemein den Wert

$$\mathfrak{M}_k = (2\,\lambda\,\omega + \lambda^2)\,\Theta_d\,(\tau + \delta) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

besitzt, worin λ die Winkelgeschwindigkeit der Präzession, τ die Neigung der elastischen Linie, δ den Lockerungswinkel der Scheibe bedeuten, was auf folgende ausgezeichnete Sonderfälle führt:

α) Synchrone Präzession im Gegenlauf $\lambda = \omega$, $\mathfrak{M}_k = 3\,\omega^2\,\Theta_d\,(\tau + \delta)$,
auf die Scheibe ausgeübt und so gerichtet, daß τ vergrößert wird,

β) synchrone Präzession im Gleichlauf $\lambda = -\omega$, $\mathfrak{M}_k = -\omega^2\,\Theta_d\,(\tau + \delta)$,
auf die Scheibe ausgeübt und so gerichtet, daß τ verkleinert wird.

Ob diejenigen Kräfte vorhanden sind, die die Entstehung des Momentes nach α) begünstigen oder erzwingen, muß in jedem Falle für sich entschieden werden. Durch die Annahme der elastischen Linie

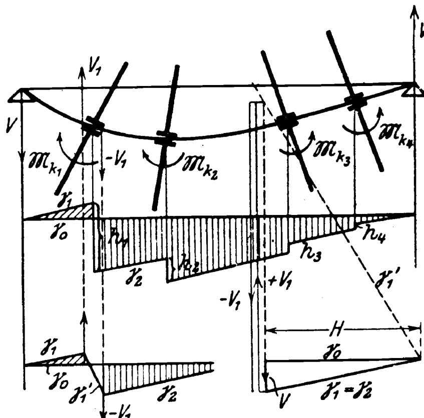


Abb. 413. Kreiselmomente.

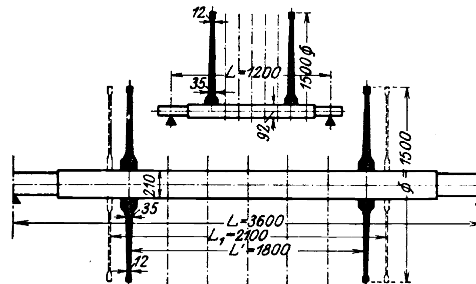


Abb. 413a. Scheibenverteilung.

sind die Winkel τ gegeben, und man kann die Größe von δ einschätzen, insbesondere $\delta = 0$ setzen, wie im nachfolgenden geschieht. Ist τ in der Zeichnung so groß, daß der Bogen nicht der Tangente gleichgesetzt werden kann, so ist mit $\operatorname{tg}\tau$ zu rechnen.

Die Momente $\mathfrak{M}_k$ werden am besten in einer besonderen Momentenfläche Abb. 413 zusammengefaßt. Die Gesamtsumme $\Sigma\mathfrak{M}_k$ wird beim frei aufliegenden Balken durch das Moment VL der erzeugten Auflagerdrücke im Gleichgewicht gehalten, so daß

$$V = \frac{\Sigma\,\mathfrak{M}_k}{L} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

bekannt ist. Wählt man den gleichen Polabstand H wie für den Hauptkräfteplan, so sind

$$h_1 = \frac{\mathfrak{M}_{k1}}{H}; \quad h_2 = \frac{\mathfrak{M}_{k2}}{H} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

die Sprünge in den Ordinaten der Momentenfläche, die beim Übergang durch eine Scheibenangriffsstelle auftreten werden. Das Seileck führt mit der ersten Seilkraft γ_0 am linken Auflager zur Zwischenresultierenden γ_1 und das schraffierte negative Momentendreieck bedeutet, daß die angenommene Auflagerkraft eine Verkleinerung der Krümmung anstrebt. Das hinzutretende Moment $\mathfrak{M}_{k1}$ strebt eine Vergrößerung an und man muß die Strecke h_1 positiv (nach abwärts im Maßstabe der Längen) hinzufügen, wobei die Polygonseite $\gamma_2 \| \gamma_1$ bleibt. Zum Schluß muß man am rechten Auflager die ursprüngliche Seite γ_0 wieder erreichen.

Man könnte $\mathfrak{M}_{k1}$ auch durch die beiden an den Nabenenden angreifenden Kräfte $+V_1 - V_1$ ersetzen. Wie in der Abbildung unten angedeutet, würde dann γ_1 mit $+V_1$ die Resultierende γ_1' und diese mit $-V_1$ die zu γ_1 parallele Resultierende γ_2 ergeben, die mit γ_2 der oberen Momentenfläche identisch ist. Auf diese Weise können die $\mathfrak{M}_k$ auch in die Hauptmomentenfläche von Anfang an einbezogen werden.

Beispiel. Eine nach Abb. 413a in den Lagern abgesetzte Welle mit freier Auflagerung trage sieben gleichmäßig verteilte Scheiben von je 1500 mm Durchmesser, 326 kg Gewicht und 430 cm/kg/sek² Trägheitsmoment (Θ_d) auf einen Durchmesser bezogen. Wir zerteilen jedes Rad in unendlich dünne, unendlich nahestehende Scheiben über die Länge einer Teilung. Ist L' der Abstand der äußersten Scheiben und t die Teilung, so wird die Länge $L_1 = L' + t$ gleichmäßig belegt erscheinen. Wir nennen, wie früher, $L_1 : L$ den „belasteten Wellenanteil“, der von 0 für „konzentrierte“ Last bis 1 wächst. Die

Abbildung vermittelt den Eindruck der Radgruppe für eine Welle von $L = 1200$ mm und eine Welle von $L = 3600$ mm, wenn $L' : L = 0{,}5$ angenommen wird. Die Wellenstärken wurden so bestimmt, daß die normale tiefste kritische Drehzahl $n_{k_1} = 1000$ /min wird. Die Wirkung der Kreiselkräfte ist um so größer, je kleiner die Spannweite gegenüber dem Scheibendurchmesser ist. Dies geht deutlich aus Abb. 413b hervor, in welcher die Geschwindigkeitsverhältnisse $\frac{\omega_{gl1}}{\omega_{k1}}$ für gleichsinnige Präzession und $\frac{\omega_{gn1}}{\omega_{k1}}$ für gegensinnige synchrone Präzession als Abhängige des belasteten Wellenanteiles dargestellt sind. Bei in der Lagermitte konzentriert gedachten Scheiben fallen alle kritischen Geschwindigkeiten zusammen, weil die Kreiselwirkung fehlt. Bei 1200 mm Spannweite und Verteilung auf die ganze Wellenlänge (wobei die äußersten Scheiben theoretisch in die Lagermittel zu liegen kämen) steigt die gleichläufige Drehzahl über das 2,2fache des Normalen; und die gegenläufige sinkt auf den etwa 0,55fachen Betrag.

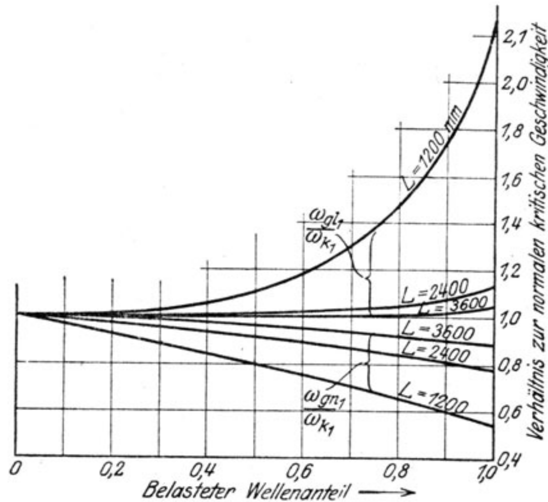


Abb. 413b. Einfluß gleich- und gegenläufiger Präzessionen auf die tiefste kritische Drehzahl.

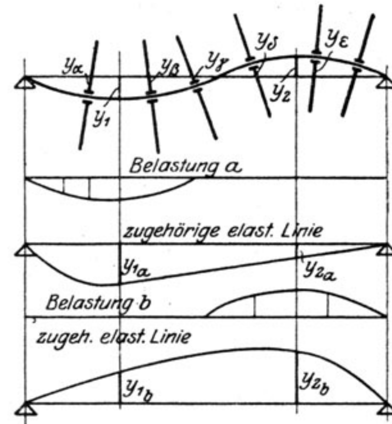


Abb. 414. Höhere kritische Drehzahlen.

Bei 3600 Spannweite sind die entsprechenden Verhältnisse nur noch 1,04 und 0,88. Die Abbildung erlaubt zu schätzen, wann in praktisch gegebenen Fällen die Kreiselwirkung von Belang und wann sie vernachlässigbar ist.

Während der Drucklegung erschien eine Abhandlung von Grammel[1]), in der mittels Schaubilder die Kreiselwirkung bei der auf der ganzen Länge dicht besetzten Welle für synchrone Präzession im Gleich- und Gegenlauf bei unveränderlichem Wellendurchmesser erschöpfend dargestellt wird.

c) Höhere kritische Drehzahlen.

Bei den höheren kritischen Drehzahlen bildet die elastische Linie sinusförmige Kurven mit 1, 2, 3 ... Zwischenknotenpunkten im Sinne der Abb. 409a. Wollte man an Hand einer vorläufigen Annahme in gleicher Weise wie unter a) die Fliehkräfte und aus diesen eine verbesserte elastische Linie ermitteln, so stößt man auf die Schwierigkeit, daß **dieses Verfahren nicht mehr konvergent ist.**

Statt sich einer bestimmten Grenze zu nähern, entfernen sich die aufeinanderfolgenden Biegungslinien von der wahren offensichtlich immer mehr. Es bleibt die Möglichkeit offen, die elastische Linie so lange abzuändern, bis die Abweichungen nach der anderen Seite vor sich gehen, so daß die Wahrheit in der Mitte liegen müßte. Um planmäßiger vorgehen zu können, empfiehlt es sich, das graphische Verfahren mit der Rechnung im Sinne des Abschn. 90 zu verbinden.[2])

Wir betrachten die zweithöhere kritische Drehzahl einer frei aufliegenden Welle, Abb 414. Die vorläufige Annahme über die elastische Linie und ω ergibt die Gruppe P_α P_β ... der nach abwärts und die Gruppe P_δ $P_\cdot$ ... der nach aufwärts wirkenden Fliehkräfte. Die Kreiselkräfte werden vernachlässigt. Wir ermitteln die Verbiegung der Welle 1.. unter

[1]) Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1920, S. 911.

[2]) Nachfolgende Erläuterung fußt auf dem gleichen Grundgedanken den Borowicz für die durchgehende Welle benützt, s. unter d).

Wirkung der ersten Gruppe, die wir als **Belastungsfall a)** bezeichnen, 2. unter Wirkung der zweiten Gruppe als **Belastungsfall b)**. Der größte ursprüngliche Biegungspfeil der beiden Felder sei y_{1u} y_{2u}. Die graphische Konstruktion möge für die gleichen Abszissen im Falle a): y_{1a} y_{2a}; im Falle b): y_{1b} y_{2b} liefern, welche Größen den jeweiligen Kräften verhältnisgleich sind. Diese letzteren sind aber hinwieder verhältnisgleich zu den Einsenkungen y_{1u} y_{2u}. Man darf daher setzen:

$$\left.\begin{aligned} y_{1a} &= a_1 y_{1u}\omega^2; \qquad & y_{1b} &= b_1 y_{2u}\omega^2 \\ y_{2a} &= a_2 y_{1u}\omega^2; \qquad & y_{2b} &= b_2 y_{2u}\omega^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

aus welchen Gleichungen die Beiwerte a_1 a_2 b_1 b_2 berechnet werden. Betrachten wir nun die Welle im **„kritischen" (d. h. indifferenten) Gleichgewicht** und setzen wir voraus, daß die (neu) angenommenen (bzw. angenommen gedachten) kritischen Biegungen y_{1k} y_{2k} dem Gleichgewicht entsprechen. Es möge ferner die Wiederholung des graphischen Verfahrens im Fall a) y_{1ak} y_{2ak}; im Fall b) y_{1bk} y_{2bk} ergeben. Dann müßte die vereinte Wirkung von a) und b) auf die angenommenen Werte, d. h. auf

$$\left.\begin{aligned} y_{1k} &= y_{1ak} - y_{1bk} = a_1 y_{1k}\omega_k^2 - b_1 y_{2k}\omega_k^2 \\ y_{2k} &= -y_{2ak} + y_{2bk} = -a_2 y_{1k}\omega_k^2 + b_2 y_{2k}\omega_k^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

führen. Diese Gleichungen lauten geordnet

$$\left.\begin{aligned} (a_1\omega_k^2 - 1)\, y_{1k} - b_1\omega_k^2 y_{2k} &= 0 \\ -a_2\omega_k^2 y_{1k} + (b_2\omega_k^2 - 1)\, y_{2k} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Sie können nur bestehen, wenn das Verhältnis $y_{1k}:y_{2k}$ aus beiden sich als gleich groß ergibt (oder: die Determinante der Beiwerte verschwindet), was die Beziehung

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)\,\omega_k^4 - (a_1 + b_2)\,\omega_k^2 + 1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

oder wenn man die Werte von $a_1 a_2$ $b_1 b_2$ aus Gl. (5) einsetzt:

$$\frac{y_{1a}y_{2b} - y_{2a}y_{1b}}{y_{1u}y_{2u}}\left(\frac{\omega_k}{\omega}\right)^4 - \left(\frac{y_{1a}}{y_{1u}} + \frac{y_{2b}}{y_{2u}}\right)\left(\frac{\omega_k}{\omega}\right)^2 + 1 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (8\,a)$$

ergibt. Die Wurzeln hiervon sind

$$\omega_{k1}^2 = \frac{1}{A}\left(B + \sqrt{B^2 - A}\right); \qquad \omega_{k2}^2 = \frac{1}{A}\left(B - \sqrt{B^2 - A}\right) \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

mit der Bezeichnung

$$A = a_1 b_2 - a_2 b_1; \qquad B = \frac{a_1 + b_2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9\,a)$$

Nur eine Wurzel entspricht den Bedingungen der Aufgabe, und zwar die, für die nach Gl. (7) das Verhältnis

$$\frac{y_{1k}}{y_{2k}} = \frac{b_1\omega_k^2}{a_1\omega_k^2 - 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

einen positiven Wert ergibt. Ein negativer Wert würde bedeuten, daß die Einsenkungen y_{1k} y_{2k} nach derselben Seite der Welle gerichtet sind, und das entspräche einer elastischen Linie ohne Knotenpunkt, also einer tieferen, aber unrichtigen kritischen Drehzahl, weil die Fliehkräfte, die zur Berechnung der Beiwerte $a_1 a_2$ $b_1 b_2$ nach 5 notwendig waren, mit offenbar unrichtigen Auslenkungen $y_\alpha\, y_\beta \ldots$ gerechnet worden wären.

Es liegt auf der Hand, daß, falls die ursprüngliche Annahme über die Biegungsform der Welle (die Lage des Knotenpunktes) von der Wahrheit stark entfernt war, auch die gegebene Auflösung mit einer Ungenauigkeit behaftet sein wird. Ein genaueres, aber entsprechend umständlicheres Verfahren erläutern wir in Abschn. 188. Einfach zu erledigen ist die **kritische Drehzahl zweiter Ordnung** bei bezüglich der Lagermitte **symmetrischer Körperform** und **Lagerungsart**, denn das Symmetriezentrum bleibt bei vollkommener Auswuchtung unverrückt, kann also als **freie und feste Stützung der Hälfte des Läufers** angesehen werden, wodurch die Aufgabe auf die Bestimmung der kritischen Drehzahl erster Ordnung zurückgeführt ist.

d) Welle auf drei Stützen.

1. Je eine Masse in jedem Feld, die Wellenmasse vernachlässigt.

Dieser einfache Fall eignet sich gut dazu, die Verhältnisse der graphischen Annäherung an Hand einer rechnerisch strengen Untersuchung nachzuprüfen. Bei einer Biegung ähnlich wie in Abb. 414 (wobei der Knotenpunkt das mittlere Lager bedeutet) wirkt bei der kritischen Geschwindigkeit im 1. Felde

$P_1 = m_1 y_1 \omega_k^2$ nach abwärts; ähnlich im 2. Felde $P_2 = m_2 y_2 \omega_k^2$ nach aufwärts . . (11)

und es gilt der allgemeine Ansatz

$$y_1 = a_{11} P_1 + a_{12} P_2; \qquad y_2 = a_{21} P_1 + a_{22} P_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

wo die a nach der Biegungstheorie bestimmt werden können und $a_{12} = a_{21}$ sein muß. Ausgeschrieben ist

$$y_1 = a_{11} m_1 \omega_k^2 y_1 + a_{12} m_2 \omega_k^2 y_2; \qquad y_2 = a_{21} m_1 \omega_k^2 y_1 + a_{22} m_2 \omega_k^2 y_2$$

oder

$$y_1 = a_1 \omega_k^2 y_1 + b_1 \omega_k^2 y_2; \qquad y_2 = a_2 \omega_k^2 y_1 + b_2 \omega_k^2 y_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

mit den Abkürzungen

$$a_1 = a_{11} m_1, \quad a_2 = a_{21} m_1; \qquad b_1 = a_{12} m_2, \quad b_2 = a_{22} m_2 \quad . \; . \; . \; . \quad (14)$$

Durch Nullsetzen der Determinante, d. h. Ausscheiden von $y_1 y_2$ aus Gl. (13) erhält man die mit (8) gleichgebaute Gleichung

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1) \omega_k^4 - (a_1 + b_2) \omega_k^2 + 1 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

aus der zwei Werte von ω_k bestimmt werden können. Die eine Lösung liefert die kritische Biegeform nach Linie e in Abb. 416. Gl. (13) liefern das Verhältnis y_1/y_2, während die absolute Größe von y_1 und y_2 willkürlich bleibt.

Mit diesem strengen Ergebnis vergleichen wir dasjenige, das man erhalten würde, wenn man graphisch vorgeht. Da wird eine elastische Linie willkürlich angenommen, deren Einsenkungen $y_{1u} y_{2u}$ heißen mögen. Mit einem willkürlichen ω berechnet man die Fliehkräfte und daraus graphisch die neue elastische Linie, deren Ordinaten $y_{1e} y_{2e}$ seien. Ist die erhaltene Linie der angenommenen (affin) ähnlich, so kann sie durch die Wahl der neuen Geschwindigkeit $\omega' = \omega \sqrt{y_{1u}/y_{1e}} = \omega \sqrt{y_{2u}/y_{2e}}$ mit ihr zum Zusammenfallen gebracht werden, und ω' ist die wahre kritische Geschwindigkeit. Es muß also vor allem die Gleichheit

$$\frac{y_{1u}}{y_{2u}} = \frac{y_{1e}}{y_{2e}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

bestehen. Ähnlich wie vorhin Gl. (13) gilt, jedoch mit den theoretisch vorhin bestimmten Beiwerten $a_1 \ldots b_2$

$$y_{1e} = a_1 \omega^2 y_{1u} + b_1 \omega^2 y_{2u}; \qquad y_{2e} = a_2 \omega^2 y_{1u} + b_2 \omega^2 y_{2u} \quad . \; . \; . \; . \quad (17)$$

woraus sich das Verhältnis

$$x = \frac{y_{1e}}{y_{2e}} = \frac{a_1 y_{1u} + b_1 y_{2u}}{a_2 y_{1u} + b_2 y_{2u}} = \frac{a_1 y_{1u}/y_{2u} + b_1}{a_2 y_{1u}/y_{2u} + b_2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18)$$

ergibt. Soll also auch $y_{1u}/y_{2u} = x$ sein, so ergibt sich durch Einschiebung dieses Wertes in Gl. (18), indem wir nach x auflösen

$$x = \frac{1}{a_2}\left[\frac{a_1 - b_2}{2} \pm \sqrt{\frac{(a_1 - b_2)^2}{4} + a_2 b_1}\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (19)$$

Allein da zunächst (in Unkenntnis der Beiwerte $a_1 a_2 b_1 b_2$) $x_1 = y_{1u}/y_{2u}$ willkürlich gewählt werden mußte, wird das graphisch erhaltene Verhältnis y_{1e}/y_{2e}, welches zur Unterscheidung mit x_2 bezeichnet werden soll, von x_1 abweichen. Es sei nun $x_1 = x + \Delta_1$, wo x den richtigen Wert nach Gl. (19) bedeutet; dann frägt es sich, ob x_2 näher an x gelegen ist als x_1, d. h. ob das Verfahren „konvergent" ist. Nach Gl. (18) wird

$$x_2 = \frac{a_1 (x + \Delta_1) + b_1}{a_2 (x + \Delta_1) + b_2} = \frac{(a_1 x + b_1)\,[1 + a_1 \Delta_1/(a_1 x + b_1)]}{(a_2 x + b_2)\,[1 + a_2 \Delta_1/(a_2 x + b_2)]}$$

Das erste Glied im Zähler und im Nenner gibt wieder x. Wenn man den Nenner nach Δ_1 entwickelt, höhere Potenzen von Δ_1 vernachlässigt und $x_2 = x + \Delta_2$ schreibt, ergibt sich mit Rücksicht auf Gl. (19)

$$\Delta_2 = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{(a_2 x + b_2)^2}\,\Delta_1 = \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)\,\Delta_1}{\left[\frac{b_2 + a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{(b_2 - a_1)^2}{4} + a_2 b_1}\right]^2} \quad . \; . \; . \; . \quad (20)$$

Das Verfahren ist konvergent, falls der Absolutwert des Faktors von Δ_1 kleiner als 1 ist. Es zeigt sich, daß dies für die tiefere kritische Drehzahl immer zutrifft, daß man sich aber in einem Irrtum befände, wenn man dies ohne weiteres auch für die höhere Drehzahl voraussetzte. Das gleiche Verhältnis ist auch bei verwickelteren Anordnungen zu erwarten, aber leider nicht so einfach nachprüfbar wie oben.

Im vorliegenden Fall ist nun freilich das Annäherungsverfahren überflüssig; man kann die kritischen Drehzahlen graphisch, ohne zu pröbeln, ermitteln, indem man zuerst die Formänderung bestimmt, die der Fliehkraft der Masse m_1 allein, dann ebenso die, die der Masse m_2 allein zukommt. Hieraus berechnen sich wie unter c) in Gl. (5) die Beiwerte $a_1 a_2\; b_1 b_2$, mit denen man entweder ω_k aus (15) und y_1/y_2 aus (13) oder $y_1/y_2 = x$ aus (19) und ω_k aus Gl. (17) zu

$$\omega_k^{\,2} = \frac{y_1}{a_1 y_1 + b_1 y_2} = \frac{x}{a_1 x + b_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21)$$

ermittelt.

2. Beliebig viele Massen; Wellenmasse nicht vernachlässigt.

Man könnte die entsprechend verallgemeinerten Grundgleichungen (11) (12) zum Ausgangspunkte wählen die auf Wellen beliebiger Stützungsart ausgedehnt werden dürfen. Die Aufgabe des graphischen Verfahrens bestünde dann darin, die Beiwerte $a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \ldots a_{n1} \ldots a_{nn}$ zu bestimmen, damit die allgemein zu bildende Determinante der Gl. (13) aufgelöst werden kann. Die außerordentliche Umständlichkeit dieser Rechnung wird durch das Verfahren von v. Borowicz[1]) umgangen, wie wir für eine **dreifach gelagerte Welle** darlegen wollen.

Nach vorläufiger Annahme der elastischen Linie u, Abb. 415, berechnet man mit willkürlichem ω die Fliehkräfte, faßt die auf das 1. Feld wirkenden als **„Belastungsfall a"**, die auf das 2. Feld wirkenden als **„Belastungsfall b"** zusammen und ermittelt die zugehörigen elastischen Linien. Um dies für den Fall a durchzuführen, wird in bekannter Weise Lager C entfernt gedacht, worauf sich Linie a^* (mit gerader Fortsetzung in Feld BC) ergibt. Um die Größe des Auflagerdruckes C zu bestimmen, läßt man im Endpunkt C die willkürliche Kraft P_C' wirken, die bei Abwesenheit jeder weiteren Belastung die Auflagerdrücke $P_B'\; P_A'$ erzeugt, und die bei (4) gezeichnete elastische Linie ergibt. Die schiefe Verbindungsgerade $A'C'$ stellt die Wellenachse dar, von der aus, wie die schraffierten Ordinaten zeigen, die Verbiegung zu rechnen ist. Der wahre Auflagerdruck in C muß eine solche Größe haben, daß die durch ihn allein an der unbelasteten Welle hervorgerufene Einsenkung $= y_c^*$ in Abb. 415 (bei 3) ist. Somit besteht das Verhältnis

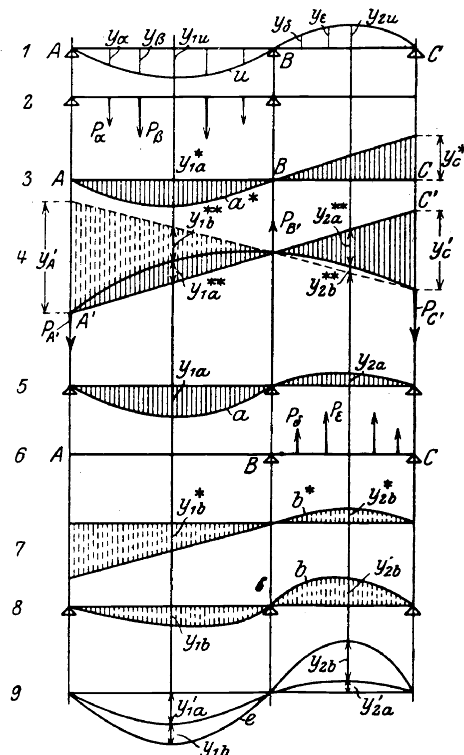


Abb. 415. Welle mit drei Stützen; graphisches Verfahren.

$$\frac{P_c}{P_c'} = \frac{y_c^*}{y_c'} \quad \text{daraus} \quad P_c = P_c'\,\frac{y_c^*}{y_c'} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22)$$

[1]) Beiträge zur Berechnung krit. Geschwindigkeiten zwei und mehrfach gelagerter Wellen. Dissertation München 1915.

Durch Überlagerung der im gleichen Verhältnis reduzierten Verbiegungen y_{1a}^{**}, y_{2a}^{**} mit denen von a^* ergibt sich die gesuchte Biegungslinie a mit den etwa in der Mitte jedes Feldes gemessenen Ordinaten y_{1a}, y_{2a}. In gleicher Weise wird, wie Abb. 415 (6) (7) (8) andeuten, der Belastungsfall b) erledigt. Dabei bildet Abb. 415 (4) schon die Unterlage für die Lagerkraft P_A, indem man die Punkte BC festgehalten denkt, so daß der jetzt in Betracht fallende Auflagedruck in A

$$P_A = P_A' \frac{y_A^*}{y_A'} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (23)$$

ist und die Verbiegungen in 415 (4) von der gestrichelten Achse zu zählen und nach (23) reduziert mit b^* zu vereinigen sind. Die so erhaltenen, in gleichem Abstand wie bei a) gemessenen Einsenkungen seien y_{1b} y_{2b}. Ihnen und y_{1a} y_{2a} entsprechen die an der ursprünglichen Biegungslinie mit y_{1u} y_{2u} bezeichneten Ordinaten.

Nun gelten für unsern Fall alle Ansätze des Abschn. c). Wir können daher mittels der Gleichungen (5) die Beiwerte $a_1 a_2 b_1 b_2$, aus Gl. (8) oder (8a) die kritischen Werte, aus Gl. (10) das Verhältnis y_{1k}/y_{2k} berechnen. In Gl. (10) ist derjenige Wert von ω_k einzusetzen, der das Verhältnis y_{1k}/y_{2k} positiv macht. Der zweite Wurzelwert liefert ein negatives Verhältnis, und bedeutet, daß in beiden Feldern die Einsenkungen gemäß Abb. 416 die gleiche Richtung besitzen, also Belastungsfall b) um 180° umgeklappt wurde. Die entstehende scharfe Ecke in der elastischen Linie ist unmöglich, da vielmehr eine der Skizze e Abb. 416 ähnliche Kurve sich ergeben muß. Der dabei unterlaufende Fehler im Betrage dieser zweiten (höheren) kritischen Drehzahl ist jedoch nicht so beträchtlich wie im gleichen Fall unter c), da die ausschlaggebenden Ordinaten gegen die Mitte jedes Feldes keine wesentliche Änderung erfahren. Im übrigen ist auch hier das Verfahren bei entgegengesetzter Auslenkung in den beiden Feldern konvergent, sonst wohl meist divergent. Im ersten Fall ist eine Verbesserung der Annäherung wie folgt möglich. Nach Gl. (10) Abschn. c) ist das kritische Verhältnis y_{1k}/y_{2k} bekannt und man weiß, daß, wenn man die ursprüngliche Annahme so getroffen hätte, daß $y_{1u}/y_{2u} = y_{1k}/y_{2k}$ wäre, die erhaltene Biegungslinie der wirklichen affin ähnlich wäre. Statt eine neue Kurve zu zeichnen, kann man sich indessen damit begnügen, etwa das zweite Feld ungeändert zu lassen, im 1. Feld die mittlere Qrdinate auf y_{1u}' gemäß Formel

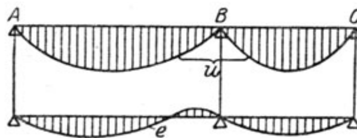


Abb. 416. Knick bei negativen Wurzeln.

$$y_{1u}' = y_{2u} \cdot \frac{y_{1k}}{y_{2k}}$$

abzuändern und die übrigen Ordinaten mit y_{1u}' verhältnisgleich (affin) zu- oder abnehmen zu lassen. Dadurch entsteht in der ursprünglichen Linie u bei B allerdings ein, wenn auch nur stumpfer Knick; trotzdem erhält man eine angenähert richtige elastische Linie, indem man auch die Ordinaten der elastischen Linie a im Verhältnis y_{1u}'/y_{1u} abändert und mit der Linie b zusammensetzt. Die so entstehende Linie ist in Abb. 415 mit e bezeichnet; sie kann in besonders heiklen Fällen als zweite „ursprüngliche Annahme" einem neuen Entwurf zugrunde gelegt werden, wodurch sich berichtigte Biegungslinien a, b, e und ein berichtigter Wert der kritischen Geschwindigkeit ergeben. Ein Vergleich mit der vorhin gewonnenen Linie e wird in der Mehrzahl der Fälle ergeben, daß eine Wiederholung des Verfahrens überflüssig ist.

Handelt es sich um die nächst höhere kritische Drehzahl, so ist ähnlich zu verfahren wie unter c) erläutert worden ist.

93. Auf die Formänderungsarbeit gegründete Verfahren.

a) Mit Vernachlässigung der Kreiselkräfte.

Die Kreiselkräfte können vernachlässigt werden, wenn die Trägheitsmomente der umlaufenden Massen klein sind. Stellt Abb. 417 eine mit den Massen $m_1 m_2 m_n \ldots$ belastete Welle dar, so kann die Bewegung, die die in der elastischen Linie liegenden Punkte ausführen, als Übereinanderlagerung zweier zueinander senkrechter Schwingungen mit den Auslenkungen $y_1 y_2 \ldots$ und $z_1 z_2 \ldots$ aufgefaßt werden. Daß sich die Massen obendrein um die Tangenten

an die elastische Linie drehen, ist, da wir zentrische Lage der Schwerpunkte voraussetzen, gleichgültig. Die Drehgeschwindigkeit der elastischen Linie um die geometrische Achse AB ist dann die kritische Geschwindigkeit. Diese Drehzahl ist mithin gleich der Schwingungszahl, für deren Bestimmung die Theorie von Rayleigh[1]) maßgebend ist. Da die Kenntnis der Eigenschwingungen auch bei Schaufeln und sonst Wichtigkeit besitzt, ist es unerläßlich, auf die Theorie näher einzugehen.

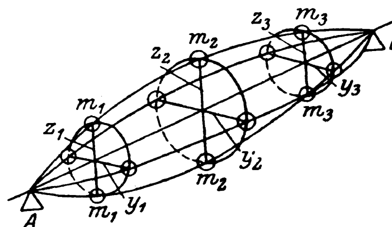


Abb. 417. Kritische Drehzahl als Resultante zweier Schwingungen.

Satz von Rayleigh.

Bei der „Grund"schwingung eines elastischen Systemes sind die Auslenkungen jedes Punktes einer Sinus- oder Kosinusfunktion der Zeit proportional; das System erreicht in allen Punkten zu gleicher Zeit die größte Auslenkung, d. h. die Ruhelage, und zu gleicher Zeit die spannungslose Lage, wobei die Geschwindigkeit in allen Punkten ein Höchstwert ist. Die Gesamtenergie des Systemes erscheint im ersten Fall als die innere Energie Φ_i der elastischen Kräfte, im zweiten Fall als kinetische Energie Φ_k. Ist für irgendein Massenelement

$$y = a \sin \lambda t \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

die Auslenkung des Schwerpunktes, so ist die Geschwindigkeit

$$w = \frac{dy}{dt} = \lambda a \cos \lambda t \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

und ihr Höchstwert $w_0 = \lambda a$, somit der Höchstwert der kinetischen Energie

$$\Phi_k = \frac{1}{2} \Sigma \delta m w_0^2 = \frac{\lambda^2}{2} \Sigma \delta m a^2 = \lambda^2 K \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Im Sinne des Energiesatzes muß

$$\Phi_i = \lambda^2 K \quad \text{oder} \quad \lambda^2 = \frac{\Phi_i}{K} \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

sein, woraus man λ und die sekundliche Schwingungszahl

$$N_{sek} = \frac{\lambda}{2\pi} \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

berechnet. Diese ist zugleich die kritische Drehzahl, wenn das System in der angegebenen Weise in Drehung versetzt werden kann.

Sowohl Φ_i wie K können graphisch ermittelt werden, indem man die Formänderung des Systemes versuchsweise so annimmt, daß, soweit dies abgeschätzt werden kann, den Bedingungen der Aufgabe tunlichst gut entsprochen wird. Die Willkürlichkeit, die hierin noch enthalten ist, wird durch folgenden weiteren Satz von Rayleigh eingeschränkt:

Die wahre Formänderung bei der tiefsten Schwingung des Systemes entspricht dem Mindestwert der Schwingungszahl unter allen möglichen Annahmen über die Formänderung.

Man wird daher die ursprünglich angenommene Formänderung in andere (mindestens zwei) benachbarte überführen und die jeweils sich ergebenden Schwingungszahlen in Abhängigkeit von einem (oder mehreren) die Formänderung kennzeichnenden Merkmal (Parameter) graphisch (als Kurve oder als Fläche) auftragen. Ist ein Mindestwert erkennbar, so ist es die wahre Schwingungszahl oder kritische Drehzahl. Im anderen Fall müssen weitere Formänderungen zum Vergleich herangezogen werden.

Wenn auf dem Wege der Rechnung Φ_i und K durch gewisse Parameter $a_1 a_2 \ldots a_n$ darstellbar sind, müssen die Gleichungen

$$\frac{\partial \lambda^2}{\partial a_1} = 0 \qquad \frac{\partial \lambda^2}{\partial a_2} = 0 \qquad \ldots \frac{\partial \lambda^2}{\partial a_n} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

erfüllt sein. Da sie im allgemeinen in den a homogen sind, muß die Determinante der der Beiwerte verschwinden, woraus sich λ^2 und aus beliebig gewählten $(n-1)$ der Gleichungen (6) die Verhältnisse $a_1 : a_2$; $a_1 : a_3$; $\ldots a_1 : a_n$ bestimmen lassen.

[1]) Theory of sound, London 1894, Vol. I, S. 110, 112.

Wie bei Schwingungszahlen höherer Ordnung zu verfahren ist, erläutern wir in Abschn. 188.

Beim graphischen Verfahren wird man nach Abb. 418 eine vorläufige Biegungslinie für die Ruhelage mit den Ordinaten $y_{1u}, y_{2u} \dots$ willkürlich annehmen. Die Massenträgheitskraft einer Masse δm, die man im Sinne des Satzes von d'Alembert zur Erhaltung des Gleichgewichtes anbringen müßte. ist $\delta m d^2 y/dt^2$ oder nach (1) $= -\lambda^2 \delta m a \sin \lambda t = -\delta m y \lambda^2$. Da aber λ der kritischen Winkelgeschwindigkeit gleich ist, setzen wir $\lambda = \omega_0$ mit zunächst willkürlicher Annahme dieses Wertes. Die Trägheitskraft ist dann $= \delta m y \omega_0^2$, also gleich der Fliehkraft, die die Masse bei der Drehung entwickelt. Daher benützen wir diesen anschaulichen Begriff und berechnen die Fliehkräfte

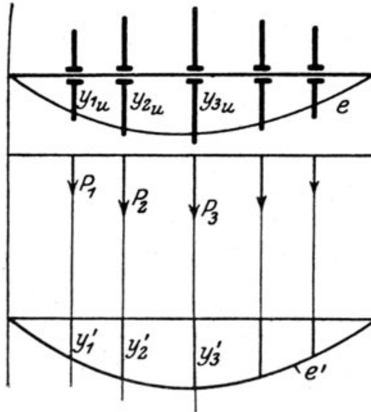


Abb. 418. Zum Verfahren nach Rayleigh.

$$P_1 = m_1 y_1 \omega_0^2; \qquad P_2 = m_2 y_2 \omega_0^2 \dots$$

Nun ermitteln wir graphisch die unter ihrer Wirkung zustande kommende Biegungslinie e' mit den Ordinaten $y_1' y_2' \dots$ Die **Biegungsarbeit** an einem Element dl für die unendlich kleine Zunahme $d\alpha$ des Biegungswinkels ist $= M d\alpha$; da aber α sich auf die Winkeländerung von dl bezieht, d. h. $\alpha = M dl/(JE)$, also $d\alpha = dM dl/JE$ ist, so wird die elementare Arbeit $dA = M dM dl/JE$. Von der spannungsfreien Lage an bis zum Erreichen des Momentes M gerechnet ist $A = \int dA = M^2 dl/2JE$, demnach für die ganze Welle

$$\Phi_i = \int_0^l \frac{M^2 dl}{2JE} \quad \dots \dots \dots \dots \dots \quad (7)$$

Allein dieser bekannte Weg ist umständlich und hier überflüssig, denn die Formänderungsarbeit muß nach dem Energiesatz der Arbeit der äußeren Kräfte gleich sein, wenn wir diese von Null an wachsend denken. Dann ist die von jeder Kraft geleistete Arbeit $= \frac{1}{2}$ Kraft $\times$ Weg, also im ganzen

$$\Phi_i = \frac{1}{2}\left[P_1 y_1' + P_2 y_2' + \dots\right] = \frac{1}{2} \Sigma P y' \quad \dots \dots \dots \quad (8)$$

Ferner wird, indem man unter die „Belastung" auch die Fliehkräfte der in Stücke geteilten Wellenmasse rechnet, die kinetische Energie nach Gl. (3)

$$\Phi_k = \lambda^2 K = \frac{\lambda^2}{2}\left[m_1 y_1'^2 + m_2 y_2'^2 + \dots\right] = \frac{\lambda^2}{2} \Sigma m y'^2 \quad \dots \dots \quad (9)$$

Also erhält man nach (4)

$$\lambda^2 = \frac{\Phi_i}{K} = \frac{P_1 y_1' + P_2 y_2' + \dots}{m_1 y_1'^2 + m_2 y_2'^2 + \dots} = \omega_{k1}^2 \quad \dots \dots \dots \quad (10)$$

oder wenn wir $P_1 = m_1 y_1 \omega_0^2$; $P_2 = m_2 y_2 \omega_0^2$; ... einsetzen

$$\omega_{k1}^2 = \frac{m_1 y_1 y_1' + m_2 y_2 y_2' + \dots}{m_1 y_1'^2 + m_2 y_2'^2 + \dots} \omega_0^2 \quad \dots \dots \dots \quad (11)$$

Morley[1]) hat als Erster diesen Weg eingeschlagen, mit dem Unterschiede, daß er als ursprüngliche Kräfte die Eigengewichte der Scheiben und Wellenteile einführt. Der Erfolg zeigt, daß auch diese Annäherung wohl zulässig ist.

Der Wert ω_{k1} kann durch Wiederholung des Verfahrens verbessert werden, indem man neue Werte der Fliehkräfte mit den Ordinaten der erhaltenen Biegungslinie e' rechnet und die Formänderung von neuem bestimmt, so daß sich

$$\omega_{k2}^2 = \frac{m_1 y_1' y_1'' + m_2 y_2' y_2'' + \dots}{m_1 y_1''^2 + m_2 y_2''^2 + \dots} \omega_{k1}^2 \quad \dots \dots \dots \quad (11a)$$

[1]) Engineering 1909, Bd. LXXXVIII, S. 135 u. 205. Ähnlich Kull, Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1918, S. 249. Später hat Morley das Verfahren auf die durchlaufende Welle übertragen in Engineering, 22. November 1918.

ergibt. Ob die neuen Fliehkräfte mit dem neuen ω_{k1} oder dem alten ω_0 berechnet werden, macht offenbar keinen Unterschied, denn die zuerst erhaltenen Einsenkungen $y_1' \ldots$ sind dem ω_0^2 proportional; man kann also auch $y_1' = \varphi(x_1)\omega_0^2$; $y_2' = \varphi(x_2)\omega_0^2 \ldots$ schreiben, wo $x_1 x_2$ die Abstände des Kraftangriffes und $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2) \ldots$ die aus dem graphischen Ergebnis zu rechnenden Verhältniszahlen bedeuten. Dann wird nach (11)

$$\omega_{k1}^2 = \frac{\Sigma m y \varphi(x)\omega_0^2}{\Sigma m \varphi(x)^2 \omega_0^4}\,\omega_0^2 = \frac{\Sigma m y \varphi(x)}{\Sigma m \varphi(x)^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

unabhängig von der Größe der ursprünglichen Geschwindigkeit. Das gleiche gilt also für ω_{k2}, und man bemerkt, daß das Verfahren vollständig auf die in Abschn. 91 entwickelte graphische schrittweise Annäherung hinausläuft. In der Tat stellt Gl. (11) eigentlich nur eine Anweisung dar, welcher Mittelwert der alten und neuen Biegungslinie miteinander verglichen werden soll. Man kann die Gleichung symbolisch als

$$\omega_{k1}^2 = \frac{\bar{y}}{\bar{y}'}\,\omega_0^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

schreiben, woraus sich die früher benutzte Formel $\omega_{k1} = \omega_0 \sqrt{\bar{y}/\bar{y}'}$, wo $\bar{y}, \bar{y}'$ auf die Mitte des Feldes bezogen waren, ergibt.

b) Mit Berücksichtigung der Kreiselkräfte.

Die Bewegung der Massen $m_1 m_2 \ldots$ in Abb. 417 kann, auch wenn Kreiselkräfte wirken, immer noch als Zusammensetzung zweier harmonischer Schwingungen aufgefaßt werden; es besteht jedoch gegenüber a) der wesentliche Unterschied, daß die Kreiselmomente während jener Schwingung eine ganz andere Arbeit leisten oder aufnehmen als die, die von den Momenten der Trägheitskräfte bei der Winkelschwankung der einfachen Schwingung geleistet wird. Das Rayleighsche Verfahren würde hier, auch in seiner verallgemeinerten Form, falsche Ergebnisse liefern.

Zum Ziele führt der Satz von der Formänderungsarbeit, d. h. der Energiesatz, angewendet auf das relative Gleichgewicht in einem mit der Winkelgeschwindigkeit der Wellenpräzession (s. Abschn. 89) sich drehenden Raum. Wir beschränken uns auf den Fall des Gleich- oder Gegenlaufes und erhalten mit den vorläufig angenommenen Durchbiegungen $y_1 y_2 y_3 \ldots$ Abb. 419 im kritischen Zustand die freien Fliehkräfte $P_1 = m_1 y_1 \omega_k^2$; $P_2 = m_2 y_2 \omega_k^2$; ... und die zugehörigen Kreiselmomente $\mathfrak{M}_{k1}, \mathfrak{M}_{k2}; \ldots$ nach Gl. (19) Abschn. 89 als $\nu\,\Theta_{d1}\tau_1\omega_k^2 \ldots$ mit $\nu = +3$ oder -1.

Bei der allmählichen Entstehung der Formänderung leistet eine einzelne Fliehkraft die Arbeit $\frac{1}{2} P y$, und ein einzelnes Moment die Arbeit $\pm\frac{1}{2}\mathfrak{M}_k \tau$, wo das $+$ oder $-$ Vorzeichen gilt, je nachdem das Moment auf eine Vergrößerung oder eine Verkleinerung des Neigungswinkels τ einwirkt. Die ganze Außenarbeit ist demnach

$$\Phi_a = \frac{1}{2}\left[\Sigma P y \pm \Sigma \mathfrak{M} \tau\right] \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

Diese erscheint als innere Energie der elastischen Kräfte, d. h. als Formänderungsarbeit der Welle, für die nun ein von (14) abweichender Ausdruck zu suchen ist. Zu diesem Zwecke denkt man sich die Welle, da ω_k noch unbekannt ist, mit einer willkürlichen Geschwindigkeit ω_0 umlaufend und ermittelt graphisch die entsprechende Biegungslinie e', Abb. 419, mit den Ordinaten $y_1' y_2' \ldots$ und den Neigungswinkeln $\tau_1' \tau_2' \ldots$ Die Formänderungsarbeit dieser Verbiegung ist nichts anderes als die äußere Arbeit der neuen Kräfte $P_1' = m_1 y_1 \omega_0^2 \ldots$ und Momente $\mathfrak{M}_{k1}' = \nu\,\Theta_{d1}\tau_1\omega_0^2 \ldots$, d. h.

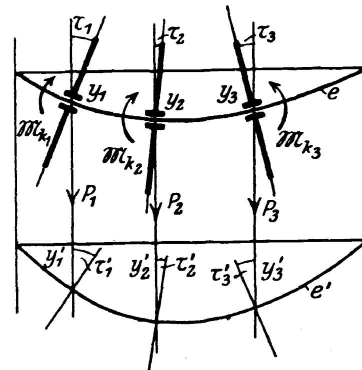


Abb. 419. Formänderungsarbeit mit Kreiselkräften.

$$\Phi_i' = \frac{1}{2}\left[\Sigma P' y' \pm \Sigma \mathfrak{M}' \tau'\right] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14\,a)$$

Aus dieser erhält man die innere Energie des kritischen Zustandes durch die Überlegung, daß dann statt P' und $\mathfrak{M}'$ die im Verhältnis ω_k^2/ω_0^2 größeren Werte P und $\mathfrak{M}$ die Be-

lastung bilden, und demzufolge die Einsenkung y' und die Neigung τ' auch im Verhältnis ω_k^2/ω_0^2 größer würde. Es wird also

$$\Phi_i = \Phi_i' \frac{\omega_k^4}{\omega_0^4} = \frac{1}{2}\left[\Sigma m\,\omega_0^2 y\,y' \pm \Sigma \nu\,\Theta_d\,\omega_0^2 \tau\tau'\right]\frac{\omega_k^4}{\omega_0^4} \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (15)$$

und aus der Gleichsetzung $\Phi_a = \Phi_i$ ergibt sich

$$\omega_k^2 = \frac{\Sigma m y^2 \pm \Sigma \nu\,\Theta_d \tau^2}{\Sigma m y y' \pm \Sigma \nu\,\Theta_d \tau\tau'}\,\omega_0^2 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (16)$$

Dieser Wert kann durch Wiederholung des Verfahrens mit $y_1'\,y_2' \ldots \tau_1'\,\tau_2' \ldots$ als ursprünglicher Annahme verbessert werden.

Da Gl. (16) auch bei Vernachlässigung der Kreiselkräfte gilt, hat die Gegenüberstellung mit Gl. (11) ein gewisses Interesse:

Nach Gl. (11) ist $\quad \omega_k^2 = \frac{\Sigma m y y'}{\Sigma m y'^2}\,\omega_0^2, \quad$ nach (16) $\omega_k^2 = \frac{\Sigma m y^2}{\Sigma m y y'}\,\omega_0^2 \quad . \ . \ . \quad (17)$

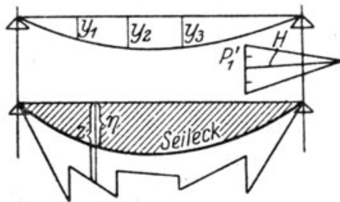


Abb. 420. Verfahren von Blaeß.

Diese sich scheinbar widersprechenden Ausdrücke müssen einander gleich sein. Wählte man in der Tat $\omega_0 = \omega_k$, so ginge y' in y über, und beide Ausdrücke würden zur Identität $\omega_k^2 = \omega_k^2$.

Die Formänderungsarbeit im hier benutzten Sinne wurde zur Entwicklung der kritischen Drehzahl zum ersten Male von **Blaess** verwendet[1]), der nach Gl. (7) $\Phi_i' = \int \frac{M'^2 dx}{2JE}$ setzt, und M' aus der Momentenfläche, Abb. 420, als $M' = H\eta$ einsetzt. Da gemäß (15) $\Phi_i = \Phi_i'\,\omega_k^4/\omega_0^4$ ist, erhält man

$$\Phi_i = \int \frac{H^2 \eta^2}{2JE}\,\frac{\omega_k^4}{\omega_0^4}\,dx \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (18)$$

Für die Auswertung hiervon zeichnet Blaess eine Kurve mit den Ordinaten $\zeta = \eta/\sqrt{J}$, und deutet das Integral als „statisches Moment“. Es dürfte noch einfacher sein, die Kurve

$$z = \frac{\eta^2}{J} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (18\,a)$$

zu zeichnen, die infolge der sprungweisen Änderung von J die zackige Linie in Abb. 420 liefert. Bestimmen wir deren Flächeninhalt

$$Z = \int_0^l z\,dx \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (19)$$

so ist $\Phi_i = \frac{1}{2}\frac{\omega_k^4}{\omega_0^4}\frac{H^2 Z}{E}$ und die Gleichsetzung $\Phi_i = \Phi_a$ ergibt für den kritischen Wert:

$$\omega_k^2 = \omega_0^4\,\frac{E\,\Sigma m y^2}{H^2 Z} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (20)$$

Falls man sich mit dieser ersten Näherung zufrieden geben kann, ist das Zeichnen des zweiten Kräfteplanes und der sich ergebenden elastischen Linie überflüssig. Wollte man die Genauigkeit des Ergebnisses prüfen, so wäre freilich diese Arbeit nachzutragen.

94. Die Formel von Dunkerley und ihre Anwendungen.

Dunkerley stellte auf Grund zahlreicher Versuche[2]) als empirische Zusammenfassung von deren Ergebnissen die Formel

$$\frac{1}{\omega_k^2} = \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \frac{1}{\omega_3^2} + \ldots \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (1)$$

auf. Darin bedeuten

[1]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1914, S. 187.
[2]) Phil. Transact. of the Royal Soc. London, Bd. 185, J. 1895, S. 270 u. f.

ω_1 die kritische Geschwindigkeit einer Masse m_1, die in bestimmter Lage auf einer Welle befestigt ist,

ω_2 desgl. für eine Masse m_2 (allein) in einer bestimmten (anderen) Lage auf derselben Welle,

ω_3, ω_4 ... desgl. für die Massen $m_3\, m_4$ ...,

ω_k die kritische Geschwindigkeit, wenn alle Massen $m_1\, m_2\, m_3$ ... zugleich in den betreffenden Lagen auf der gleichen Welle befestigt sind.

Da $1/\omega_k^2$, als Summe von positiven Größen, größer ist als irgendeines der $1/\omega^2$, so folgt, daß ω_k selbst kleiner sein muß als irgendeiner der ω-Werte. Die Formel ist übrigens nur eine Annäherung an die Wirklichkeit mit Abweichungen, die jedoch 3 bis 4 v. H. in den meisten Fällen nicht übersteigen.

Theoretische Begründungen der Formel sind von Blaess[1]) und Hahn[2]) gegeben worden. Der erstere benutzt den oben erläuterten Satz von der Formänderungsarbeit, die im kritischen Zustand den Wert

$$\Phi_a = \frac{1}{2}\,\Sigma\left(P_1 y_1 + P_2 y_2 + \ldots\right) = \frac{1}{2}\left(\Sigma m_1 y_1^2\right)\omega_k^2 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

besitzt, wobei $P_1 = m_1 y_1 \omega_k^2$; $P_2 = m_2 y_2 \omega_k^2$ ... die Fliehkräfte, $y_1 y_2$ ... die Einsenkungen der wirklichen elastischen Linie e' in Abb. 421 bedeuten. Wenn bloß die zentrisch gelagerte Masse m_1 auf der (gewichtslos gedachten) Welle befestigt ist, kann die Einsenkung bei der nun gültigen kritischen Geschwindigkeit ω_1 auch auf den Wert y_1 eingestellt werden, und dann gilt

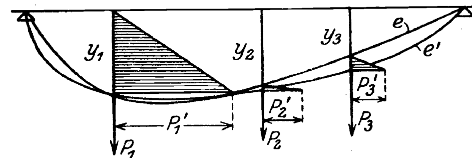


Abb. 421. Herleitung der Dunkerleyschen Formel.

$$\Phi_1 = \frac{1}{2}\,P_1' y_1 = \frac{1}{2}\,m_1 y_1^2 \omega_1^2 \quad . \; . \quad (3)$$

Ähnlich wird $\Phi_2 = \frac{1}{2}\,m_2 y_2^2 \omega_2^2$; $\Phi_3 = \frac{1}{2}\,m_3 y_3 \omega_3^2$ ...; und wenn wir hieraus die Werte $m_1 y_1^2$; $m_2 y_2^2$; ... in Gl. (2) einschieben, entsteht

$$\frac{\Phi_a}{\omega_k^2} = \frac{\Phi_1}{\omega_1^2} + \frac{\Phi_2}{\omega_2^2} + \frac{\Phi_3}{\omega_3^2} + \ldots \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Es möge nun e in Abb. 421 die elastische Linie bei der kritischen Geschwindigkeit ω_1 sein. Durch wagerechtes Abtragen der Fliehkraft $P_1' = m_1 y_1 \omega_1^2$ erhält man im schraffierten Dreiecksinhalt die elastische Energie Φ_1. Um die Linie, die ω_k entspricht, zu erhalten, kann man von e ausgehend an den Angriffstellen von $m_2\, m_3$ ... von Null an wachsende Kräfte anfügen, die bis auf $P_2\, P_3$ ... zunehmen. Da dabei der Angriffspunkt von m_1 auch fortrücken würde, muß die dort angreifende Kraft von P_1' auf P_1 abnehmen, so daß schließlich die Belastung aus den ursprünglichen Kräften $P_1\, P_2$ ... besteht, wie sein soll. Die Arbeiten der Zusatzkräfte sind durch die kleinen schraffierten (positiven oder negativen) Dreiecksflächen dargestellt; diese sind viel kleiner als Φ_1, denn es ist $P_1' = m_1 y_1 \omega_1^2$, da ω_1 viel größer ist als ω_k, groß gegenüber P_1 und gegen die etwa mit P_1 vergleichbar großen Kräfte $P_2\, P_3$ ... Man begeht mithin keinen großen Fehler, wenn man

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = \ldots = \Phi_a \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

setzt, und dann folgt aus (4)

$$\frac{1}{\omega_k^2} = \sim \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \ldots$$

d. h. die Formel von Dunkerley. Auf den Beweis von Hahn treten wir in Abschn. 189 näher ein.

[1]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1914, S. 188.

[2]) Note sur la vitesse critique et la formule de Dunkerley. Schweiz. Bauz. 1918, 8. Nov. u. f.

Verfahren von Krause[1]).

Es möge die Welle in Abb. 421 unter dem Gewichte der Masse m_1 in dessen Angriffspunkt die Einsenkung z_1 erleiden. Man kann

$$G_1 = m_1 g = \alpha_1 z_1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

setzen, und ähnlich wird $G_2 = \alpha_2 z_2$, $G_3 = \alpha_3 z_3$, woraus sich $\alpha_1 = m_1 g/z_1$; $\alpha_2 = m_2 g/z_2 \ldots$ und hiermit die einzelnen kritischen Geschwindigkeiten

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\alpha_1}{m_1}} = \sqrt{\frac{g}{z_1}}; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{z_2}}; \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{g}{z_3}} \ldots \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

ergeben. Setzt man diese Werte in Dunkerleys Formel (1) ein, so entsteht

$$\frac{1}{\omega_k^2} = \frac{z_1}{g} + \frac{z_2}{g} + \ldots \quad \text{oder} \quad \omega_k = \sqrt{\frac{g}{\Sigma(z)}} \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

Um die Formänderungen z mit Krause rechnerisch zu bestimmen, betrachten wir in Abb. 422 eine mehrfach abgesetzte Welle, die wir vorderhand im linken Endlager eingespannt denken wollen. Im Mittelpunkte des rechten Lagers greife eine Kraft $P = 1$ an, deren Moment Pl am Element dl den Biegungswinkel $d\varphi = Pl\,dl/J_2 E$ mithin eine Erhebung des Endes um $d\eta' = l d\varphi$ hervorruft. Durch Integration zwischen den Grenzen $l_1 l_2$ des Wellenstückes mit unveränderlichem Durchmesser D_2 entsteht $P(l_2^3 - l_1^3)/3 J_2 E$; also für ein beliebiges Stück der ganzen Welle mit $P = 1$

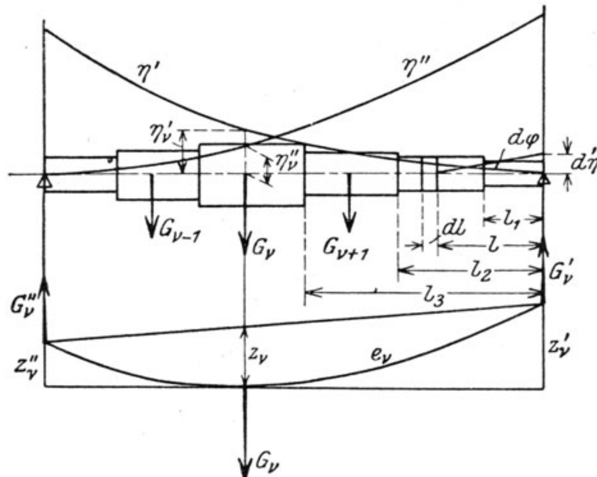


Abb. 422. Verfahren von Krause.

$$\eta' = \frac{1}{3E}\left[\frac{l_1^3}{J_1} + \frac{l_2^3 - l_1^3}{J_2} + \frac{l_3^3 - l_2^3}{J_3}\right] + \ldots \quad (9)$$

In ähnlicher Weise berechnet man die Einsenkung η'' des linken Wellenendes unter Annahme, daß das rechte eingespannt ist. Dabei wollen wir die Integration jeweils bei einem Schwerpunkt einer Scheibe (oder eines freien Wellenstückes) unterbrechen, und die Einsenkungen des Endes über dem Schwerpunkt als Ordinaten eintragen. Es bedeuten also die Linien $\eta' \eta''$ nicht die Form der elastischen Linie. Ein Zwischengewicht G_ν ruft mit den Bezeichnungen der Abb. 422 die Auflagerdrücke

$$G_\nu' = \frac{l_\nu''}{l} G_\nu; \quad G_\nu'' = \frac{l_\nu'}{l} G_\nu$$

hervor, wenn l_ν' l_ν'' den rechten und linken Abschnitt der ganzen Länge l bedeuten; sie erzeugen an den Wellenenden die Verbiegungen

$$z_\nu' = G_\nu' \eta_\nu'; \qquad z_\nu'' = G_\nu'' \eta_\nu'',$$

also würde, wenn die Welle bei G_ν eingespannt wäre, unter der Wirkung von G_ν allein die im unteren Teil von Abb. 422 dargestellte Biegungslinie e_ν zustande kommen. Daraus folgt die Einsenkung im Angriffspunkt von G_ν

$$z_\nu = \frac{l_\nu''}{l} z_\nu' + \frac{l_\nu'}{l} z_\nu'' = (\eta_\nu' l_\nu''^2 + \eta_\nu'' l_\nu'^2)\frac{G_\nu}{l} \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

Damit ist auch Σz_ν und nach (8) die kritische Geschwindigkeit ermittelbar.

[1]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1914, S. 878.

95. Versuche über die kritische Geschwindigkeit glatter und belasteter Wellen.

Die ausgedehnteste Versuchsreihe verdanken wir Dunkerley, der sich einer 6,3 mm dicken, 950 mm langen Welle bediente. Die Welle wurde je nach Umständen in 2, 3, 4 Lagern gestützt und durch Scheibchen von 76 bzw. 89 mm Durchmesser und etwa 55 bzw. 123 g Gewicht belastet. Die Übereinstimmung der einfachen Fälle mit der Theorie war nahezu vollkommen. Die empirische Formel ergab, wie oben erwähnt, bis auf einige Hundertteile genaue Ergebnisse.

Die Föpplsche Formel wurde um die gleiche Zeit durch Klein[1]) experimentell geprüft und erwies sich ebenfalls vollkommen zutreffend.

Ohne von der Arbeit Dunkerleys Kenntnis gehabt zu haben, unternahm auch der Verfasser Versuche mit glatten und stetig belasteten Wellen, die, obwohl mit einfachen Hilfsmitteln unternommen, der Mitteilung deshalb wert sind, weil sie bei bedeutend höheren Umlaufzahlen durchgeführt wurden als von Dunkerley, und weil die kritischen Umlaufzahlen höherer Ordnung beobachtet wurden, die bei Dunkerley fehlen.

Die aus Kaliber-Rundstahl von 8,5 und 3,5 mm Durchmesser angefertigten dünnen Wellen wurden unmittelbar mit der Laufradwelle einer Laval-Turbine im Maschinenlaboratorium der Eidgenöss. Techn. Hochschule verbunden, wodurch die Möglichkeit gegeben war, Umlaufzahlen bis zu 25000 in der Minute zu erreichen. Durch eine Bremse auf der Zahnradwelle ließ sich die Geschwindigkeit bequem regeln. Die Lagerung erfolgte in 56 mm langen Büchsen, in denen man die Wellen als nahezu „eingespannt" ansehen kann. Im übrigen bestand das Fundament bloß aus einem Holzpfosten, der auf einer Balkenunterlage aufruhte. Damit die Welle nicht brach, wurde der größte Ausschlag durch Führung auf etwa 10 mm im Halbmesser beschränkt. Schon der erste Versuch erbrachte den Beweis für die Existenz der höheren kritischen Geschwindigkeiten. Die anfänglich nur etwa 1 mm schlagende Welle zeigt bei einer Steigerung der Geschwindigkeiten unruhigen Lauf; in der Nähe der kritischen Zahl biegt sie sich aus und beginnt in der Führung stark zu streifen. Kaum hat man die kritische Zahl überholt, streckt sie sich gerade, und vom anfänglichen „Schlagen" ist nichts wahrzunehmen. Erhöht man die Geschwindigkeit, so wird unter gleichen Erscheinungen die zweite kritische Umdrehungszahl erreicht, mit einem Knoten in der Lagermitte, daraufhin die dritte, mit zwei Knoten, und so fort.

Die Kaliberstähle waren übrigens so homogen und gut ausgerichtet, daß die Welle bei der zweiten und den höheren kritischen Umlaufzahlen die Führungen nicht berührte, d. h. der Ausschlag unterhalb 10 mm radialer Weite blieb.

In folgender Zusammenstellung sind als „kritische" Umlaufzahlen diejenigen angegeben, bei denen der Druck auf die Führung oder das Erzittern des Gestelles der Schätzung nach seinen Höchstwert erreichte.

1. Glatte Welle, 8 mm Durchm., $l = 640$ mm, einseitig überhängend.

Kritische Drehzahl i. d. Min. theoretisch rd.	850	5400	15000	29500
„ „ „ „ „ beobachtet rd.	800	5000	14000	23000
Verhältnis theoretisch	1 :	6,3 :	17,6 :	34,6
„ beobachtet	1 :	6,2 :	17,4 :	29

2. Glatte Welle, 8 mm Durchm., $l = 450$ mm, einseitig überhängend.

Kritische Drehzahl i. d. Min. theoretisch	1730	11000
„ „ „ „ „ beobachtet	1600	10300
Verhältnis theoretisch	1 :	6,3
„ beobachtet	1 :	6,4

3. Glatte Welle, 8 mm Durchm., $2l = 860$ mm, beidseitig eingespannt.

Kritische Drehzahl i. d. Min. theoretisch	2980	8300	16200
„ „ „ „ „ beobachtet	2700	4800	12000
Verhältnis theoretisch	1 :	2,8 :	5,4
„ beobachtet	1 :	1,8 :	4,4

4. Glatte Welle, 3,5 mm Durchm., $2l = 536$ mm, beidseitig eingespannt.

Kritische Drehzahl i. d. Min. theoretisch	3690		9400		18400
„ „ „ „ „ beobachtet	3200	(5200) (Unruhe)	8200	(9500) (Unruhe)	17000
Verhältnis theoretisch	1 :		2,8 :		5,4
„ beobachtet	1 :	(1,6) :	2,55 :	(2,95) :	5,3

Diese dünne Welle zeigt schwache Erzitterungen („Unruhe") auch bei theoretisch nicht motivierten Umlaufzahlen, worüber man Abschn. 191 vergleichen möge.

---

[1]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1895, S. 1192.

5. Welle von 8 mm Durchmesser, die 20 Schmiedeeisenscheiben von je 180 mm Durchmesser, 2 mm Dicke vom Gesamtgewicht 8,93 kg in gleichen Abständen verteilt trug, 860 mm lang, beidseitig eingespannt war und eine vielstufige Gleichdruckturbine zu veranschaulichen hatte. Es war die

kritische Drehzahl i. d. Min. theoretisch	580		1620		3160		5250
„ „ „ „ „ beobachtet	500		1300		2800		(7000?)
Verhältnis theoretisch (ohne Kreiselkräfte)	1	:	2,8	:	5,4	:	9
„ beobachtet	1	:	2,6	:	5,6	:	(16?)

Nachdem zum Schluß nur eine einzige Führung in der Mitte stehen gelassen wurde, nahm die Welle bei der zweiten kritischen Umlaufzahl eine immer geschweiftere S-Krümmung an, bis sie plötzlich vollends verbogen wurde, zum Beweis, daß ein Bruch in der Tat, der Theorie gemäß, erfolgt.

Überblickt man diese Zahlen, so zeigt sich die beobachtete kritische Geschwindigkeit durchweg kleiner als die theoretische, während das Verhältnis der Umlaufzahlen verschiedener Ordnung mit dem theoretischen leidlich übereinstimmt. Der Grund der ersten Abweichung dürfte im Mitschwingen des bei meinen Versuchen sehr leichten, unvollkommenen Widerlagers und der unvollkommenen Einspannung liegen. Es wird Aufgabe weiterer Versuche sein, den Unterschied vollends aufzuklären.

Ganz allgemein kann ausgesprochen werden, daß der Lauf der Wellen, insbesondere auch des vielstufigen Modelles Nr. 5, unmittelbar nach dem Überschreiten der kritischen Umlaufzahl ruhiger ist als unterhalb. Hiermit soll aber keineswegs die Wahl einer niedrigen kritischen Umlaufzahl empfohlen werden, da die Erfahrung im großen zeigt, daß es günstiger ist, mit hohen über der Drehzahl des Betriebes gelegenen Geschwindigkeiten, oder, wie man sich auszudrücken pflegt, mit starren Wellen zu arbeiten. Wir haben in der statischen Verbiegung unter dem Eigengewicht einen wichtigen Grund kennen gelernt hohe kritische Drehzahlen anzuwenden. Bei 3000 Umdr. i. d. Min. ist man freilich in der Regel gezwungen, unter der normalen Drehzahl zu bleiben.

Um sicher zu gehen, muß man vom kritischen Wert in der einen oder der anderen Richtung genügend weit entfernt bleiben. Die Ausschläge, die zwar im kritischen Punkt nicht „unendlich“ werden, nehmen je nach der Lagerungsart und Belastung schon lange vorher und nachher merkliche Beträge an.

Einfluß der Zähigkeit des umgebenden Mittels auf die kritische Drehzahl glatter Wellen.

An den aus dem Schiffskörper tretenden, im Wasser frei umlaufenden Wellenteilen gewisser Torpedobootwellen wurde von der Firma Brown, Boveri & Cie. die Beobachtung gemacht, daß sie erschütterungsfrei blieben, auch wenn die Drehzahl einen der kritischen Beträge erreichte und festgehalten wurde.

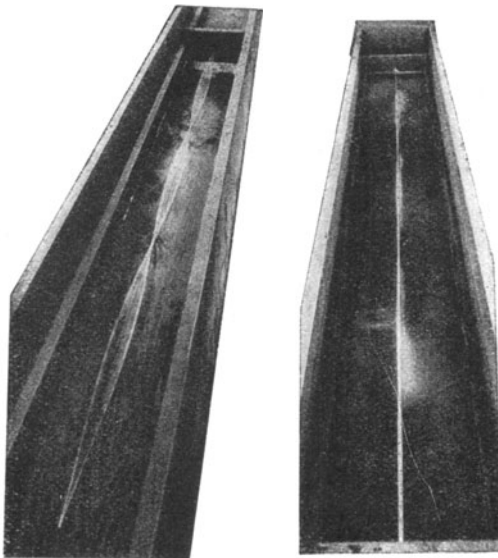


Abb. 423. Abb. 423 a.
Abnahme des kritischen Ausschlages infolge der Umgebungszähigkeit.

Man unternahm Versuche zur Klärung dieser Sachlage, die in Abb. 423 und 423a veranschaulicht sind. Das erste Bild zeigt die Welle bei der kritischen Drehzahl dritter Ordnung in freier Luft. Nachdm der umgebende Trog mit Wasser so weit angefüllt war, daß die Welle davon ein wenig überdeckt wurde, zeigte sie bei gleicher Drehzahl nach dem zweiten Bilde eine fast geradlinige Form. Wurde noch mehr Wasser nachgefüllt, so verschwand die Ausbiegung bis auf unmerklich kleine Reste. Bei 2400 mm Wellenlänge und Lagerung in festen Hülsen waren die drei aufeinanderfolgenden kritischen Drehzahlen der 7 mm starken Welle in der Luft 300, 820, 1700; im Wasser 310, 850, 1700. Die ersteren verhalten sich wie 1 : 2,73 : 5,67, was mit den theoretischen Werten 1 : 2,8 : 5,4 genügend übereinstimmt. Der Grund für die Abnahme der Ausschläge ist offenbar in der Zähigkeit des die Welle umgebenden Mittels zu suchen, die ähnlich wirkt wie die Luftreibung auf die umlaufende Scheibe gemäß Abb. 403b. Das von der Welle mitgerissene und im Kreise herumgeschleppte Wasser scheint keine Rolle zu spielen, sonst müßte die kritische Drehzahl sinken, während sie um ein geringes zu steigen scheint.

Einfluß von Drehungsschwingungen auf die kritische Geschwindigkeit.

Sind auf einer Welle zwei oder mehr Räder befestigt, so können die infolge unvollkommener Auswuchtung auftretenden Biegungsschwingungen auch Drehungsschwingungen zur Folge haben, auf die wir bis jetzt keine Rücksicht genommen haben. Insbesondere bei Schiffsturbinen mit der langen, elastischen Wellenleitung zwischen Schraube und Turbine, aber auch beim Antrieb von Dynamomaschinen kann die Torsionsschwingungszahl innerhalb der normalen Umlaufzahl gelegen sein.

Wir haben folgenden Versuch veranstaltet, um die Wirkung einer künstlich hervorgerufenen Torsionsschwingung festzustellen.

Eine Schmiedeisenscheibe von 190 mm Durchmesser, 16 mm Dicke wurde in der Mitte eines 750 mm betragenden Feldes auf eine Stahlwelle von 15 mm Durchmesser befestigt; ein Nachbarfeld von ebenfalls 750 mm Spannweite blieb leer, die Welle wurde mit der Überdruckturbine unseres Laboratoriums gekuppelt. Es war das Massenträgheitsmoment der Turbine, 4,80 kg·cm·sek² dasjenige der Scheibe 0,162 kg·cm sek², die Wellenlänge zwischen Scheibe und Turbine war = 112,5 cm und mit $G = 850000$ kg·cm^{-2} erhält man nach bekannten Formeln hieraus

$$n_t = 1475 \text{ als Zahl der Torsionsschwingungen i. d. Min.}$$

Die kritische Umlaufzahl wurde für die Welle allein, dann für die Scheibe allein (die Welle als durchlaufenden Träger auf drei Stützen gerechnet, da die Lager mit Kugelschalen versehen waren) ermittelt und nach Dunkerley zusammengesetzt; dies führte auf

$$n_k = 1305 \text{ i. d. Min.}$$

Die Beobachtung ergab nun bei möglichst gut ausgewuchteter Scheibe, daß bis 1000 Umdr./min vollkommene Ruhe herrscht; dann beginnt die Erschütterung der Scheibe, die bis nahezu 1500 Umdr./min anhält und einen Höchstwert bei etwa 1350 Umdr. aufweist, was gut mit der gerechneten Zahl übereinstimmt. Hierauf läuft das System vollkommen ruhig bis etwa 3700 Umdr., wo die glatte Welle im freien Felde zu schwingen beginnt, bei etwa 5000 bis 5400 Umdr. ein Maximum aufweist und sich bei 6000 Umdr. wieder ganz beruhigt.

Hierauf wurde die Scheibe mit einem vorstehenden Stift versehen, der bei jeder Umdrehung gegen eine Feder anstieß und so Torsionsschwingungen hervorrufen mußte. Die Beobachtung des in Umlauf versetzten Systems ließ aber keinen Unterschied des Verhaltens erkennen. Es mag dahingestellt bleiben, ob unsere Feder zu schwach war, eine ausgiebige Torsionsschwingung zu erzeugen — jedenfalls wurde dieser genügend Gelegenheit geboten sich auszubilden, vor allem bei der Umlaufzahl der Eigenschwingung, wo Resonanz eintritt, aber es war nichts zu bemerken. In der Literatur wurde die Folgerung gezogen, daß die Summe und der Unterschied der Torsions- und der Biegungsschwingungszahl zu gefährlichen Erscheinungen Veranlassung geben müßten. Für unsere Wellen wären das die Umlaufzahlen von $1475 \pm 1305 = 2780$ bzw. 170 i. d. Min., aber in beiden Fällen verhielt sich die Welle vollkommen ruhig.

Der Einfluß der Torsionsschwingung war demnach bei unserer Versuchsanordnung unbemerkbar, und es sind uns auch keine hierauf bezüglichen Wahrnehmungen aus der Praxis bekannt.

96. Die Dampfturbinenlager.

Die außergewöhnliche Steigerung der Drehzahl bei gleichzeitig beträchtlichen Lagerbelastungen, die die Turbine dem Maschinenbau aufgezwungen hat, bildete einen Ansporn, die Kraftverhältnisse der Gleitlager von Grund auf klarzulegen und durch Versuche Unterlagen für eine vernünftige Bemessung der Lagergröße, nämlich eine solche, die bei **genügender Betriebssicherheit mit der geringsten Reibungsarbeit** auskommt, zu gewinnen. Um sich in der Überfülle an Versuchsergebnissen zurecht zu finden, ist eine Theorie der Lagerreibung als Führerin unentbehrlich.

a) Theorie des ebenen Gleitlagers.

Die heute maßgebende Theorie der Lagerreibung verdankt man Reynolds[1]) und seinen Nachfolgern. Sie beruht auf folgendem Grundgedanken. Es bedeute in Abb. 424

---

[1]) Phil. Trans. Roy. Soc. London 1886. Scient. Papers II, 228. Die wichtigste sich anschließende Literatur ist: Petroff, Neue Theorie d. Reib. 1887. — Sommerfeld, Zeitschr. f. Math. u. Phys., Bd. 50, 1904, S. 124. — Michell, Zeitschr. f. Math. u. Phys., Bd. 52, 1905, S. 123. — Stoney, Engineering, 7. Aug. 1914. — Martin, Engineering, 8. Okt. 1915. — Gümbel, Schiffbautechn. Jahrbuch 1917, S. 236. — v. Freudenreich, Mitteilungen von Brown Boveri & Cie. 1917, S. 1. — Kucharski, Zeitschr. f. d. ges. Turbinenwesen 1918, S. 53. — Gümbel, Zeitschr. f. d. ges. Turbinenwesen 1918, S. 205.

AB eine ebene Lagerschale, die auf einer Ölschichte ruht und durch einen Druck P gegen den mit der Geschwindigkeit u gleichmäßig fortschreitenden „Kamm", d. h. die Spurzapfenfläche gedrückt wird. Ist die Schale, wie bei a zur Kammfläche parallel, so werden die ursprünglich zur Schale senkrechten, punktiert angedeuteten Ölfäden in die vollgezogene schräge Lage abgelenkt, wobei in einer zur Schalenfläche parallelen Ebene infolge der Formänderung der Ölschichten, durch die ein Quadrat in einem Rhombus übergeht, die Schubspannung τ nach dem Ansatz von Newton

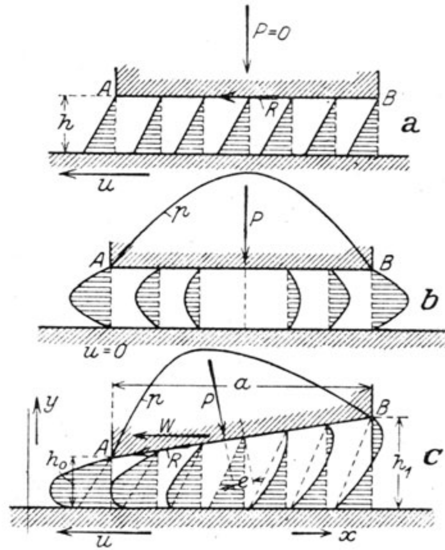


Abb. 424. Druckentwickelung im Gleitlager aus dem Quetschen der Ölschichte erklärt.

$$\tau = \eta \frac{\partial w}{\partial y} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

hervorgerufen wird, wenn η die Zähigkeitszahl, y die Höhe der Schichte bedeutet. Die Schmierflüssigkeit haftet an der Schalen- und Kammfläche, somit ist in Ebene $AB: w = 0$ und

$$\partial w / \partial y = u/h \quad \text{oder} \quad \tau = \eta u/h \quad . \; . \quad (2)$$

Die Schubspannung überträgt sich als „Reibungskraft" auf die ganze Schalenfläche, aber es wird außer dem statischen Druck des Öles, den wir dem Atmosphärendruck gleich voraussetzen, keine Normalpressung auf die Schale ausgeübt, somit muß die Schalenbelastung $P = 0$ sein.

Ein Druck entsteht, wenn die Schale sich wie bei b, dem Kamm nähern kann, wodurch das Öl herausgedrängt und die ursprünglich senkrechten Ölfäden die angedeutete ausgebauchte Gestalt annehmen. Gewissermaßen die Vereinigung der unter a) und b) dargestellten Vorgänge bildet Skizze c), wenn wir uns vorstellen, daß der Kamm ruht, und die Schale eine kleine Senkung nach abwärts, dann eine Verschiebung in ihrer Ebene, dann wieder eine Senkung usw. erfährt. Jeweilen ursprünglich senkrechte Ölfäden werden dann wechselweise schräg gestellt und ausgebaucht, es entsteht ein Reibungswiderstand und ein tragender Gegendruck, dessen Resultierende übrigens, wie sich später zeigt, nicht in der Mitte, sondern gegen das geneigte Ende der Schale verschoben, angreift. In Wirklichkeit ruht die Schale und der Kamm reißt das an seiner Oberfläche anhaftende Schmiermittel in die keilförmige Spalte hinein, wobei der Druck wegen der abnehmenden Querschnitte zuerst zunehmen, gegen das Ende aber wieder abnehmen muß, wenn wir annehmen, daß in der Umgebung am Austritt auch der Überdruck Null herrscht. Durch die wagerechte Schraffur stellen wir hier den Geschwindigkeitsverlauf der sich jeweilen in einer Senkrechten befindlichen Teilchen, oder das Wegelement in einem kleinen Zeltteilchen dar. In der Nähe von B beim Eintritt würden hiernach die oberen Schichten eine rückläufige Bewegung haben, was sich später in der Tat unter gewissen Umständen als möglich herausstellen wird.

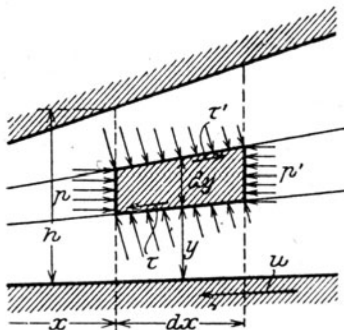


Abb. 424a. Kräfte an einem Schmiermittelteilchen.

Differentialgleichung der Strömung. Es sei a die Breite der Schale (Abb. 424), die Länge (senkrecht zur Bewegungsrichtung) sei unendlich. Wir greifen einen Streifen von der Länge b heraus, und betrachten das in Abb. 424a den Stromlinien nach herausgeschnittene Element. Da der Kamm sich nach links bewegt, wird die Schubspannung an der Unterseite die eingezeichnete Richtung (nach links) und die Größe $\tau = + \eta \, \partial w / \partial y$ haben, denn die Geschwindigkeit w nimmt nach oben (absolut genommen) ab, ist aber negativ, also $\partial w / \partial y$ positiv. Das Gleichgewicht der Kräfte verlangt, wenn dy die Dicke des Elementes in der Mitte bedeutet mit Vernachlässigung der als klein anzusehenden Neigung

$$(\tau - \tau') \, b \, dx = (p - p') \, b \, dy \quad \text{oder} \quad \frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Daraus folgt, falls η von y nicht abhängt,

$$\eta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial x} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

als die gesuchte Differentialgleichung. Die Integration nach y ist sofort ausführbar, weil $\partial p/\partial x$ von y nicht abhängt, und liefert

$$\eta w = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2,$$

wobei sich C_1, C_2 als Funktionen von x durch die Bedingung

$$w = -u \text{ für } y = 0; \quad w = 0 \text{ für } y = h$$

bestimmen, und es wird schließlich

$$w = \frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x}(y^2 - yh) - u\frac{h-y}{h} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Das Durchflußvolumen q für die Einheit der Länge berechnet sich zu

$$q = \int_0^h w\,dy = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{h^3}{6} + uh\right] \ldots \ldots \ldots \ldots (5\text{a})$$

und ist unabhängig von x. Daher wird einfacher für den Wert von x, wo $\partial p/\partial x = 0$ ist, wenn man dort

$$h = h^* \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (5\text{b})$$

setzt

$$q = -\frac{uh^*}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

An jener Stelle ist nach Gl. (5) w linear über den Querschnitt verteilt, so daß Gl. (6) von selbst einleuchtet. Mit Gl. (5a) und (6) berechnet sich

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 6\eta u\frac{h^* - h}{h^3} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

und dient zur Darstellung von p als Funktion von x, wenn h als solche gegeben und h^* bekannt ist.

Graphische Integration.

Die einfache Form der Differentialgleichung (7) empfiehlt die graphische Integration, bei der sowohl die Veränderlichkeit von h, wie die von η spielend berücksichtigt werden kann. Erstere ist durch die Bauart des Lagers gegeben, letztere kann aus den weiter unten mitgeteilten Versuchsergebnissen abgeleitet werden. Wählen wir nach Abb. 425 den Koordinatenanfang an der Austrittskante A, so sind h und η gegebene Funktionen von x; ist p_0 die Pressung bei A, so liefert Gl. (7) durch Integration

$$p = p_0 + h^* \int_0^x 6\eta u \frac{dx}{h^3} - \int_0^x 6\eta u \frac{dx}{h^2}. \quad (8)$$

Wir schreiben

$$p = p_0 + h^* f_1(x) - f_2(x) \quad \ldots \quad (8\text{a})$$

worin $f_1(x)$, $f_2(x)$ die „Integralkurven" der in Abb. 425 aufgetragenen Funktionen $6\eta u/h^3$ und $6\eta u/h^2$ sind, während h^* vorläufig unbekannt bleibt. Die Bedingungen am Ein- und Austritt sind:

$$\text{für } x = 0 \text{ muß } p = p_0,$$
$$\text{„ } x = a \text{ „ } p = p_0$$

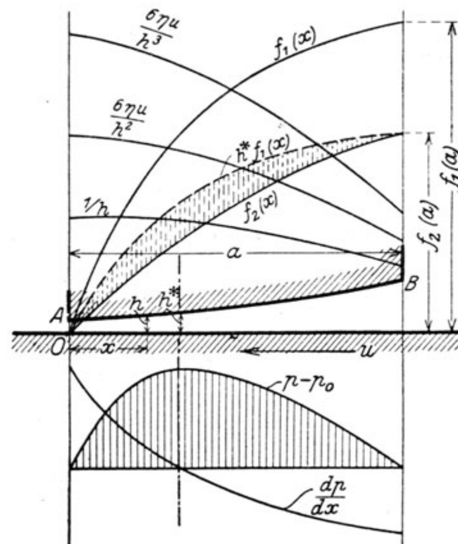


Abb. 425. Graphische Integration.

sein. Die erste ist ohne weiteres erfüllt, da die Integrale für $u = 0$ verschwinden. Die zweite dient zur Bestimmung von h^* und liefert

$$h^* = \frac{f_2(a)}{f_1(a)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

Schreibt man nach dem Mittelwertsatz

$$f_1(a) = 6\,\eta_m \frac{ua}{h_m^{\,3}}; \quad f_2(a) = \frac{6\,\eta_m u a}{h_n^{\,2}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9\text{a})$$

worin $\eta_m h_m h_n$ graphisch zu ermittelnde Mittelwerte sind, so erhält man die Form

$$h^* = \frac{h_m^{\,3}}{h_n^{\,2}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9\text{b})$$

Nun kann, wie im unteren Teile von Abb. 425 dargestellt, der Verlauf von $p - p_0$ nach Gl. (8a) als der Unterschied der Werte $h^* f_1(x)$ und $f_2(x)$, ebenso dp/dx nach Gl. (7) eingetragen werden. Gl. (5) liefert die Größe der Schubspannung τ:

$$\tau = \eta \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x}(2y - h) + \frac{u}{h}\eta \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

also insbesondere deren Wert für die „Kamm"fläche, d. h. $y = 0$

$$\tau_0 = -\frac{\partial p}{\partial x}\frac{h}{2} + \frac{u\eta}{h} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10\text{a})$$

Mit dieser ermittelt sich die gesamte Reibungskraft für einen Streifen von der Breite b, der Länge a

$$K_r = \int_0^a b\tau_0 dx \quad \ldots \quad (11)$$

Der gesamte Überdruck, der auf die gleiche Kammfläche wirkt, ist

$$P = \int_0^a b(p - p_0)dx \quad \ldots \quad (11\text{a})$$

Daraus folgt die Reibungszahl

$$\mu = \frac{K_r}{P} \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

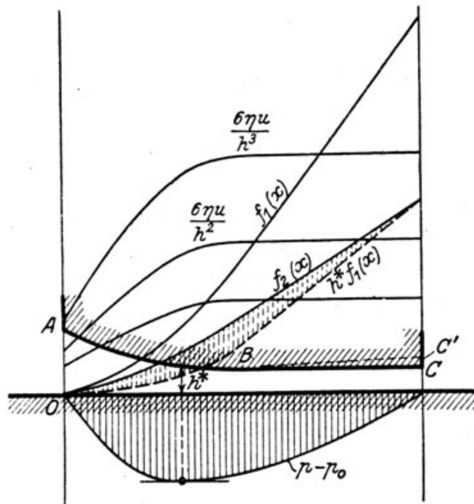


Abb. 425a. Theoretischer negativer Öldruck.

Das graphische Verfahren ist zur Abschätzung des Druckverlaufes bei verwickelten Spaltformen gut geeignet. So würden bei der Anordnung nach Abb. 425a die Funktionen $f_1(x)$; $f_2(x)$ von A bis B rasch wachsend nach oben konkav verlaufen, von B bis C die Richtung der Tangenten in B verfolgen. Verkleinert man $f_1(x)$ im Verhältnis von $f_1(a)$ zu $f_2(a)$, so ergibt der Unterschied zwischen $f_2(x)$ und der neuen Kurve $h^* f_1'(x)$ den Überdruck $p - p_0$, der durchweg negativ bleibt. Wie weit dies physikalisch möglich ist, wird später erläutert. Kehrt man die Bewegungsrichtung der unteren Fläche um, so wird $p - p_0$ positiv. An diesem Ergebnis ändert sich nichts Wesentliches, wenn der Spalt zwischen B und C sich um ein geringes erweitert, wie durch BC' angedeutet wird. Bei stärkerer Erweiterung tritt ein Druckwechsel im Öl ein.

Analytische Integration.

Unter vereinfachenden Annahmen kann das analytische Integral der Gl. (7) durch die Übersichtlichkeit des fertigen Buchstabenausdruckes nützlich werden. So wurde von Reynolds (a. a. O.) die Rechnung mit den Annahmen $\eta =$ konst. und

$$h = h_0\left(1 + m\frac{x}{a}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

durchgeführt. Ist die Spaltweite am Eintritt $= h_1$ so ist

$$m = \frac{h_1 - h_0}{h_0} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (13\text{a})$$

ein (etwas eigentümlich gewähltes) Maß für die Schalenneigung. Für die analytische Integration von (7) ist es bequemer h als Unabhängige einzuführen, indem man $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{d p}{d h} \frac{d h}{d x} = \frac{d p}{d h} \frac{h_0 m}{a}$ schreibt. Mithin wird

$$\frac{d p}{d h} = \frac{6 \eta u a}{m h_0} \frac{h^* - h}{h^3} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

und liefert

$$p = \frac{6 \eta u a}{m h_0 h} - \frac{3 \eta u a}{m h_0} \frac{h^*}{h^2} + C \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

Nun muß wieder, da das Öl mit Atmosphärendruck eingeführt und abgeleitet wird, für $x = 0$ und $x = a$; $p = p_0$ sein. Daraus bestimmen sich die Unbekannten

$$h^* = 2 \frac{m+1}{m+2} h_0; \qquad C = -\frac{6 \eta u a}{m(m+2) h_0^2} + p_0 \quad \ldots \ldots \quad (16)$$

Man kann dann

$$p - p_0 = \frac{6 \eta u a}{h_0^2} f(x m) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

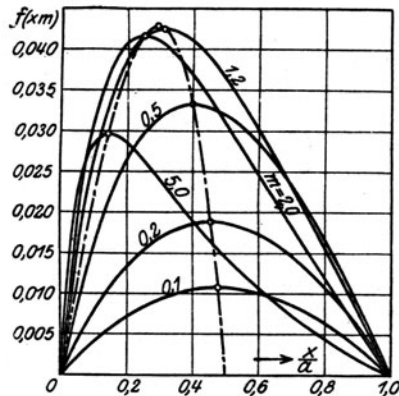


Abb. 426.
Druckverteilung im ebenen Gleitlager.

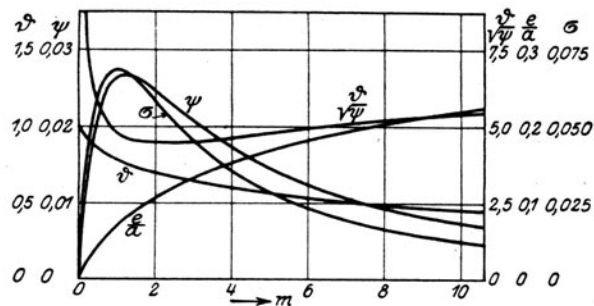


Abb. 426a.
Funktionen zur Gleitlagertheorie.

schreiben, wobei $f(x m)$ nach v. Freudenreich in Abb. 426 als Abhängige des Verhältnisses x/a dargestellt ist. Die gesamte Schalenbelastung ist für einen Streifen von der Länge b

$$P = \int_0^a (p - p_0) b \, d x \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

woraus sich der **Mittelwert $\bar{p}$ des spezifischen Überdrucks** in der Form

$$\bar{p} = \frac{P}{a b} = \frac{6 \eta u a}{h_0^2} \psi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (19)$$

ergibt. Umgekehrt folgt hieraus **der kleinste Schalenabstand**

$$h_0 = \sqrt{\frac{6 \eta u a}{\bar{p}} \psi} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (20)$$

wobei ψ nach v. Freudenreich in Abb. 426a als Abhängige von m eingetragen ist. Der gleiche Autor hat (a. a. O.) die Werte der in Abb. 426a veranschaulichten Veränderlichen ϑ, χ, e/a, σ berechnet, deren Bedeutung aus dem Folgenden hervorgeht. Die Reibungskraft für die ganze (obere) Schalenfläche ist:

$$K_h = \int_0^a \tau_h b \, d x$$

wobei gemäß (10) für $y = 0$; $\tau_0 = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{h}{2} + \frac{\eta u}{h}$ und für $y = h$; $\tau_{(h)} = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{h}{2} + \frac{\eta u}{h}$ ist. Die

auf die Schale wirkende Gesamtkraft in wagerechtem Sinn ist $=\sim K+$ wagerechte Komponente des Flüssigkeitsdruckes $-P$ in Abb. 424 bei c. Also wird $K_s = K_h + \frac{m h_0}{a} P$. Nach Ausführung der Rechnung entsteht

$$K_s = \frac{\eta u a b}{h_0} \vartheta \qquad (21)$$

wobei ϑ nur von m abhängt und nach Abb. 426a mit wachsender Neigung der Schale abnimmt.

Das gleiche Ergebnis erhält man einfacher durch die Überlegung, daß K_s gleich groß ist wie die auf den Kamm wirkende Reibungskraft K_r, weil im Beharrungszustand der „Drall" der im Lager strömenden Schmiermittelmenge sich nicht ändert, also die Summe der auf dieselbe wirkenden Momente = Null sein muß. Diese Momente bestehen aber aus demjenigen der Kammreibung und des Schalenwiderstandes K_s, die mithin gleich sein müssen.

Aus (21) und (19) folgt die Reibungszahl

$$\mu = \frac{K_s}{P} = \frac{h_0 \vartheta}{6 a \psi} \qquad (21a)$$

oder wenn wir den mittleren Druck mittels Gl. 19 einführen:

$$\mu = \frac{\vartheta}{\sqrt{6\psi}} \sqrt{\frac{\eta u}{\bar{p} a}} \qquad (22)$$

Nun ist noch die Lage der Resultierenden P, d. h. deren **Exzentrizität e** zu bestimmen. Dies erfolgt durch die Momentengleichung für die Kante A der Schale, Abb. 424

$$P\left(\frac{a}{2} - e\right) = \int_0^a b p x dx,$$

woraus man mit Gl. (19) nach fertiger Ausrechnung

$$e = \frac{a}{2}\left(1 - \frac{\sigma}{3\psi}\right) \qquad (23)$$

findet. Gemäß Abb. 426a nimmt das Verhältnis e/a mit m eindeutig zu. Daraus folgt umgekehrt, daß **zu einer bestimmten Exzentrizität des Kraftangriffs eine bestimmte Schalenneigung (m) gehört.** Dann ist auch $\vartheta/\sqrt{\psi}$ eindeutig durch e/a bestimmt. Gl. (22) ergibt das Gesetz:

$$\frac{\bar{p}\mu^2}{\eta} = \frac{\vartheta^2}{6\psi}\left(\frac{u}{a}\right) \qquad (22a)$$

wobei die rechte Seite von der Geschwindigkeit und dem Verhältnis e/a abhängt. Unter den gemachten Voraussetzungen ist mithin

$$\bar{p}\mu^2/\eta = \text{konst.} \qquad (22b)$$

Der Mindestwert der Reibungszahl tritt bei $m = 2{,}1$ auf, wobei

$$\left(\frac{\vartheta}{\sqrt{\psi}}\right)_{min} = 4{,}45 \quad \text{und} \quad \left(\frac{e}{a}\right)_{min} = 0{,}11$$

sind.

Fest eingestellte schräge Tragflächen werden dieselbe Wirkung haben wie bewegliche, sobald m den entsprechenden Wert annimmt. Die Wahl der Neigung bedingt nach Gl. (22) die Größe von μ, nach Gl. (20) den kleinsten Schalenabstand h_0 in Abhängigkeit von η, u, a, $\bar{p}$. Bei der Ausführung können mehrere Tragflächen in einen Block vereinigt werden, wenn man nach Abb. 427 durch breite Zwischennuten dafür sorgt, daß das erwärmte Öl, etwa durch einen Strahl von Drucköl, wenn auch nicht ganz ausgewaschen, so doch aufgefrischt wird.

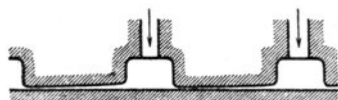


Abb. 427. Spurlager mit fest eingestellter Neigung.

Das wirkliche Kammlager weist gegenüber dem erschöpfend behandelten Reynoldsschen Modell in folgenden Punkten abweichende Verhältnisse auf:

1. Die Temperatur der Schmiermittel nimmt längs der Schale zu, die Zähigkeit demgemäß ab. Die Folge ist, wie v. Freudenreich a. a. O. gezeigt hat, eine Abnahme des spezifischen Druckes und eine Verschiebung der Resultierenden gegen die Eintrittskante hin, so daß die Exzentrizität sogar negativ werden kann.

2. Man rundet die Eintrittskante ab, wodurch schon vor dem Eintritt in den keilförmigen Schlitz eine, wie v. Freudenreich zeigt, nicht unwesentliche Drucksteigerung entsteht und die Resultierende mehr gegen die Eintrittskante hin verschoben wird. Ferner hängt die Schräge der Schalenfläche nun nicht bloß von der Lage ihres Stützpunktes, sondern auch von der Geschwindigkeit u und der Belastung p ab.

3. Die Länge der Schalenfläche ist im Verhältnis zur Breite nicht unendlich (oder sehr) groß. Dieser Fall führt uns auf das berühmte

Spurlager von Michell.

Michell löste die Aufgabe, die Druckverteilung in einer rechteckigen Platte mit endlicher Länge zu bestimmen[1]). Für das Verhältnis $a:b=1$ sind die Linien gleicher spezifischer Pressung wie auch die Stromlinien in Abb. 428 dargestellt. Für eine Schräge, die

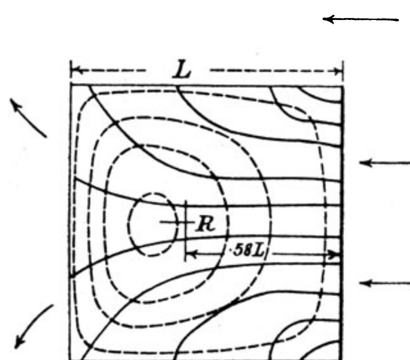


Abb. 428. Druckverteilung und Strömung im Michellschen Block.

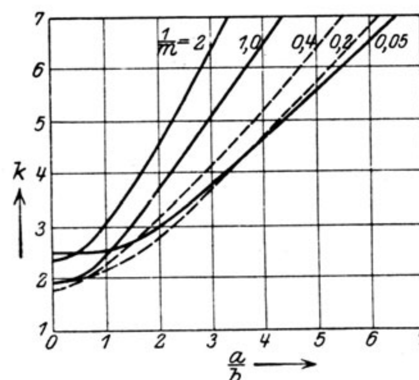


Abb. 428a. Vorzahl in Reibungsformel (24).

durch den Wert $m=1$ in Gl. (13a) gekennzeichnet ist, wird durch das seitliche Kürzen der Wert von $\bar{p}$ gemäß nachfolgender Zahlentafel herabgesetzt, μ und e/a erhöht.

Bei $m=1$ und dem Verhältnis $b/a=$	∞	1	$1/3$
ist der spez. Druck . . . . . . $\bar{p}=$	$\bar{p}_0$	$0{,}422\,\bar{p}_0$	$0{,}031\,p_0$
die Reibungszahl . . . . $\mu=$	μ_0	$2{,}22\ \mu_0$	$9{,}8\ \mu_0$
die Exzentrizität . . . . . . $e/a=$	0,07	0,08	0,11

Je schmäler also (quer zur Bewegungsrichtung) die Schale ist, desto stärker, u. zw. in potenziertem Maße, nimmt die Reibungszahl zu, der spezifische Druck ab.

Die ungemein verwickelte Rechnung von Michell wird von Gümbel[2]) dadurch vereinfacht, daß er den Druck quer zur Bewegungsrichtung nach einer Sinuslinie (zwischen 0 und π) verteilt annimmt, während in der Bewegungsrichtung die gleiche Drucklinienform bestehen soll, wie bei unendlich langer Schale. Schreibt man die Reibungszahl im Anschluß an Gl. (22) als

$$\mu = f\left(m_1 \frac{a}{b}\right)\sqrt{\frac{\eta u}{\bar{p}\,a}} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (24)$$

so nimmt nach den Rechnungen Gümbels die Funktion $f\left(m_1 \frac{a}{b}\right)$ die in Abb. 428a dargestellten Werte an. (Dabei ist die von Gümbel eingeführte Größe $\chi = 1/m$). Die Werte stimmen im Gebiete $a/b=0$ bis 1 mit dem Michellschen Ergebnis sehr gut überein, darüber hinaus ist μ nach Gl. (24) viel kleiner.

---

[1]) Z. f. Math. u. Physik, Bd. 52, 1905, S. 123.

[2]) Z. f. d. ges. Turbinenwesen 1918, S. 215.

Die Theorie des Halslagers.

Die in einem Halslager, Abb. 429, sich im Sinne des Uhrzeigers mit Spiel drehende Welle sollte nach der primitiven alten Theorie die Schale auf der rechten Seite berühren (an der Schale so hoch emporklimmen, bis das Moment der Zapfenbelastung dem Reibungsmoment gleich geworden ist); nach der neuen verschiebt sich der Zapfenmittelpunkt O nach links über die Schalenmittel hinaus, wodurch zwischen $A_0 A_2 A_3$ der „keilige“ Zwischenraum entsteht, in den das Schmiermittel durch die gleitende Zapfenfläche hineingezogen wird, und den im Polardiagramm dargestellten Flächendruck p erzeugt. Unter Annahme eines unendlich langen (bzw. an den Stirnflächen in vollkommener Weise abge-

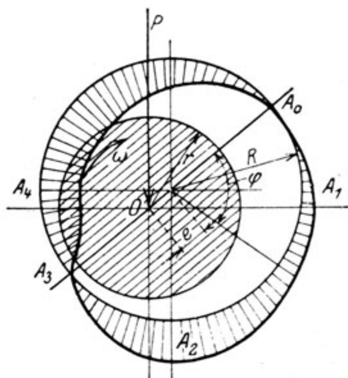


Abb. 429. Theoretische Druckverteilung im Halslager.

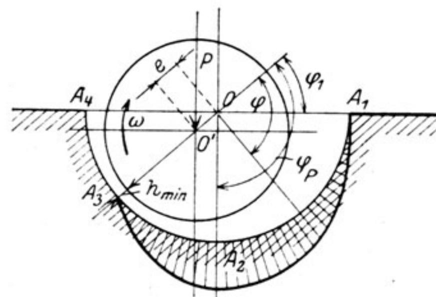


Abb. 429a. Halbumschlossenes Halslager.

dichteten) Zapfens, der keinen Ölverlust erleidet, würde in der auf A_3 über A_4 bis A_0 folgenden Erweiterung ein negativer Druck vom gleichen Betrage entstehen. Würde bei A_0 ein Druck p_0 eingestellt, so wäre an irgendeiner Stelle im Lager die Pressung die algebraische Summe aus p_0 und p. Ein Zapfen ohne Belastung (also gewichtslos) würde sich genau in die Mitte der Lagerbohrung einstellen.

Bei wachsender Belastung sinkt der Mittelpunkt und verschiebt sich wagerecht weiter wie in Abb. 429. Die Belastung wird durch die geometrische Resultierende der positiven und negativen Flächendrücke aufgenommen.

Nun sind indessen negative Werte des Druckes durch die Dampfspannung des Öles begrenzt, fallen daher bei schwerbelasteten Lagern nicht in Betracht. Da überdies in neuerer Zeit der Lagerdeckel mit besonderer Aussparung versehen wird, kann von der dort herrschenden Pressung und Reibung abgesehen und das Lager als **„halbumschlossen“** angesehen werden. Für dieses wird man mit Gümbel gemäß Abb. 429a die Grenzbedingungen aufstellen, daß für $\varphi = \varphi_1$ (bei A_1) $p = 0$ ebenso für $\varphi = \pi$ (bei A_3) $p = 0$ sei, und daß sich in der ganzen Erweiterung von A_3 bis A_4 kein negativer Druck ausbilden könne, sondern $p = 0$ bleibe. Die Resultierende der zwischen $A_1 A_3$ auf die Welle übertragenen elementaren Pressungen und Reibungen muß dann gleich und entgegengesetzt der Zapfenbelastung P sein. Die auf diesen Grundlagen durchgeführte Rechnung[1]) Gümbels führt zu folgenden Ergebnissen. Es bedeute in m, kg, sek-Einheiten

R den Halbmesser der Schale,	$\chi = e/\delta$ das Exzentrizitäts-Verhältnis,
D den Durchmesser der Schale,	$\bar{p} = P/DL$ mittlere spezifische Pressung in kg/qm,
r den Halbmesser der Welle,	η die Zähigkeitszahl.
$\delta = R - r$ das radiale Spiel bei zentrischer Lage,	ω die Winkelgeschwindigkeit.
e die Exzentrizität im Betrieb,	

Als gegeben wird anzusehen sein $P, D. L, \delta, \eta, \omega$. Daraus sind zu rechnen die Größen

$$\bar{p} = \frac{P}{DL}; \qquad k' = \frac{2\bar{p}}{\eta\omega}\left(\frac{\delta}{r}\right)^2 \frac{D+L}{L} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

[1]) Schiffbautechn. Jahrb. 1917, S. 288 u. 307.

Abb. 430 liefert den zu k' gehörenden Wert von χ, zu welchen in der gleichen Abbildung der Wert von k_0 abzugreifen ist. Daraus ergibt sich die **Reibungszahl.**

$$\mu = \frac{k_0}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\eta\,\omega}{\bar{p}} \frac{(4D+L)}{L}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

und die **kleinste Schmierschichtendicke**

$$h_{min} = R - r - e = \delta(1-\chi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Als Mittelwert für $k_0/\sqrt{2}$ empfiehlt Gümbel 1,68. Die Übereinstimmung der Gl. (26) mit den Versuchsergebnissen von Stribeck ist eine befriedigende.

Die Reibungsarbeit in mkg/sek für 1 qm ist

$$a_r = \mu \bar{p} u \frac{k_0}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\eta \bar{p} u^3}{r}\left(\frac{4D+L}{L}\right)} \quad (28)$$

Der Mindestwert von μ tritt auf, wo k_0 am kleinsten wird. Dies entspricht nach Abb. 430 $k_0 = \sim 2$; $\chi = 0{,}5$; $k' = 4$. Daraus ergibt sich das **günstigste Lagerspiel** nach Gl. (25)

$$\left(\frac{\delta}{r}\right) = \sqrt{\frac{k'\eta\omega}{2\bar{p}} \frac{L}{D+L}} \quad . \quad . \quad (29)$$

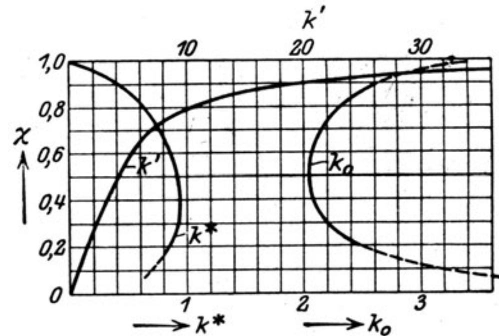


Abb. 430. Beiwerte zu Gl. (25) (26) (32).

Innerhalb der Grenzen $\chi = 0{,}2$ bis 0,8 ändert sich indessen k_0 so wenig, daß in (29) der Beiwert von $k'/2$ ebensogut durch 0,5 bis 5 ersetzt werden kann, mit denen ungefähr das gleiche μ erzielbar ist.

Beispiel. Es sei $L/D = 1{,}5$; $p = 5$ at; $n = 3000$/min; $\omega = 157$; $\eta = 2{,}10^{-3} \cdot$ kgsek/m²; so folgt $\mu = 0{,}0081$ und für δ/r die Grenzwerte $1{,}37 \cdot 10^{-3}$ und $4{,}35 \cdot 10^{-3}$. Der kleinste Schmierschichtendicke in Verhältnis zu r ist in beiden Fällen $h_{min}/r = \sim (1{,}1 \ldots 0{,}9)\,10^{-3}$. Das Lagerspiel dürfte mit Rücksicht auf die Reibung allein von 1,4 v. T. bis auf nahezu $^1/_2$ v. H. im Halb- also auf 1 v. H. im Durchmesser gesteigert werden, wobei die kleinste Schichten dicke sich nicht wesentlich ändern würde.

Theoretische Konstruktionsbedingungen für Lager.

1. Die kleinste Schmierschichtendicke muß größer sein als die Stärke der Unebenheiten der Schalen und Wellenoberfläche, damit eine Berührung fester Teile mit der daraus folgenden Gefahr des Heißlaufes und der Abnutzung vermieden werde.

Indem man δ aus (29) in (27) einsetzt, und mit Gümbel den Grenzwert von $(1-\chi)\sqrt{k'} = 0{,}5$; $\eta = 0{,}003$ kgsek/m² setzt, und annimmt, daß bei best bearbeiteten Flächen

$$h_{min} \geqq 0{,}01 \text{ mm} = 10^{-5} \text{ m}, \quad \text{bei minder guter Bearbeitung} \quad h_{min} \geqq 0{,}1 \text{ mm} = 10^{-4} \text{ m}$$

sein solle, ergibt sich die Bedingung

$$DL \sqrt{\frac{nD}{P(D+L)}} > 0{,}003 \text{ bis } 0{,}03 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

in kgmsek, wobei n die Drehzahl i. d. Min. bedeutet.

2. Die entstehende Reibungswärme muß bei der vorgeschriebenen Schmierschichttemperatur t^0 C und bei der Umgebungstemperatur $t_0{}^0$ C abgeleitet werden können.

Bei näherem Eingehen auf den Wärmeaustausch müßte an Hand von Abb. 431 beachtet werden, daß von der stündlich zugeführten Ölmenge G, die bei Kante A_1 mit der Temperatur t_1 eintritt, nur ein Teil $= G_1$ unter die Tragfläche mitgerissen wird, während der Rest $= G_2$ durch den erweiterten Deckelspalt strömt und so die Welle mittelbar kühlt.

Wären die Stirnenden des Lagers vollkommen abgedichtet, so würde G_1 nach Formel

$$G_1 = L \frac{\omega r}{2} h^* \gamma\, 3600 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

zu rechnen sein, worin h^* die Dicke der Schmierschicht an der Stelle bedeutet, wo $\partial p/\partial x = 0$ ist und demgemäß die Geschwindigkeit längs der Normale zur Strömung linear verläuft (daher der Faktor $\omega r/2$). Man findet nach Gümbel

$$h^* = k^* r \sqrt{\frac{\eta \omega}{\bar{p}}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (32)$$

wobei k^* als Abhängige von χ aus Abb. 430 entnommen werden kann. Findet seitlicher Abfluß statt, so kann mangels zuverlässiger Formeln G_1 nicht angegben werden.

Es möge die Temperatur im Strom unter der Welle auf t_2', über der Welle auf t_2'' anwachsen, dann werden den mittleren Temperaturen $t_m' = (t_1 + t_2')/2$ und $t_m'' = (t_1 + t_2)/2$ entsprechend gewisse Wärmemengen abströmen, für die man den weiter unten besprochenen Lascheschen Ansatz $k_1 \pi D L \cdot (t_m' - t_0) = A_{l_1}$

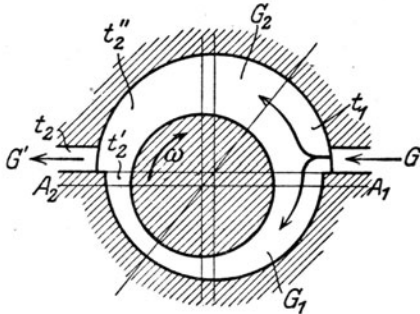


Abb. 431.
Öltemperaturen im Lager.

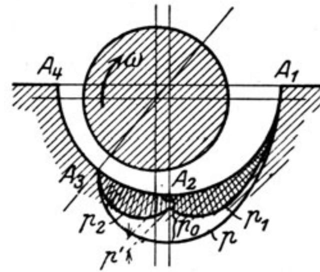


Abb. 431 a. Schädliche Druckflächenunterbrechung durch falsch angeordnete Nuten.

und $k_2 \pi D L (t_m'' - t_0) = A_{l_2}$ beibehalten kann, wobei sich $k_1\, k_2$ auf die Stunde beziehen sollen. Die Reibungswärme $3600 \cdot \mu u \bar{p} L D = A_{st}$ (in mkg/st) wird im unteren Ölstrom erzeugt uud dient einerseits zur Erwärmung des Öles, mit dem Betrage $A_{q1} = G_1 \cdot c (t_2' - t_1)$ 427. Der Teil $= A_{l_1}$ wird durch Leitung ans Lager abgeführt; ein Teil $= A_{w1}$ geht an die Welle über. Man erhält also die Gleichung

$$A_{st} = A_{q1} + A_{l_1} + A_{w1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (33)$$

Im oberen Ölstrom wird ein Betrag $= A_{w2}$ als Wellenwärme an das Öl übertragen, das einerseits gemäß Gleichung $A_{q2} = G_2 c (t_2'' - t_1)$ 427 als Eigenwärme behält, anderseits A_{l_2} an den Deckel abliefert, und so gilt die Gleichung

$$A_{w2} = A_{q2} + A_{l_2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (34)$$

Infolge der seitlich austretenden Ölmengen bleibt beim Verlassen des Lagers nur die Menge $G' = G_1' = G_2'$ übrig, und man findet die Mischungstemperatur t_2 am Schalenaustritt aus der Gleichung

$$G_1' t_2' + G_2' t_2'' = G' t_2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (35)$$

Fügt man schließlich die seitlich austretende Menge hinzu, so hat diese inzwischen eine weitere schwer anzugebende berechenbare Wärmemenge durch Abkühlung verloren. Diese Gleichungen veranschaulichen die Schwierigkeit, die wahre Schmierschichttemperatur (t_2') zu ermitteln, und zeigen die komplexe Natur der Ablauftemperatur t_2. Eine Auswertung ist mangels von Versuchsergebnissen nur unter vereinfachenden Annahmen möglich. So möge im Grenzfall $A_{w1} = 0$ und $A_{l1} = 0$ gesetzt werden. Dann besteht die Gleichung

$$G_1 c (t_2' - t_1)\, 427 = 3600\, \mu u \bar{p} L D \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (36)$$

aus der sich mit Rücksicht auf Gl. (31) und (32)

$$t_2' - t_1 = \frac{4 \mu \bar{p}}{427 \gamma c \left(\frac{h^*}{r}\right)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (37)$$

ergibt. Für das oben angeführte Beispiel mit $L/D = 1{,}5$; $p = 5$ at; $n = 3000/\text{min}$; $\eta = 2 \cdot 10^{-3}$ kgsek/m^2; $\mu = 0{,}0081$ erhält man $\delta/r = 2{,}72 \cdot 10^{-3}$; $h^*/r = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$, und mit $\gamma = 920$ kg/cbm; $c = 0{,}04$ kCal/kg wird

$$t_2' - t_1 = 4{,}1^0\,\text{C}.$$

Dabei ist für $D = 0{,}25$ m; $L = 0{,}375$ m das stündliche Ölgewicht nach Gl. (31)

$$G_{1\,st} = 3820\ \text{kg}.$$

Die wahre Temperatur dürfte unter den angenommenen Verhältnissen nach den unten mitgeteilten Versuchen von Lasche und von Brown Boveri & Cie. wesentlich höher liegen. Die Erklärung dafür ist, daß die an der Welle haftende **warme Ölschichte** bei A_2 **nicht ohne weiteres abgestreift wird, sondern zum Teile von der Welle mitgeschleppt bei A_1, Abb. 431, von neuem in den Kreislauf eintritt.**

3. Die Schmiermittelzufuhr zum Lager muß so angeordnet sein, daß die tragende Ölschicht keine nachteilige Unterbrechung erleidet, und daß die Schmierung mit tunlichst kleinem Öldruck erfolgen kann. Die früher oft angewendete mittlere Nute bei A_2, Abb. 431a, der Länge des Lagers nach ist nachteilig, falls die Zufuhr mit dem unzureichenden Druck p' erfolgt, weil dadurch die (polare) Drucklinie an Stelle der einheitlichen Drucklinie p in die stark verkleinerten Felder p_1 p_2 zerlegt wird. Will man diese trotz der Nute aufrecht erhalten, so muß das Öl mit der beträchtlichen, bei A_2 vorhandenen Pressung p_0 zugeführt werden, wobei der Druck nahe an den Stirnflächen zu groß wird, und nutzlose Ölverluste verursacht. Diese Nachteile werden vermieden, wenn man das Öl wie in Abb. 431 bei A_1 eintreten läßt, wo der Überdruck nahezu = Null ist.

Noch schädlicher ist die Zerlegung der Tragfläche durch Kreuznuten, wie bei so vielen Transmissionslagern noch heute üblich ist, da hierdurch der Länge und der Quere nach die Entwicklung des nützlichen Tragedruckes in der Schmierschicht behindert wird.

Versuche über die Reibung von Halslagern.

Bezeichnen wir den „mittleren“ spezifischen Druck mit p, die Lagerbelastung mit P, die auf den Umfang bezogene Gesamtreibung mit K_r, die Zapfenumfangsgeschwindigkeit mit u, die Reibungsarbeit im kg/sek mit A_r, so gelten die Gleichungen

$$P = DLp; \quad K_r = \mu P; \quad A_r = K_r u \quad . \quad . \quad (38)$$

Die ältesten Versuche über die Lagerreibung stammen von Tower, der das angenäherte Gesetz $p\mu = K$ aufstellte. Dies bedeutet, da man $A_r = \mu pLDu = KLDu$ schreiben kann, daß **die Reibungsarbeit für ein gegebenes Lager bei gegebener Geschwindigkeit von der Belastung unabhängig** ist. Seither haben Stribeck[1]) und Lasche[2]) durch klassisch gewordene Untersuchungen unsere Kenntnis der Lagerreibung wesentlich erweitert.

Die Reibungszahlen von Stribeck, an einem Sellersschen Ringschmierlager von 70 mm Durchm., 230 mm Lauflänge gewonnen, sind in Abb. 432 als Abhängige der Drehzahl, bzw. der Lagergleitgeschwindigkeit zusammen dargestellt. Bemerkenswert ist der scharfe Anstieg von μ bei kleiner Geschwindigkeit und das Zusammentreffen der Schaulinien für alle Drucke im Punkte $\mu = 0{,}14$, bei verschwindend kleiner Geschwindigkeit, wo infolge allzu geringer Ölschichtendicke wohl Berührung von Zapfen und Schale, d. h. die Reibung fester Körper auftrat. Ähnliche Verhältnisse würden beim **Anfahren und Abstellen unserer Dampfturbinen** zu erwarten sein, falls nicht künstlich eine tragende Ölschicht hergestellt wird.

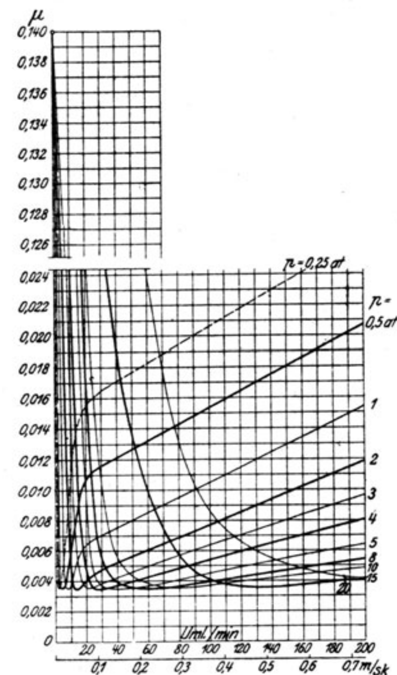


Abb. 432. Reibungszahl für Halslager nach Stribeck.

Lasche konnte auf Grund seiner Versuche im Jahre 1902 das einfache Gesetz

$$\mu pt = \text{konst.} = 2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

aufstellen, mit einem Gültigkeitsbereich von $p = 1$ bis 15 at; $t = 30$ bis 100^0 C; $u = 5$ bis 20 m/sek. Setzt man die Zähigkeit η etwa $0{,}3/t$, woraus $t = 0{,}3/\eta$ folgt, so nimmt die Formel auch die Gestalt

$$\frac{\mu p}{\eta_{\text{tech}}} = \frac{20}{3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

an. Besonders wertvoll sind die Beobachtungen Lasches über die vereinte Wärmeableitungsfähigkeit des Lagerkörpers und der Welle. Es wurden vier Lager mit folgenden Abmessungen untersucht:

Lager Nr.	1	2	3	4
Durchm. mm	110	260	450	110
Länge „	240	110	750	280

[1]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1902, S. 1341.
[2]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1902, S. 1881.

Ist $t - t_0$ der Temperaturunterschied zwischen Lagerschale und Außenluft, so setzt Lasche den Arbeitswert der Wärmeabgabe in mkg f. d. Stunde

$$A_r' = k(\pi DL)(t - t_0) \quad \text{. . . . .} \quad (41)$$

wobei l und d in Zentimetern auszudrücken sind. Die Vorzahl k erwies sich als mit der Temperatur wenig steigend, etwa gemäß Formel

$$k = 1{,}62 + 0{,}0144\ (t - t_0) \quad \text{. . . . .} \quad (42)$$

für Lager Nr. 1 bis 3. Doch wird für praktische Zwecke ein Ansatz mit unveränderlichem k genügen, und zwar

$k = 2$ bis 2,5 für Lager Nr. 1 bis 3

$k = 5$ bis 6 „ „ „ 4 (Abb. 432a).

Die Werte gelten für ruhende Luft und werden durch Luftwechsel jedenfalls vergrößert.

Formel (41) gibt uns die Möglichkeit, die Temperatur eines Lagers im Beharrungszustande zu rechnen. Falls keine Ölspülung vorhanden ist, muß die stündliche Reibungsarbeit 3600 A_r nach Gl. (38) gleich sein dem Arbeitswert der abgeleiteten Wärme A_r' nach Gl. (41). Wir erhalten also $3600\ LD\mu pu = k\pi DL(t - t_0)$ und mit Hinzuziehung von Gl. (39); $\mu p = K/t$

$$t(t - t_0) = 3600 \frac{Ku}{\pi k} \quad \text{. . . . .} \quad (43)$$

worin $K = 2$, zur Ausrechnung von t.

Lasche hat festgestellt, daß bei 125° C überschreitenden Temperaturen die Schmierfähigkeit der Lageröle plötzlich abnimmt. Wenn mithin Formel (43) zu hohe Erwärmungen ergibt, wird eine Kühlung des Lagers oder besser des Öles erfolgen müssen, wie wir in Abschn. 102 erörtern.

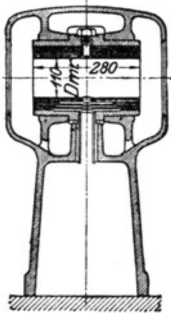


Abb. 432a. Dämpfungshülsenlager von Parsons.

Das in Abb. 432 dargestellte Lager Nr. 4 nimmt eine Sonderstellung ein: es ist bestimmt, die Erschütterung der Welle abzudämpfen und vom Fundamente fernzuhalten. Zu diesem Behufe ist es nach dem Vorgange von Parsons mit vier ineinander geschobenen Schalen versehen, die je ein kleines Spiel gegeneinander besitzen. Das Drucköl wird durch Nuten eigens auch in die Zwischenfugen geleitet; seine Zähigkeit setzt dem Herausquetschen bei der Schwingung einen nachgiebigen Widerstand entgegen und wirkt als Bremse. In neuerer Zeit ist der Massenausgleich so vollkommen, daß man von mehrteiligen Lagerschalen abkommt.

Diese Ergebnisse vom Jahre 1902 wurden von Lasche im Jahre 1918 durch eine groß angelegte Versuchsreihe an einem Lager von 200 mm Durchm. 400 mm Länge weiter ausgebaut.[1])

Die Unterschale des Versuchslagers wurde durch ein Joch gegen die Welle angepreßt, die Kraft mittels einer Meßdose gemessen. Das Drehmoment wurde unter Zwischenschaltung eines Amslerschen Torsionsmessers von einer Dampfturbine geliefert. Die Reibungsarbeit der seitlichen Stützlager ermittelte man vorher durch besondere Versuche mittels schwerer, eingelegter Welle; außerdem wurde sie bei jedem Versuch aus der Erwärmung und der Menge des auf stets gleiche Einlauf-Temperatur eingestellten Schmieröles berechnet.

Die Bauart des Lagers ist aus der weiter unten folgenden Abb. 440 ersichtlich. Es wurde untersucht:

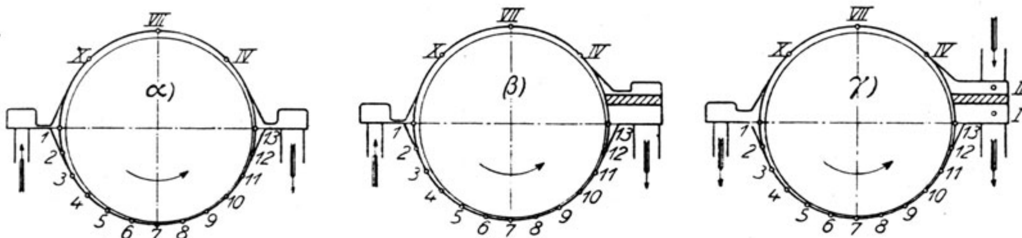


Abb. 433. Art der Ölzufuhr.

[1]) Nach freundl. Mitteilungen an den Verfasser; seither veröffentlicht im Buche: Konstruktion und Material im Bau von Dampfturbinen und Turbodynamos. Berlin 1920.

a) der Einfluß der Schmierungsart, wobei nach Abb. 433 folgende Fälle zu unterscheiden sind:

bei α) Normale Ölzufuhr, wobei das Öl bei 1 eintritt, von der Welle sofort mitgenommen wird, und bei 13 austritt,

bei β) Zufuhr wie bei I, Abfluß stark erweitert,

bei γ) Ölzufluß durch die Oberschale, bei Punkt IV, kräftiges Umspülen der Welle zum Zwecke guter Abkühlung; Abfluß sowohl bei Punkt 1 wie bei Punkt 13. Angewendet bei höchsten Geschwindigkeiten.

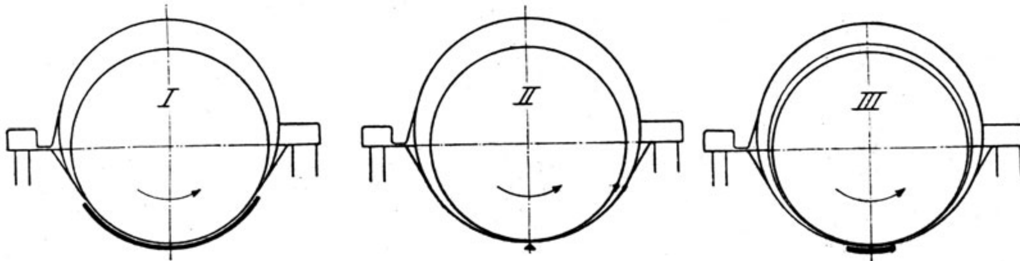


Abb. 433a. Art der Lagerung.

b) Der Einfluß der Lagerungsart, Abb. 433a, indem

bei I die Welle auf etwa $^1/_3$ des Umfanges auf die Schale passend aufgeschabt wurde,

bei II Welle und Schale genau zylindrisch gedreht sind, und sich, wenn keine Schmierschicht dazwischen tritt, in einer Linie berühren,

bei III die Schale auf einem kleinen schmalen Streifen von etwa $D/4{,}5$ Breite aufgeschabt ist.

c) Der Einfluß des Lagerspieles. Die Schalen waren einmal um 0,34 mm, das andere Mal um 0,20 mm weiter ausgebohrt als dem Wellendurchmesser entsprach.

d) Der Einfluß der Öleintrittstemperatur und Menge. Der Temperaturverlauf im Lager wurde mittels in die Schalenoberfläche eingebauter Thermoelemente beobachtet.

Die Meßpunkte waren am Umfang, wie in Abb. 433b angedeutet ist, angeordnet. Punkte 1—13 beziehen sich auf die untere, Punkte I—XIII auf die obere Schale. Ebene D in den nachfolgenden Schaulinien bedeutet die zur Achse senkrechte Mittelebene des Lagers. Außer dieser wurden zu ihr parallel in je 75 mm Abstand rechts und links Ebenen C und E, und in je 150 m/m Abstand Ebenen B und F mit Meßpunkten versehen. A und G bedeuten die Stirnflächen des Lagers.

In den gleichen Punkten werden auch Manometeranschlüsse vorgesehen zur Beobachtung des Öldruckes. Auf diese Weise ergab sich der „Temperaturberg“ Abb. 433b in der Unterschale. Die Druckablesungen sind in den nachfolgend erläuterten Schaubildern vereinigt. Dabei bedeuten:

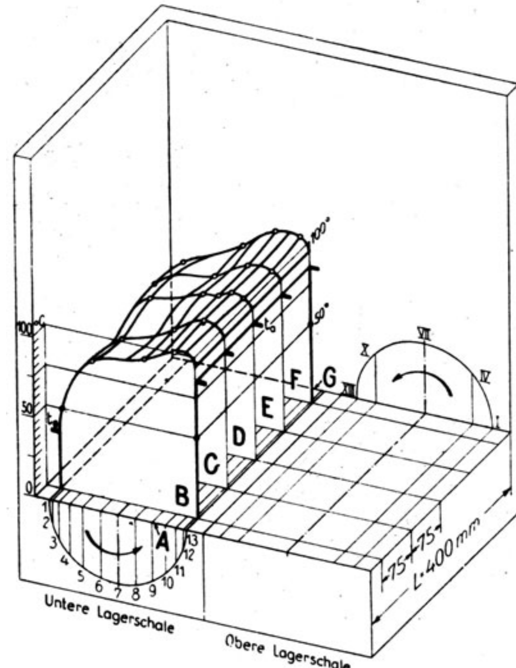
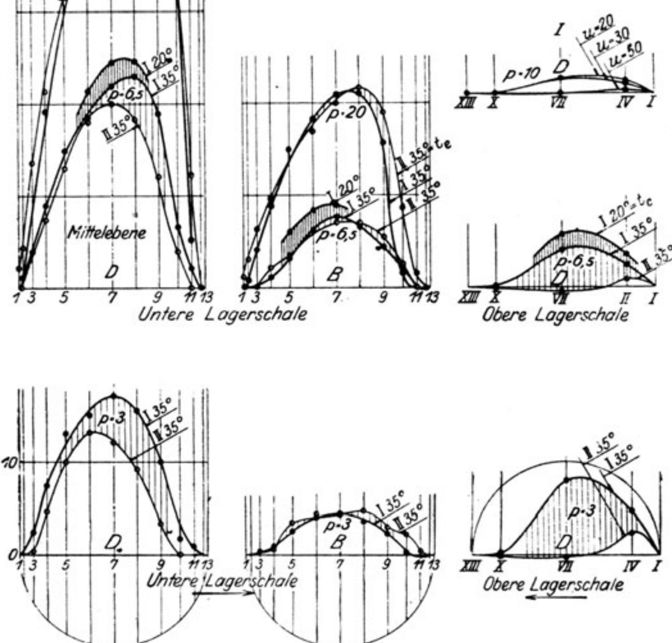


Abb. 433b. Meßpunkte und Temperaturberg.

I, II, III die Art der Auflage,
α, β, γ die Schmierungsart,
σ das Lagerspiel, d. h. Unterschied der Durchmesser in mm, entweder $= 0{,}33$ mm oder 0,20 mm,
p den mittleren Druck $= P : DL$ in at,
Q_e die Ölmenge in kg/min,
t_e, t_a die Ein- und Austrittstemperatur des Öles,
u die Umfangsgeschwindigkeit in m/sek.

In Abb. 434 werden die **Drücke bei Auflage I und II verglichen.** Die Schmierungsart ist γ; $u = 30$ m/sek; $Q_e = 20$ kg/min; $\sigma = 0{,}34$ m/m. Auflage I führt auf wesentliche höhere Pressungen, insbesondere in der Oberschale. Im allgemeinen stimmt der Druckverlauf mit dem theoretischen Bilde gut überein. Daß in der Oberschale die Drücke (und zwar absolut genommen) um so höher sind, je kleiner der mittlere (aus den Drücken der unteren und oberen Schale sich ergebende) Flächendruck $\bar{p}$ ist, kann wie folgt erklärt werden. Bei kleiner Belastung nimmt die Ölschichtendicke in der Unterschale zu, in der Oberschale ab; infolgedessen wird in der Abschrägung des oberen Schalenrandes, die wir mit dem Einlauf AB in Abb. 425a vergleichen können, der Druck höher hinaufgetrieben, so daß er in der darauffolgenden Erweiterung, die durch BC' in Abb. 425a darstellbar ist, nur allmählich abklingt.



Neue Rätsel hingegen gibt Abb. 434a auf, die bei unveränderlichem $p = 6{,}5$ at; $Q_e = 20$ kg/min, $t_e = 35^0$, $\sigma = 0{,}34$ mm mit Auflage II und Schmierungsart β den Druckverlauf bei **Steigerung der Umfangsgeschwindigkeit von 20 auf 60 m/sek** darstellt. Dieser bedeutende Betrag tritt beim **Ausschleudern großer Dynamoläufer** mit der bei der A.E.G. üblichen **Übergeschwindigkeit von 50 v. H. auf.** Wie

Abb. 434. Druckverlauf bei Auflage I und II bei $u = 30$ m/sk; $Q_e = 20$ kg/min; $\sigma = 0{,}34$ m/m Schmierung nach γ.

Abb. 434 a. Druckverlauf bei II, β, und Zunahme der Umfangsgeschwindigkeit.

ersichtlich, wird die Kuppe des „Druckberges" um so flacher, je größer die Geschwindigkeit. Die bislang veröffentlichten Schmierungstheorien sind infolge der eingeführten „Annäherungen" (wie unveränderliche Zähigkeit u. a.) außerstande, diese Erscheinungen zu erklären, und Lasche hat recht, vor der „trügerischen" Sicherheit zu warnen, in die uns glänzend entwickelte Theoreme leicht wiegen können. Der eigentümliche Druckverlauf bei 60 m/sek Umfangsgeschwindigkeit bedarf um so mehr der Aufklärung, als eine Erhöhung der Öleinheitstemperatur auf 47^0 C und eine Erniedrigung auf 20^0 C ihn in kaum merklicher Weise beeinflußten. Der Druck in der Oberschale war fast Null.

Abb. 434b bezieht sich auf Auflage II, Schmierungsart β, $\sigma = 0{,}34$ mm, $p = 6{,}5$ at, $u = 30$ m/sek, $t_e = 35^0$ C und eine **von 10 auf 50 kg/min gesteigerte Ölzufuhr.** „Theoretisch" dürfte der Druckverlauf sich nur insofern ändern, als durch vermehrte Kühlung die Zähigkeit wächst; die flache Wölbung bei starker Zufuhr, und der verspätete Anstieg bei kleiner Zufuhr bedürfen daher weiterer Aufklärung. Die Oberschale war nahezu druckfrei.

Abb. 434 b. Druckverlauf nach II, β bei gesteigerter Ölzufuhr.

Den Einfluß des von 0,34 auf 0,2 mm verringerten Lagerspieles auf den **Druckverlauf** bei Auflage II, Schmierungsart

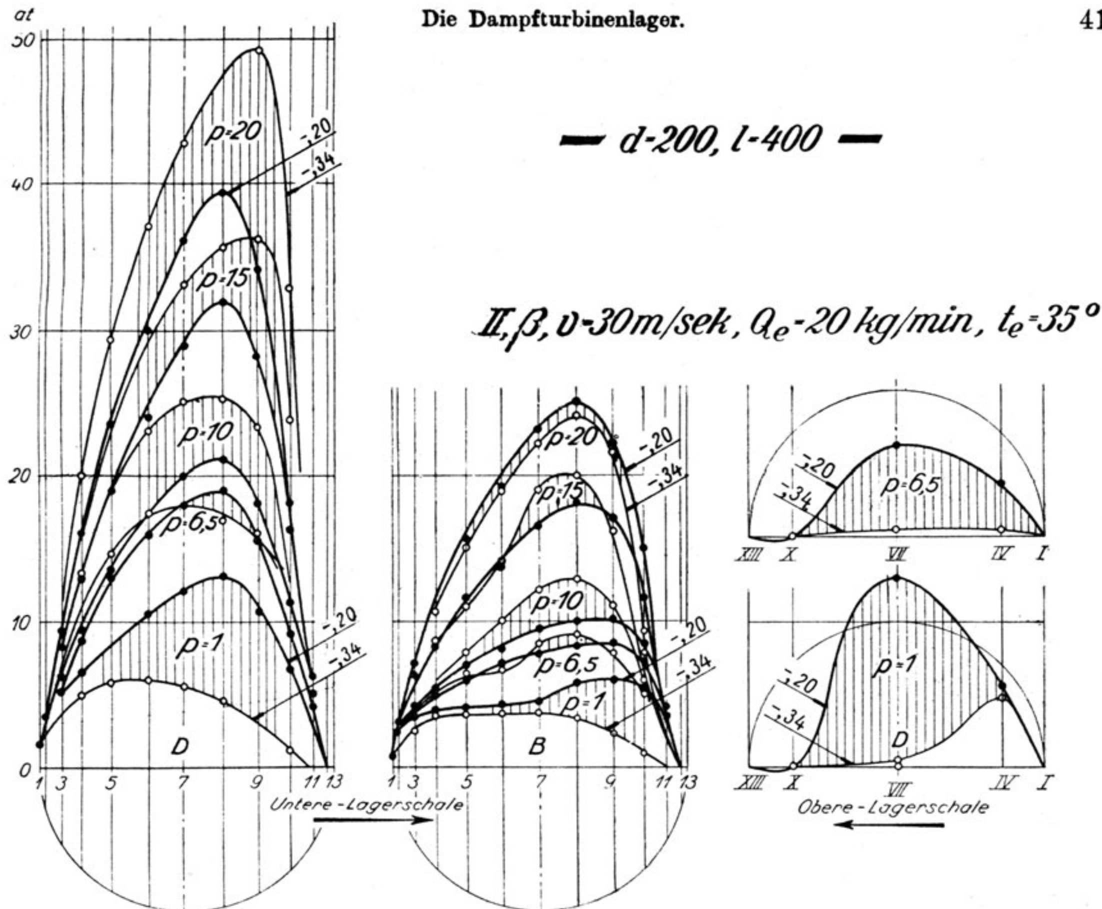


Abb. 434c. Druckverlauf nach II, β, bei Verringerung des Spieles von 0,34 auf 0,20 mm.

$u = 30$ m/sk, $Qe = 20$ kg/min, $t_e = 35^0$ C stellt Abb. 434c dar. Bei großen mittleren Drücken (über 6,5 at) wird eigentümlicherweise der Höchstwert herabgesetzt, bei kleinen Drücken stark erhöht, so daß beispielsweise bei $\bar{p} = 1$ at der Höchstwert in der Unterschale auf 13 at steigt. Die Erklärung bietet der Druckverlauf in der Oberschale, die bei dem kleinen Spiel einen engen Spalt bildet, so daß bei $\bar{p} = 1$ at ebenfalls ein Höchstdruck von 13 at auftreten kann, und der Drucküberschuß nach aufwärts nur vermöge der geringeren Breitenentwicklung der Drucklinie in der Oberschale zustande kommt. Die bei Abb. 434 geschilderten Verhältnisse machen sich hier in verstärktem Maße geltend.

Der Temperaturverlauf in der Mittelebene (rechter Streifen) und den seitlichen Ebenen C und E (linker Streifen) wird durch Abb. 435 veranschaulicht, für die durchweg $\sigma = 0{,}34$ mm; $p = 6{,}5$ at, und wo nicht anders bemerkt, $u = 30$ m/sek; $Q_e = 20$ kg/min; $t_e = 35^0$ C ist, und Auflageart II benutzt wurde.

Schaulinien $a_1\, a_2$ zeigen den Unterschied der Schmierungsart β und γ bei den Eintrittstemperaturen $t_e = 20$ und $t_e = 60^0$ C. Bei tiefer Temperatur ist wegen kleinerer Ablauftemperatur t_a β im Vorteil, bei hoher γ. Schaulinien $b_1\, b_2$ beziehen sich auf die Ölmengen 10 und 50 kg/min, und Zufuhrarten β, γ. Bei großer Menge ist, wie natürlich, die Temperatur tiefer und stets β günstiger wie γ.

Schaulinien $c_1\, c_2$ erlauben Auflage I und II bei 30 und 60 m/sek Geschwindigkeit zu vergleichen. Durchweg ist II erheblich günstiger als I.

Für die durch die **Druckfläche tatsächlich fließende Ölmenge** gibt Lasche (ohne Angabe, wie die Ermittelung erfolgte) folgende Werte an:

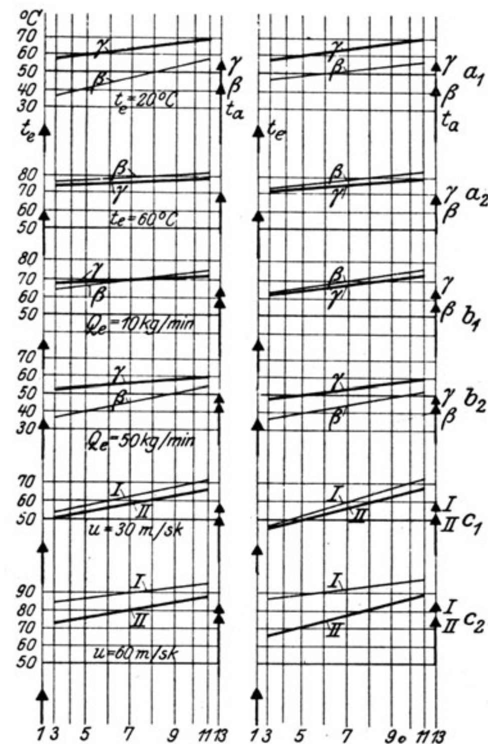


Abb. 435. Temperaturverlauf in der Unterschale; rechts für die Mittelebene, links für die Seitenschnitte C und E.

a) In Abhängigkeit vom mittleren Flächendruck und Lagerspiel bei Auflage II; $u = 30$ m/sek $t_e = 35^0$ C.

p at	1	6,5	10	20
bei $\sigma = 0,34$ mm für Zuflußart β; Q_a kg/min	19	14,5	13,0	11
„ $\sigma = 0,20$ „ „ „ γ; „ „	8,3	8,5	11,0	3,0
„ „ β; „ „	12	7,5	3,5	2,0

Auffallend ist die rasche Abnahme der durchfließenden Menge bei kleinem Spiel und größeren Drücken.

b) In Abhängigkeit von der Umfangsgeschwindigkeit, bei Auflage II; Ölzufluß β $p = 6,5$ at; $t_e = 35^0$.

u m/sk	20	40	60
bei $\sigma = 0,34$ m/m Q_a kg/min	15	15	15
„ $\sigma = 0,20$ „ „ „	6,6	8,8	11

Bei kleinem Lagerspiel sinkt mit abnehmender Geschwindigkeit die Durchflußmenge sehr stark: beim Anfahren (und den letzten Augenblicken des Abstellens) könnte hierdurch die **Schmierfähigkeit gefährdet werden.**

Die **Reibungszahl,** die durch Formel

$$\mu = \frac{M_r}{Pr},$$

wo M_r das Reibungsmoment bedeutet, erklärt wird, findet man in Abb. 436 a bis e in Abhängigkeit von p, u, t_e, Q_e dargestellt. Abb. 436a bezieht sich auf Auflage II, $u = 30$ m/sek; $t_e = 35^0$ C, und zwar gilt:

für Linie 1) Spiel $\sigma = 0,2$ m/m Zufluß nach β, $Q_e = 20$ kg/min
„ „ 2) „ $\sigma = 0,34$ „ „ „ γ, $Q_e =$ „
„ „ 3) „ $\sigma = 0,34$ „ „ „ β, $Q_e =$ „
„ „ 4) „ $\sigma = 0,34$ „ „ „ β, $Q_e =$ „

Linie 5) ist dasselbe wie 3), allein auf ein veränderliches Q_e umgerechnet, so daß $t_e = 35$; $t_a = 70^0$ C unverändert bleiben würden. Linie 6) entspricht dem Ansatz

$$\mu = \frac{\text{konst.}}{p^{0,8}},$$

der sich zwischen 6 und 15 at dem wirklichen Verlauf am besten anschließt. Der Ansatz vom Jahre 1902: konst.$/p$ zeigt größere Abweichungen; allein auch die theoretische Formel **$\mu =$ konst.$/\sqrt{p}$ kann die Versuchsergebnisse nicht wiedergeben,** ja sie ist ungenauer als die Hyperbel $\mu =$ konst.$/p$. Weitere Forschungen müssen klarstellen, ob diese Abweichungen etwa in der Veränderlichkeit der Temperatur oder worin sonst begründet sind.

Abb. 436b umfasst die Ergebnisse der Versuche von 1902 mit denen von 1918 zusammen, mit Angabe der auf den cm² der Lagerfläche DL und die Min. bezogenen Ölmengen q_e (in Gramm). Die Reibungszahlen von 1902 sind durchweg kleiner als die von 1918, was Lasche auf die kleinere Ölmenge zurückführt. In der Tat läßt Abb. 436e erkennen, daß mit wachsender, durch das Lager durchgepreßter Ölmenge die Reibungszahl besonders im Anfang stark wächst.

Abb. 436c zwingt im Verein mit den Versuchen v. J. 1902, ein **Wachsen der Reibungszahl mit der Zapfengeschwindigkeit anzunehmen.** Linie d_2 ist auf einen stets gleichen Wert von $q_e : u = 5$ g/min umgerechnet, und läßt sich unschwer mit einer Parabel von der Form

$$\mu = \text{konst.}\sqrt{u}$$

zum Übereinstimmen bringen, wie die Theorie (Gl. 22 u. 26) fordert, und durch die strichpunktierte Linie angedeutet wird. In Abb. 436d kommt der **Einfluß der Zähigkeit** zum Ausdruck, die für das verwendete Öl wie folgt von der Temperatur abhing.

$t\,^0$C $=$	20	40	60	80	100	120
$\eta \frac{\text{kg}\cdot\text{sek}}{m^2} =$	0,0100	0,0032	0,0013	0,00075	0,0004	0,0003

Schätzt man an Hand dieser Zahlen jeweils die mittlere Zähigkeit ein, so zeigt sich, daß der Ansatz

$$\mu = \text{konst.}\sqrt{\eta}$$

wie es die Theorie fordert, mit etwelcher Annäherung zutreffen könnte; daß hingegen die Annahme $\mu = \text{konst.}\,\eta$ von der Wirklichkeit zu stark abweicht.

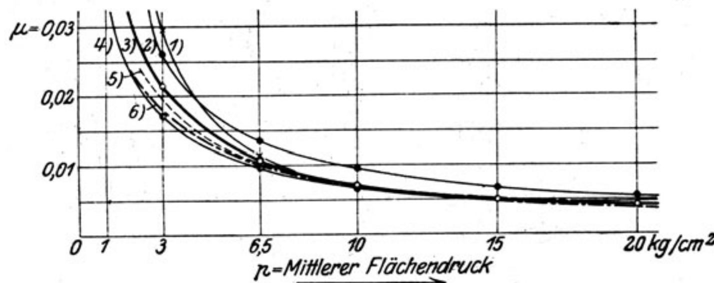


Abb. 436a.

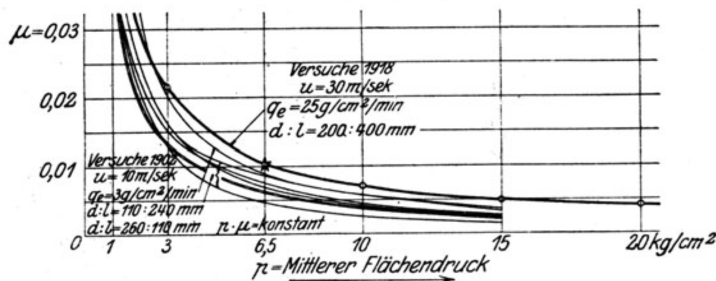


Abb. 436b.

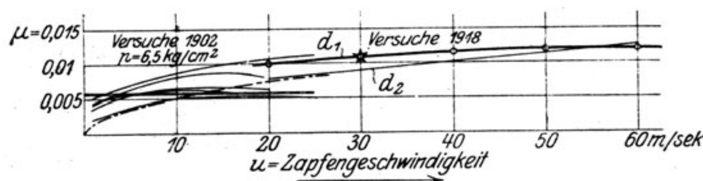


Abb. 436c.

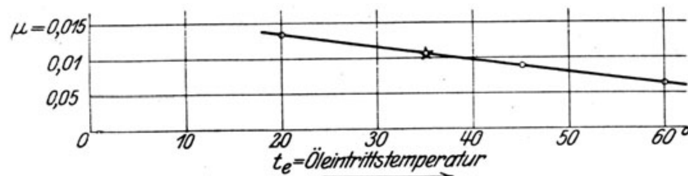


Abb. 436d.

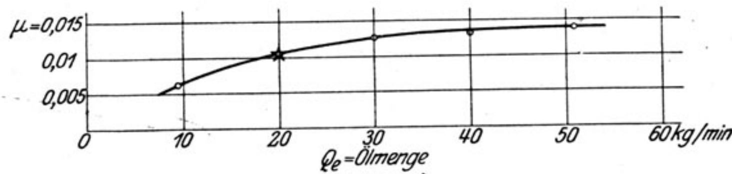


Abb. 436e.

Reibungszahl μ in Abhängigkeit von p, u, t_e, Q_e.

Als die für ein Lager „**erforderliche**", d. h. wohl mit Rücksicht auf die Betriebssicherheit, also das Anlaufen und die normale Ölschichtendicke angemessene **Ölmenge** leitet Lasche folgende Werte ab:

Zapfengeschwindigkeit u m/sek	20	40	50	60
Spezifische Ölmenge $q_e = Q_e : DLu$ in gr/cm²/m/min bei				
einem mittleren Druck $p = 6{,}5$ at	0,38	0,5	0,57	0,68
dazu gehörender Pumpendruck at	0,3	—	1,7	—
bei einem mittleren Druck $p = 15$ at	0,46	0,62	0,75	0,93
dazu gehörender Pumpendruck at	0,3	—	1,7	—

Der hierin angegebene Pumpendruck bezieht sich auf das Versuchslager. Dieses würde bei $p = 15$ at; $u = 60$ m/sek hiernach eine gesamte Ölmenge von $20 \cdot 40 \cdot 60 \cdot 0{,}93/1000 \simeq 45$ kg/min erfordern.

Versuche von Brown Boveri & Cie. umfassen Halslager und Spurlager. Es wurde der Druckverlauf in der lotrechten Mittelebene, d. h. **in der Achsenrichtung eines Lagers** von 140 mm Durchmesser, 230 mm Länge, 4,65 at mittlerem Druck, 3000 Umdrehungen, d. h. 22,0 m/sek Gleitgeschwindigkeit untersucht. Das Drucköl floß mit 0,1 at Überdruck reichlich zu. Abb. 437 stellt den Druckverlauf dar, und zwar war bei der Schaulinie 1, 2, 3, die Drehzahl 1000, 2000, 3000. Die Eintrittstemperatur war unveränderlich, etwa 50° C. Ähnliche Kurven ergaben sich bei unveränderlicher Geschwindigkeit und veränderlicher Eintrittstemperatur. Zum Vergleich ist als Schaulinie 4 der Druckverlauf nach den Beobachtungen von Lasche auf 10 at Höchstdruck umgerechnet, schließlich in Schaulinie 5 der von Tower festgestellte Druckverlauf an einem Zapfen von 102 mm Durchmesser, 152 mm Länge eingetragen. Die Übereinstimmung zwischen Lasche und Brown, Boveri & Cie. und die erhebliche Abweichung der Kurve von Tower legen es nahe, zu vermuten, daß die Lagerschale des letzteren mit sehr kleinem Spiele eingepaßt, dem seitlichen Abfluß des Öles mehr Widerstand entgegenstellte. Eine Ergänzung dieser Beobachtungen bei veränderlichem Spiele wäre sehr wünschenswert.

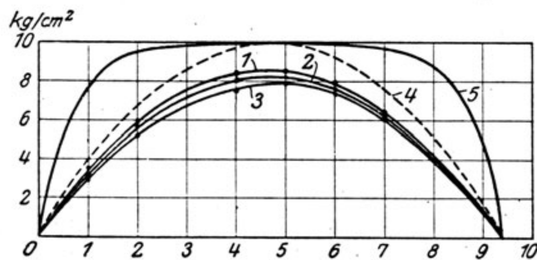


Abb. 437. Druckverlauf in der Achsenrichtung.

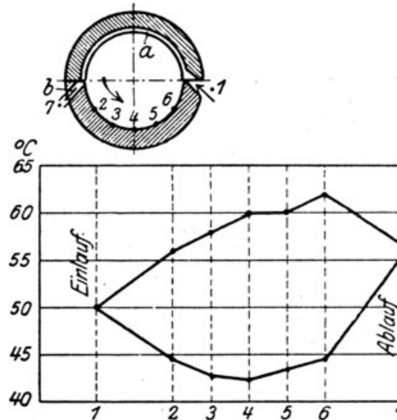


Abb. 437a. Temperaturverlauf mit und ohne Kühlung des Lagerkörpers.

Abb. 437a veranschaulicht den Temperaturverlauf in der Unterschale eines Lagers, das, für den Fall einer Verwendung als Gegendruckturbine, mit einer Schlangenkühlung des Lagerkörpers versehen war. Das Öl wurde bei 1 zugeführt, umfloß durch eine Erweiterung bei *a* die Welle, um bei *b*, d. h. bei der Abflußstelle zwischen die Reibflächen einzudringen. Die untere Schaulinie läßt die bedeutende Wirkung der Lagerkühlung erkennen.

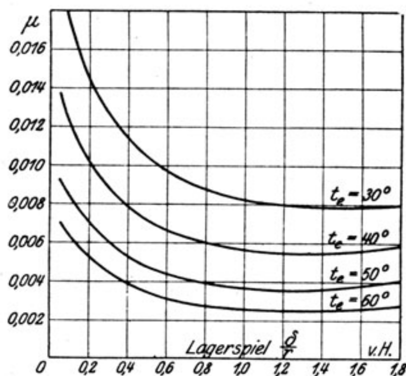


Abb. 438. Abnahme der Reibungszahl bei zunehmendem Lagerspiel.

Besondere Beachtung verdienen die **Versuche über den Einfluß des Lagerspieles** an einem Lager von 125 mm Durchmesser, 135 mm Länge, 1300 kg Gesamtbelastung, d. h. 7,7 at mittleren Druck, 3000 Umdr./min, d. h. einer Gleitgeschwindigkeit $= 19{,}7$ m/sek. Die Ölmenge betrug unverändert 0,18 l/sek. Das Spiel wurde durch Ausdrehen der untern Lagerschale von 0,1 v. H. bis 1,8 v. H. verändert. Die Bauart des Lagers entspricht der Abb. 442. Die Reibungsarbeit wurde aus der durch das Öl abgeführten Wärmemenge ermittelt und auf Wärmeleitung und Strahlung berichtigt. Die so berechneten Reibungszahlen sind in Abb. 438 als Abhängige des Lagerspiels und der Eintrittstemperatur aufgetragen. Es zeigt sich, daß μ mit zunehmendem Spiel anfangs rasch, später langsam abnimmt. Erst wenn das Spiel 1,2 v. H. übersteigt, macht sich eine Zunahme, jedoch in sehr geringem Maße geltend, so daß das bis anhin für unmöglich gehaltene Spiel von 1,8 v. H. noch immer sehr günstige Reibungsverhältnisse aufweist. Es wird bemerkt, daß eine Abnützung der Lagerschale auch in diesem äußersten Falle nicht zu bemerken war.

Es wurde die wichtige Tatsache festgestellt, daß bei einem **unter 0,2 v. H. gelegenen Spiel der Dynamoanker in Erschütterung geriet**, die sich steigerte und bei einem Spiel von 0,01 v. H. eine solche Stärke annahm, daß der Dauerbetrieb unmöglich gewesen wäre. Sobald das Spiel auf mehr als 0,3 v. H. vergrößert war, lief die Maschine vollkommen erschütterungsfrei. Die Firma führt diese Erscheinung auf die oben hervorgehobene Tatsache zurück, daß im Falle ungenügender Ölschichtendicke die Welle gemäß Abb. 438a beim ein-

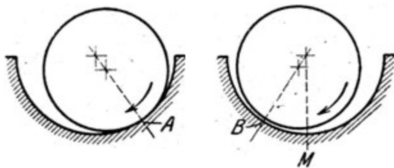


Abb. 438a. Erschütterungen infolge periodischer Unterbrechung des Ölbandes.

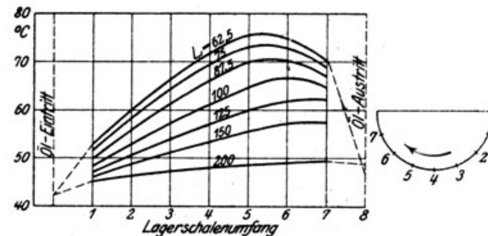


Abb. 438 b. Temperaturverlauf bei Verringerung der Lagerlänge.

gezeichneten Drehsinn gegen den Punkt A hin hinaufzuklettern bemüht ist; bei genügender Schmierschichtendicke jedoch, wie die Nebenabbildung andeutet, nach links verschoben wird und die engste Stelle bei B auftritt. Da bei zu kleinem Spiel infolge der Ungenauigkeiten der Ausführung das Ölband leicht zufällig abreißen kann, **wird die Welle aus der Stellung B plötzlich in die Stellung A herübergedrängt**, vielleicht mit leichtem Angreifen der Lagerschale, wodurch das Auftreten der Erschütterung hinlänglich begründet ist. Es wird berichtet, daß seither bei mehreren Turbinen ursprünglich vorhandene unerklärliche Erschütterungen **durch Vergrößerung des Lagerspieles zum Verschwinden gebracht werden konnten.** Die Theorie ergibt für den günstigsten Wert des Lagerspieles nach Gleichung (29) kleinere (unter der Hälfte gelegene) Beträge als der Versuch. Der Unterschied dürfte im wesentlichen in der Veränderlichkeit der Zähigkeit längs des Ölbandes begründet sein.

Versuche an einem Ringschmierlager von 125 mm Durchmesser, 260 mm Länge, und Lagerspielen von 0,3 bis 0,8 v. H. ergaben gleichgünstige Wirkung des vergrößerten Spieles. Daß im übrigen die Reibungszahl gemäß den Schaulinien mit wachsender Eintrittstemperatur erheblich abnimmt, wird durch die verminderte Zähigkeit erklärt. Während jedoch die Reibungszahl theoretisch $\sqrt{\eta}$ verhältnisgleich sein sollte, nimmt sie in Wirklichkeit in stärkerem Maße ab.

Ebenso wichtige Aufschlüsse wurden gewonnen in Betreff des **Einflusses der Lagerlänge auf die Reibungszahl.**

Das Versuchslager hatte 125 mm Durchmesser und wurde von 200 mm ursprünglicher Länge allmählich bis auf 62,5 mm verkürzt. Das Lagerspiel δ/r war 0,5 v. H., die Drehzahl 3000 i. d. Min., die Gleitgeschwindigkeit 19,7 m/sek, Gesamtbelastung 1050 kg, Ölmenge 0,18 l/sek. Die Reibungsarbeit wurde wieder durch Messen der vom Öle abgeführten Wärmemenge bestimmt. Zur Beachtung der Temperatur waren im Weißmetall 0,1 bis 0,3 mm unter der Oberfläche Thermoelemente in den Teilpunkten 1 bis 7 Abb. 438b der Mittelebene des Lagers angebracht. Die obere Lagerschale war um 3 mm abgehoben; damit man die Welle als in einer „halbumschließenden" Schale gelagert ansehen könne. Abb. 438b veranschaulicht den Temperaturverlauf bei verschiedenen Lagerlängen.

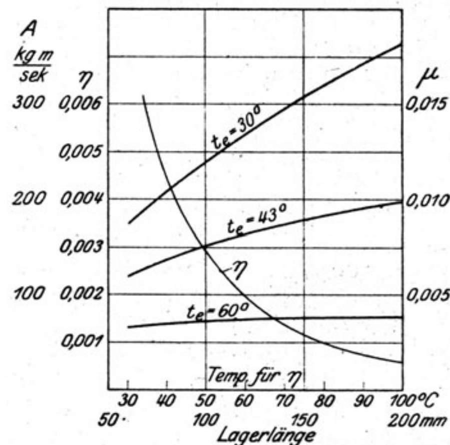


Abb. 438 c. Reibungszahl μ bei verschiedenen Lagerlängen und Öl-Eintrittstemperaturen $u = 19{,}7$ m/sk; $\delta/r = 0{,}5$ v. H.

In Abb. 438c sind die errechneten Reibungszahlen und Reibungsarbeiten in Abhängigkeit von der Lagerlänge wie auch die Zähigkeit η in Abhängigkeit von der Temperatur eingetragen. Bei kleineren Öltemperaturen führt die Verkürzung der Länge wie ersichtlich zu einer ganz bedeutenden Verkleinerung der Reibungszahl, während bei 60^0 Eintrittstemperatur die Abnahme verhältnismäßig klein ist. Bliebe die Zähigkeit unveränderlich, so sollte nach Gl. (26) μ theoretisch angenähert zu $\sqrt{L}$ umgekehrt propor-

tional sein. Die Beobachtung zeigt, daß bei kleiner Öltemperatur die Änderung eine weit größere, bei großer Temperatur eine weit geringere ist. Auch der absolute Wert der Reibungszahl weicht bei tiefen Temperaturen vom theoretisch zu erwartenden in erheblicher Weise ab. Nun ist in Wahrheit die Zähigkeit längs des Ölstromes gerade bei kleiner Anfangstemperatur stark veränderlich. Es muß weiteren Untersuchungen vorbehalten werden, nachzuweisen, ob dieser Umstand zur Erklärung der Abweichung genügt.

Versuche mit Spurlagern.

Die ersten Versuche mit dem Michellschen Spurlager stammen von der Amerikanischen Westinghouse-Gesellschaft. Das verwendete Lager bestand aus einem Kamm von 60 auf 120 mm Durchmesser mit 10 Druckplatten von 67 qcm Gesamttragfläche, das bei 16,5 m/sek Umfangsgeschwindigkeit einen Druck von $\overline{p} = 71$ at betriebssicher aufnehmen konnte. Eine **Steigerung auf den ungeheuerlichen Druck $\overline{p} = 490$ at war ohne üble Folgen durchführbar,** und erst bei $\overline{p} = 750$ at trat eine Zerstörung ein, allein nicht durch Heißlauf, sondern durch seitliches Abfließen des Weißgusses.

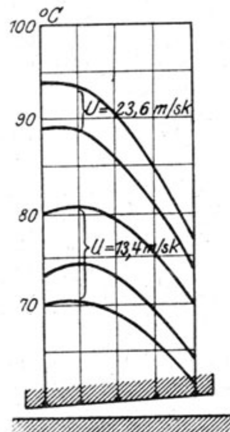


Abb. 439. Temperaturverlauf in einem Michellschen Block.

Newbegin verglich zentrisch und exzentrisch gestützte Druckplatten bei $\overline{p} = 35$ at; $u = 10$ m/sek die unter sonst gleichen Umständen eine Ölablauftemperatur von 56 bzw. 51° C aufwiesen. Wenn sich bei der exzentrischen Platte der Kamm in umgekehrter Richtung drehte, stieg die Temperatur um 16 v. H. Die Reibungszahl, die theoretisch 0,001 betragen sollte, war nach Versuch 0,0018.

Die Firma Brown, Boveri & Cie. veranstaltete ausgedehnte Versuche mit zwei an einem Kamm einander gegenüber angeordneten Spurplatten von 4,5×4,5 cm Seitenlänge, bei $u = 13{,}2$ bis 35,7 m/sek; $\overline{p} = 0$ bis 100 at und Öltemperaturen von 70 bis 100° C. Die Reibungszahlen wurden auf gleiche Ölzähigkeit auf Grund der mittleren Temperatur umgerechnet und fügen sich bei 0,12 a Exzentrizität sehr genau der Beziehung

$$\mu = \mu_{theor}\left(1 + 0{,}14\sqrt{\overline{p}_{at}}\right) \quad \text{mit} \quad \mu_{theor} = 0{,}00308\sqrt{\frac{u}{\overline{p}}} \quad . \quad (38)$$

Bei 25 at mittlerem Druck ist mithin die wirkliche Reibungszahl um 70 v. H. größer als die theoretische. Diese Abweichung ist erklärlich durch den Einfluß a) der elastischen Formänderung der Tragplatten, b) der mit dem Abstand von der Achse veränderlichen Geschwindigkeit, c) der veränderlichen Temperatur längs der Tragplatte. Letztere wurde durch in die Oberfläche eingeschmolzene Thermoelemente gemessen. Abb. 439 zeigt den Verlauf bei den eingeschriebenen Geschwindigkeiten. Infolge der Wärmeableitung in der obersten Lagerschicht muß die wahre Temperatur am Austritt noch höher gewesen sein. Bei zentrischer Lagerung entspricht μ der theoretischen Form $\mu = 0{,}0076\sqrt{u/\overline{p}}$.

Konstruktive Ausbildung der Lager.

Die Allgemeine Elektrizitätsgesellschaft läßt das Öl gemäß Abb. 440 bei Stehlagern auf der ganzen Schalenlänge durch die wagerechte, 1 mm weite Fuge zwischen Ober- und Unterschale in das Lager einströmen. Die keilige Anfräsung der Schalenränder ist in Schnitt $W-W$ dargestellt, desgleichen der Ablauf mit der 3,5 mm weiten Fuge in Schnitt $V-V$. Der Verteilungs- und der Abflußsammelkanal (Schnitt $X-X$) ist in der Oberschale ausgespart. Im übrigen ist die Schale auf der ganzen Länge zylindrisch ausgebohrt. Bei 400 mm Wellendurchmesser ist die Bohrung, wie eingeschrieben 400,35 mm weit, also beträgt das Spiel im Durchmesser 0,87 v. T. Die Nebenabbildung zeigt bei *a* die in Schwalbenschwanznuten eingelassenen, nach unten offenen Schutzhauben gegen axiales Verspritzen des Öles.

Das durch ein Gasrohr zugeführte Öl gelangt zunächst in eine Aussparung unter der Schale, wodurch die Kugellagerung der Schale gleichfalls in reichlicher Weise geschmiert wird. Besondere Beachtung verdient die nach Abb. 441 durchgeführte Isolierung der Befestigungsschrauben und Kegelstifte, die nach den Beobachtungen der Firma vorzugsweise bei geteilten Dynamojochen erforderlich ist, da durch Streuung des magnetischen Feldes leicht elektrische Ströme durch die Welle, Schale und den Ständer hindurch erzeugt werden, was ein Zerfressen der Lagerlaufflächen zur Folge hat.

Beim Lager von Brown Boveri & Cie. Abb. 442 tritt das Öl durch die Öffnung A ein und verbreitet sich mittels der Nuten B_1 B_2 und D längs der Zapfenlänge, sowie auch durch

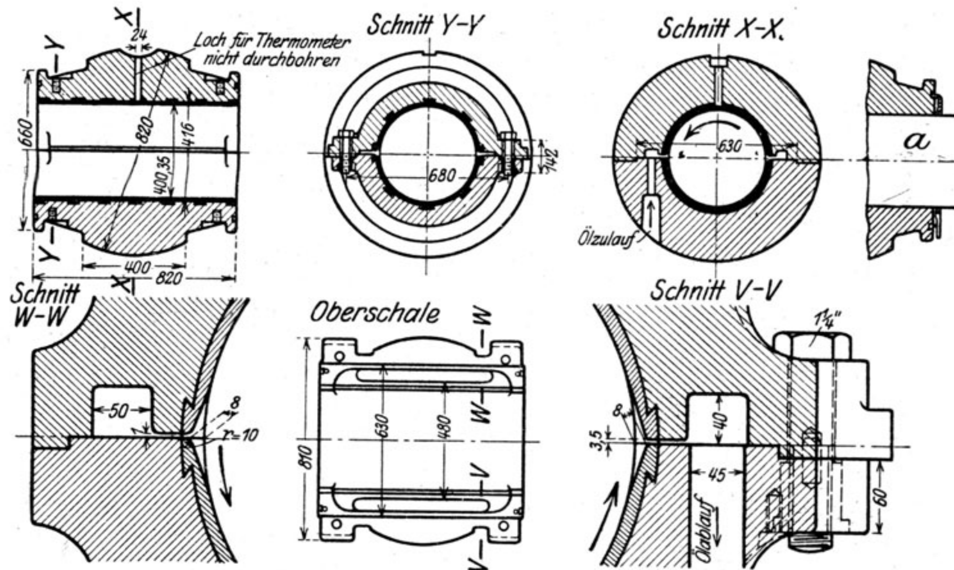


Abb. 440. Halslager der A.E.G.

die Ausdrehung C der Oberschale um die Welle herum. Das Ende der Nute B_2 wird nachträglich so weit verschlossen, daß nicht übermäßig viel Öl in die Aussparung E abströmen

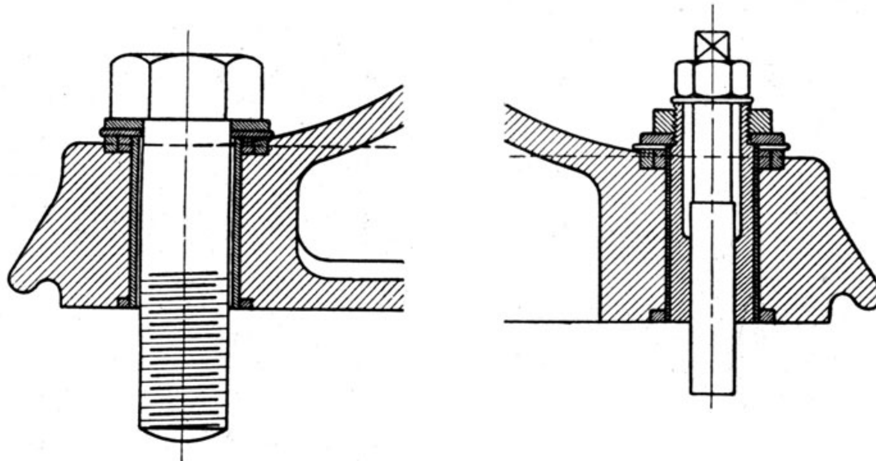


Abb. 441. Isolation der Befestigungsschrauben und Sicherungsstifte.

kann, die ihrerseits dazu dient (auf jener gegen außen gerichteten Seite), Spritzen von Öl durch Ableitung in den Kanal E zu verhüten. Bemerkenswert ist der Ersatz der Kugelfläche an der Außenseite durch den schmalen Ringwulst F, der auf noch schmälerer Arbeitsleiste aufruht und ein Kippen der Schale um den Betrag der Wellenneigung ermöglicht.

Die Verbindung eines Traglagers mit einem Kammlager der Maschinenfabrik Oerlikon für eine Turbine von 20000 PS bei 3000 Umdr./min zeigt Abb. 443. Das Drucköl tritt bei a in die Längsbohrung b, von da durch Bohrungen c in die Ringkanäle d, und von diesen durch die mehrfachen radialen Nuten f, die am Ende mit einer Verengung versehen sind, zu den Kammtragflächen. Das austretende Öl sammelt sich in den

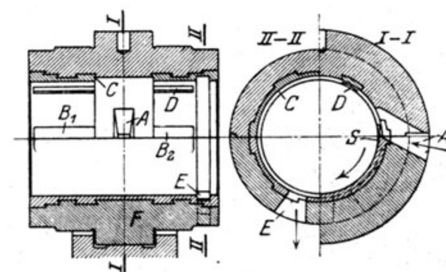


Abb. 442. Halslager von Brown, Boveri&Cie.

Ringnuten h und fließt durch Bohrungen im tiefsten Punkte ab. Durch Abschrägen der zwischen den Radialnuten f gelegenen Tragflächen kann, wie oben erwähnt, die Keilwirkung

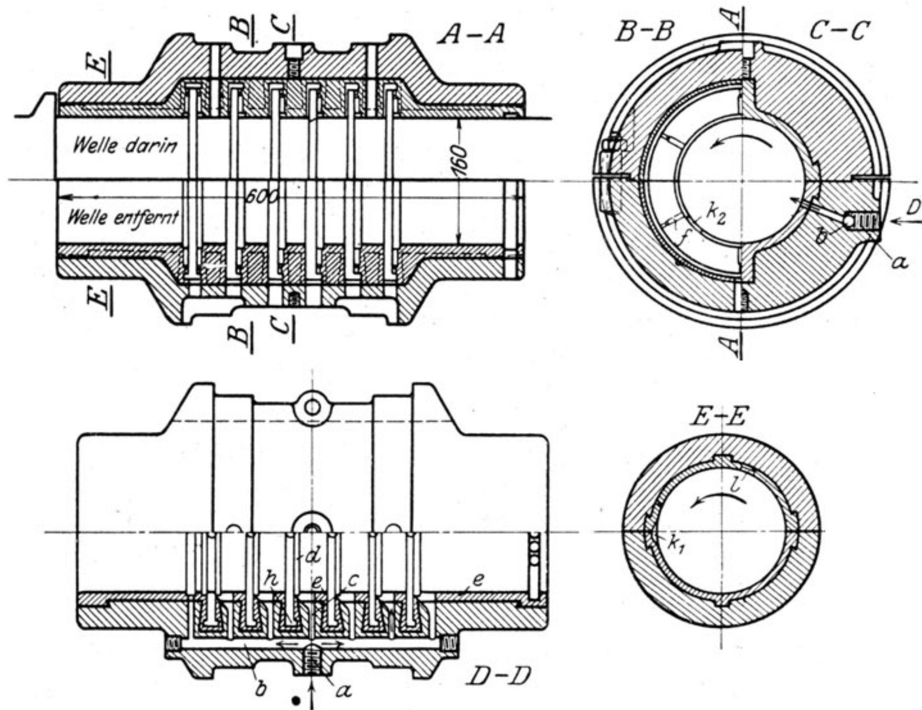


Abb. 443. Kamm- und Halslager der Maschinenfabrik Oerlikon.

des Michell-Lagers erreicht werden. Den äußeren (langen) Halslagerflächen wird das Öl durch Nuten k_1 und l zugeführt; für die zwischen den Kämmen liegenden schmalen Tragflächen zieht man es vor, die Ölnute tiefer, nach k_2 zu verlegen.

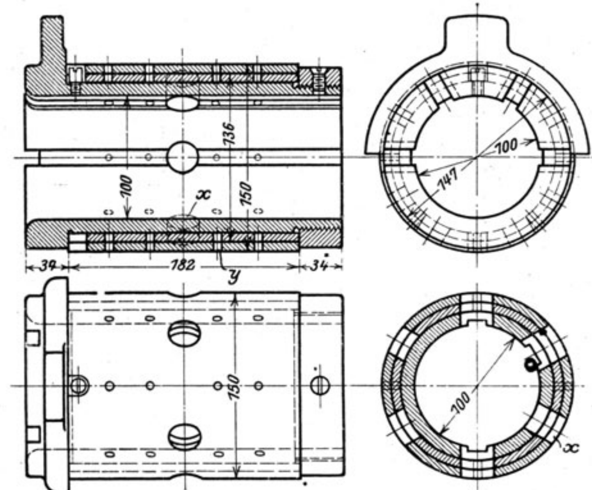


Abb. 443a. Mehrschaliges Lager von Parsons.

In Abb. 443a bringen wir, mehr des geschichtlichen Interesses halber, Einzelheiten des Parsonsschen mehrschaligen Lagers, dessen Bestimmung bei Abb. 432a erläutert worden ist. Sechs in der Mittelebene angebrachte Bohrungen x führen das Öl der Welle zu; die Zwischenräume zwischen den Büchsen werden durch die zahlreichen Bohrungen y mit Schmiermittel versehen.

Das Spurzapfenlager von Michell wird durch Abb. 444 veranschaulicht[1]), die eine Verbindung desselben mit einem Traglager darstellt. Die Tragflächenstützblöcke sind (in der

[1]) Nach Engineering 1919, 13. Juni, S. 766.

Umfangsrichtung) exzentrisch gelagert und müssen selbstverständlich gegen Mitnahme gesichert sein. Die für den Vorwärtsgang bei Schraubenantrieb bestimmte Hälfte kann, wie ersichtlich, durch einen hydraulischen Kolben gestüzt werden, so daß an der Manometer-

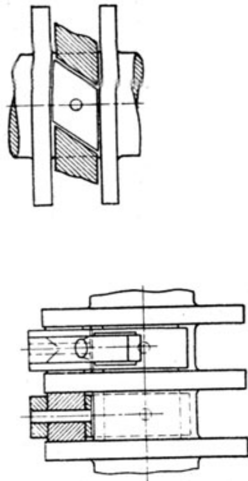


Abb. 445. Umwandlung alter Kammlager in Michell-Lager.

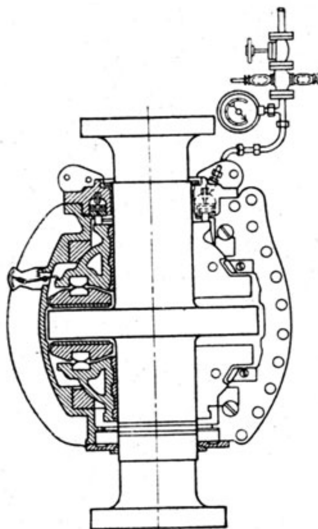


Abb. 444. Michell-Spurlager mit Meßkolben für den Schraubenschub.

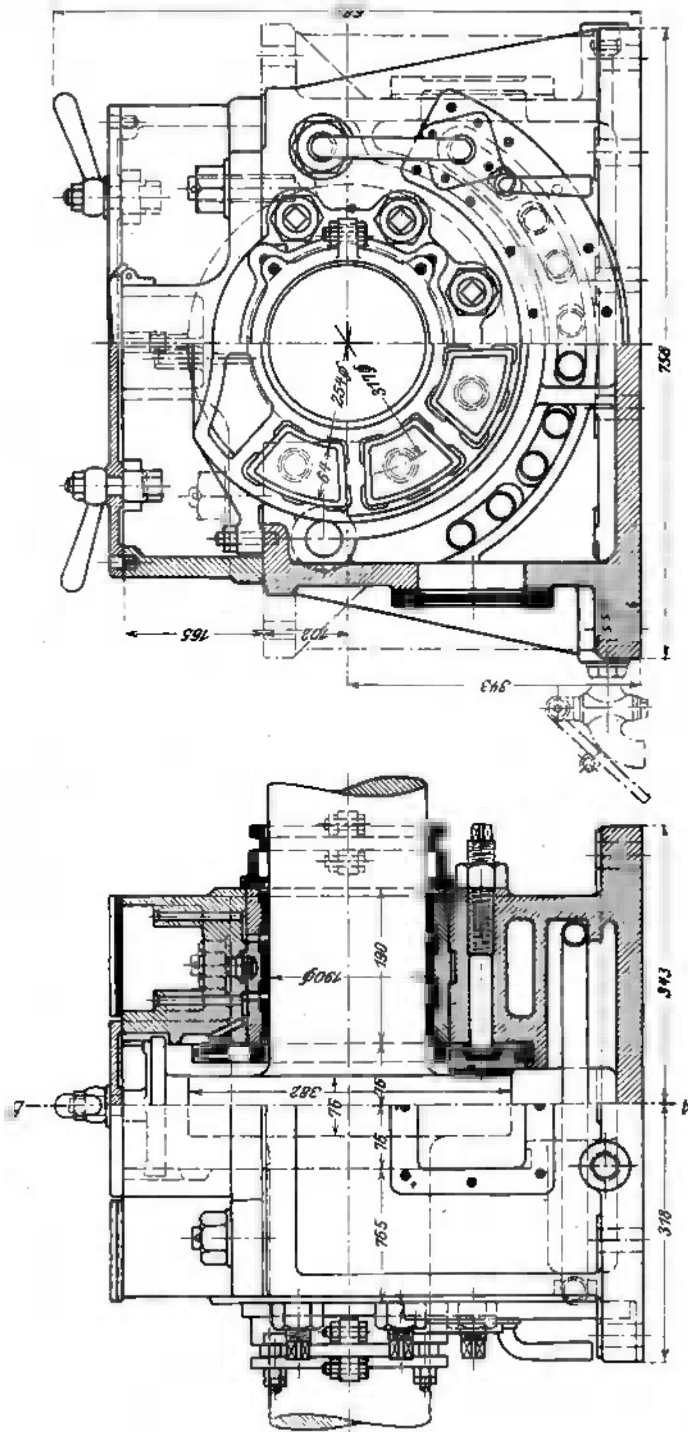


Abb. 445a. Michell-Lager mit Ölkühlschlangen.

ablesung die Größe des Schraubenschubes bestimmbar wird (wobei man sich mittels des oben sichtbaren Zeigers vom Abheben der Kugelschale von ihrer Stütze vergewissert). Nach Abb. 445 können bestehende Kammlager alter Konstruktion in Michell-Lager umgewandelt werden. Der abnehmbare „Hufeisen“-Deckel trägt im ganzen drei der mit Rhombusform versehenen Blöcke.

Mehr Einzelheiten läßt das Michell-Lager Abb. 445a erkennen, wo durch Kühlschlangen die Benutzung einer Ölfüllung für längere Zeit ermöglicht wird. Die Schmierung der angrenzenden Halslager könnte und sollte selbstverständlich vom gleichen Vorrat aus erfolgen.

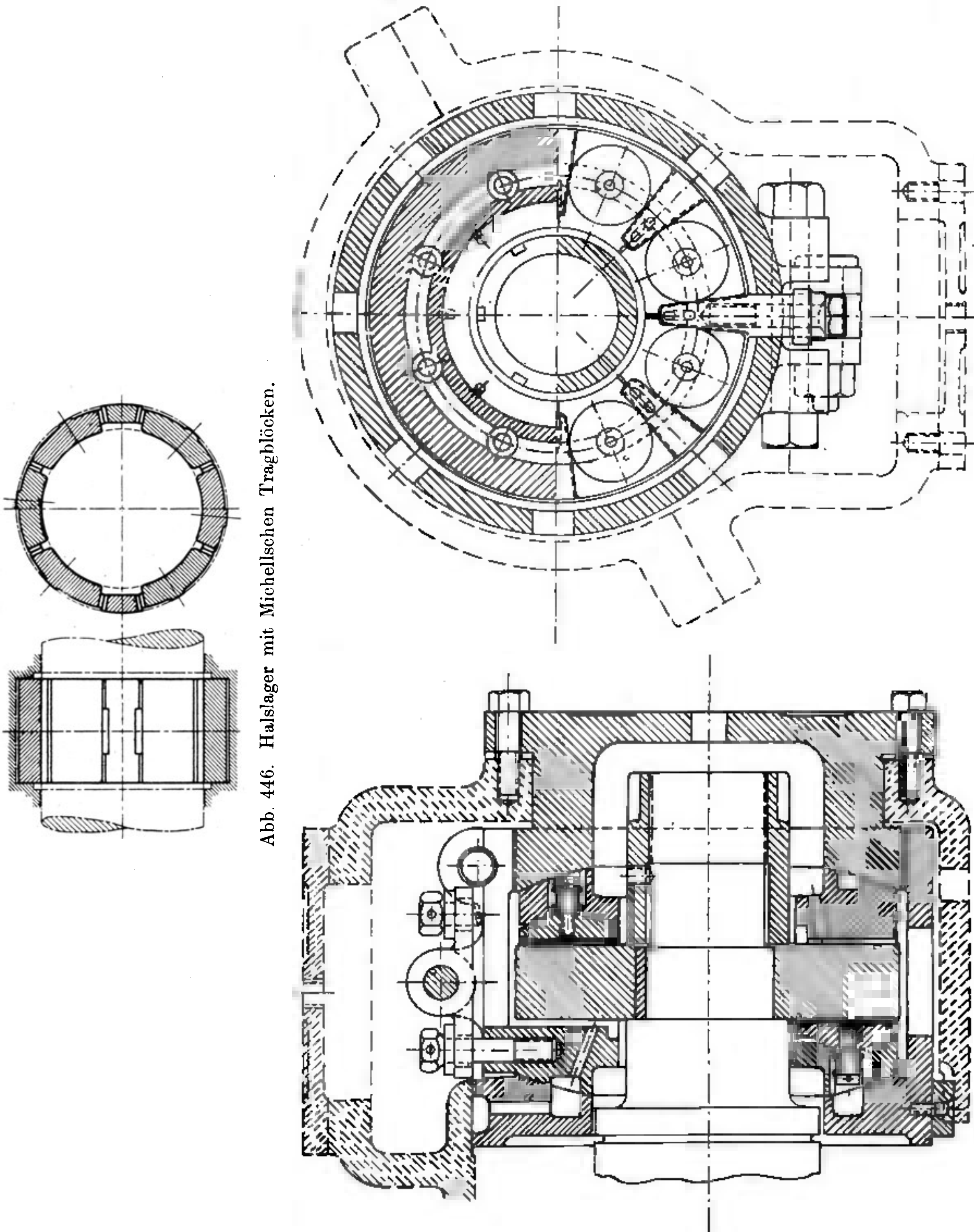


Abb. 446. Halslager mit Michellschen Tragblöcken.

Abb. 447. Kammlager von Kingsbury.

Halslager von Michell. Bei schwachbelasteten Lagern mit kleiner Achsenlänge, wo die abgewickelte Tragfläche einen schmalen Streifen bildet, trägt das Ende dieses Streifens wenig zum Tragen bei. Es wird sicher an Reibungsarbeit gespart, wenn man die Tragfläche in angenähert quadratische Blöcke teilt, die exzentrisch gestützt zur Selbsteinstellung

befähigt sind. Eine Ausführungsform zeigt Abb. 446 der „Michell Bearings Ld“ an der der anscheinend passende An chluß des Deckels auffällt. Bei Versuchen an einem gewöhnlichen Lager von 230 mm Durchmesser, 206 mm Länge und einem Michell-Lager von 230 mm Durchmesser, 95 mm Länge soll das erstere unter gleichen Umständen 53° C, das letztere 41° C Ölablauftemperatur aufgewiesen haben.

Ähnliche Ziele wie Michell verfolgt Kingsbury (V. S. v. Amerika), dessen Spurlager nach Abb. 447 mit 8 kreisrunden Druckblöcken von rund 96 mm Durchmesser ausgerüstet

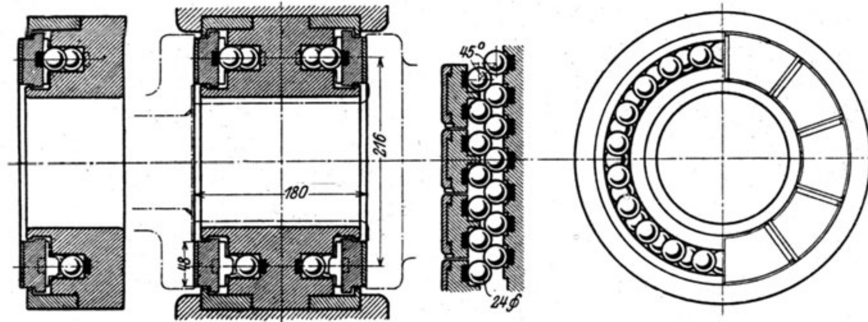
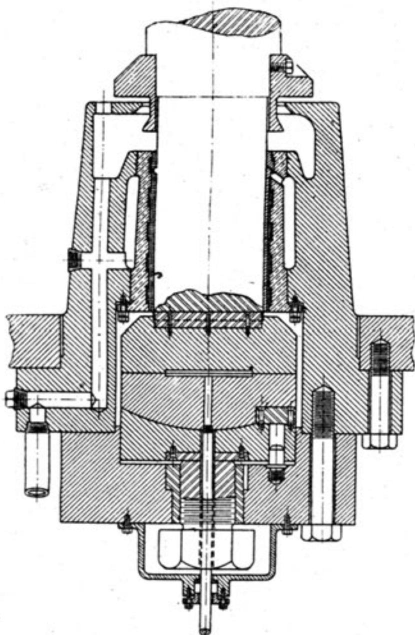


Abb. 448. Blocklager von Brown Boveri & Cie. mit Kugelabstützung.

ist, die zentrisch gestützt werden und bei 340 mm Laufdurchmesser mit $p = 35$ at und 22 m/sek Umfangsgeschwindigkeit 20 t Druck aufzunehmen vermögen.

Das Spurlager von Brown Boveri & Cie., Abb. 448, führt als Fortschritt die unter sich zusammenhängende Stützung der Druckblöcke durch Kugeln ein, die jeweils auf gehärteten Stahlplättchen aufruhen. Hierdurch werden bis auf die an den Kugeln auftretende


Abb. 449. Altes Spurlager der General Electric Co.

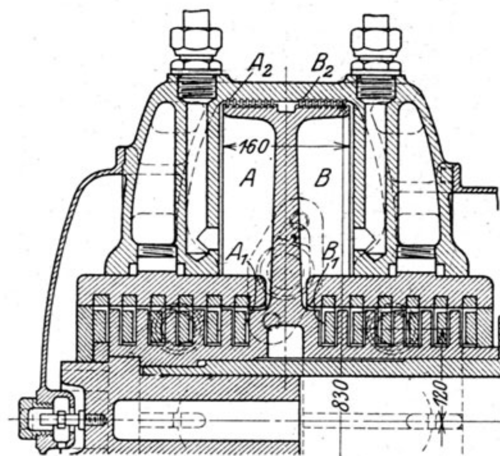


Abb. 449a. Spurlager mit Entlastungskolben.

geringe Reibung alle Blöcke gezwungen, den gleichen Druck auf den Kamm zu übertragen. Die Gefahr, daß ein Block, der sich durch etwas Heißlauf ausdehnt, mehr Last als die anderen übernimmt, somit noch heißer werden und sich zumindest stark abnutzen muß, ist hier vermieden. Das Lager besitzt 280 qcm Tragfläche und ist geeignet, bei 3000 Umdr./min, d. h. 34 m/sek Umfangsgeschwindigkeit mit einem mittleren Druck von 50 at, im ganzen 14 t Druck aufzunehmen. Nachzutragen ist eine (nicht dargestellte) Sicherung der Blöcke

gegen Mitnahme durch die Reibung. Das Spurlager wird auch mit einem Traglager vereinigt, indem man den Mittelteil auf die notwendige Zapfenlänge ausdehnt.

Abb. 449 stellt das Spurlager der von der General Elektric Co. mit senkrechter Welle gebauten Turbodynamo dar, das vor dem Vergessenwerden bewahrt zu werden verdient. Die breite, mit Aussparung versehene Spurplatte erhielt das Öl mit einer Pressung von etwa 17 at durch die von unten hinaufreichende Zentralbohrung, das nachher auch das Halslager umspült und oben abgeleitet wird. Bemerkenswert ist der knapp über dem Lager angeordnete Gußeisenring, dessen Bestimmung war, wenn die Spurplatte eingerieben hatte und wegzuschmelzen begann, das Gewicht aufzufangen und durch die am großen Halbmesser wirkende Reibung raschestens abzubremsen. Im Anfang soll die Schmierung wiederholt versagt haben, und stets habe sich das angegriffene Lager von selbst wieder eingeschliffen. Die Reibung sei so gering, daß eine 5000 KW-Einheit nach dem Abstellen noch 4 bis 5 Stunden weiterläuft.

Als Beispiel eines aus vielen Kämmen bestehenden Drucklagers, wie es bei Parsonsturbinen früher viel verwendet worden ist, sei in Abb. 449a das von Tosi angeführt, dessen Besonderheit die Verbindung mit einem mittleren Entlastungskolben ist. Das in den Raum A eingeführte Drucköl findet keinen Ausgang, weil bei A_1 die aufliegenden Kämme und das auf kleinstes Spiel eingestellte Labyrinth A_2 gut abdichten, somit wird die Welle entlastet. Das bei B mit eintretende kann durch die auf größeres beidseitiges Spiel eingestellten Kämme bei B_1 entweichen. Sollte aus irgendeinem Grund die Welle einem Druck nach rechts ausgesetzt werden (Wasserschlag u. a.), so legen sich die Kämme B_1 an, die Kämme A_1 werden frei, und der Öldruck auf die Scheibe wirkt im entgegengesetzten Sinn.

97. Die Stopfbüchsen

bilden eines der wichtigsten und heikelsten Organe der Dampfturbine. Da sie durch die unmittelbare Nähe des Dampfraumes starker Erwärmung ausgesetzt sind, ist die Ableitung einer etwa entwickelten eigenen Reibungswärme eine schwierige Aufgabe. Der Vorteil der Kolbenmaschinenstopfbüchse, daß die Stange zeitweise heraustritt, Unreinigkeiten ausfegt und sich durch Strahlung abkühlt, fällt bei der umlaufenden Welle dahin. Die früher angewendete Kühlung durch Wasser ist wegen Verlusten durch Dampfkondensation und gefährlichen Temperaturspannungen heute verlassen.

a) Labyrinthdichtung.

Die Mehrzahl der Konstrukteure umgeht die Schwierigkeit der Reibungsfrage dadurch, daß eine Berührung zwischen „Packung“ und Welle vermieden und die Abdichtung nur durch äußerste Verminderung des Spieles erreicht wird. Dies ist der Grundgedanke der sogenannten „Labyrinthdichtung“, deren Theorie wir in Abschn. 47 erörtert haben, und die im großen zuerst von Parsons verwendet worden ist. Bei modernen Ausführungen werden glatte Kämme in die Welle eingedreht, während man ins Gehäuse Bronzeringe einstemmt.

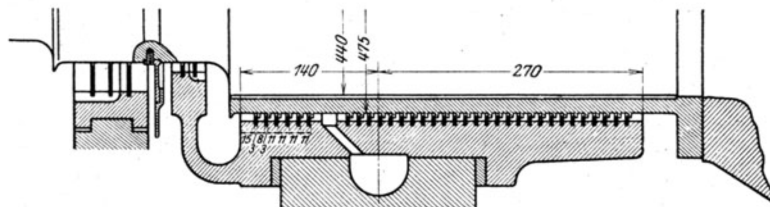


Abb. 450. Labyrinthbüchse.

Auf diese Weise schafft man abwechselnde enge Spalten und Erweiterungen. Die Geschwindigkeit des aus dem Spalt tretenden Dampfes wird in der Erweiterung durch Wirbelung vernichtet, so daß zur abermaligen Beschleunigung ein weiterer Teil des Druckgefälles aufgezehrt wird. Durch eine hinlänglich große Zahl der Nuten und sehr kleines Spiel im Spalt kann der Verlust nach Belieben herabgesetzt werden. Es wurde behauptet, daß es einen wahrnehmbaren Einfluß habe, ob der Dampf im Spalte radial einwärts, d. h. die Fliehkraft überwindend, oder umgekehrt strömen muß, doch dürfte dies erst bei äußerst großen Umfangsgeschwindigkeiten bemerkbar sein.

Als axiales Spiel rechnet man im kalten Zustande bei Landturbinen 0,2 bis 0,3 mm, bei Schiffsturbinen wesentlich mehr.

Um bei allfälligem Reiben die Späne rasch hinauszuschaffen, sollen nach Patenten von Parsons die Bronzeringe in gewissen Abständen im Umfang unterbrochen und mit Fugen von etwa 1 mm Weite versehen werden.

Soll die Labyrinthbüchse gegen Vakuum dichten, so wird in eine vordere Abteilung „Sperrdampf" eingeführt, der die Luft hinaustreibt; der kleine Dampfverlust ist ein weit geringeres Übel, als die sonst eintretende Verschlechterung der Luftleere.

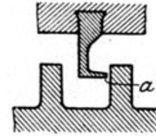
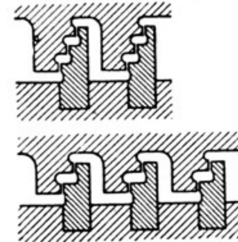
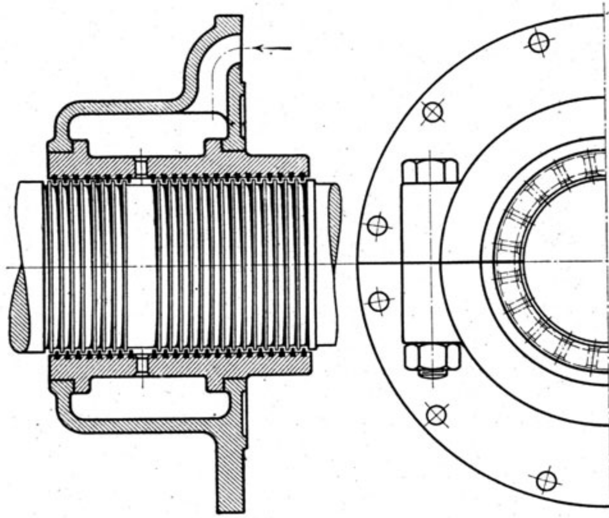


Abb. 450a. Ausgeschärfter Bronzering, um Warmlauf zu verhüten.

Eine noch häufig benutzte Ausführungsform zeigt Abb. 450 mit kleinstem Spiel in axialer Richtung. Die Kämme sind in eine auf die Welle aufgeschobene Büchse eingedreht; die eingestemmten Bronzeringe erhalten oft nach Abb. 450a zugeschärfte Dichtungskanten, die bei allfälligem Streifen, ohne den Kamm zu schädigen, abgeschliffen werden. Kämme mit mehrfacher Abstufung, wodurch die Büchse kürzer wird, zeigt die Ausführung von Melms und Pfenninger, Abb. 450b. Die in Abb. 450c dargestellte Dichtung besitzt in der Achsenrichtung freie Beweglichkeit. Da die genaue Einstellung des axialen Spieles nur an einer Stelle der Turbine, in der Nähe des Kammlagers möglich ist, und an weiter abliegenden Stellen der Unterschied der Wärmedehnung bedeutend werden kann, erhalten dort anzuordnende Stopfbüchsen radiales Spiel. Dies ist auch bei den Abdichtungen der Zwischenböden die Regel, die nach Abb. 450d als besondere Hülsen eingesetzt werden. Wegen der Durchbiegung der Welle wird das Spiel oben kleiner gemacht als unten, beispielsweise bei 200 mm Durchmesser 0,7 auf 1,2 mm, bei 450 mm Durchmesser 1,0 auf 2,3 mm. Bei Schiffsturbinen werden hierfür nach Abb. 450e schwache abgekröpfte Blechringe verwendet. Um beim Streifen Verschweißungen zu verhindern, stellt man die Ringe aus besonderen Weißmetall-Legierungen her.


Abb. 450b. Mehrfache Labyrinthkämme.

Eine verbesserte Labyrinthliderung ist nach der Ausführung der Allgem. Elektriz.-Ges. in Abb. 451 dargestellt. Die aus Bronzelegierung bestehenden Liderungsschalen, die mittels scharfer Kanten radial gegen die Welle dichten, sind durch Falze im Gehäuse so


Abb. 450c.
Axial frei bewegliche Labyrinthstopfbüchse.

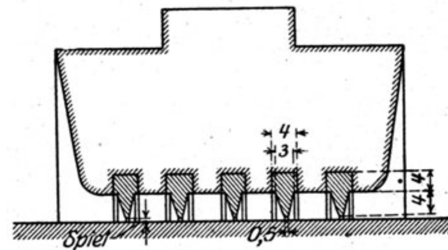


Abb. 450d. Labyrinthe für Zwischenböden.

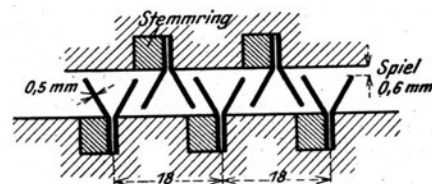


Abb. 450e. Labyrinth für Schiffsturbinentrommeln.

gehalten, daß sie sich nur auf das vorgeschriebene Maß der Welle nähern können. Gerät diese aus irgendeinem Grunde in stärkere Schwingungen, so kann jede Schale nach oben bzw. nach unten ausweichen, ohne zertrümmert zu werden. Der Sperrdampf gelangt durch die im Grundriß bei $X — X$ sichtbaren Zwischenräume zur Welle. Scheibchen Z verhindern die Verdrehung der Ringe.

Eine Verbesserung in anderer Richtung stellt die Ausführung von Brown, Boveri & Cie., Abb. 452, dar. Auch in der Nähe des Kammlagers wechselt die gegenseitige Stellung der Kämme im Gehäuse und in der Welle ie nach dem Belastungs-, d. h. Wärmezustand der

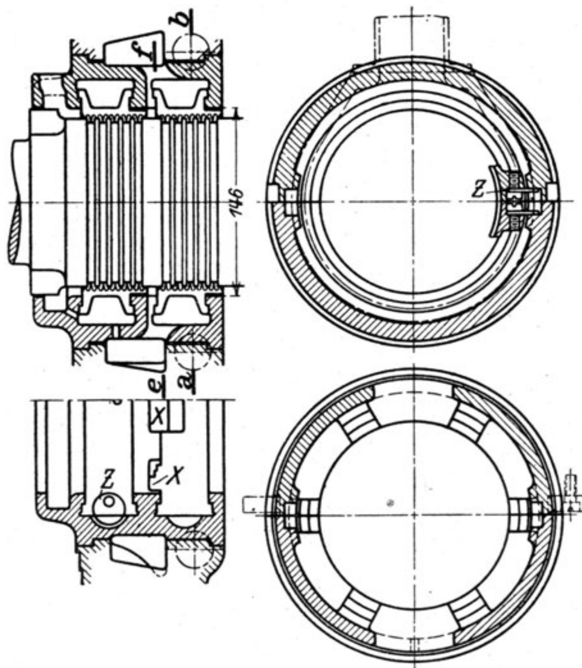


Abb. 451.
Nachgiebige Labyrinthliderung der A.E.G.

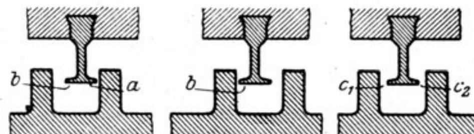


Abb. 452. Doppelseitig dichtendes Labyrinth.

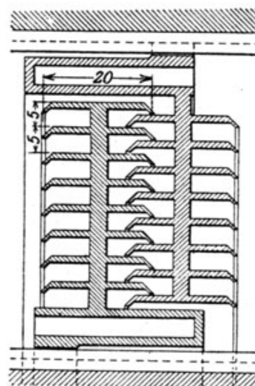


Abb. 453. Vielfach-Labyrinth von Ljungström.

Turbine. Im Leerlauf wird sich kleinstes Spiel bei a einstellen; bei Vollast dehnt sich die Welle mehr aus als das Gehäuse, und das kleinste Spiel erscheint bei b; für Zwischenzustände sind zwar die Spiele bei c_1 c_2 größer als vorhin, es bilden sich jedoch zwei Drosselstellen aus, so daß der Verlust nicht wesentlich zuzunehmen braucht.

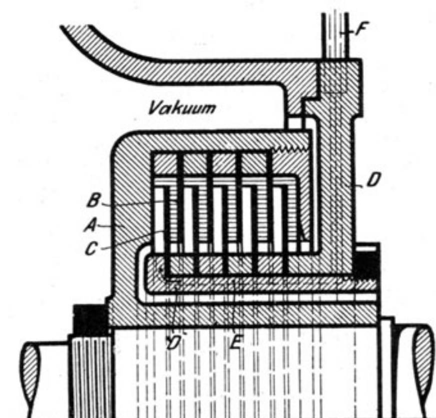


Abb. 454. Elektrastopfbüchse mit Wasserabschluß.

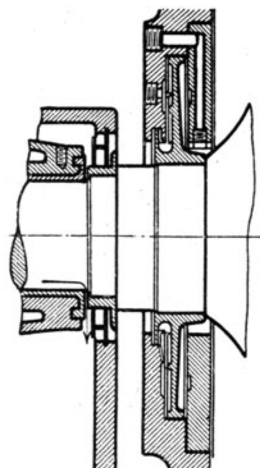


Abb. 455. Wasserabschluß.

Mit ungemein vielen Drosselstellen ist die Stopfbüchse der Ljungström-Turbine, Abb. 453, ausgestattet. Die abgeschrägten Dichtungskanten sind so schwach, daß ein Streifen keinen Heißlauf hervorruft. Die Büchse wird aus vier Doppelelementen der gezeichneten Art zusammengesetzt, so daß etwa 128 Dichtungsstellen entstehen.

b) Stopfbüchsen mit Wasserabschluß.

Eine bei der „Elektraturbine“ früher verwendete Stopfbüchse mit Wasserabschluß, die sich als Abdichtung gegen Vakuum gut eignet, ist in Abb. 454 dargestellt. A ist eine auf der Achse aufgekeilte Hülse, die die mitumlaufenden Scheiben B trägt. Teil D mit den Scheiben C steht still und führt der Büchse durch Röhrchen F und Kanal E tropfenweise Wasser zu, welches nur allmählich infolge Erwärmung von der Welle aus verdunstet. Die Fliehkraft treibt es an den Außenumfang des umlaufenden Teiles A, wodurch ebensoviele Wasserabschlüsse gebildet werden, als Kammern vorhanden sind.

Nehmen wir als Annäherung an, daß sich das Wasser in den engen Kammern mit der halben Geschwindigkeit der Welle drehe ($\omega' = 0{,}5\,\omega$), so ist der Druckunterschied, dem die Wassersäule einer Abteilung das Gleichgewicht hält,

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{(r_2^2 - r_1^2)\,\omega'^2}{2\,g},$$

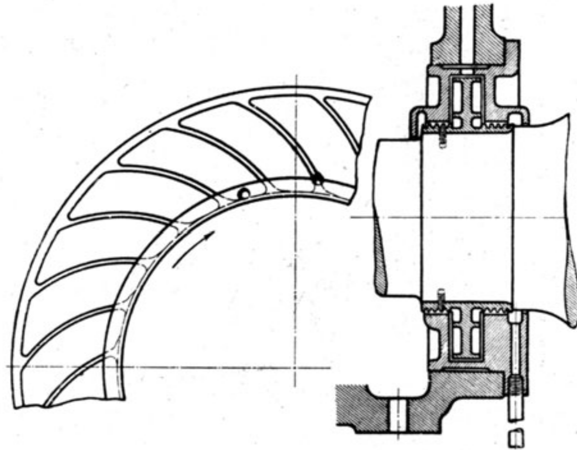


Abb. 455a. Wasserabschluß.

woraus sich die Zahl der Abteilungen berechnen ließe, wenn durch Versuche die Größe von ω' genauer festgestellt wäre.

Auf dem gleichen Grundsatz beruht die Stopfbüchse der Brush Electr. Eng. Co., Abb. 455, die infolge größeren Durchmessers mit einer einzigen Scheibe auskommt. Ebenso diejenige der Metropolitan-Vickers El. Co., Abb. 455a, bei der zur Unterstützung der Fliehkraftwirkung die Scheibe mit bogenförmigen Rippen versehen wird.

c) Stopfbüchsen mit fester Liderung.

Die höchst schwierige Aufgabe, eine feste Liderung einzuführen, wurde nach dem Vorgange der General Electr. Co. durch Verwendung von Kohlenringen gelöst. Die Ausführungsform dieser Gesellschaft, Abb. 456, zeigt, wie die mehrteiligen Ringe durch Spiralfedern zusammengehalten und an der Stoßfuge mit einem (Kupfer-) Schloß D versehen werden, welches zugleich die Sicherung gegen Drehung bildet.

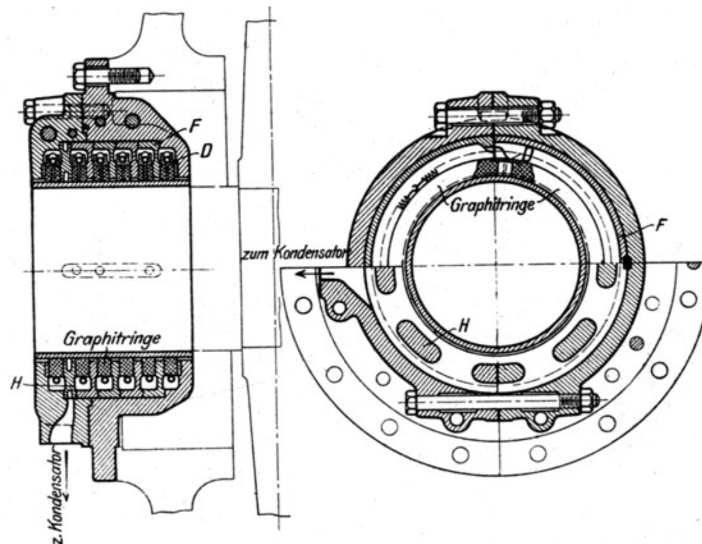


Abb. 456. Kohlenring-Stopfbüchse der General Electr. Co.

In der Ausführung von Escher, Wyß & Cie., Abb. 457, besitzen die Ringe in axialer Richtung leichtes Spiel, so daß sie durch den Überdruck (hier der Außenluft) selbsttätig nach einer Richtung hin angepreßt werden, was die Dichtung unterstützt. Die Drehung

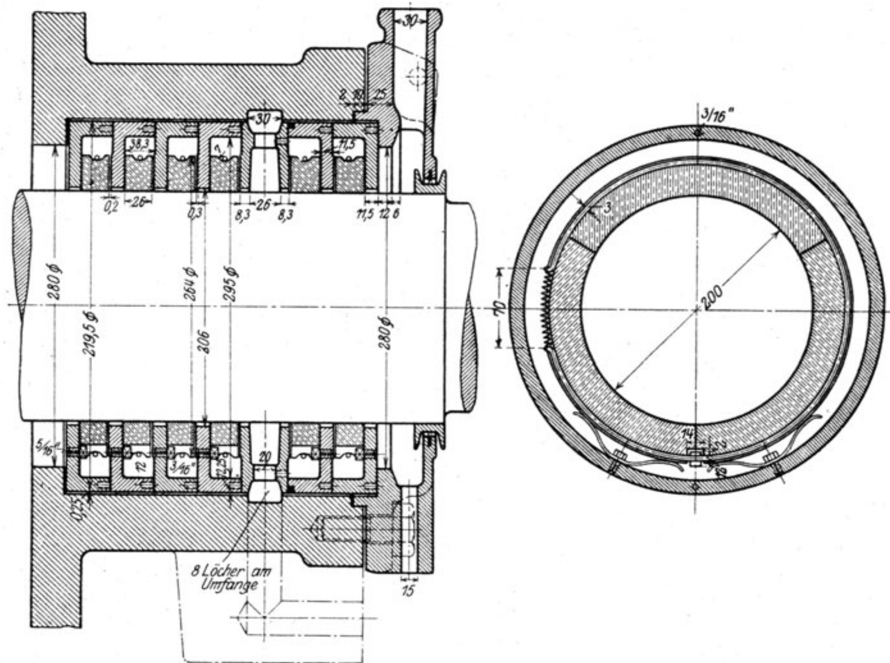


Abb. 457. Kohlenring-Stopfbüchse von Escher-Wyss & Cie.

wird durch Vierkant-Stellschrauben verhindert. Das radiale Spiel der genau bearbeiteten Ringe wird der Wärmeausdehnung der Welle angepaßt und pflegt auf der inneren Seite etwa doppelt soviel zu betragen als auf der äußeren. In absolutem Maß steigt es von

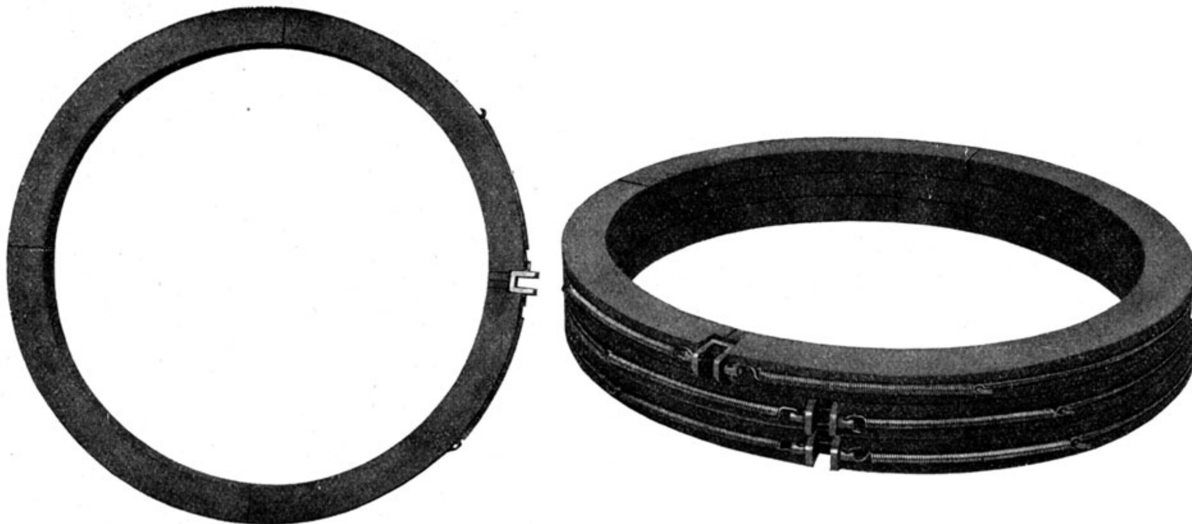


Abb. 458. Kohlenringe zur Stopfbüchse der M.A.N.

0,2 mm bei kleinen, auf 1 mm bei großen Durchmessern und ist auf der Hochdruckseite doppelt so groß wie auf der Vakuumseite. Verschiedene Firmen lassen die Ringe, wie im unteren Teil der Abb. 457 veranschaulicht wird, auf Federn aufruhen, um das Eigengewicht aufzufangen.

Abb. 458 zeigt Lichtbilder der Kohlenringe von der ähnlich konstruierten Stopfbüchse der Masch.-Fabr. Augsburg-Nürnberg, deren Schlösser als U-Bügel ausgebildet sind.

Die Stopfbüchse von Gebr. Sulzer, Abb. 459, ist eine Verbindung der festen Liderung mit der Labyrinth-Wirkung, und wird durch dichtgestellte dünne Messingbleche gebildet, deren Innenrand man nach dem Ausbohren durch Einpressen eines Kaliberdornes leicht umkrempelt. Der Sperrdampf für Vakuumbüchsen tritt bei *b* ein; das links sichtbare, sehr zu empfehlende Ventilatorrädchen verhindert, daß der Dampfüberschuß in das benachbarte Lager übertritt und sich (als Kondensat) dem Öle beimischt.

d) Abdichten der Zwischenwände bei Gleichdruckturbinen.

Im allgemeinen begnügt man sich bei den Zwischenwänden mit zylindrischen Büchsen, die die Welle mit Spiel umfassen und mit Labyrinthnuten versehen sind. Noch besser legt man Bronzeringe ein, die gegen die Welle hin ausgeschärft sind, um diese beim Streifen nicht anzugreifen.

Neuerdings bemüht man sich, gegen Heißlauf unempfindliche Legierungen ausfindig zu machen, oder durch Kohlenliderung vollständigen Abschluß ohne Schmiermittel zu erlangen.

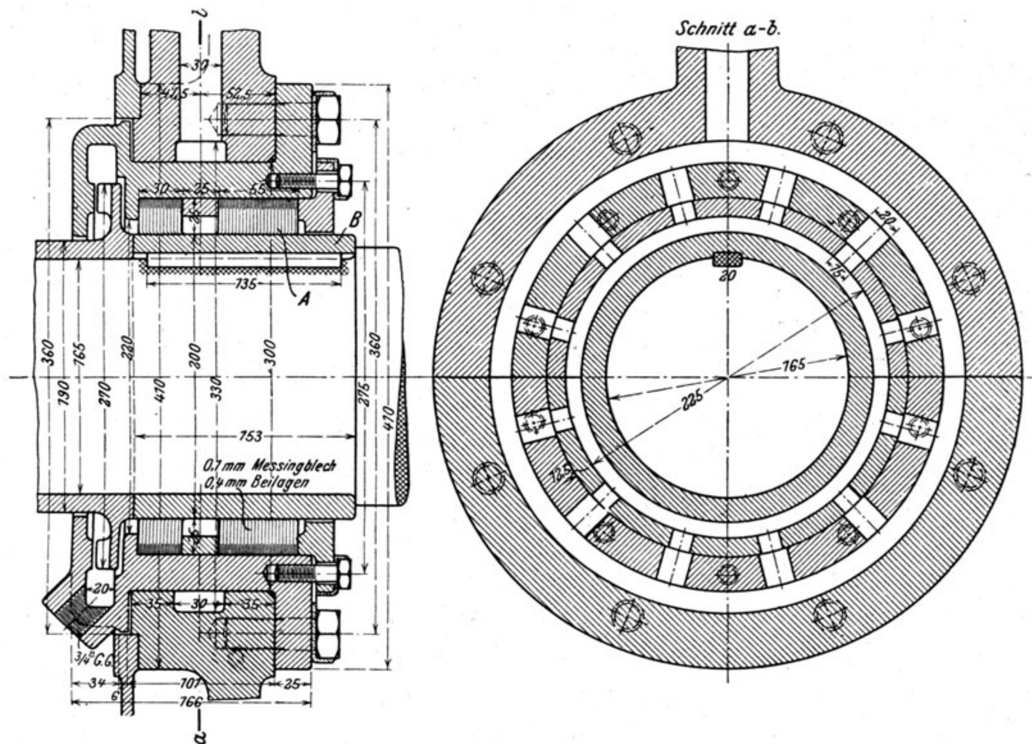


Abb. 459. Stopfbüchse von Gebr. Sulzer A.-G.

Abb. 460 veranschaulicht eine zweckentsprechende Konstruktion von Gebr. Stork & Co. in Hengelo. Der zweiteilige Liderungsring wird durch zwei von festen Aufhängepunkten gehaltenen Federn leicht zusammengepreßt, wobei die Spannung der unteren Feder um das Eigengewicht des Ringes größer ist als die der oberen. Die Liderung berührt die Welle so gut wie ohne Druck, und kann den Schwankungen der Welle nach allen Richtungen folgen. Der Überdruck besorgt die dichtende Anpressung an die Gehäusewand. Beim Abheben des Gehäuses wird der Oberteil durch die Anschläge mitgenommen. In Abb. 461 ist der Längenschnitt einer Konstruktion der General Electric Company dargestellt. Der zweiteilige Liderungsring *A* wird durch Keil B an der Drehung verhindert, von unten durch eine Feder unterstützt und kann ebenfalls der Wellenauslenkung folgen. Nach kurzer anfänglicher Abnützungszeit legt er sich auf den Falz *C* und berührt von da an die Welle mit nur leichter Anpressung.

Eine selbsttätige Entlastung findet bei der Zwischendichtung nach Abb. 461a statt[1]). Der Dampf, der von rechts mit dem größeren Drucke p_1 in die keilförmigen Aussparungen

[1]) D. R. P. 304460 der Allgem. Elektriz.-Ges.

Abb. 460. Zwischenstopfbüchse von Gebr. Stork.

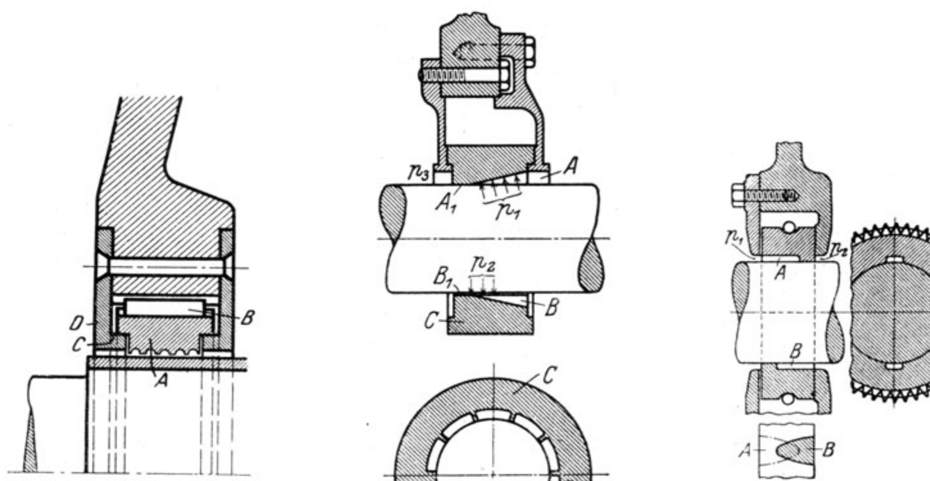


Abb. 461. Abb. 461 a. Abb. 461 b.

Entlastete Zwischenstopfbüchsen.

A, B des Dichtungsringes C eintritt, findet unten bei B_1 den von Anfang an bestehenden oder durch Abnutzung erzeugten Spalt vor, während bei A_1 vorerst keine Fuge vorhanden ist. Durch die zwischen $B - B_1$ sich einstellende Strömung wird dort der „dynamische" Druck p_2 kleiner und der in A herrschende Druck p_1 hebt die Hülse so weit an, bis durch Öffnen einer Fuge bei A_1 auch hier Entweichen und Abnahme des Druckes möglich ist, so daß der Ring durch den noch verbleibenden Unterdruck der Schwere entgegen in Schwebe erhalten wird. Der Ring kann auch zweiteilig sein, muß aber durch eine Feder zusammengehalten werden.

Den gleichen Zweck verfolgt die Liderung[1]) Abb. 461b, bei der die Aussparung A mit dem Drucke p_1 vor der Scheidewand, die untere Aussparung B mit dem Drucke p_2 hinter der Scheidewand in Verbindung steht. Die jenen Pressungen ausgesetzten, im Grundriß schraffierten Flächen müssen so bemessen werden, daß das Eigengewicht des Ringes mit Rücksicht freilich auf sonstige Spaltverluste, aufgehoben wird.

Regelung des Sperrdampfes zu den Stopfbüchsen.

Bei normaler Belastung wird die Hochdruckstopfbüchse einem Überdruck ausgesetzt, und es liegt nahe, den austretenden Dampfüberschuß als Sperrdampf für die Niederdruckstopfbüchse zu verwenden. Diesem Zwecke dient beispielsweise bei der Allg. Elektriz-

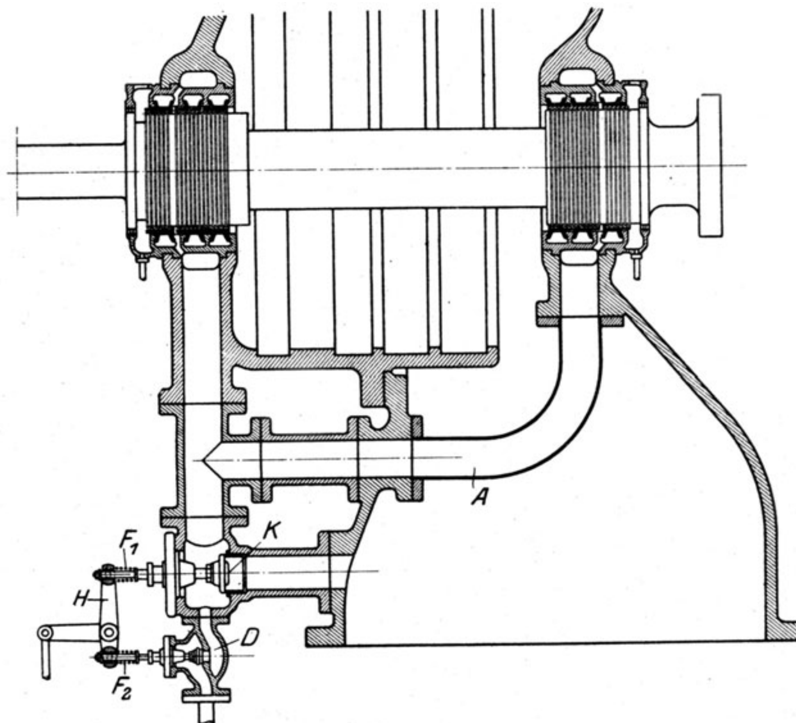


Abb. 462. Regelung des Stopfbüchsendampfes bei Turbinen der Allgem. Elektriz.-Ges.

Gesellsch. Berlin gemäß Abb. 462 die Rohrleitung A. Bei kleiner Belastung wird jedoch vor der Hochdruckstopfbüchse eine Luftleere auftreten. Daher muß durch das Ventil D Frischdampf zugeführt werden, wobei der starre Winkelhebel H bei Rechtsdrehung eine Stütze an der zusammengedrückten Feder F_1 vorfindet und Ventil D öffnet. Schließlich ist noch der Betriebsfall der Überlastung zu beachten, bei dem die aus dem Hochdruckende dringende Dampfmenge zu groß ist, um von der Niederdruckstopfbüchse aufgenommen zu werden. Während man den Überschuß früher in diesem Falle in eine Zwischenstufe der Turbine leitete, zieht die A. E. G. aus Gründen, die wir in Abschn. 158 besprechen, vor, eine Verbindung mit dem Kondenser mittels Ventil K vorzusehen, bei dessen Öffnung durch Linksdrehung des Winkelhebels H die Feder F_2 zusammengedrückt, also ein Schließungsdruck auf D ausgeübt wird.

[1]) D. R. P. 308159 der A.-G. Escher, Wyß & Cie.

98. Die Turbinengehäuse.

Die Gehäuse sind fast ausnahmslos durch eine wagerechte axiale Ebene geteilt und mittels Flanschen verschraubt, um die Räder ein- und ausbauen zu können. Häufig sind noch Trennungen durch zur Achse senkrechte Ebenen vorgesehen, so daß im Kreuzpunkte mit dem wagerechten Schnitt vier Fugen zusammentreffen. Die Abdichtung an dieser Stelle, die man früher für ungemein heikel gehalten hätte, bietet bei sachgemäßer Behandlung keine Schwierigkeiten. Abgesehen von etwas Firnis oder anderem leichten Anstrich wird kein Dichtungsmaterial verwendet.

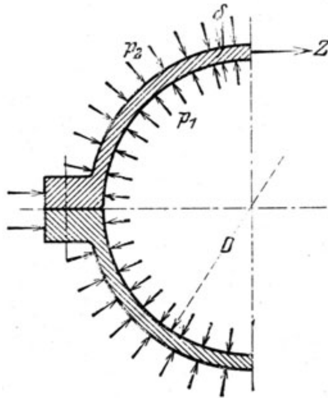


Abb. 463. Gehäusebeanspruchung durch innern Druck.

Neben der selbstverständlichen Rücksicht auf die Gießerei und Bearbeitung haben die Gehäuse vor allem der Beanspruchung durch den Dampfdruck, der Formänderung und den Einflüssen der Wärmedehnungen Rechnung zu tragen.

Die Festigkeit einer längeren zylindrischen Trommel muß ohne Rücksicht auf die nur das Ende versteifenden Böden wie die eines freien Ringes beurteilt werden. Die Anwesenheit der Verbindungsflanschen übt nur einen unwesentlichen Einfluß aus.

Ist D der innere Durchmesser (in cm),
δ die Wandstärke (in cm),
p der innere Überdruck (in kg/qcm),

so gilt für die in der Abb. 463 dargestellte Gehäusehälfte von der Länge l die Gleichgewichtsbedingung

$$D p l = 2 Z = 2 l \delta \sigma_z \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

woraus sich die Zugspannung nach der „Kesselformel"

$$\sigma_z = \frac{D p}{2 \delta} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1\text{a})$$

bestimmt.

Bei der Berechnung der **Flanschenverbindung** hat man die Verbiegung durch einseitig wirkende Umfangskraft zu beachten, die die Beanspruchung der Schrauben auf ein Mehrfaches des nutzbaren Wertes steigern kann.

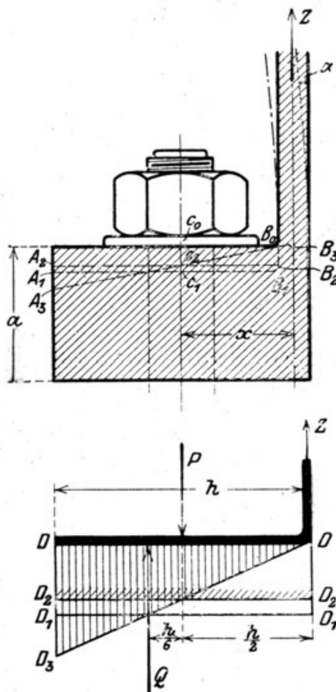


Abb. 464. Kräfteverhältnisse am Flansch.

Bei in der Flanschenmitte angreifenden Schrauben wird die Flansche, Abb. 464, durch den Zug der Schrauben beim Zusammenbau angenähert gleichmäßig von $C_0 B_0$ auf die Dicke $A_1 B_1$ zusammengedrückt und hierbei in der Dichtungsfläche der gleichmäßige in der unteren Figur durch Strecke $D D_1$ dargestellte Druck erzeugt. Infolge Hinzutretens des Umfangszuges Z (auf die Breite einer Schraubenteilung bezogen) dehnt sich die Schraube um den Betrag $C_2 C_1$ aus und der mittlere Dichtungsdruck nimmt auf den Wert $D D_2$ ab. Nun kommt das biegende Moment $Z x$ hinzu, das die Flansche schief stellt und den Dichtungsdruck innen vermindert, außen vermehrt. Als zulässige Grenze der Ungleichmäßigkeit wird der Fall gelten müssen, daß der Druck innen gleich Null wird, woraus sich bei angenähert geradliniger Verteilung am Außenrande der doppelte Betrag des früheren ergibt. Die Resultierende Q greift im Abstande $h/6$ von der Mitte an, und das Gleichgewicht der Kräfte P, Q, Z liefert $Q = 3 Z$, daher

$$P = Q + Z = 4 Z \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

also eine Schraubenkraft, die dem vierfachen Umfangszug gleich ist.

Um den Einfluß der in der Wirklichkeit eintretenden Krümmung der Flansche und das Fließen durch die Scheerbeanspruchung zu ermitteln, wurden mit einem großen **Kautschukmodell Versuche** veranstaltet. Es war $A_1 C_1 = 43$ mm der Abstand der Schraubenmitte bis Innenkante $= 64$ mm, die Wanddicke $= 23$ mm, die Flanschdicke $= 100$ mm. Überträgt man die oben angewendete Rechnungsweise sinngemäß auf diesen durch konstruktive Rücksichten sich ergebenden exzentrischen

Schraubenkraftangriff, und bezeichnet man mit p und z den Abstand der Kräfterichtungen P und Z von der Flanschmitte, so erhält man für den Beginn des Öffnens der Fuge

$$\frac{P}{Z}=\frac{h+6z}{h-6p} \quad \text{(2a)}$$

Hieraus würde für den Versuchsflansch $P/Z=8{,}2$ folgen. Die Beobachtung ergab bei kleinen Schraubenkräften eine kleinere, bei großen Schraubenkräften eine noch größere Ziffer. Der Mittelwert für die praktisch zu erwartende Ausricht(Montierungs-)spannung liegt in der Gegend von 8. Hieraus folgt, daß man **die Forderung einer dicht geschlossenen Innenfuge fallen lassen muß;** die Dichtheit wird ja gewahrt bleiben, wenn nur der Dampf nicht an den Schraubenbolzen vorbei (oder in der Mitte zwischen zwei Bolzen hindurch) entweichen kann. Die Messungen werden fortgesetzt.

Inwiefern durch die Schiefstellung der Flanschen das Gehäuse nach Abb. 465 oval gezogen wird, kann wie folgt beurteilt werden.

Infolge der angenommenen linearen Verteilung kann die Druckspannung $D_2D_3=\sigma_d$ so gerechnet werden, als ob es sich um die Biegung eines Stabes von Rechtecksquerschnitt mit der Höhe h und der Breite b handelte, so daß

$$\sigma_d=\frac{Zx}{bh^2/6} \quad \text{(3)}$$

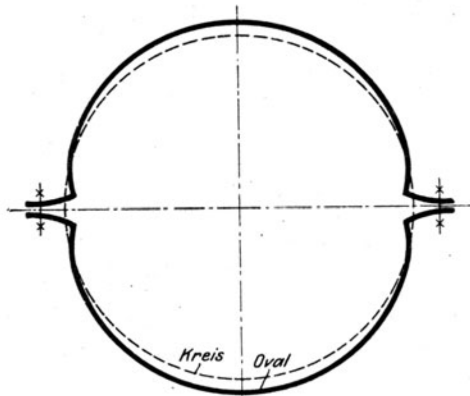


Abb. 465.

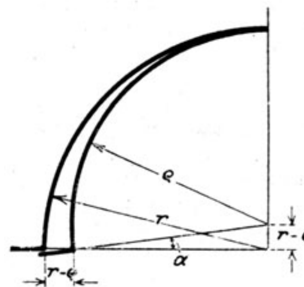


Abb. 465a.

Ovaldrücken des Gehäuses.

wird, wobei Z aus dem Innendruck nach Formel (1) zu rechnen ist. Anderseits darf man σ_d der spezifischen Zusammendrückung der Flansche, deren Dicke a sei, proportional, d. h. wenn ξ die Strecke A_2A_3 bedeutet:

$$\sigma_d=\frac{\xi}{a}E \quad \text{(4)}$$

setzen. Schließlich ist die Neigung der Flansche

$$\alpha=\frac{\xi}{h/2} \quad \text{(5)}$$

oder nach (3) und (4), wenn $J=bh^3/12$ eingeführt wird,

$$\alpha=\frac{Zxa}{JE} \quad \text{(6)}$$

Wie eine ausführlichere Rechnung dartut, kann man nun das Verziehen des Gehäuses nach Abb. 465a angenähert so bestimmen, als ob jede Hälfte zu einem reinen Kreise vom Halbmesser ϱ verbogen würde, wobei die Flansche die Neigung α annimmt, daher die angenäherte Beziehung

$$r-\varrho=r\alpha \quad \text{(7)}$$

besteht. Dieser Ausdruck stellt aber gerade die Abnahme des horizontalen Halbmessers dar. Man überzeugt sich durch Nachrechnung, daß auch bei ganz großen Durchmessern (z. B. 5 m) das Verziehen höchstens 1 mm ausmacht, daher für gewöhnlich bei genügend festen Flanschen und Schrauben außer acht gelassen werden kann; anderseits müssen wir betonen, daß obige Rechnungen nur sehr ungefähre Annäherungen bilden.

Die Steifheit des Gehäuses gegen Ovalwerden wird durch Umfangsrippen wie vor allem durch die Böden sehr gehoben. Mit Rücksicht auf die Wärmedehnung werden Rippen von den leitenden Turbinenfirmen indes nur mit Vorsicht angewendet.

Gegen Torsionsbeanspruchung nützen diese Umfangsrippen gar nichts und die zweiteiligen Gehäuse weisen in bezug auf Torsion überhaupt sehr eigentümliche Verhältnisse auf.

Dürfte man das Gehäuse als ein Stück behandeln, so wäre bei Beanspruchung durch ein um die Achse drehendes Torsionsmoment M, wenn man von den Flanschen absieht, und mit R den mittleren Radius, mit δ die Wandstärke bezeichnet, die Torsionsspannung

$$\tau = \frac{M}{2\pi R^2 \delta}, \quad \text{der Verdrehungswinkel bei einer Länge } L, \quad \psi = \frac{M L}{2\pi R^3 \delta G} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Wenn hingegen die Reibung in der Trennungsfuge ganz vernachlässigbar wäre, so würde das Gehäuse die Verdrehungssteifigkeit sozusagen vollständig verlieren. Dies hängt damit zusammen, daß das Widerstandsmoment für jede Hälfte getrennt und so zu rechnen ist, als ob der Umfang in eine Gerade gestreckt würde. Für ein **sehr flaches Rechteck** ist das Widerstandsmoment gegen Drehung aber

$$W_t = \frac{1}{3} h b^2 \quad . \quad (9)$$

welche von Föppl[1]) abgeleitete Formel viel mehr Beachtung verdiente, als ihr tatsächlich geschenkt wird. Hier ist h angenähert $= \pi R$ und $b = \delta$. Daher die Torsionsspannung

$$\tau' = \frac{3 M'}{\pi R \delta^2}.$$

In ebenso starkem Maße steigt der Verdrehungswinkel, für den die Formel

$$\psi' = \frac{3 M' L}{h b^3 G} = \frac{3 M' L}{\pi R \delta^3 G} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

gilt. Das Verhältnis der Drehwinkel ist also

$$\frac{\psi'}{\psi} = 6 \frac{M'}{M} \left(\frac{R}{\delta}\right)^2$$

Als Moment M' haben wir $M/2$ einzusetzen, und erhalten beispielsweise bei $R/\delta = 26$ einen rund **2000 mal größeren Verdrehungswinkel** als beim spaltlosen Gehäuse.

Dabei beträgt die Verschiebung innerhalb der Flanschflächen nur Bruchteile eines Millimeters, wenn die Beanspruchung bereits die zulässigen Grenzen erreicht hat. Eine ungenügend versteifte Gehäusehälfte wird daher während der Bearbeitung, bei der Aufstellung, auf nachgiebigen Fundamenten (ungleiche Stützung) usw. keinen richtigen Halt besitzen und, wie manche Erfahrung gezeigt hat, zu Mißständen Veranlassung geben.

Festigkeit der Zwischenböden.

Sind die Zwischenböden der vielstufigen Turbine ungeteilt, so kann ihre Festigkeit nach der Theorie der plattenförmigen Körper[2]) beurteilt werden. Für den Fall ebener, gleichmäßig dicker Platten gilt bei freier Auflage

$$\sigma_{eff} = \frac{3}{8}(3+\nu)\frac{r^2}{h^2} p; \qquad y_m = \frac{3}{16}(1-\nu)(5+\nu)\frac{r^4}{h^3}\frac{p}{E} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wo h die Plattenstärke, r den Halbmesser, p den Überdruck in kg/qcm, ν das Poissonsche Verhältnis bedeuten. σ_{eff} ist die wirkliche größte Spannung, und nicht die „reduzierte", die Föppl benützt, die als Produkt aus der größten Dehnung und E zur wirklichen Spannung im Verhältnis $\sigma_{red} = (1-\nu)\sigma_{eff}$ steht. Wie wir gesehen haben, ist bei bildsamen Stoffen die größte Schubspannung für die Beanspruchung maßgebend und zwar ist hier $\sigma_{schub} = \sigma_{eff}/2$. Die Einsenkung y_m bezieht sich auf die Plattenmitte.

Mit $\nu = 0{,}3$ erhält man für Stahlguß

$$\sigma_{eff} = 1{,}24 \frac{r^2}{h^2} p; \qquad y_m = 0{,}70 \frac{r^4}{h^3}\frac{p}{E} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Volle Böden gleicher Festigkeit. Für ungeteilte Böden hat Holzer[3]) Formen gleicher Festigkeit, d. h. solche mit über die ganze Ausdehnung tunlichst gleich hohen radialen und tangentialen Spannungen entwickelt. Für uns kommt von seinen Beispielen lediglich die frei aufliegende durch gleichmäßigen Druck p (at) belastete volle Platte in Betracht, deren Meridianschnitt und Spannungsverteilung in Abb. 466 dargestellt sind. Darin be-

---

[1]) Techn. Mechanik 1907, Bd. V, S. 161 und 163. Siehe in letzterem insbesondere das anschauliche Verfahren von Prandtl.

[2]) Föppl, Techn. Mechanik, Bd. III, Abschnitt über die kreisrunde Platte.

[3]) Zeitschr. f. d. ges. Turbinenwesen 1918, S. 21 u. f.

deutet σ_0 die in der Mitte der Platte vorkommende größte Spannung, y die Einsenkung, R den Halbmesser in cm, und es gelten für den Mittelpunkt die Gleichungen:

$$h_0 = 1{,}268 \sqrt{\frac{p R^2}{\sigma_0}}; \qquad y_0 = 1{,}744 \frac{R \sigma_0}{E} \sqrt{\frac{\sigma_0}{p}} \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Die Plattendicke h hängt wie folgt vom Halbmesser ab:

für $\frac{r}{R}$ =	0	0,2	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
ist $\frac{h}{h_0}$ =	1	0,978	0,911	0,857	0,784	0,694	0,587	0,449	0,350.

Bei durchlochten Scheiben ändern sich die Verhältnisse; ist die Bohrung nicht groß, so sind die Spannungen rd. doppelt so groß als bei der vollen Platte.

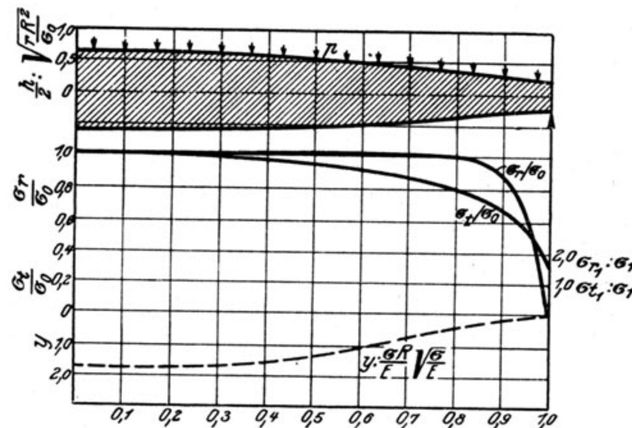


Abb. 466. Boden gleicher Festigkeit nach Holzer.

Geteilte Böden. Da theoretische Formeln für geteilte Böden nicht vorhanden sind, unternahm Verfasser Versuche mit einer Schmiedeeisen- und einer Gußeisenplatte von 1500 mm Durchm., 25 bzw. 40 mm Dicke, die zunächst als volle Platten geprüft wurden. Sie lagen am Außenrand auf einem Ring von 10 mm Breite auf und wurden einem Flüssigkeitsdruck ausgesetzt. Für die Dichtung wurde eine so weiche Kautschuk-Vierkantschnur verwendet, daß man die Auflage mit Sicherheit als „frei" bezeichnen kann. **Die Durchbiegung entsprach denn auch genau der Gl. (2).** Daraufhin halbierte man die Platte und dichtete die Fuge durch Unterlegen eines kreis-

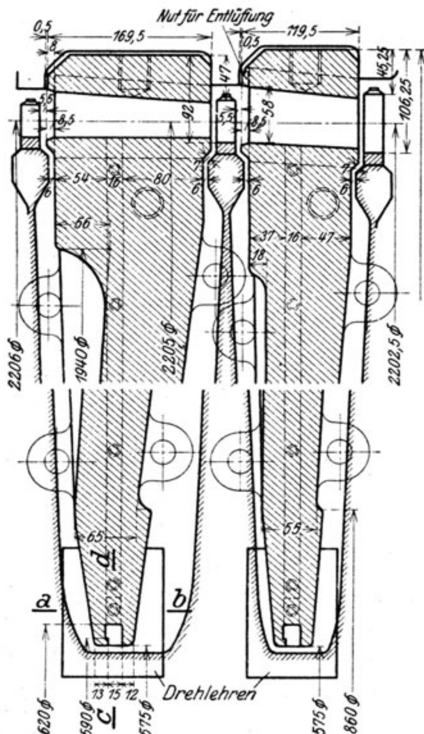


Abb. 467.

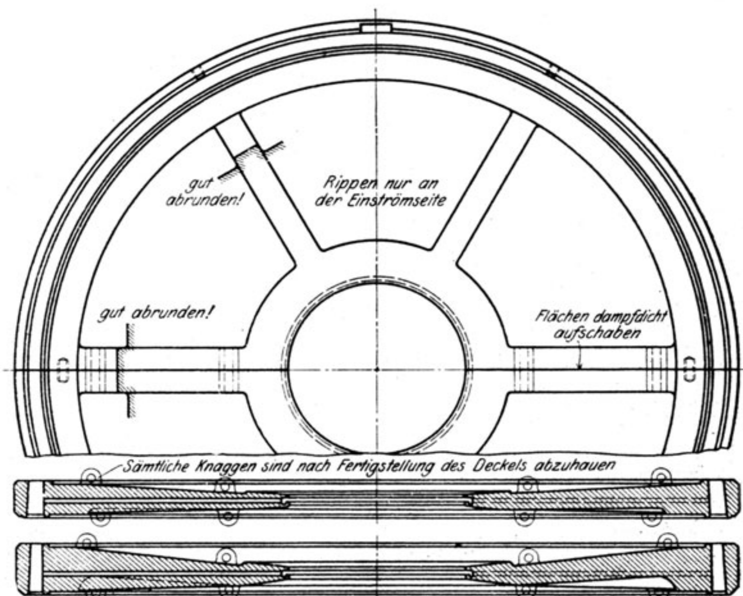


Abb. 467a.

Zwischenboden der Allgem. Elektriz.-Ges.

runden Kupferbleches von 1500 mm Durchm., dessen Widerstand bei der Durchbiegung vernachlässigbar ist. Es stellte sich heraus, daß bei gleichen Drücken die Verbiegungen mit denen der vollen Platte in unveränderlichem Verhältnis stehen, so daß man

$$y_{halb} = \beta\, y_{voll} \quad \text{mit } \beta = 2{,}4 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

setzen kann. Aus der Biegungslinie des freien Durchmessers in der Halbierungsebene kann die größte Biegungsspannung (da keine Querspannungen vorkommen) so gerechnet werden, als ob ein schmaler Stab derselben Biegung ausgesetzt worden wäre. So ergab sich für die Spannung

$$\sigma_{halb} = \alpha\, \sigma_{voll} \quad \text{mit } \alpha = 1{,}6 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (5a)$$

Durch die Halbierung der Platte wird also die Beanspruchung auf das 1,6 fache und die Einsenkung auf das 2,4 fache vergrößert. Weitere Versuche mit durchlochten Platten sind im Gange.

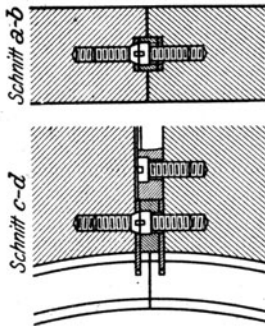


Abb. 467 b. Zwischenboden der Allgem. Elektriz.-Ges.

Die konstruktive Durchbildung der Zwischenböden bei eingegossenen Leitschaufeln ist in Abb. 467 an einer Ausführung der Allgem. Elektriz.-Gesellsch. veranschaulicht.

Der erste der Böden erhielt bei rd. 2200 mm Beaufschlagungsdurchm. von 94 mm auf 65 mm abnehmende Wandstärke. Die beiden Hälften sind, wie in Abb. 467 a bemerkt, dampfdicht aufeinander geschabt und die Fuge wird durch die in Abb. 467 b ersichtlichen Keile in Falzen weiter abgedichtet. Die scheinbar

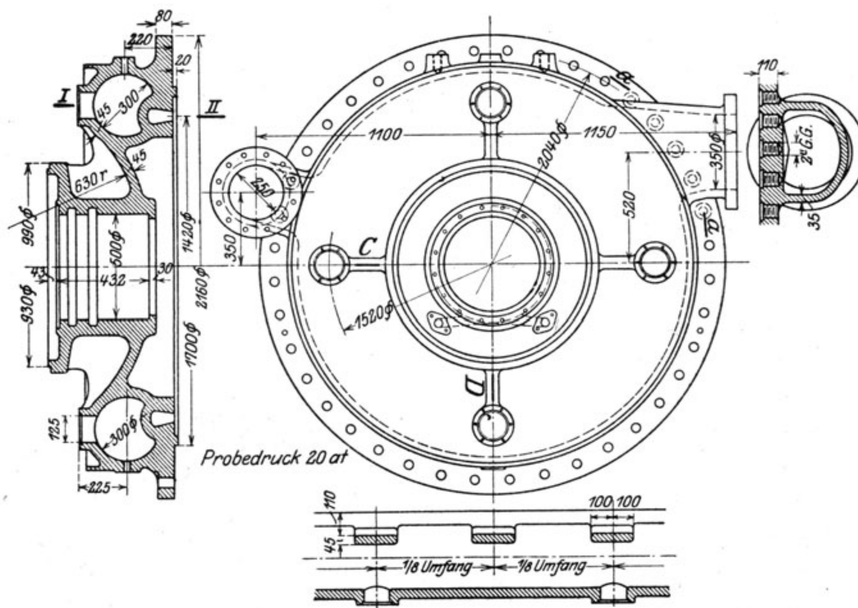


Abb. 468. Hochdruckgehäuse-Boden der Maschinenfabr. Augsburg-Nürnberg.

schiefe Richtung des Leitkanales bedeutet nur so viel, daß die Mitte des Einlaufes infolge des erheblichen Zentriwinkels, den sie mit der Mitte des Austrittes einschließt, auf einem Kreis mit größerem Durchmesser liegt als der Austritt. Ebenso ist die Erhöhung der Einlaufachse gegenüber der Schaufelmitte des vorangehenden Rades durch die schiefe Austrittsgeschwindigkeit aus dem Rade bedingt, wodurch der Strahl den Einlauf in einer vom Mittelpunkt weiter abliegenden Stelle trifft. Die in Abb. 467b sichtbaren Stahlbleche dienen zum Festhalten der Büchsen für Zwischenabdichtung.

Die konstruktive Ausbildung der Gehäuse.

Das Hochdruckgehäuse einer Turbine von 14000 PS bei 3000 Umdr./min nach einer Ausführung der Maschinenfabrik Augsburg-Nürnberg stellt Abb. 468 dar.

Bemerkenswert ist der kreisrunde durchgehende Dampfzuleitungskanal mil anschließendem Kugelboden, wodurch die in scharfen Krümmungen auftretenden Überspannungen vermieden werden. Die Abwickelung des Schnittes im Beaufschlagungsdurchmesser zeigt, daß der Dampfzuleitungsschlitz am ganzen Umfange offen bleibt und daß in gleichmäßigen Abständen die im Aufriß ersichtlichen, stark gebogenen

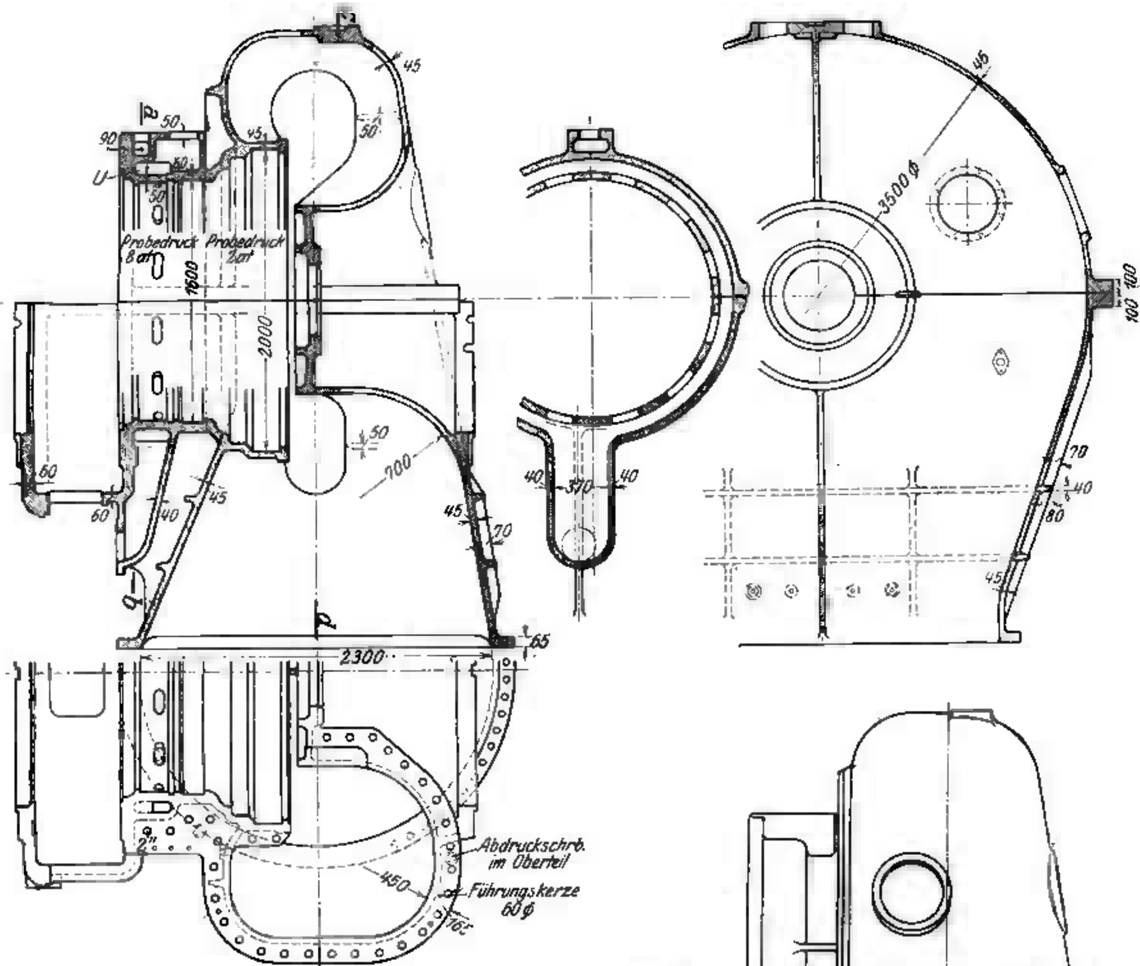


Abb. 469.

Zu Abb. 469 und 469a. Gehäuse einer 14000 PS-Turbine der Maschinenfabr. Augsburg-Nürnberg.

Rippen eine Versteifung herstellen, die elastisch genug ist, um der Formänderung des Bodens und des Kreiswulstes keinen zu großen Widerstand entgegenzusetzen.

Die Ausbildung des eigentlichen Gehäuses samt Abdampfstutzens für die gleiche Turbine veranschaulicht Abb. 469. Kanal *U* dient der Zufuhr des Überlastungsdampfes. Wie die Außenansicht, Abb. 469a, zeigt, wird die verhältnismäßig flache Wand im Übergang zum runden Abdampfstutzen durch Rippen versteift. Im Gegensatz zu noch häufig angetroffenen Ausführungen wird die Turbinenlast nicht durch das Abdampfrohr selbst getragen, sondern durch die an die Flanschen F_1 F_2 sich anschließenden Hauptlagerständer. Der Probedruck für den Hochdruckteil dieses Gehäuses ist 8 at, für den Niederdruckteil 2 at Überdruck.

Eine bemerkenswerte Versteifung bei Niederdruckgehäusen wird von der Allgemeinen Elektrizitäts-Gesellschaft angewendet (Abb. 470 u. 470a). Der äußere Umfang des in die Abdampfleitung hereinragenden Radgehäuses ist mit Augen versehen, die zur

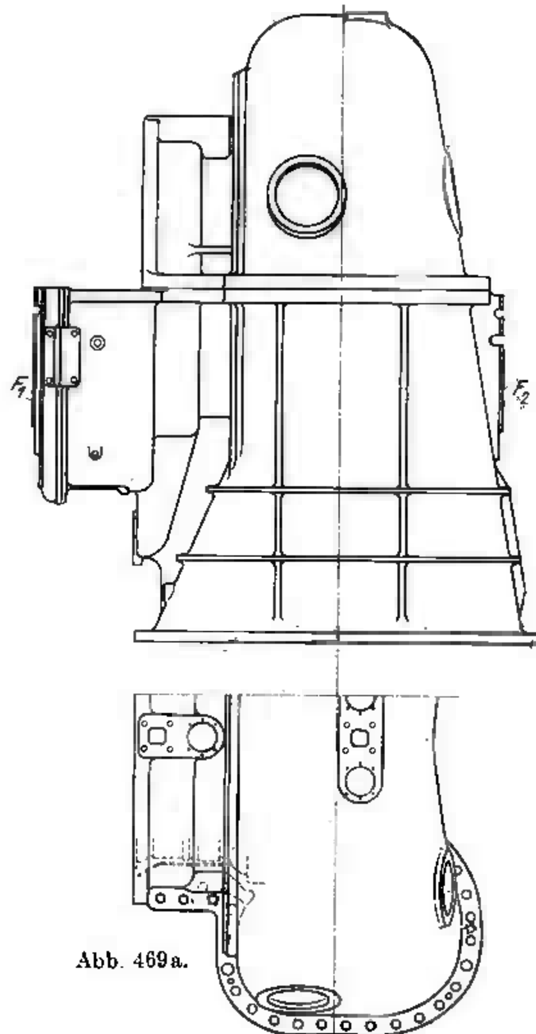


Abb. 469a.

Aufnahme der Stehbolzen S dienen. Hierdurch wird es ermöglicht, der Rückwand des Gehäuses eine sehr flache Krümmung zu geben.

Der für den Anschluß des Trag-Lagerständers bestimmte Flansch G besitzt, wie ersichtlich, keinen Falz. Der Gewichtsschub wird vielmehr durch in die Nute F eingelegte Keile, die aus Gründen der

Abb. 470.

Zu Abb. 470 u. 470a. Turbinengehäuse der Allgem. Elektriz. Ges. mit Stehbolzen (S)-Versteifung.

Wärmedehnung nahe an die Mittelebene des Gehäuses verlegt sind, aufgenommen. Der Probedruck des Niederdruckgehäuses beträgt 1,5 at, der des Mitteldruckteiles 3 at Überdruck.

Abb. 471 veranschaulicht das aus 3 Teilen zusammengesetzte Gehäuse einer sogenannten Doppelend-Turbine der Firma Mehns und Pfenninger.

Die Mündungen der Abdampfstutzen sind fast rechteckig und werden durch Distanzbolzen B_1 B_2 versteift. Der Dampf tritt in der Mitte durch 3 Düsengruppen bei A_1 A_2 (A_3) ein und strömt nach beiden Seiten gleichmäßig ab. Die Lagergehäuse sind mit dem Vorder- bzw. Hinterteil des Gehäuses

in einem Stück gegossen. Die Hinterteilstutzen sind festgelegt, die Vorderteilstutzen gleitbar auf Fundamentplatten gelagert.

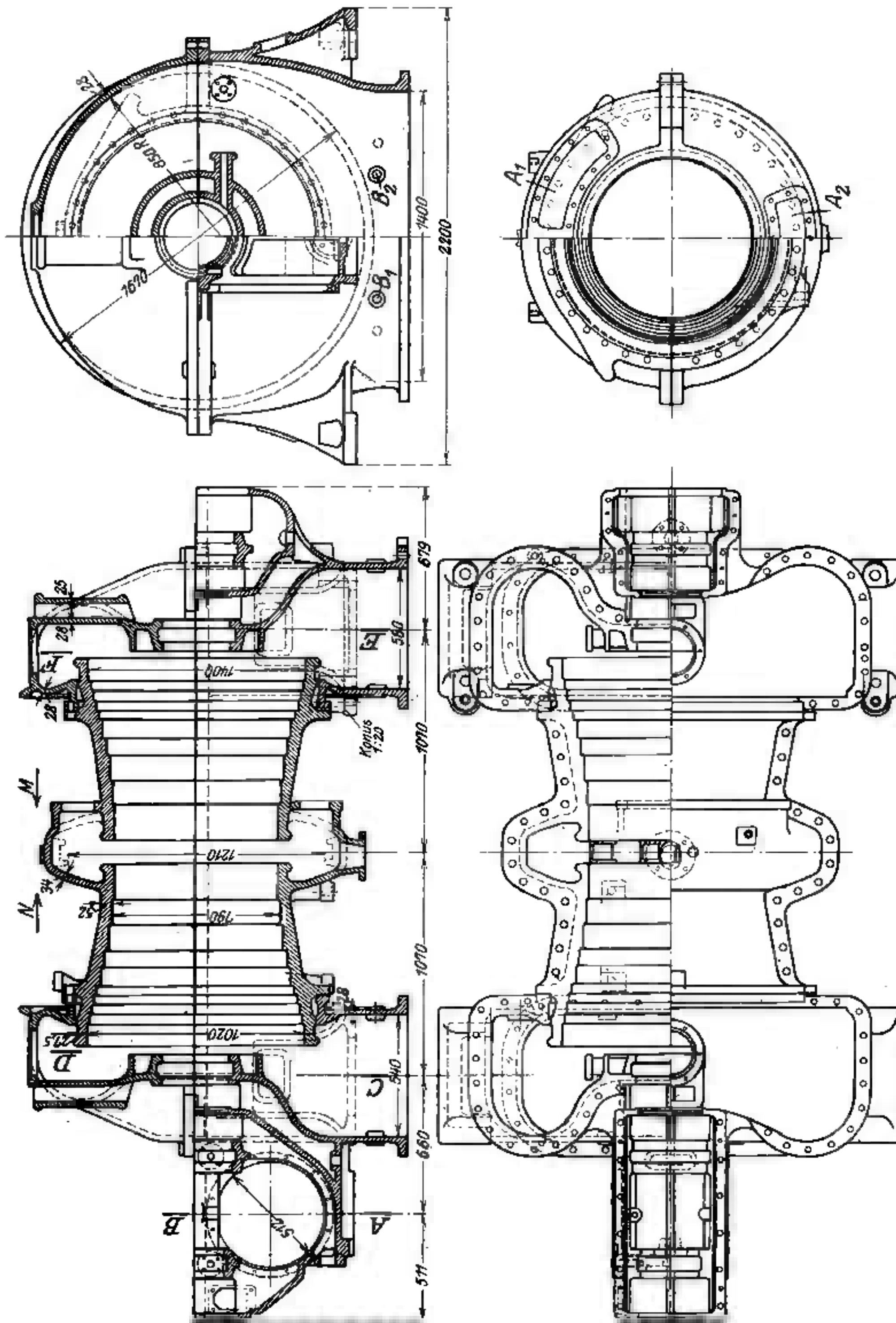


Abb. 471. Gehäuse einer Doppelend-Turbine von Mehns und Pfenniger.

In Abb. 472 stellen wir die Versteifung des Niederdruckteiles einer noch ungleich größeren Doppelend-Turbine der Westinghouse Co. von 35000 KW-Leistung dar. Im wagerechtem Durchmesser sind hier zunächst kräftige Rippen A angeordnet, die, um Gußspannungen zu vermeiden, getrennt sind, und durch Schmiedeisen-Laschen nachträglich verbunden werden.

Des weiteren sind radial stehende eingegossene (?) schmiedeiserne Streben *B* vorhanden, die durch schiefe Seitenstützen *C* mit dem ausgebauchten Teil des Gehäuses verstrebt sind. Endlich trägt zur Versteifung die halbkreisförmige Rippe *D* bei.

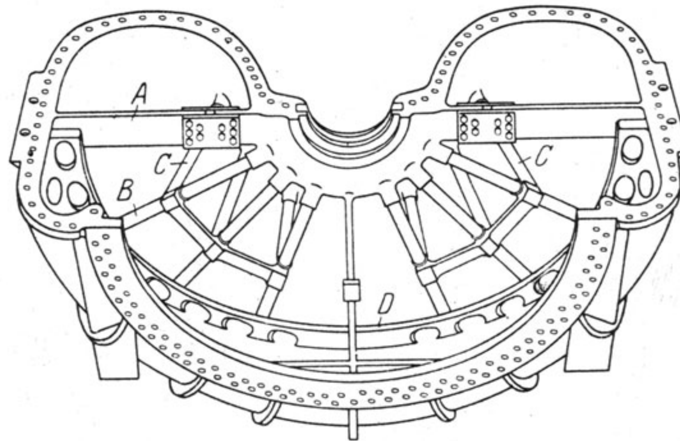


Abb. 472. Versteifung des Niederdruck-Gehäuses nach Westinghouse.

Führung des Dampfstromes im Auspuffgehäuse.

Die Weite des Abdampfrohrs wird berechnet mit einer

Strömungsgeschwindigkeit = 80 bis 120 (Notfälle 150) m/sek.

Die Austrittsgeschwindigkeit am Laufrad liegt stets erheblich über diesen Werten und sollte, wenn möglich, unter „Diffusorwirkung", d. h. mit Druckgewinn in jenen kleineren

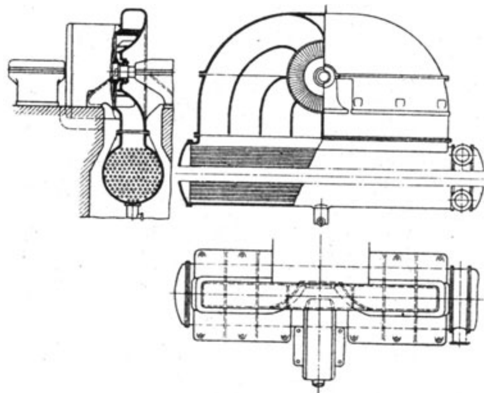
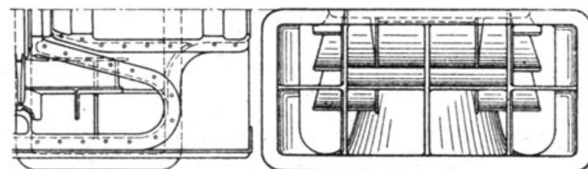


Abb. 473.



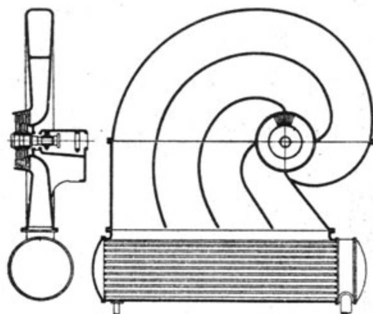


Abb. 473 a.

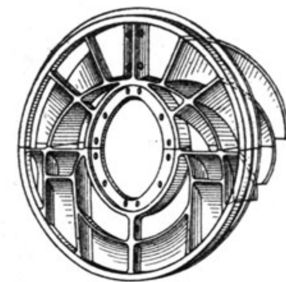


Abb. 474.

Führung des Dampfstromes im Abdampfrohr.

Wert übergeführt werden. Wo dies nicht geschieht, müssen **starke Wirbelungen** auftreten, die durch die Richtungsänderung des Stromes noch erhöht werden. So kommt es häufig zu bedeutenden **Druckverlusten** gegenüber dem Kondenser.

Um diesem Übelstand abzuhelfen, strebt man neuerdings eine erzwungenere Führung des Dampfes durch Unterteilung des Abdampfrohres an. So wird nach Abb. 473 der Strom quer zur Achse ausgebreitet[1]), um in den Oberflächenkondenser dessen ganzer Länge nach einzutreten. In Abb. 473a wird wohl nur der Vollständigkeit halber das von Zentrifugalpumpen her wohlbekannte Spiralgehäuse[1]) vorgeschlagen, wobei allerdings der ungemein lange Weg des äußersten Kanales ungünstig ist. In Abb. 474 (der gleichen Gesellschaft) wird vielfache Unterteilung des Stromes vorgeführt, wobei die obern Bilder Ansichten des Abdampfteiles von oben und von unten und das untere Bild eine perspektivische Ansicht der Führungsrippen veranschaulichen. Wie ersichtlich, wird der Abdampfstrom in jeder Abteilung sogleich nach abwärts abgelenkt. Die Führungsrippen bilden dabei eine natürliche Versteifung des in ein Rechteck ausmündenden Gehäuseteiles.

Die Stützung des Gehäuses erfolgt, wie schon erwähnt, im allgemeinen am Niederdruckende durch besondere Füße, oder durch den Lagerständer; am Hochdruckende heute allgemein durch den Lagerständer, der wegen der Wärmedehnung verschiebbar befestigt sein muß. Um bei großen Ausführungen besseren Zugang zu der Verschraubung zwischen Turbine und Kondensator zu schaffen, wird von der Metropolitan-Vickers El. Co. nach dem Schweiz. Pat. Nr. 76731, Abb. 475, je eine mit der Längsachse der Turbine parallele Brücke geschaffen ($A_1 B_1$; $A_2 B_2$), wobei die den Dampfstrom unterteilenden Rippen $C_0 C_1 C_2$ die tragenden Brückenwände bilden.

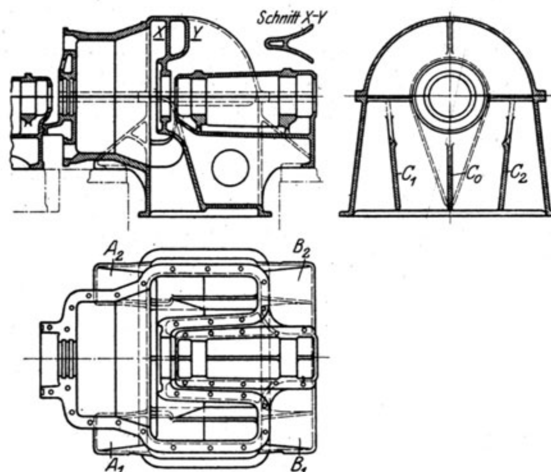


Abb. 475. Stützung des Abdampf-Gehäuses.

Die folgerichtigste Stützung ist die in drei Punkten, wie wohl zum erstenmal an der Sulzerturbine (s. Abschn. 125) verwirklicht worden ist, und zwar was wieder das einzig Richtige ist, unter Anwendung von Kugelpfannen als Stützflächen. Dabei sollten die Befestigungsschrauben lotrecht durch den Kugelmittelpunkt gehen und ihre Köpfe oder Muttern mit konzentrisch kugeligen Unterlagscheiben versehen sein. Wenn das Gehäuse in sich genügend Steifheit besitzt, kann es bei diesem Verfahren auf dem Fundament in keiner Weise verzogen werden. Dies hat vor allem Bedeutung bei nachgiebigen Fundamenten, beispielsweise auf Schiffen. Aber auch feste Fundamente senken sich; verbindet man die Turbine mit der Dynamo durch eine nachgiebige Kupplung, so wird bei dreipunktiger Stützung selbst ein Fundamentriß keine unmittelbare Gefahr bedeuten.

Die Wärmedehnung der Gehäuse. — Gefahren raschen Anlassens.

Das Gehäuse kann schon im Beharrungszustande Verspannungen erleiden, wenn infolge angegossener Dampfkanäle, weit ausladender Füße, überhaupt ungleicher Massenverteilung und Wärmeableitung Temperaturunterschiede bestehen können. Die größten Gefahren werden indes bei allzu raschem Anwärmen und Belasten, insbesondere falls die Konstruktion unzweckmäßig ist, heraufbeschworen. Die kritischen Stellen der Beanspruchung sind große ebene Bodenflächen und vor allem herausragende hohe Rippen. Die Bodenwände sind unvermeidlich, sollten aber gewölbt sein; hohe Rippen hingegen muß man als Konstruktionsfehler bezeichnen.

Die Beanspruchung dieser Teile kann zahlenmäßig angegeben werden, falls der Temperaturverlauf in jedem Augenblick bekannt ist. Bei dem in Abb. 476 dargestellten Beispiel einer unzweckmäßigen Konstruktion wird man die angrenzenden zylindrischen Teile, die in sich wesentlich nachgiebiger sind als der Boden, vernachlässigen, und auf den Boden die Formeln des Abschn. 79 anwenden. Wie der zeitliche Verlauf der Temperatur hierbei abzuschätzen wäre, wird in Abschn. 198 erörtert.

---

[1]) Schweiz. Pat. Nr. 75583 der Britischen Westinghouse-Gesellschaft (jetzt Metropolitan-Vickers El. Co.)

Auch die zylindrischen Mäntel können großer Verspannung ausgesetzt werden, z. B. bei axialer Einklemmung eines durch etwaige Arbeitsleisten noch mehr isolierten Futters nach Abb. 477.

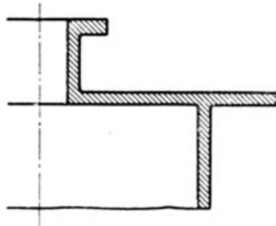


Abb. 476. Fehlerhafte Rippenanordnung.



Abb. 477. Durch Wärmedehnung klemmendes Futter.

In ähnlicher Lage wie jenes Futter sind **die Zwischenböden der mehrstufigen Turbine** sofern man sie mit zu geringem Spiel einsetzt. Ein Mittel zur Aushilfe bildet die Ausführung von Brown, Boveri & Cie., Abb. 478, nach der die Paßflächen A zwischen Boden und Gehäuse kegelförmig ausgebildet sind und sowohl radial (B) wie axial (C) großes Spiel erhalten können.

Der axiale Anpressungsdruck P ergibt die normale Komponente P_2, die den Ring anpreßt und die radiale Komponente P_1, die die beiden Bodenhälften zusammenpreßt und hierdurch die Dichtung in der Fuge wesentlich unterstützt. Diese durch das D.R.P. Nr. 304480 geschützte Vorrichtung bezweckt im übrigen auch nach außen offene Leitkanäle zu ermöglichen, indem der Außenring für sich angefertigt und der Boden D mit den eingegossenen Schaufeln in den Falz E des Ringes eingehängt wird. Je nach Bedarf können dabei die Leitkanäle durch feste Rippen F unterbrochen werden, die den größten Teil des Axialdruckes aufnehmen. Die vorgeschraubten Plättchen (G) halten die Leitvorrichtung an Ort und Stelle.

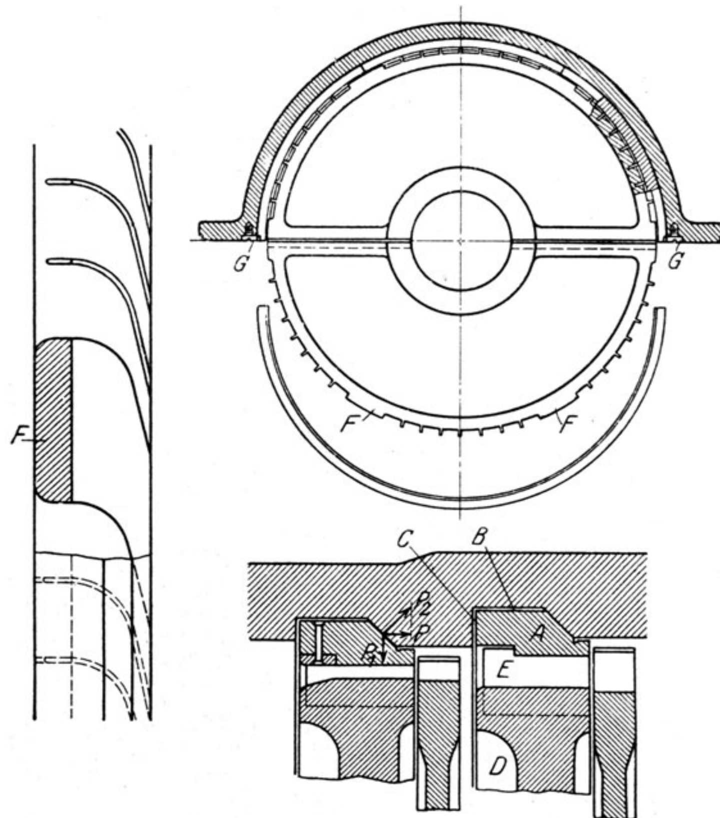


Abb. 478. Zwischenboden mit kegeliger Auflage.

Andere Firmen begnügen sich damit, die Zwischenböden wie üblich mit ebener Dichtungsfläche aufliegen zu lassen, ihnen aber radial und axial reichlich Spiel zu geben, wobei radial frei gleitende Keile die Befestigung besorgen, ohne die Ausdehnung zu behindern.

Auf die treibende Kraft der Zwischenböden macht das D.R.P. Nr. 291993, Abb. 479, der Maschinenfahrik Augsburg-Nürnberg aufmerksam. Der Grund des Treibens soll die Absorption von Gasen (Dampf und Luft) durch Gußeisen bei hoher Temperatur sein. Die Ausdehnung soll im Laufe längerer Betriebszeit so groß werden, daß Gehäuse sogar gesprengt werden. Als Abhilfe empfiehlt jenes Patent das Einhüllen der Gußeisenböden in dichte, gasundurchlässige Überzüge, die auf galvanischem Wege oder mittels des Schoopschen Metallspritzverfahrens hergestellt werden könnten.

Welche Wichtigkeit die Praxis der Wärmedehnung beizulegen beginnt, lehrt das D.R.P. Nr. 287963, Abb. 480, der Allgemeinen Elektrizitäts-Gesellschaft, die ein in (nach Bedarf) plombierter Hülse eingeschlossenes Überlaufthermometer darstellt, das in gefährdeten Gehäuseteilen eingelegt durch die aus der Kapillare tretende Quecksilbermenge die Kontrolle der höchsten vorgekommenen Temperaturen ermöglicht.

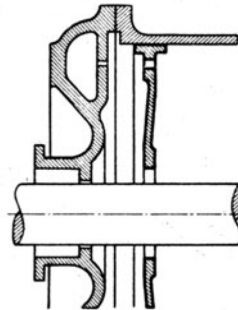


Abb. 479. Zwischenboden mit gasundurchlässiger Hülle.



Abb. 480. Kapselthermometer in gefährdeten Gehäuseteilen.

Verschiedenheit der Wärmedehnung von Welle und Gehäuse. Da die inneren Turbinenteile vor Strahlung geschützt sind, wird sich das Gehäuse im Betriebe im allgemeinen weniger ausdehnen als die Welle. Nach einer Mitteilung von Ing. Pfenninger wurde an einer älteren Turbine von 2000 KW-Leistung bei 1500 Umdr./min eine Mehrausdehnung der Welle an dem vom Kammlager abgewendeten (Niederdruck-) Ende von 2 bis 3 mm beobachtet, was bei einer auf 2 bis 3 m zu schätzenden Länge einer Temperaturdifferenz von bis zu 100^0 entspräche. An einer Turbine von 1000 PS bei 3000 Umdr./min betrug die Mehrausdehnung 1,5 mm. Von einer Ausführung größter Art stammen die Beobachtungen von Frahm, Abb. 828. Danach war

Für die:	Hochdruck-Turbine mm	Niederdruck-Turbine mm	N.-Marsch-Turbine mm
Auf eine Meßlänge von	8335	6795	7225
Die absolute Ausdehnung des Gehäuses . .	6,2—6,5	2,5	3,5
Die relative (Mehr-)Dehnung der Welle . .	1,0—1,5	2,5	1,5

Von anderer Seite wird uns mitgeteilt, daß bei Überdruckturbinen die Mehrausdehnung der Trommel mit Welle gegenüber dem Gehäuse einige Zeit nach dem Anlassen einen Höchstwert erreicht, um dann wieder zurückzugehen. Bei Gleichdruckturbinen könnte der Sachverhalt das Gegenteil hiervon sein. Hier ist die Welle im Verhältnis zur Gehäusewandstärke ein sehr massives Stück, in das die Wärme langsamer eindringen wird. Auch hat man zu gewärtigen, daß die dünnen Scheiben und ihre Naben sich rascher anwärmen als die Welle. Daher wird es nicht überraschen, daß in den Anfängen des Dampfturbinenbaues, als man nach Abb. 481 die Naben durch eine Mutter im Interesse des straffen Sitzes fest zusammenpreßte, die Wärmedehnung zu einem Verspannen und häufigem Verbiegen der Welle geführt hat, mit allen schlechten Folgen für die Ruhe des Ganges. Neuerdings läßt

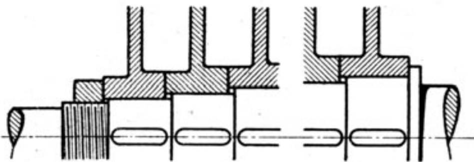


Abb. 481. Fehlerhaftes Verspannen der Radnaben in axialer Richtung.

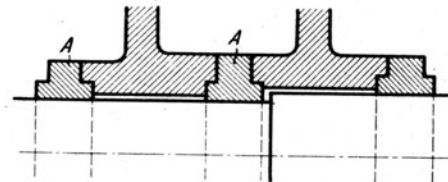
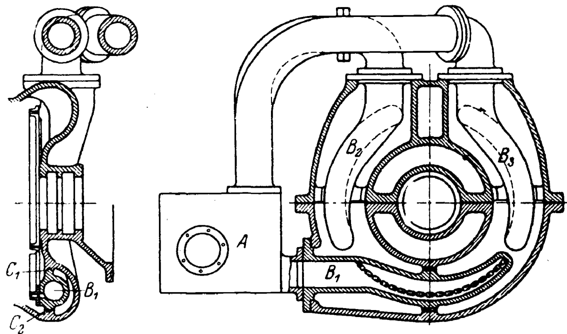


Abb. 482. Tragringe für die Radnaben.

man **die Mutter nicht fest anliegen;** sie soll vielmehr ein Spiel gewähren, das je nach der Größe der Turbine im ganzen 0,3 bis 0,6 mm betragen wird. Daß die Scheiben hierbei um kleine Beträge hin und her wandern können, ist ein Übelstand, dem man durch Festhalten jedes Rades für sich zu begegnen beginnt, wie die Ausführungen der General Electric Co., Abb. 570, 573, zeigen. Nach Abb. 482 werden die Naben auf besondere Tragringe A fest aufgepreßt, um leicht abstreifbar zu bleiben.

Trennung der Leitungen, die Dampf von höherer oder niederer Temperatur führen, ist eine wichtige Konstruktionsregel. Dies wird für den Einlaß in vorzüglicher Weise erreicht durch die Bauart der Allgem. Elektrizitäts-Gesellsch., s. Abschn. 107. Ebenso zweckmäßig ist die Ausführung der Metropolitan-Vickers El. Co.[1]), Abb. 483. Die Beauf-



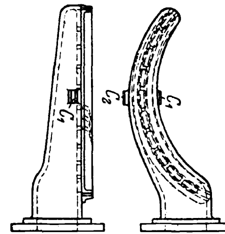


Abb. 483. Abb. 483a.
Isolierte Einführung von hochüberhitztem Dampf.

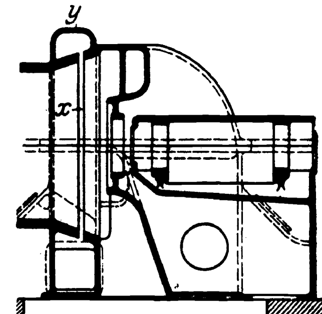


Abb. 483b. Elastischer Wulst y mit Unterbrechungsspalt x.

schlagung erfolgt durch die Düsengruppen $B_1 B_2 B_3$, die je an einem in Abb. 483a dargestellten Rohrbogen befestigt sind, der zum Einbringen bloß einen kleinen (runden) Ausschnitt im Gehäuse bedingt und diesen, außer der Flansche bloß in den kurzen Rippenführungen $C_1 C_2$ berührt.

Vermehrte Elastizität des Gehäuses wird von der gleichen Firma, Abb. 483b[2]), dadurch angestrebt, daß zwischen Hoch- und Niederdruckteil ein biegungsfähiger Wulst y eingeschaltet und die durchgehende Gehäusewand mittels Schlitzes x getrennt wird. Es handelt sich dabei vor allem um den Unterschied, der infolge der Wärmeausdehnung in der Höhenlage des Niederdruck- und Hochdrucklagers entsteht. Es soll vorgekommen sein, daß infolge dieser Wärmeausdehnung der **Hochdrucklagerständer von seinem Fundament abgehoben worden ist.**

Verfasser hat Gelegenheit gehabt, an einer 4000 KW-Dampfturbine mit verhältnismäßig längeren Fußkonsolen (älterer Art) **bei Auspuffbetrieb** festzustellen, daß sich dieselben trotz starker Befestigungsschrauben **nach oben durchzubiegen** begannen, so daß zwischen Fuß und Rahmen eine Fuge entstand, in die man mit dem Federmesser eindringen konnte. Diese Krümmung ist verständlich, da der Fuß und die Fundamentplatte die Wärme stark ableiten konnten, während der eingehüllte Turbinenoberteil heißer bleiben mußte. Auf Grund solcher Erfahrungen bricht sich die Ansicht Bahn, daß bei **großen Einheiten der Auspuffbetrieb grundsätzlich ausgeschlossen sein sollte,** es sei denn, daß es gelingt, das Gehäuse so zu konstruieren, daß auch stärkste Wärmedehnung nach allen Richtungen frei erfolgen könne.

Zu vermeiden sind jede Art von Gußansammlung oder Unsymmetrie der Massenverteilung. Von diesem Standpunkt wäre der glatte Zylinder ohne Ventilangüsse, ja ohne Rippen, die ideale Form.

Die Brush Electr. Eng. Company vertritt die Ansicht, daß schon die wagerechten Verbindungsflanschen zu einem Werfen Veranlassung geben können, und versieht ihre Gehäuse zum Ausgleich mit gleich starken angegossenen Längsrippen in der lotrechten Ebene; außerdem werden die Gehäuse **sorgfältig ausgeglüht.**

Ein Verstoß gegen die elementaren Regeln des Maschinenbaues ist es, wenn man die Höhenausdehnung der Gehäuse nicht beachtet und eine Abweichung der Höhenlage von

[1]) Schweiz. Pat. Nr. 76357 der Brit. Westinghouse-Ges.
[2]) Schweiz. Pat. Nr. 76731 der Brit. Westinghouse-Ges.

Gehäuse und Lagerständern zuläßt, wodurch die Stopfbüchsen und die Welle zum Streifen gebracht werden. Das Gehäuse soll entweder wie bei den meisten Parsonsturbinen zwischen den Lagerständern frei schweben, oder so nahe als möglich in der wagerechten Mittelebene gestützt werden. Selbst Vorschläge wie Abb. 484 sind berechtigt[1]), wo durch ein dem Strome zugekehrtes Staurohr x der Dampf zum Durchströmen der hohlen Lagerkörper veranlaßt wird und so beide auf gleicher Temperatur erhält.

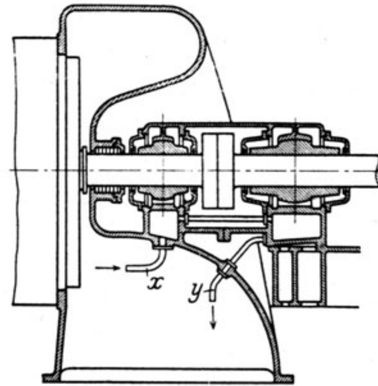
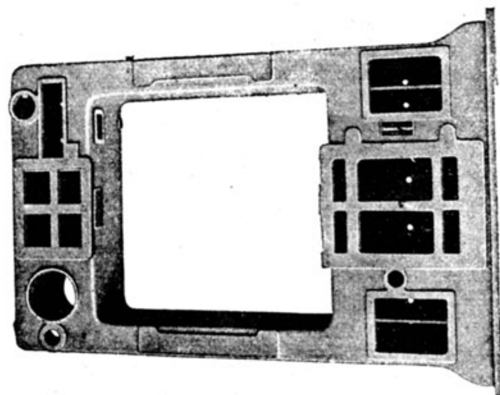


Abb. 484. Durchwärmung der Lagerständer mittels Auspuffdampf.

Die Längenausdehnung wird meist nach der Hochdruckseite freigegeben, da die Verbindung mit dem Kondensator von selbst zu einer Festlegung des Niederdruckendes führt. Das Kammlager findet sich umgekehrt meist am Hochdruckende; es macht die Verschiebung des Gehäuses mit, während das die Kuppelung tragende Niederdruckwellenende infolge gegenteiliger, wenn auch nicht vollständig gleicher Ausdehnung im Raume nahezu feststeht.

Wärmt man bei ruhender Turbine an, so wird das Oberteil des Gehäuses wärmer, weil die Lagerständer oder die Stützen Wärme ableiten, und das Gehäuse krümmt sich nach oben. Dies und die Rücksicht auf die sich ebenfalls ungleich erwärmende Spindel führten in neuerer Zeit allgemein dazu, nach kurzem Vorwärmen alsbald mit soviel Dampf anzulassen, daß die Welle langsam umläuft und die Räder gewissermaßen als Rührwerk dienen.

Über die **zulässige Dauer für Anwärmung und Vollbelastung** gehen die Ansichten sehr auseinander. In Notfällen sind Turbinen innerhalb einiger Minuten auf Vollast gebracht worden. Im allgemeinen wird mindestens 15 Minuten lang während des Laufes vorgewärmt und in 5—10 Minuten vollbelastet. Verfasser überzeugte sich durch Messungen des Temperaturverlaufes, daß hierbei **gefährliche Wärmeanspannungen** auftreten können. Der Betriebsleiter sollte sich mit der Tatsache, daß eine Turbine die rasche Belastung bei der Übernahme ausgehalten hat, nicht begnügen, sondern sollte durch einen Sachverständigen den Temperaturverlauf beobachten und daraus folgern lassen, ob die Betriebssicherheit nicht gefährdet ist.


Abb. 485. Zu schwere ältere Grundplattenform.

Die Grundplatten sind dazu bestimmt, eine einheitliche und möglichst starre Verbindung zwischen den Unterstützungspunkten der Turbine und des Stromerzeugers zu bilden und die auftretenden Kräfte oder Erschütterungen mit Sicherheit abzufangen. Die Erfahrung zeigte, daß die Erschütterungen glücklicherweise so vermindert werden konnten, daß vielfach Fundamentbolzen als überflüssig angesehen wurden. Man begnügte sich damit, die Grundplatte halb oder ganz zu versenken und einzubetonnieren, aber man führte sie bis in die letzte Zeit gar schwer aus. Ein Beispiel dieser Art ist in Abb. 485 dargestellt, wobei rechts die Hochdruckseite mit dem Durchbruch für die Dampfzuleitung, links der Anschluß an den Dynamorahmen ersichtlich sind. Die Höhlung des Rahmens wird oft als Ölbehälter ausgeführt, in den man Kühlschlangen von oben einhängt, wozu die großen seitlichen Ausschnitte dienen. Ungünstig sind die sichtbaren freien Rippen, die in der Form unbedingt viel früher erkalten müssen als die Umgebung, wodurch Guß-Spannungen entstehen. Es wäre ein T-Profil mit stärkerer Kopfflansche auszuführen. Unvergleichlich leichter ist der Rahmen der Sulzerturbine, Abb. 486, der die oben beschriebene stützung in drei Punkten ABC aufweist. Wenn man die Befestigungsschrauben genau durch die Mitte der stützenden Kugelpfannen hindurchgelegt hätte, würde der Rahmen

[1]) D. R. P. Nr. 280597 von Escher Wyß & Cie.

keiner Verwindung ausgesetzt werden können. Die Festigkeit des in neueren Zeiten auch mit Eisen hewehrten Betons ist so groß, daß die vordere Platte mit den seitlichen lediglich durch Distanzrohre verbunden wird.

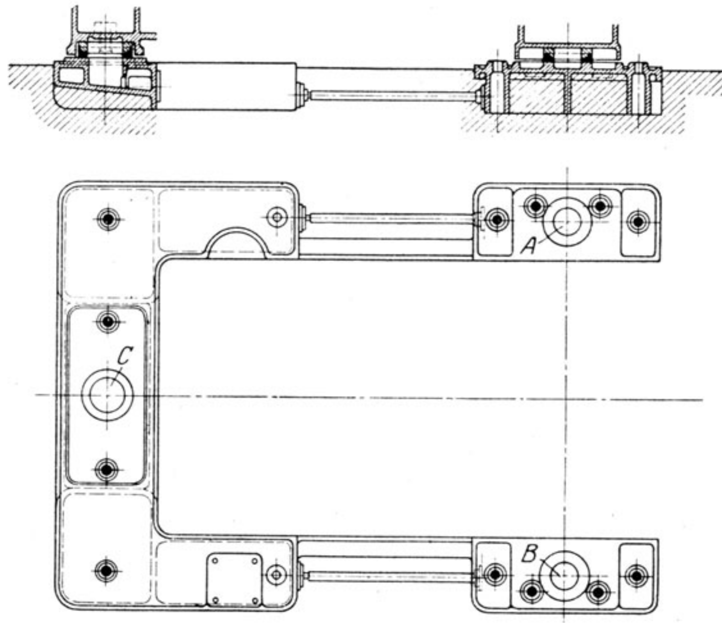


Abb. 486. Moderner leichter Rahmen mit Dreipunkt-Stützung.

99. Die Regelungsverfahren.

Die theoretisch vollkommene Regelung bestünde darin, daß man sämtliche Durchflußquerschnitte der Turbine im geraden Verhältnisse zur Leistung vergrößerte oder verkleinerte. Dieser Forderung kann man bei einstufigen Turbinen theoretisch sehr nahe kommen, beispielsweise durch die von Kolb erfundene veränderliche Düse, die, wie bei der „Elektra“turbine beschrieben wird, durch eine federnde Seitenwand den engsten und

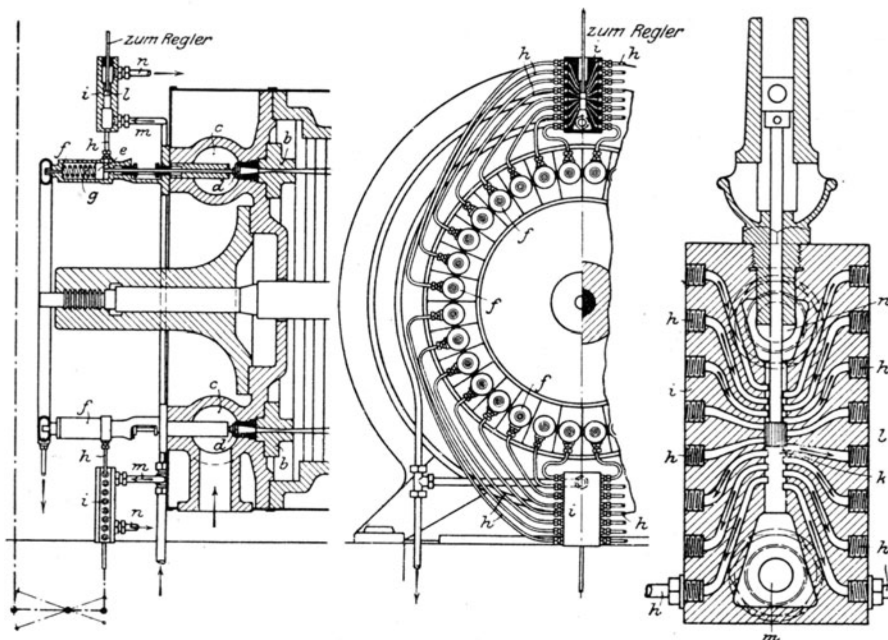


Abb. 487. Einzel-Düsenregelung.

den Austrittsquerschnitt unter Aufrechterhaltung ihres Größenverhältnisses abändert. Von einer Änderung der Laufradquerschnitte muß selbstverständlich abgesehen werden und die Schwierigkeit der Abdichtung steht der Einführung jener Düse im Wege.

Die nächstliegende Annäherung an die Vollkommenheit erreichen wir durch reihenweises Öffnen und Schließen der Düsen einer einstufigen Gleichdruckturbine. Eine der ersten Vorschläge dieser Art war das D. R. P. 144102 von Th. Reuter, wo ein vom Regler bewegter Steuerschieber (Abb. 487) frischen Dampf auf die Unterfläche von mit den Düsenspindeln verbundenen Kolben leitet. Stellt der Schieber die Verbindung des Raumes unter dem Kolben mit der Atmosphäre her, so wird die Spindel durch eine Feder niedergedrückt. Bei den geringen Kräften, die hier auszuüben sind, genügen Manometeröhrchen als Zuleitung, und der Schieber ist so klein, daß direkter Angriff durch den Regler zulässig erscheint; immerhin sollte er mit einem entlastenden Gegenkolben verbunden sein.

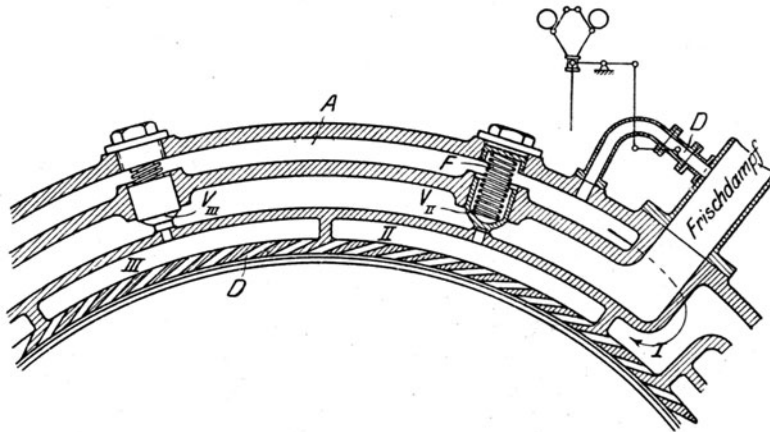


Abb. 488. Selbstätige Gruppenventile mit abgestimmten Federn.

Eine hierher gehörende, aber verlassene Lösung hat Stumpf im Schweiz. Pat. Nr. 25438 (Abb. 488) beschrieben. Die Düsen sind in Gruppen I, II, III, . . . geteilt und erhalten Frischdampf durch die Ventile V_{II}, V_{III} . . . Auf diesen lastet die durch Drosselklappe D verminderte Dampfpressung und der Druck je einer Spiralfeder, während der Volldruck sie von unten emporzuheben strebt. Beim Anlassen herrscht im Raume A Atmosphärendruck, und der Frischdampf ist imstande, alle Ventile anzuheben. Wird die Turbine im Betriebe entlastet, so läßt der Regler Dampf in den Raum A zu, der im Verein mit den auf verschiedene Kraft abgestimmten Federn die Ventile der Reihe nach schließt. Zum Schluß bleiben nur die Düsen im Sektor I offen, deren Zahl genügt, die Turbine im Leerlauf anzutreiben. Die Vorrichtung leidet an dem Mangel, daß entweder Klemmungen das Spiel der Kolben stören, oder bei freier Beweglichkeit Undichheiten auftreten.

Bei mehrstufigen Turbinen müßte jede Leitvorrichtung nach bestimmtem Gesetz durch den Regler beeinflußt werden. Vorschläge dieser Art hat Schulz in zahlreichen Patenten beschrieben, die mittlerweile teilweise zur Ausführung gelangt sind, wenn auch bloß für Handeinstellung.

Die verwickelte Konstruktion dieser Anordnungen hat den Dampfturbinenbau gezwungen, sich mit der Einzelregelung der ersten Druckstufe zu begnügen, wie insbesondere bei den Turbinen der Allgemeinen Elektrizitätsgesellschaft und der General Electric Company beschrieben werden wird.

Bei der Mehrzahl der Turbinensysteme treffen wir **Regelung durch bloßes Dampfdrosseln** an, wodurch freilich ein Teil der Arbeitsfähigkeit des Dampfes von vornherein preisgegeben wird. Wie hoch dieser Betrag ist, kann an Hand der Entropiedarstellung (Abb. 489) beurteilt werden. A_1 sei der Ausgangspunkt bei voller Leistung; $H_1 = i_1 - i'_{k_1}$ das Wärmegefälle der idealen Turbine. Drosseln wir auf den kleineren Druck p_2 ab, so ist der Zustand in der Dampfkammer, B_2 als Schnittpunkt der Linie $i_1 =$ konst. und $p_2 =$ konst., bestimmt. Das theoretische Gefälle ist $H_2 = i_1 - i'_{k_2}$, und der Verlust $H_z = H_1 - H_2 = i'_{2k} - i'_{1k}$. Bedeutet $A_0 B_0 = \Delta s$ die beim Drosseln erlittene Entropievermehrung, so ist

$$H_z = \Delta s \, T_k,$$

und dieses Ergebnis ist eine Folge des Satzes von der Vermehrung der Entropie, konnte daher unmittelbar angeschrieben werden.

Der theoretische Verlust in Hundertteilen des ungedrosselten Gefälles, d. h. der Wert

$$\zeta = \frac{H_z}{H_1},$$

ist in Abb. 489a für 15 at abs. Anfangsdruck 0,1 Atm. Gegendruck durch Linie 1 für gesättigten Anfangszustand, durch Linie 2 für 300° C Anfangstemperatur veranschaulicht. Als Leerlaufdruck wurde 1 at abs. und die Leistung mit dem Druck linear veränderlich vorausgesetzt. Bei halber Belastung beträgt der Verlust 10—12 v. H.

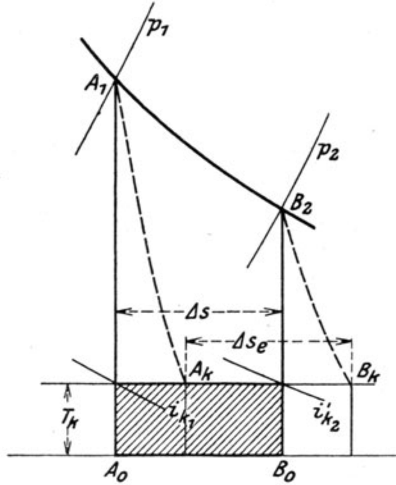


Abb. 489.
Entropievermehrung beim Drosseln.

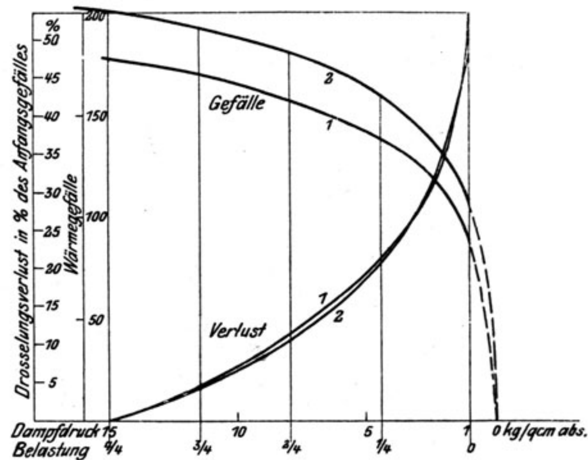


Abb. 489a.
Arbeitsverlust beim Drosseln.

Der praktische Betrag des Drosselungsverlustes wurde von der Allgemeinen Elektrizitätsgesellschaft, Berlin, an einer 3000 kW-Turbine im Vergleich mit der Einzeldüsenregelung der ersten Stufe durch den Versuch ermittelt. Der Mehrverbrauch für die kW-st bei halber Last gegenüber der vollen Last stellte sich wie folgt heraus:

α) Bei idealer Regelung (d. h. bei Abschließung einer Düse nach der anderen) vernachlässigbar.

β) Bei gruppenweisem Schließen der Düsen . . . . rd. 7,5 v. H.

γ) Bei ganz geöffneten Düsen und bloßer Drosselung in fast genauer Übereinstimmung mit dem theoretischen Werte . . . . rd. 12,1 v. H.

Vielstufige Turbinen anderer Bauarten zeigen bei einfacher Drosselung und halber Last einen Mehrverbrauch von bis zu 15—17 v. H. gegenüber der Vollast.

Es kommt auf die näheren Umstände des Betriebes an, wie stark die Unterschiede der Drosselung gegenüber der Einzelregelung der ersten Stufe ins Gewicht fallen.

Überlastungsventile.

Sowohl bei der Düsen- wie noch mehr bei der Drosselregelung ist der Dampfverbrauch für die PS-st bei der Höchsleistung am kleinsten. Es wäre aber erwünscht, ähnlich wie bei der Dampfmaschine den kleinsten Verbrauch für die Normalleistung auszunützen und bei der Höchstleistung eher eine kleine Einbuße zuzulassen. Dies wird durch die Überlastungsventile erzielt, die heute meist vom Regler aus, in seiner tiefsten Stellung, betätigt werden, früher hingegen durch den steigenden Druck einer Zwischenstufe ausgelöst wurden. Ist die erste Stufe vollbeaufschlagt, so kann eine Mehrleistung nur durch Dampfzufuhr zu einer der nächstfolgenden erzielt werden. Der Rückstau, der dadurch in den vorausgehenden Stufen erzeugt wird und der sich in ähnlicher Weise bei

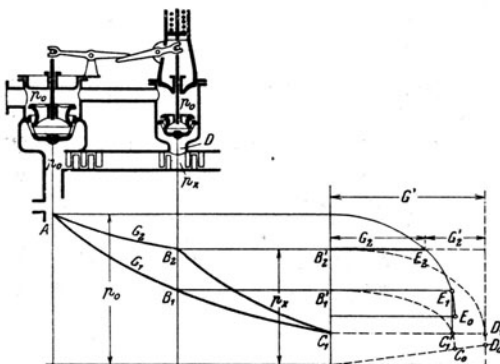


Abb. 490. Theorie der Überlastventile.

Schiffsturbinen beim „Überbrücken“ von Hochdruckstufen einstellt, kann wie folgt theoretisch ermittelt werden.

Wenn das Hauptventil A (Abb. 490) den Einlaßquerschnitt ganz geöffnet hat, so daß vor dem 1. Leitrad der Volldruck p_0 herrscht, wird durch sein weiteres Steigen das Überlastungsventil B angehoben, dessen Hub zu einer bestimmten Zeit $= y$ sei. Die Druckverteilung vor der Eröffnung des Überlastventiles sei $A_1 B_1 C_1$, und die Wagerechte $B_1' E_1$ schneidet auf der zur Hochdruckgruppe gehörenden Ellipse E_0 die Dampfmenge G_1 heraus. Diese findet sich auch auf der für den Rest der Turbine gültigen Ellipse C_0 in der Strecke $C_1 C_1'$ vor. Dem vorläufig frei anzunehmenden neuen Zwischendruck p_x entspricht auf Ellipse E_0 die verringerte Dampfmenge $G_2 = B_2' E_2$; anderseits gilt für den Rest der Turbine die zu C_0 ähnlich gelegene vergrößerte Ellipse von D_0 aus, und auf dieser schneidet die Wagerechte durch den Endwert das neue Gesamtgewicht $G' = C_1 D_1$ aus. Das neue Überlastventil führt mithin die Menge $G' - G_2 = G_2'$ zu, aus der sich mit dem Überdruck $p_0 - p_x$ der freigegebene (oder freizugebende) Querschnitt berechnet. Indem man zu einigen Drücken p_x den Querschnitt und Ventilhub y rechnet, kann auch umgekehrt das zu einem y gehörende p_x angegeben werden. Aus den Drücken werden unter Annahme geeigneter Wirkungsgrade die Leistungen berechnet, wobei auf die Mischung der Dampfmengen G_2 und G_2' (die, falls die kinetische Energie vernachlässigt wird, den Wärmeinhalt des Anfangszustandes i_0 mitführt) im Raume D zu achten ist.

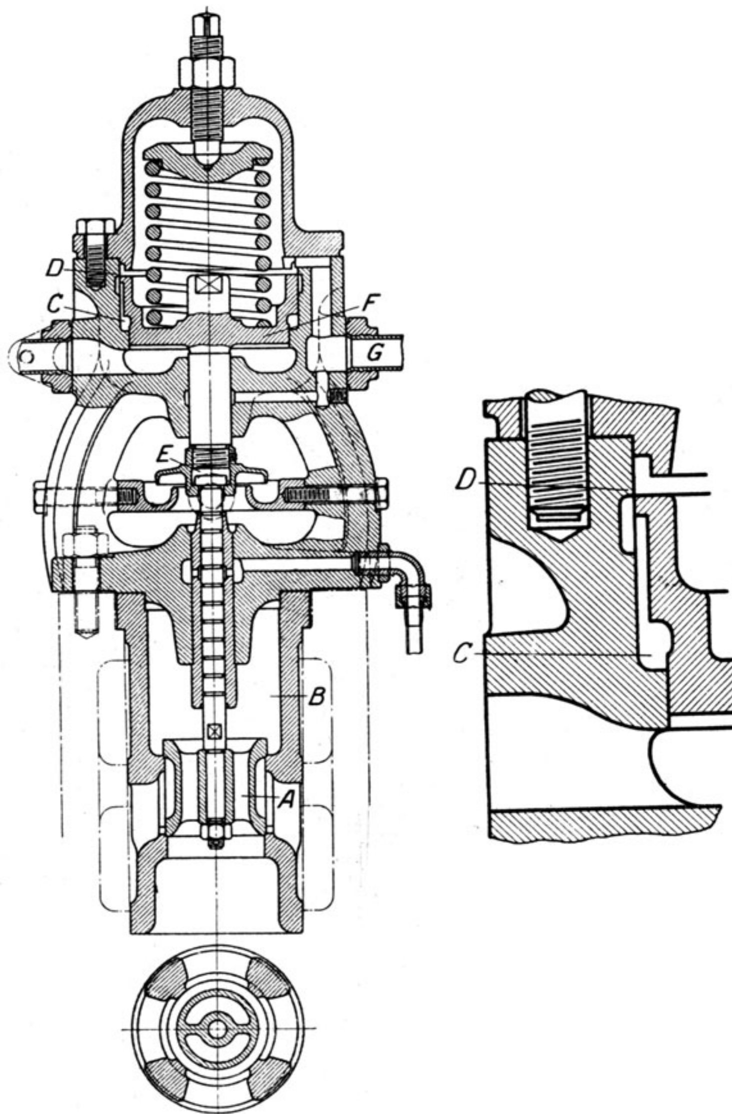


Abb. 491. Ruckweise öffnendes Überlastventil.

Obwohl heute seltener ausgeführt, verdienen die **Überlastventile mit sprungweiser Bewegung** als wichtige Übergangsform Erwähnung. Wechselt die Leistung häufiger zwischen der Normalen und einer kleinen Überlast, so muß das oben beschriebene Ventil ebenso häufig einen ganz kleinen Querschnitt öffnen, und wieder schließen, wobei der Dampf im engen Schlitz zwischen den Sitzen leicht Verschleiß verursacht. Diesem Übelstand wird begegnet durch die früher von Brown, Broveri & Cie.[1]) verwendete Steuerung Abb. 491. Das Zusatzventil A wird durch Kolben F angehoben, sobald der auf die Unterfläche des Kolbens wirkende Öldruck eine durch den Regler eingestellte Höhe überschreitet. Der im Raume B sich hierauf einstellende, auf die Spindel wirkende höhere Überdruck schiebt nun das Ventil in seine oberste Lage, zu welchem Behufe in der Kupplung zwischen Kolben und Spindel bei E ein hinreichendes Spiel vorgesehen ist. Da die Dampfleistung hierdurch einen zu großen Zuwachs erfahren haben wird, muß der Regler steigen und mittels des Hauptventiles etwas mehr drosseln. Das Zusatzsentil verharrt indessen in der höchsten Stellung bis die Leistung auf einen erheblich kleineren Wert gesunken ist als bei seinem Anheben. Dies wird durch die Abstufung des Kraftkolbens erreicht, der in veinem unteren Teil etwas Spiel hat, so daß in der unteren Lage das hier austretende Öl durch die

[1]) Schweiz. Bauztg. 1915, Bd. 65, S. 2.

Erweiterung C an der Kante D vorbei in den Ablauf G entweichen kann. Für das Anheben kommt also nur die untere Kolbenfläche in Betracht. In der oberen Lage schließt der Oberteil bei D dicht ab, und der Öldruck wirkt auf die Kolbenfläche F und die Ringfläche C. Soll der Kolben sinken, so muß mithin der Öldruck wesentlich kleiner werden als beim Anheben. Ist dann D wieder frei, so überwiegt die Federkraft stark und schließt das Ventil rasch.

100. Die Regler.

In erster Linie kommen die modernen raschlaufenden Federregulatoren in Betracht, die vor den Gewichtsregelatoren den Vorzug großer Arbeitsfähigkeit und kleiner Massenträgheit besitzen.

Beharrungsregler eignen sich gut in Fällen, wo eine starke periodische Rückwirkung auftritt, die aber bei Dampfturbinen im allgemeinen als ausgeschaltet gelten kann. Außerdem kommt ihnen die Eigenschaft zu, negative Ungleichförmigkeitsgrade, d. h. bei Vollbelastung höhere Umlaufzahlen als im Leerlauf zuzulassen, für die indessen vorläufig kein Bedarf zu bestehen scheint.

Eine leichte schwingende Bewegung des Regulators und seines Gestänges ist sehr vorteilhaft, um den Sprung zwischen der „Reibung der Ruhe" und der „Reibung der Bewegung" zu beseitigen. Ferner wird die Wirkung der Reibung infolge des Hin- und Herschwingens der Gelenke derjenige einer Ölbremse ähnlich, d. h. die Verschiebungsgeschwindigkeit der Reglermuffe unter dem Einflusse einer unveränderlichen Kraft wird der Kraft angenähert verhältnisgleich. Nach Parsons' Vorgang wird die schwingende Bewegung von vielen Firmen künstlich (z. B. durch Exzenterbewegung) hervorgerufen. Die nie ganz fehlende Erschütterung der Turbine dürfte der künstlichen Schwingung häufig gleichwertig sein.

Die unbestrittenen Vorzüge der Federregler dürfen uns nicht verleiten zu glauben, daß wir es mit einem „idealen", d. h. massenlosen Regler zu tun haben, der, wie man vielfach glaubt, nach Art eines „Tachometers" stets die der momentanen Geschwindigkeit entsprechende Gleichgewichtslage inne hat Ebensowenig Geltung haben Aussprüche wie: eine Ölbremse ist unbedingt schädlich u. ä. Diese viel verbreiteten Unklarheiten haben den Verfasser schon vor Jahren veranlaßt

Versuche über die Wirkung der Ölbremse

zu veranstalten. Die 150pferdige Kolbenmaschine des Maschinenlaboratoriums an der Eidgen. Techn. Hochschule wurde mit dem Hoch- und Mitteldruckzylinder als Verbundmaschine betrieben und die Sulzer-Steuerung der Hochdruckseite durch einen Federregler mit Schneidenlagerung beeinflußt. War die Ölbremse beseitigt, so trat nach einer Störung durch rasches Herunterziehen des Reglerhebels unaufhörliches Auf- und Abschwingen ein, wie die Darstellung der Winkelgeschwindigkeit als Funktion der Zeit im Tachogramm (Abb. 492) lehrt. Durch Einschaltung der Ölbremse konnte in bekannter Weise die Schwingung beseitigt, sichere Konvergenz gegen einen neuen Beharrungszustand, kurz: die **„Stabilität der Regelung"** erzielt werden. Der Verlauf der Geschwindigkeitsschwankung entsprach dem in Abb. 493 dargestellten Tachogramm, da indes einem anderen Regulator angehört. Nun wurde die Ölbremse abermals entfernt, statt ihrer auf der Verstellungswelle der Steuerung

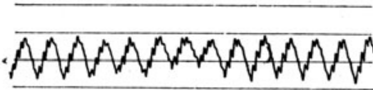


Abb. 492. Schwanken des zu reibungsfreien Reglers ohne Ölbremse.

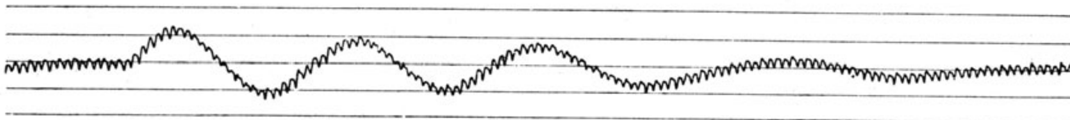


Abb. 493. Beruhigung der Schwankung mittels Ölbremse.

eine mit Kupferbacken versehene Klemme aufgebracht, mittels der eine sehr gleichmäßige (fast keinen Unterschied zwischen Ruhe und Bewegung aufweisende) Reibungskraft eingeschaltet werden konnte.

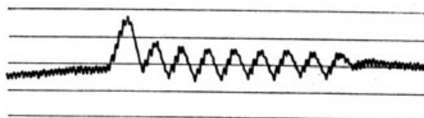


Abb. 494.

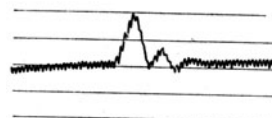


Abb. 495.

Beruhigung der Schwankung mittels künstlicher Gelenkreibung.

Bei mäßigem Anziehen der Klemme entstand das Tachogramm (Abb. 494), das unter abnehmenden Schwankungen den neuen Beharrungszustand erreicht. Bei etwas schärferem Anziehen entstand Tachogramm, Abb. 495, mit bloß noch drei Wellenperioden.

Wir können auf Grund dieser Ergebnisse folgendes feststellen:

1. Versuch und Theorie beweisen übereinstimmend, daß bei Abwesenheit aller Reibung ein sonst statischer, in jeder Beziehung einwandfreier, direkt wirkender Regler unaufhörliche Schwankungen, d. h. instabile Regelung ergibt.

2. Der Grund hierfür liegt in der lebendigen Kraft der schwingenden Reglermassen. Zur Abhilfe muß eine Reibungskraft eingeschaltet werden, die diese lebendige Kraft allmählich vernichtet.

3. Es ist ziemlich gleichgültig, ob diese schwingungsdämpfende Kraft durch eine Ölbremse oder durch die Gelenkreibung (oder künstliche Klemmung) eingeführt wird.

4. Ist genügend Gelenkreibung im Regler oder in der Zustellung vorhanden, dann (und nur dann) ist eine Ölbremse überflüssig, ja schädlich. In allen anderen Fällen ist die Ölbremse nicht bloß unschädlich, sondern unentbehrlich.

5. Der Größenbetrag der erforderlichen Reibung hängt nicht bloß vom Regler ab, sondern vor allem **von der Größe der Schwungmassen. Je größer diese sind, desto kleiner darf die dämpfende Kraft sein,** daher in solchen Fällen die Eigenreibung des Reglers meist auszureichen pflegt.

Auf eine zahlenmäßige Bestimmung der erforderlichen Größe der dämpfenden Kraft einzutreten, ist hier um so weniger der Ort, als die Regulatortheorie noch nicht in der Lage war, die Vielfältigkeit der auftretenden Faktoren in der Rechnung hinlänglich einfach und genau zu berücksichtigen.

6. Bei mittelbar wirkenden Reglern ist bemerkenswerterweise die Möglichkeit vorhanden, **den schädlichen Einfluß der Reglermassen nahezu ganz zu beseitigen,** indem man den Ausschlag des Reglers auf einen sehr kleinen Betrag einschränkt, so daß Ölbremse und Gelenkreibung gleicherweise überflüssig werden.

101. Die Kraftgetriebe der mittelbar wirkenden Regler[1]).

Das „Kraftgetriebe" ist ein zwischen den Regler und das Dampfabschließungsorgan eingeschaltetes Getriebe, das Energie in Dampf oder Preßöl aufnimmt und zur Überwindung der für unmittelbare Wirkung zu großen Widerstände verwendet[2]).

a) Unbrauchbarkeit des einfachen Kraftgetriebes ohne „Rückführung".

In Abb. 496 ist als Kraftgetriebe ein mit Drucköl von der Steuerung D betätigter Kolben E dargestellt, dessen Kolbenstange G zum Dampfdrosselorgan führt. Indem die Reglermuffe A bei einer Entlastung der Turbine steigt, führt Schieber D Druckflüssigkeit der unteren Seite des Kraftkolbens F zu, der ebenfalls steigen und den Dampfzufluß hemmen soll. Bis zum Augenblicke, wo die neue Umfangskraft der Turbine der Last gleich geworden ist, nimmt die Geschwindigkeit zu, und der Regler ist aus der Mittellage A nach oben weit ausgelenkt. Es findet also fortwährend Zufluß zur Unterseite des Kraftkolbens statt, und die Umfangskraft wird nutzloserweise so lange verkleinert, bis die nunmehr abnehmende Umlaufzahl den Regler in die Mittellage zurückzwingt. Von einem Stehenbleiben daselbst ist aber keine Rede, da die Umfangskraft viel zu stark verkleinert worden ist. Er sinkt unter die Mittellage und steuert den Kraftkolben um. Die nun folgende Epoche ist mit einer ebenso starken Überregulierung im Sinne der Kraftvergrößerung verbunden, wie vorhin im Sinne der Verringerung.

Das Getriebe bleibt mithin in fortwährender Schwankung und ist in dieser Form unbrauchbar.

---

[1]) Die 2. Auflage von Tolle, Die Regelung der Kraftmaschinen, enthält eine sehr gründliche Behandlung aller bekannten Reglergetriebe. Wir glaubten die skizzenhaften Mitteilungen des Textes aus der IV. Auflage als kurze Übersicht beibehalten zu sollen, verweisen aber auf die vertiefte Darstellung des erwähnten Lehrbuches.

[2]) In der Literatur wird allgemein die Erfindung des vielfach „Servomotor" genannten Kraftgetriebes Farcot (Le servo-moteur ou moteur asservi. Paris 1873) zugeschrieben, der in der Tat viel zu seiner Ausbildung und Verbreitung beigetragen hat. Ich verdanke Herrn Prof. Dr. A. Tobler (Zürich) den Hinweis, daß die Priorität der Erfindung Andr. B. Brown zukommt, der im Engl. Patent Nr. 2253 v. J. 1871 die Hauptarten der Servomotoren unzweideutig beschrieben und illustriert hat. Neben Brown und Farcot verdanken wir der verdienstvollen Untersuchung von Lincke: Das mechanische Relais, Z. Ver. deutsch. Ing. 1879, S. 510, wertvolle Beiträge zur Konstruktion von Kraftgetrieben.

Es sind mannigfache Versuche gemacht worden, die sehr eingebürgerten Fremdbezeichnungen zu verdeutschen. Der von Lewicki vorgeschlagene Name: „Krafteinschalter" hat sich nicht behauptet; vielleicht findet „Kraftgetriebe" mehr Anklang.

b) Das einfache Kraftgetriebe mit starrer Rückführung und freiem Reglerhub.

Man kann die Schwankung beseitigen, indem man nach dem Vorbilde des „Servomotors" den festen Drehpunkt B mit dem Kraftkolben verbindet, also beweglich macht, Abb. 497. Steigt die Reglermuffe A, so bildet B zunächt einen festen Drehpunkt, Schieber D wird gesenkt und führt Druckflüssigkeit auf die untere Seite des Kolbens, der in die Höhe rückend A als festen Drehpunkt benutzt und den Steuerschieber in die Mittellage zurückführt. Steigt der Regler weiter, so wiederholt sich dasselbe Spiel.

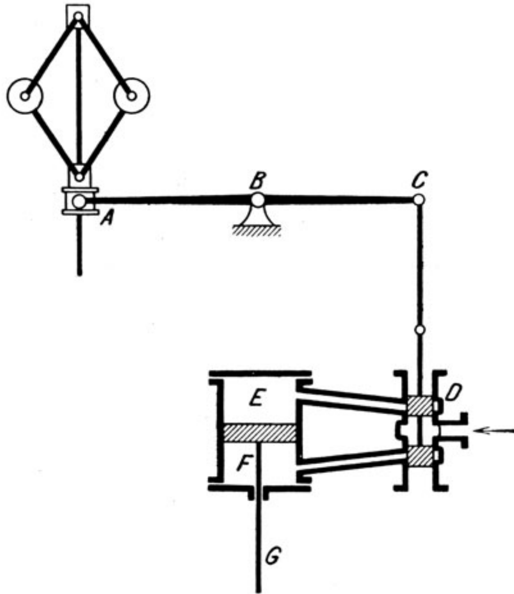


Abb. 496.
Unbrauchbare Anordnung ohne Rückführung.

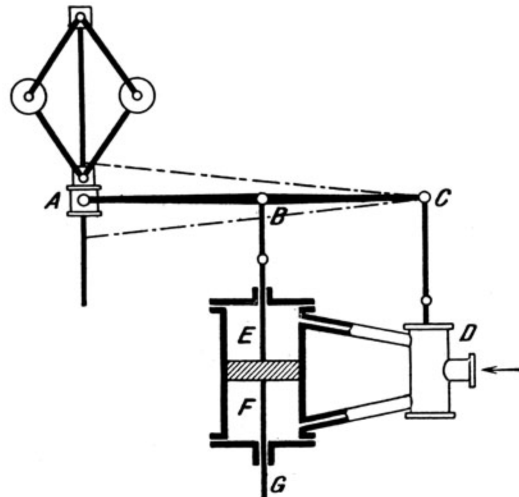


Abb. 497.
Normale Anordnung mit Rückführung.

Im Gleichgewicht muß der Schieber seine Mittelstellung C einnehmen, und die entsprechenden Lagen der Reglermuffe und des Kraftkolben-Angriffes liegen auf durch C gehenden Strahlen. Da nun jeder Reglerstellung eine bestimmte Winkelgeschwindigkeit der Turbine und jeder Kraftkolbenstellung eine bestimmte Größe der treibenden Umfangskraft entspricht, so bewirkt diese Getriebeanordnung, daß **im Beharrungszustande jeder Winkelgeschwindigkeit der Turbine eine bestimmte Leistung zugeordnet ist.**

Bei genügend weiten Steuerkanälen wird der Kraftkolben fast augenblicklich die Stellung einnehmen, die ihm der Regler „anweist"; im anderen Falle findet eine gewisse Verspätung statt, der Kraftkolben „eilt dem Regler nach", weshalb diese Getriebeanordnung auch als solche mit „Nacheilung" bezeichnet worden ist.

Offenbar muß **eine möglichst kleine „Schlußzeit" des Kraftkolbens** angestrebt werden. Im idealen Falle wird das Getriebe so wirken, als hätte der Regler das Dampfverteilungsorgan unmittelbar betätigt und als wenn dessen Widerstand auf den des kleinen Steuerschiebers verringert worden wäre.

Die Geschwindigkeit bei sich verspätendem Kolben kann infolge der großen Zähigkeit des Drucköles (innerhalb der Gültigkeit des Poiseuilleschen Gesetzes) der augenblicklichen Weite des Steuerkanales, d. h. der Auslenkung des Schiebers aus seiner Mittellage verhältnisgleich gesetzt werden. Unter dieser Voraussetzung wurden die Stabilitätsverhältnisse der Regelung vom Verfasser untersucht[1]) und u. a. festgestellt, daß bei genügend kleiner Reglermasse (d. h. raschlaufenden Federreglern) die Wirkung der Verspätung dieselbe ist wie die der einfachen Ölbremse beim direktwirkenden Regler. Die Verspätung ruft demnach eine größere maximale Geschwindigkeitsschwankung hervor als bei augenblicklichem Schluß, gefährdet aber die Stabilität nicht. Bauersfeld hat in einer bemerkenswerten Studie[2]) den Zahlenbetrag der Geschwindigkeitsabweichung in einigen Sonderfällen ermittelt und in anschaulicher Weise die Übereinanderlagerung der Eigenschwingung des mit Masse behafteten Reglers über den Geschwindigkeitsverlauf, der dem idealen Regler entspricht, dargestellt. Die von Bauersfeld gewählte Formulierung, daß die Eigenschwingungsdauer des Reglers gegen die Periode der Geschwindigkeitsänderung der Maschine klein sein soll, stimmt überein mit den Forderungen: kleine Reglermasse bei großer Energie und große Schwungmassen an der Maschine. Unter Umständen hilft eine Verzögerung der Getriebegeschwindigkeit, allein auf Kosten der maximalen Geschwindigkeitsschwankung.

---

[1]) Schweiz. Bauzeitung, Bd. XXII, 1893, Nr. 27—20, und Bd. XXIII, 1894, Nr. 17—18.
[2]) Die autom. Regulierung der Turbinen, Berlin 1905.

c) Kraftgetriebe mit beschränktem Reglerhub.

Bei diesen Getrieben wird der Hub des Reglers auf dasjenige Maß beschränkt, das erforderlich ist, um von einer Mittellage aus das Steuerorgan im einen und dem anderen Sinne ganz zu öffnen. Bei feiner Ausbildung des Steuerorganes und genügender Energie des Reglers kann der Hub bis auf wenige Millimeter beschränkt werden. Hierdurch wird **der Einfluß der Reglermasse nahezu vollständig beseitigt, und falls der Kraftkolben genügend rasch verstellt, liegt eine ideale Regulierung vor.**

Eine Anordnung dieser Art hat zuerst Proell[1]) beschrieben, doch hat sich sein Getriebe infolge der wenig vorteilhaften Reibkuppelung nur wenig verbreitet.

Die Einrichtung des Getriebes ist in Abb. 498 dargestellt, wobei man indessen den Kolben H in seinem Zylinder starr eingeklemmt vorauszusetzen hat. Der Hub des Reglers ist durch den Anschlag R begrenzt. Bei steigender Geschwindigkeit wird Schieber G gesenkt, Kolben E gehoben und Feder B zusammengedrückt, so daß der Regler alsbald in die Mittellage zurückgebracht wird, und der Kraftkolben zum Stillstand kommt. Die Geschwindigkeitszunahme des Reglers ist dem Federdrucke verhältnisgleich, dieser dem Hube des Kraftkolbens, und dieser hinwieder bestimmt eindeutig die Größe der Umfangskraft. Das Getriebe besitzt mithin die unter b) hervorgehobene Eigenschaft, daß die **Größen der Geschwindigkeit und der Umfangskraft einander eindeutig zugeordnet sind.** Man wird also eine „Ungleichförmigkeit" zwischen Vollast und Leerlauf erhalten, die aber nicht mehr durch den Regler, sondern durch die Hilfsfeder B bedingt ist.

Wir erkennen, daß der Umstand, **ob der Regler an sich stabil oder labil ist,** hier (bei hinlänglich kleinem Hube) überhaupt **nicht in Betracht kommt,** wir benutzen nur seine Stellkraft.

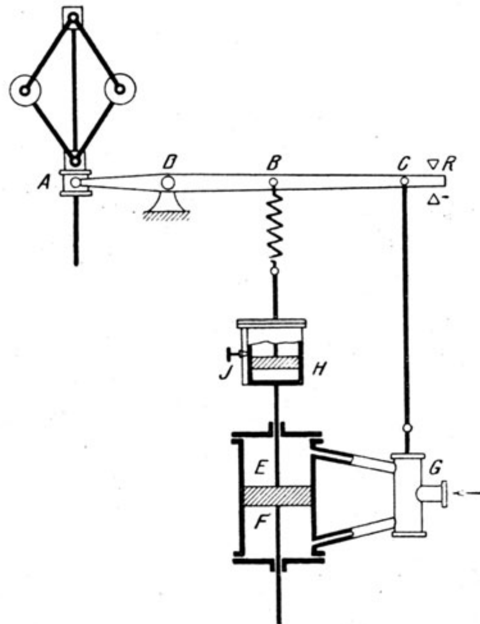


Abb. 498. Kraftgetriebe mit beschränktem Reglerhub und Isodrom-Einrichtung.

d) Isodrome Regulierung mittels nachgiebiger Rückführung.

Um die Geschwindigkeit des neuen Beharrungszustandes auf den alten Wert zurückzubringen, benutzt man nach dem Vorgange von Thury, dem sich die A.-G. Rieter in Winterthur anschloß, bei beschränktem Reglerhube das in Abb. 498 dargestellte Getriebe. Zwischen die Proellsche Feder B und den Kraftkolben ist eine Ölbremse eingeschaltet, deren Kolben H mittels Ventil J auf einen beliebigen Grad der Beweglichkeit eingestellt wird. Bei plötzlicher Entlastung der Maschine wird der Kraftkolben steigen. Um den Vorgang besser zu überblicken, denken wir uns vorerst den Kolben H ganz festgeklemmt, bis nach Zusammendrückung der Feder B vollkommenes Gleichgewicht eingetreten ist. Nun erst werde Ventil J gelockert, so daß die Feder sich langsam ausdehnen kann. Sobald der Federdruck abnimmt, wird die Hubkraft des Reglers das Steuerventil G abermals senken, der Kraftkolben sich also heben und hierdurch „überregulieren", so daß die Winkelgeschwindigkeit der Turbine abzunehmen anfängt. Dies wird andauern, bis die Feder B ganz oder fast entspannt ist, und die Geschwindigkeit so weit verringert ist, daß der Regler unter die Mittellage sinkt, worauf der Kraftkolben den Dampfzufluß wieder öffnet und nach wenigen Schwankungen (im günstigsten Falle bloß einer) Gleichgewicht bei ganz entspannter Feder B, also bei der ursprünglichen Winkelgeschwindigkeit eintritt. Die durch J ermöglichte Nachgiebigkeit der Rückführung darf indessen ein bestimmtes Maß nicht überschreiten.

Verlegung der Isodromvorrichtung in den Regulator. Jeder, insbesondere aber jeder Federregler kann so eingerichtet werden, daß seine bleibende Ungleichförmigkeit $= 0$ oder sogar negativ wird. Als Beispiel führen wir in Abb. 498a den Chorlton-Whitehead-Regler an. Der Regler ist im wesentlichen von gleicher Beschaffenheit wie der bekannte Hartung-Regler; das Besondere ist die Trennung der einen Feder (besser wäre beider) durch den möglichst reibungsfrei eingeschliffenen Kolben C. Die frei gedachten Federn A, B bilden mit D zusammen einen astatischen Regler (oder einen mit negativer Ungleichförmigkeit). Das Gehäuse ist mit Öl gefüllt, so daß Kolben C eine durch den im Grundriß

[1]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1884, S. 457.

sichtbaren Stift einstellbare Bremse bildet. Bei plötzlicher Entlastung wird infolge raschen Ausschlages zunächst Feder *A* und *D* zusammengedrückt und der Regler verhält sich wie ein stark statischer. Darauf gibt Kolben *C* allmählich nach und die Umlaufszahl wird mit geringer Überregulierung auf den ursprünglichen (oder einen kleinern) Betrag zurückgeführt.

e) Negative Ungleichförmigkeit.

Für manche Zwecke der Elektrotechnik hätte ein negativer Ungleichförmigkeitsgrad, d. h. ein Betrieb mit niederer Umdrehungszahl im Leerlauf und höherer Geschwindigkeit bei voller Belastung, praktische Bedeutung. Herr Dr. Lehmann (Belfort) teilte mir mit, daß an verschiedenen Orten Asynchron-Generatoren, die eine solche Regelung erheischen, sich bereits in praktischer Verwendung befanden.

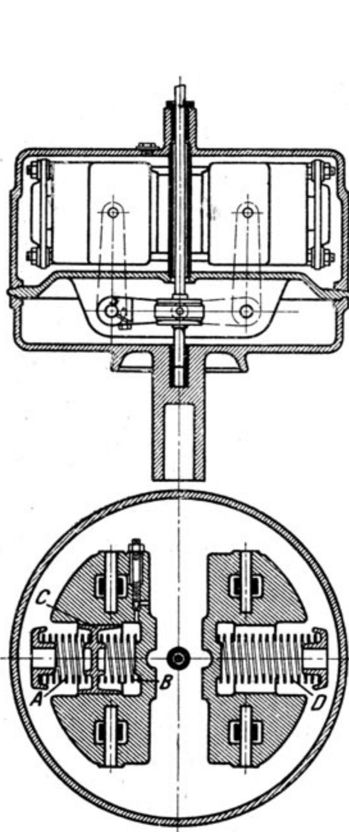


Abb. 498 a.
Isodromregler von Chorlton.

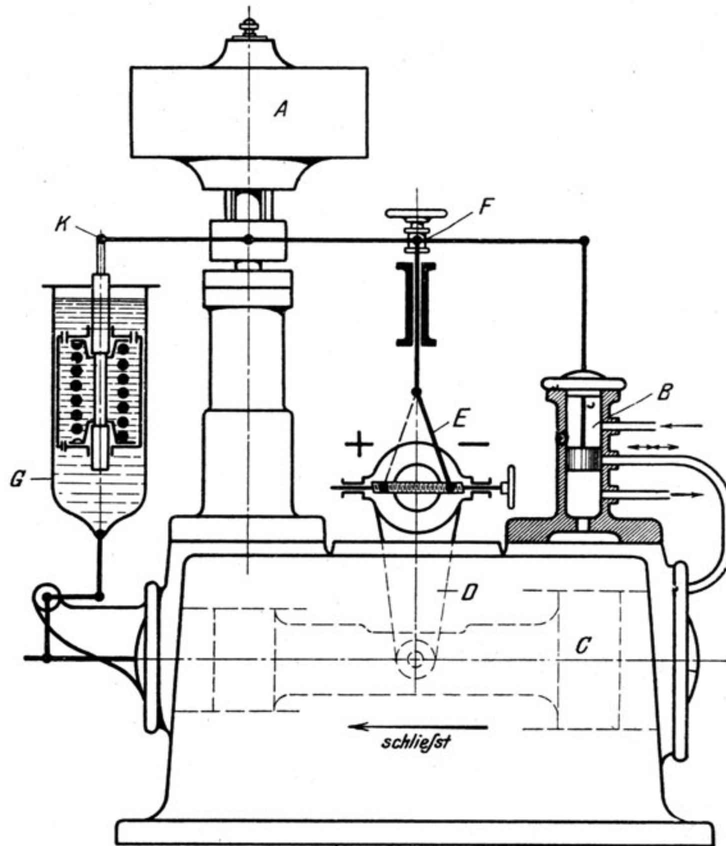


Abb. 499. Kraftgetriebe von Escher, Wyss & Cie. auf negative Ungleichförmigkeit eingestellt.

Die Umstände, unter denen eine negative Ungleichförmigkeit möglich ist, sind zwar durch die Theorie aufgeklärt[1]), aber es fehlte an einer Bestätigung durch die praktische Ausführung. Es ist daher dankenswert, daß die A.-G. Escher-Wyss & Cie. in Zürich an dem in Abb. 499 dargestellten hydraulischen Kraftgetriebe den Beweis erbracht hat, daß diese Regelung gelingt. Der steigende Regler *A* bewirkt mittels Steuerventiles *B* und des Kraftkolbens *C*, auf dessen linker Seite stets ein Überdruck vorhanden ist, den Schluß des Wasserzuflusses. Die Rückführung erfolgt mittels Hebels *D* und Stange *E*, die auf Gelenk *F* einwirkt. Außerdem ist in der angedeuteten Weise eine Ölbremse *G* mit dem Kraftkolben verbunden, deren Konstruktion aus Abb. 500 erhellt. Kolben *H* folgt dem Öldrucke und drückt Feder *J* zusammen, die durch Absätze an den Hülsen Zug oder Druck auf den Angriffspunkt *K* überträgt. Das Öl entweicht daraufhin durch die Regulieröffnung *L* und die Feder streckt sich langsam auf die ursprüngliche Länge aus. Für gewöhnlich nimmt Stange *E* die punktierte Lage ein, was positiver Ungleichförmigkeit entspricht. In der neuen Einstellung spielt sich der Regelvorgang wie folgt ab: Bei einer Entlastung muß der Regler zunächst steigen. *F* bildet einen Fixpunkt, Ventil *B* geht nach abwärts, der Kraftkolben schließt. Die Bremse, die nach abwärts gezogen wird, nimmt den

[1]) Isodrome Regelung und negativer Ungleichförmigkeitsgrad sind, wie erwähnt, mit Hilfe eines Beharrungsreglers erreichbar, wie Verfasser in der Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1899, S. 506 nachgewiesen hat.

Regulator mit und trachtet das Ventil B zu schließen, dem wirkt aber die Senkung von F mittels Stange E entgegen, so daß der Schluß verspätet erfolgt. Die Umfangskraft wurde also zu stark verkleinert die Geschwindigkeit sinkt unter den früheren Wert hinab, wie gefordert wurde. Beim Leerlauf wird

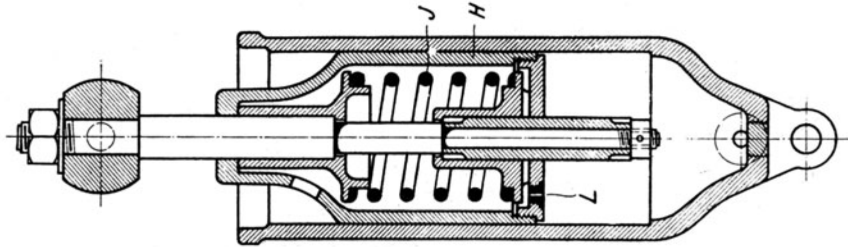


Abb. 500. Ölbremse zu Abb. 499.

der Regler zum Schluß in der tiefsten und bei Vollbelastung in der höchsten Lage stehen. Die Hauptfrage ist, ob der allmähliche Ausgleich der Federspannung stabil, d. h. ohne nachträgliche Störung des Gleichgewichts vor sich geht.

Die geprüfte Turbine liefert bei 3,1 m Gefälle 75 PS Normalleistung, macht 94 Uml./min und treibt mittels Winkelrädern, Vorgelege und Riemen eine Dynamomaschine an. Das auf dem Vorgelege befindliche Schwungrad besitzt ein Schwungmoment $GD^2 = 2500$ kg/m² bei 280 Uml./min. Bei den von Ingenieur Gag geleiteten Versuchen wurden Ent- und Belastungen im Betrage von 60—75 PS vorgenommen. Der Federregler besitzt bei 175 kg Hülsenkraft auf 30 mm Hub 11,7 v. H. Ungleichförmigkeit. Der negative Hub der Rückführung war 7,5 mm, daher wurden vom Pendelhub 17 mm „nützlich" verwertet. Die Feder der Ölbremse wirkt bei voller Zusammendrückung mit 60 kg; sie muß, wie aus der beschriebenen Funktion hervorgeht, mit ziemlicher Kraft eingreifen. Die Tachogramme (Abb. 501)

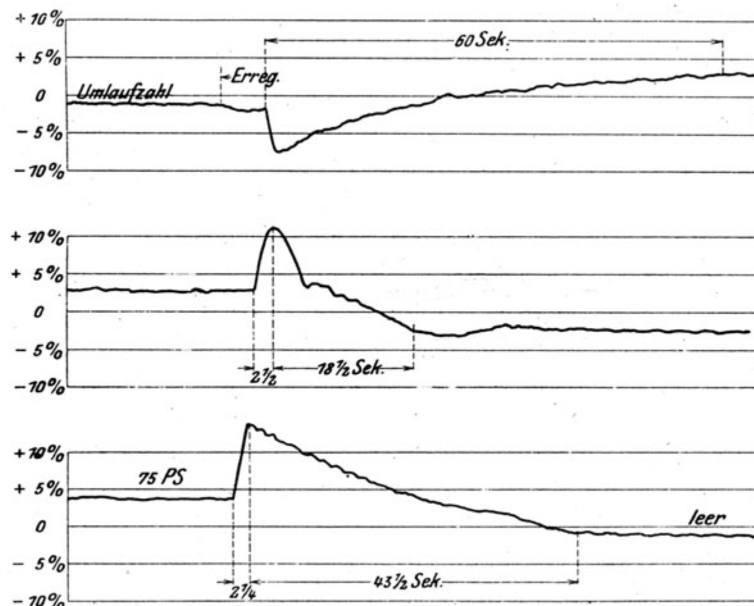


Abb. 501. Regelung mit negativer Ungleichförmigkeit.

zeigen der Reihe nach eine Belastung von 0 auf 70 PS und eine Entlastung im gleichen Betrage. Das dritte Diagramm ist eine Entlastung von 75 PS mit stärker verengter Kataraktöffnung. Die Regulierdauer in Sekunden ist eingeschrieben. Man erkennt, daß die „verkehrte" Regelung in vollem Umfange gelungen ist, und daß die **Umlaufzahl der Vollbelastung um rd. 5 v. H. größer ist als im Leerlauf.** Die größte Geschwindigkeitsabweichung vom Anfangszustand war in den beiden ersten Fällen allerdings rd. 5 bis 8 v. H.

f) Die Gestalt der Kraftkurve.

Bei positiver Ungleichförmigkeit und in allen Punkten gleich stabilem Regulator ist theoretisch für die als Funktion des Reglerhubes aufgetragene Leistung im Beharrungszustande, d. h. für die sogenannte „Kraftkurve", die gerade Linie am vor-

teilhaftesten. Diese oder eine andere vorgeschriebene Form kann bei Drosselregelung durch die Übersetzung vom Regler zum Verteilungsorgan oder besser durch geeignete Formgebung der Durchlaßquerschnitte leicht erreicht werden.

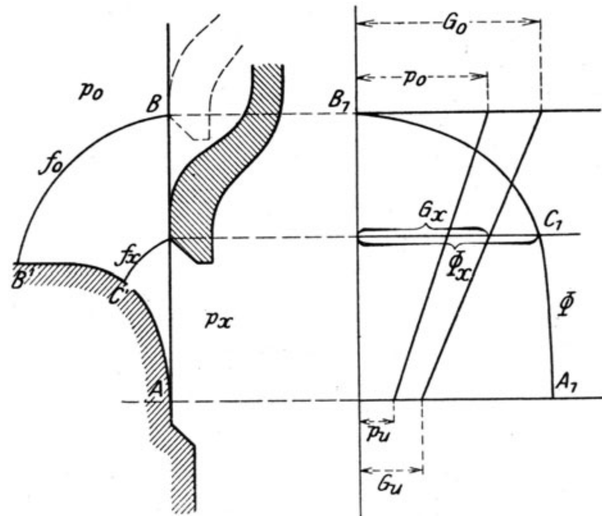


Abb. 502. Drosselventil mit gerader Kraftkurve.

Es sei in Abb. 502 AB der Hub des Verteilungsorgans. Soll die Leistung linear mit dem Hube zunehmen, so muß erfahrungsgemäß die sekundliche Gesamtdampfmenge auch linear vom Leerlaufswert G_u bis zur Vollast G_0 zunehmen. Das gleiche ist der Fall mit dem Druck p_u bis p_0, während vor dem Ventil p_0 unverändert beibehalten wird. Das sekundlich für 1 Quadratmeter unter dem Überdruck $p_0 - p_x$ durchströmende Gewicht Φ_x sei durch Kurve $A_1C_1B_1$ (z. B. nach der Bendemannschen Formel) dargestellt. Für die Zwischenlage C_1 ist

$$G_x = f_x \Phi_x,$$

woraus man f_x zu rechnen und danach die Begrenzungskurve $AC'B'$ auszuführen hat.

Von geschätzter Seite aus der Praxis wurde mir mitgeteilt, daß sich die geradlinige Kraftkurve nicht bewährt habe; daß aber die Regelung sofort stabil wurde, als man die Kraftkurve wie bei Dampfmaschinen anfänglich rascher steigen und dann flach werden ließ. Ob als Grund zunehmende Unstabilität des Reglers in den unteren Lagen anzusehen ist, bleibt dahingestellt.

g) Größte Geschwindigkeitsschwankung.

Die Berechnung der Geschwindigkeitsschwankung bei der Ent- und Belastung von Dampfturbinen ist ungleich schwieriger als beispielsweise bei hydraulischen Turbinen, weil die Elastizität des Treibmittels eine Ausdehnung oder Verdichtung der in der Turbine enthaltenen Dampfmenge bedingt. Das Nachfolgende will daher nur als ganz ungefähre Abschätzung der Verhältnisse angesehen werden.

α) Plötzlicher Abschluß.

Das Abschlußventil werde infolge plötzlicher Entlastung der Turbine vom Kraftgetriebe des Reglers außerordentlich rasch geschlossen. Die in der Sekunde aus der Dampfkammer abströmende Dampfmenge ist im Beharrungszustande dem Dampfdruck p in der Dampfkammer (vor dem ersten Leitrad) verhältnisgleich, d. h. $G = G_0 p/p_0$, wenn p_0 den anfänglichen Dampfdruck, G_0 die entsprechende Dampfmenge bedeuten. Wir machen die Annahme, daß dies auch während des veränderlichen Zustandes gilt, und erhalten als im Zeitelement dt abströmende Menge

$$G\,dt = G_0 \frac{p}{p_0}\,dt \qquad (1)$$

Ist V der Rauminhalt der „Dampfkammer", so kann das Gewicht ihres Dampfinhaltes unter Annahme des Näherungsgesetzes $pv = K = p_0 v_0$ durch $D = \frac{V}{v} = \frac{V}{K}\,p = \frac{V}{v_0}\frac{p}{p_0} = D_0 \frac{p}{p_0}$ ausgedrückt werden, wo D_0 das anfängliche in der Kammer eingeschlossene Dampfgewicht bedeutet. Die Abnahme desselben im Zeitelement dt muß der abfließenden Menge gleich sein; d. h. es ist

$$-\frac{D_0}{p_0}\,dp = G_0 \frac{p}{p_0}\,dt \qquad (2)$$

und wenn wir $\frac{p_0}{p} = y$; $\frac{D_0}{G_0} = a$ setzen $a\frac{dy}{dt} + y = 0$ oder integriert $\lg n\, y = -\frac{t}{a} + \text{konst.}$ . . (2a)

Für die Konstante folgt aus der Bedingung, daß für $t = 0$ $y = p/p_0 = 1$ sein muß, der Wert Null. Ist p_u der Leerlaufdruck, so ist also die Dauer der Entleerung

$$\tau = \frac{D_0}{G_0} \lg n \frac{p_0}{p_u} \qquad (3)$$

Die Geschwindigkeitszunahme ergibt sich aus der Arbeitsfähigkeit des in der Kammer und in der Turbine befindlichen Dampfgewichtes $D_0 + D_t$, die mit einem nicht stark veränderlichen Wirkungsgrade auf die Massen der Turbine übertragen wird. Man wird die abgegebene Arbeit

$$L = \left(D_0 + \frac{D_t}{2}\right) L_0 \eta_m \qquad (4)$$

setzen dürfen, unter L_0 die theoretische Leistung[1]) für 1 kg Dampf und unter η_m ein Mittelwert verstanden. Bei D_0 wird von dem zurückbleibenden Reste abgesehen, und D_t wird halbiert, weil der mittlere Zustand des Dampfes in der Turbine etwa der halben Arbeitsfähigkeit L_0 entspricht. Ist nun Θ das Massenträgheitsmoment der umlaufenden Teile, ω die Winkelgeschwindigkeit, so bildet L die Änderung der lebendigen Kraft $\frac{1}{2}\Theta\omega^2$, oder angenähert

$$L = \Theta\omega\delta\omega = \Theta\omega^2\frac{\delta\omega}{\omega} \quad \text{(4a)}$$

und die verhältnismäßige Geschwindigkeitsänderung ist

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = \frac{L}{\Theta\omega^2} \quad \text{(5)}$$

Beispielsweise wird bei einer Turbine von 1000 KW Leistung D_0 bei 10 at Anfangsdruck etwa 0,6 kg (bei knappster Anordnung des Ventiles), D_t etwa 0,75 kg und AL_0 etwa 150 kcal, woraus mit $\eta_m = 0{,}5$ und $\omega = 157$, d. h. $n = 1500$ in der Minute, und mit $\Theta = 50$ kgm sek² (mäßig geschätzt)

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = 0{,}027, \text{ d. h. } 2{,}7 \text{ v. H. folgt.}$$

Die Entleerungszeit beträgt mit $p_2 = 0{,}6$ at als Leerlaufdruck $\tau = 0{,}68$ sek.

β) Allmählicher Schluß.

In Wirklichkeit erfordert das Schließen des Einströmventiles immer eine gewisse Zeit, während der frischer Dampf aus der Leitung nachströmt. Die bis zum Erreichen des Leerlaufdruckes p_a erforderliche Zeit ist also immer größer als τ. Die Geschwindigkeitszunahme könnte leicht berechnet werden, wenn die Umfangskraft oder das treibende Moment als Funktion der Zeit bekannt wären, was indessen genau nur durch eine mühsame punktweise Differenzenrechnung ermittelt werden könnte.

Machen wir zur Abschätzung erstens die Annahme, daß das treibende Moment $\mathfrak{M}$ mit der Zeit vom Anfangswerte $\mathfrak{M}_0$ gleichmäßig abnehme und nach t_0 Sekunden gleich Null wird, so gilt der Ansatz

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0\left(1 - \frac{t}{t_0}\right) \quad \text{(6)}$$

Da aber $\Theta\frac{d\omega}{dt} = \mathfrak{M}$ ist, so liefert die Integration zwischen $t = 0$ und $t = t_0$

$$\Theta\delta\omega = \frac{\mathfrak{M}_0}{2}t_0 \quad \text{(7)}$$

d. h. die Zunahme des Impulsmomentes $\Theta\delta\omega$ ist (wie selbstverständlich) gleich dem Produkte aus der Zeitdauer der Wirkung und dem mittleren Moment.

Ist die Abnahme des Moments nicht linear, so wird

$$\Theta\delta\omega = k\frac{\mathfrak{M}_0}{2}t_0 \quad \text{(8)}$$

wo $k < 1$ ist, falls die Kurve des $\mathfrak{M}$ gegen die Achse der Zeit konvex ist, d. h. rascher abfällt als die gerade Linie. In obigem Beispiel kann $\mathfrak{M}_0 = 720$ mkg gesetzt werden, und wenn als Schlußzeit $t_0 = 1$ sek gerechnet wird, so erhält man $\frac{\delta\omega}{\omega} = \frac{\mathfrak{M}_0 t_0}{2\,\Theta\omega} = 0{,}046$ oder eine Geschwindigkeitsabweichung von 4,6 v. H. Gute Ausführungen weisen, allerdings mit etwas größeren Schwungmassen als oben vorausgesetzt, in der Tat bei voller Entlastung Abweichungen von 5 v. H. und darunter auf.

γ) Bei plötzlicher Belastung

muß die Turbine mit Dampf aufgefüllt werden, was der Erfahrung gemäß rascher vor sich geht als die Entleerung. An vielstufigen Gleichdruckturbinen zeigte sich infolge der großen Dampfgeschwindigkeiten während dieser Periode ein Überdruck auf der Rückseite der Räder, den man heute durch die weiter oben besprochenen Ausgleichbohrungen hinlänglich rasch zu beseitigen gelernt hat. Ohne Vorkehrungen dieser Art erreichte er so hohe Beträge, daß sich stellenweise die Laufräder geworfen oder gebogen haben.

δ) Die Größe der Schwungmassen

wird am kürzesten durch die **„Anlaufzeit"** gemessen, unter der man die Zeitdauer (in Sek.) versteht, in der die (reibungsfrei gedachte) Turbodynamo unter der Einwirkung des normalen Drehmomentes von der Ruhe auf den Normalwert ω beschleunigt wurde. Es entsteht daher der Zusammenhang

$$T_0 = \frac{\Theta\omega}{\mathfrak{M}_n} \quad \text{(9)}$$

---

[1]) Hier ist, woran mich Prof. Thoma-München erinnert, da die Dampfleitung geschlossen wurde, die Abwesenheit der Verdrängungsarbeit beim Eintritt zu berücksichtigen, d. h. $L_0 = i_0 - i_k' - A\,p_0 v_0$ zu setzen.

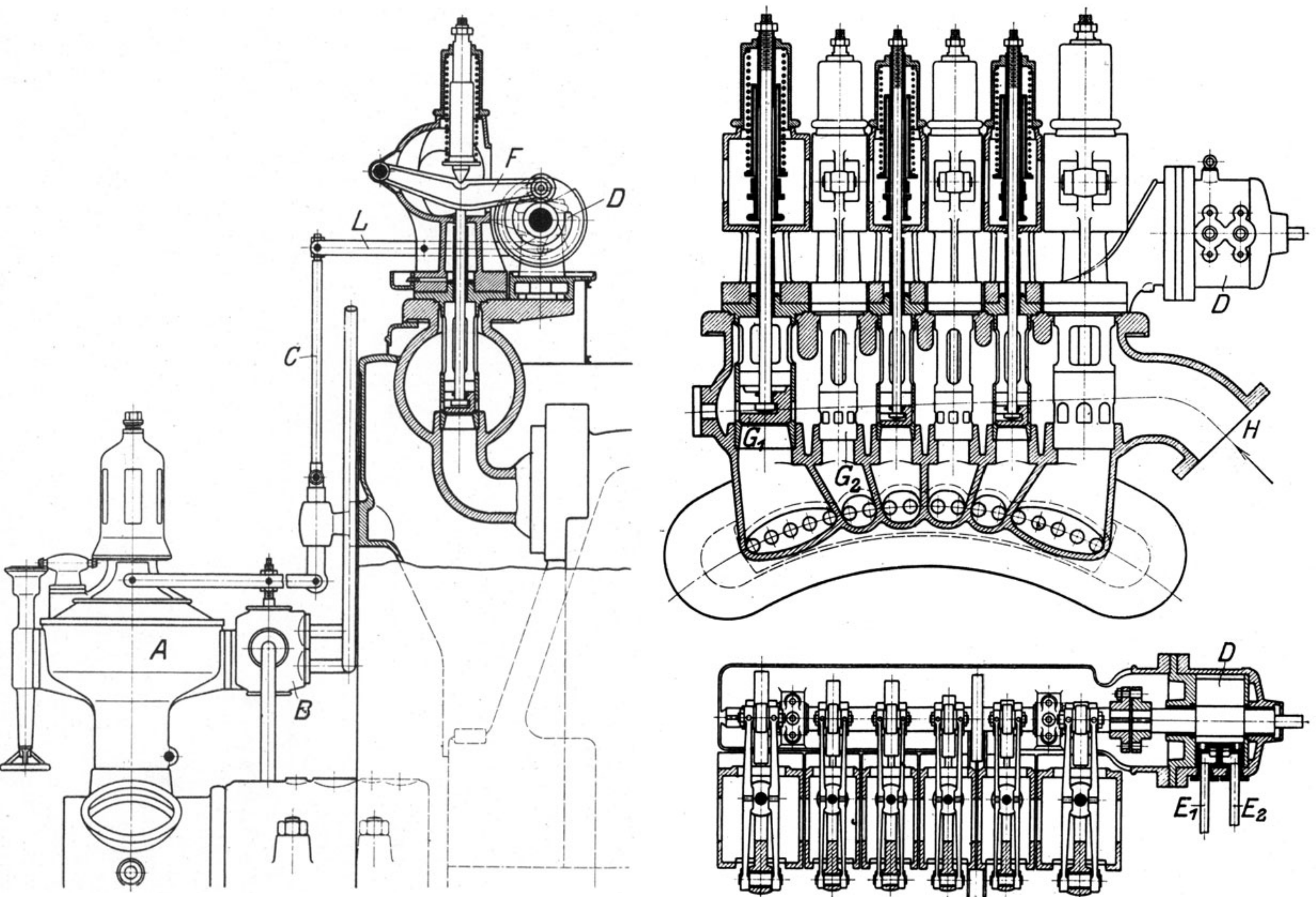


Abb. 503. Steuergetriebe der Allgem. Elektriz.-Gesellschaft.

Nachfolgende Beispiele geben Ausführungsgrößen an

Leistung kW	Drehzahl in der Minute n	Massenträgheitsmoment kg m sek² Turbine	Dynamo	Anlaufzeit Sek.
8000	3000	48,2	68,0	13,4
12000	1500	521	987	29,1
20000	1500	642	908	17,5

Zu ungefährer Abschätzung der Dynamoankergröße diene die Formel

$$D^2 L n = C \times \text{Kilo-Volt-Ampère},$$

wo D der Durchmesser in Zentimeter, L die magnetisch wirksame Länge in Zentimeter bedeuten und $C = 40.10^4$ ist.

102. Ausführungsformen der Reglergetriebe.

Wird die erste Stufe der Turbine von einem Curtisrade gebildet, so ist es, wie oben festgestellt, empfehlenswert, die Düsen in Gruppen zu teilen und der Reihe nach zu

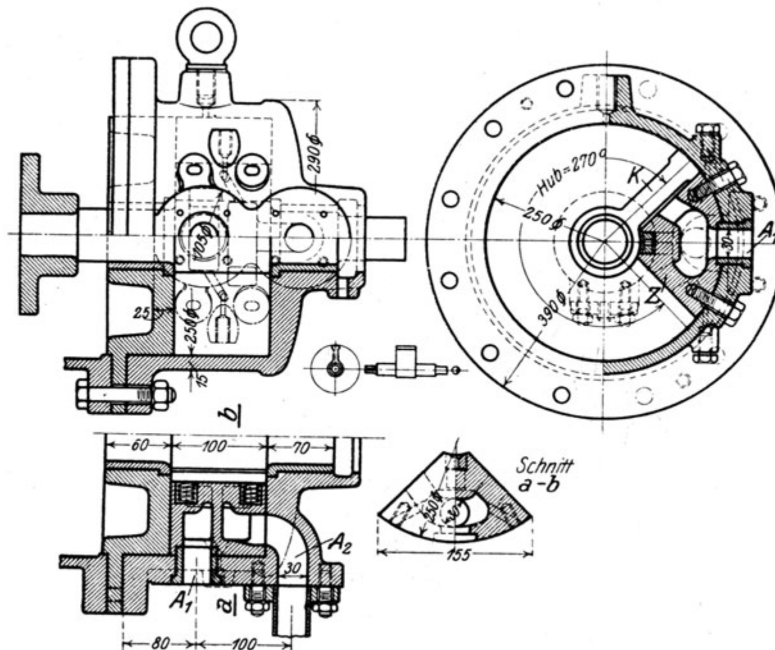


Abb. 504. Drehkolben zu Abb. 503.

beaufschlagen. Die Ausführungsform, die die Allgemeine Elektrizitäts-Gesellschaft diesem Verfahren neuerdings gibt, ist in der Zusammenstellung Abb. 503 veranschaulicht. A bedeutet den Regler, B das Steuerventil, C die Zustellung zum Kraftgetriebe D, das hier bemerkenswerterweise mit einem Drehkolben versehen ist, der die Steuerwelle mit den auf ihr befindlichen unrunden Scheiben verdreht. Hierdurch werden mittels der Hebel F die Gruppenventile $G_1\, G_2$ usf. der Reihe nach geöffnet und geschlossen. H ist die Dampfleitung, E_1, E_2 sind die Drucköl-Zu- und Ableitungen.

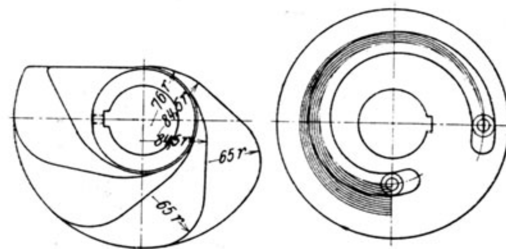


Abb. 505. Unrunde Scheiben zu Abb. 503.

Die Einzelheiten des Kraftgetriebes sind in Abb. 504 dargestellt. Der mit der Welle in einem Stück geschmiedete doppeltwirkende Schmetterlingskolben K wird von den Kanälen $A_1\, A_2$ aus gesteuert. Das Zwischenstück Z wird nachträglich eingesetzt und durch die Büchse A_1 sowie radiale Schrauben festgehalten. Abb. 505 zeigt die spiralförmige Nute,

die in einer auf der Nockenwelle aufgekeilten Scheibe eingefräst ist (*D* auf Abb. 503), in die Hebel *L* eingreift und die Rückführung des Steuerventils bewirkt. Ferner sind dargestellt die Nockenprofile, durch die eine beliebige Abhängigkeit der Ventileröffnung vom Drehwinkel der Nockenwelle erzielbar und so eine vorgeschriebene Kraftkurve erreichbar wird, während die Ventile als einfache Tellerventile ausgeführt werden können.

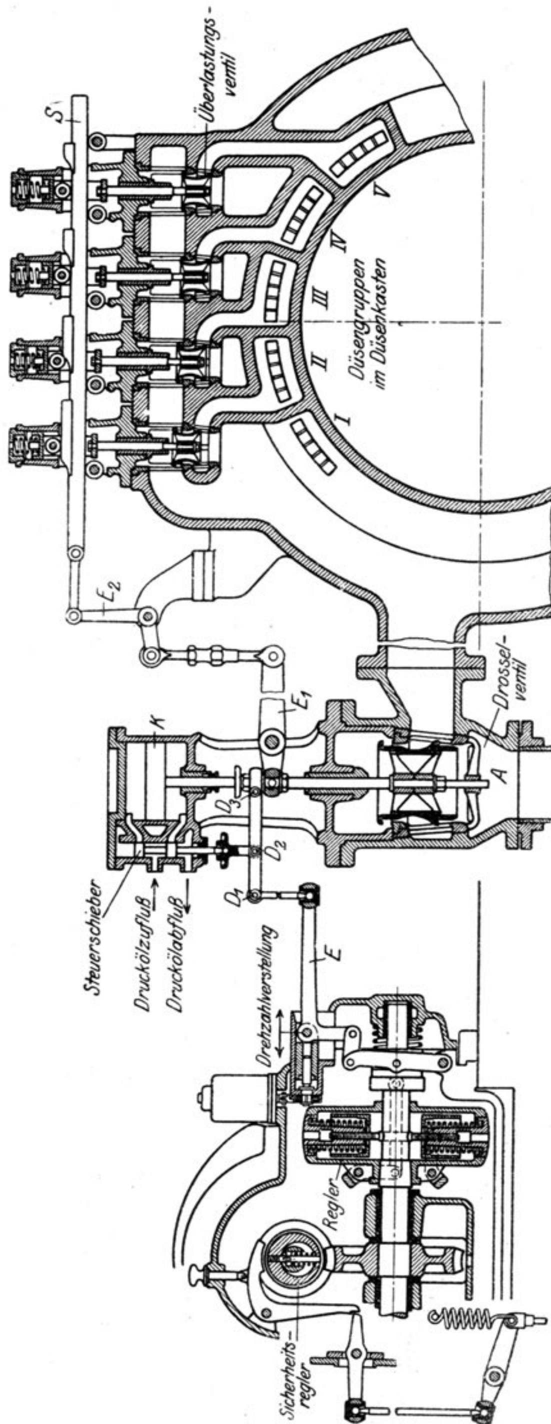


Abb. 506. Reglergetriebe der Maschinenfabrik Augsburg-Nürnberg.

Die **Maschinenfabrik Augsburg-Nürnberg** verwendet zur Betätigung der Düsengruppenventile das in Abb. 506 ersichtliche Schubkurvengetriebe *S*, das durch Zwischenschaltung der Hebel E_1 und E_2 vom Kraftkolben *K* bewegt wird. $D_1 D_2 D_3$ bildet den zweiarmigen Hebel. der die Wechselwirkung zwischen dem Kraftkolbensteuerschieber und dem Regler

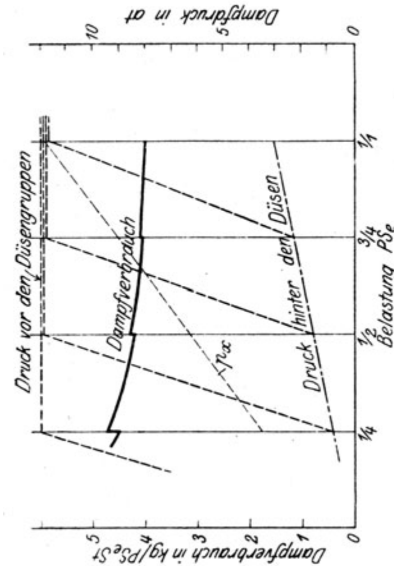


Abb. 507. Druckverteilung und Dampfverbrauch zu Abb. 506.

bewerkstelligt. Der Drehpunkt des zu letzteren gehörenden Winkelhebels *E* wird durch eine magnetische Zugvorrichtung verschoben, wodurch jeweils ein anderer Bezirk des Reglers ausgenützt und so die Drehzahl abgeändert wird. In der gleichen Abbildung ist auch der Sicherheitsregler dargestellt. Abb. 507 veranschaulicht die Veränderlichkeit des Dampfdruckes vor und hinter den Düsengruppen. Gleichzeitig ist der Dampfverbrauch für die PS_e/st dargestellt. Der kleine Sprung beim Übergang zur Eröffnung einer nächstfolgenden Düsengruppe ist darin begründet, daß die durch diese strömende Dampfmenge sich anfänglich eine erhebliche Drosselung gefallen lassen muß. Das Hauptdrosselventil *A* ist so groß bemessen, daß nur Düsengruppe I durch dasselbe gedrosselt wird und bei weiterer Erhebung der Druck vor dem Düsenventil unveränderlich bleibt.

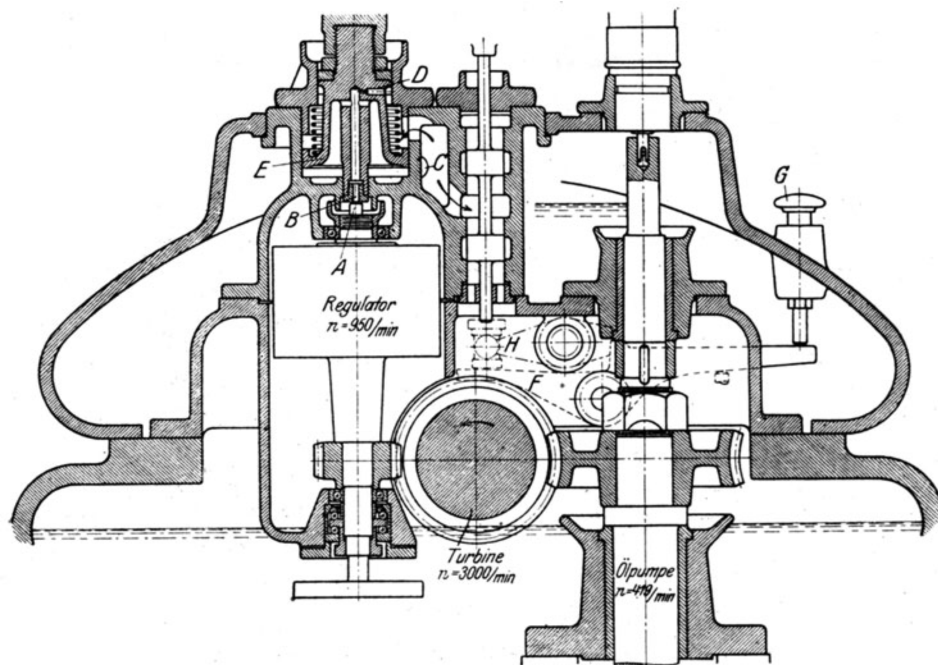


Abb. 508. Regleranordnung der Zoellyturbine.

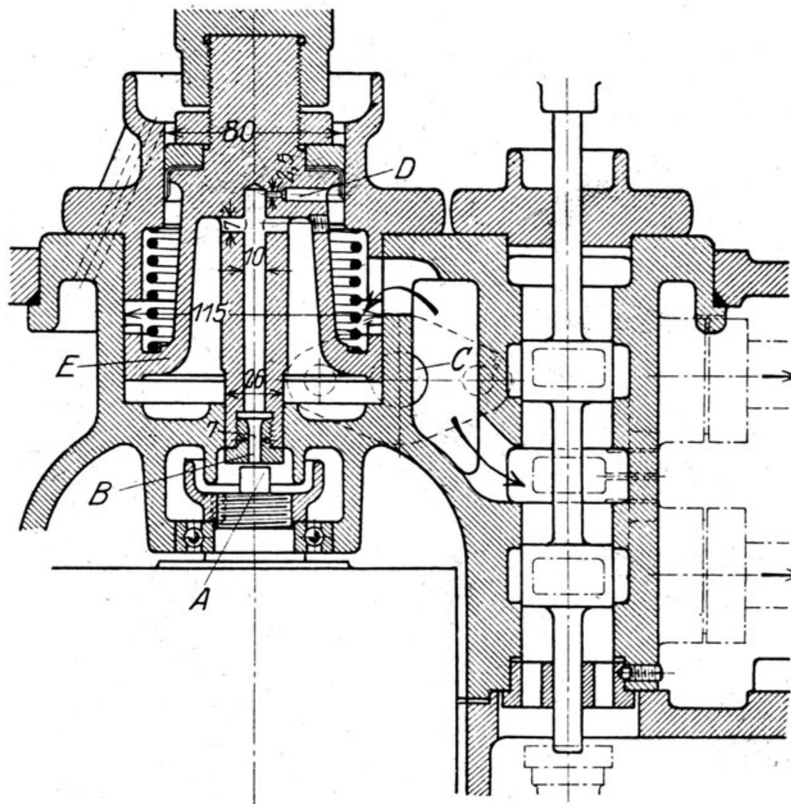


Abb. 509. Vorsteuerung der Zoellyturbine.

Die **Zoellyturbine** verwendet reine Druckstufen, demgemäß auch eine einfache Drosselregelung mit der aus Abb. 508 und 632 ersichtlichen Anordnung des Kraftgetriebes. Der Regler *R* ist selbst für die dargestellte große Turbine von 15000 PS Leitung bei

3000 Umdr./min. so klein, daß er ganz im Deckel des Hauptlagers Unterkunft findet. Diese Verkleinerung der Reglerenergie wird dadurch ermöglicht, daß Zoelly bei großen Turbinen zwischen den Regler und den Stellhebel $D_1 D_2 D_3$ ein besonderes Kraftgetriebe einschaltet, dessen Einrichtung Abb. 509 veranschaulichen.

Abb. 510. Steuerschieber zum Sicherheitsregler.

Das bei C eintretende Drucköl fließt durch den äußeren Ringraum des Differenzialkolbens E und durch die in eine feinere Mündung endigende Bohrung D auch in dessen Innenraum. Von hier kann er durch die Mündung B an der Reglerspindel A vorbei ins Freie gelangen. Die Bohrung D drosselt den Öldruck derart ab, daß beim Sinken der Spindel A nur der Ringraum des Kolbens E einem Druck ausgesetzt ist, so daß er ebenfalls sinken muß. Steigt die Spindel A, so wird der Abfluß bei B gehemmt der Öldruck unter dem Kolben wächst und ergibt schließlich einen auf die Ringfläche von E einwirkenden Überdruck nach oben. Der Kolben steigt nun und wird dem Regler nach oben und unten genau so folgen, als ob eine Zwangsverbindung zwischen den beiden bestünde. Diese Bewegung wird wie bei der gewöhnlichen Anordnung durch den in Abb. 632 sichtbaren Stellhebel $D_1 — D_3$ auf den Steuerschieber übertragen, der den Kraftkolben in Bewegung setzt. Abb. 510 stellt eine Verbindung des Kraftgetriebe mit dem Schnellschlußregler dar. Der auf der Hauptwelle befindliche Sicherheitsregulator betätigt den in Abb. 508 punktiert gezeichneten Hebel F, der durch Handgriff G beeinflußbar ist, und den am auch Hilfsschieber J, Abb. 510, angreifenden Hebel H sperrt. Hat eine Auslösung stattgefunden, so nimmt J die in der Nebenfigur von Abb. 510 dargestellte Stellung ein. Das Öl kann durch Rohr K_2 unter dem Hauptkraftkolben entweichen, während Drucköl durch Rohr K_1 über den Kraftkolben dringt und ihn niederdrückt.

Abb. 511. „Unruhe" nach Parsons.

Kraftgetriebe von Parsons und die „Unruhe".

Von Parsons stammt das erste Getriebe mit bewußter Einführung einer künstlichen Erschütterung, der „Unruhe". Die Wirkungsweise ist nach Abb. 511 die folgende:

A bedeutet das Drosselventil, B den Kraftkolben, dem durch regelbare Öffnung C ständig Dampf zufließt. Befindet sich Steuerschieber g in der Schlußlage, so geht der Kolben in die Höhe; stellt g

die Verbindung zum Abfluß E her, so wird der Kolben durch Feder D herabgedrückt. Parsons erhält den Kolben in fortwährendem Auf- und Abgang, indem Hebel J durch Exzenter x in Schwingung versetzt wird. Infolgedessen findet auch eine periodische Druckschwankung in der Turbine statt, wie in Abb. 512 dargestellt ist. Der Regler wirkt durch Hebel FGH und verstellt die Mittellage, um die der Steuerschieber schwingt, so daß jeder Reglerstellung ein bestimmter Mittelwert des Eintrittsdruckes entspricht.

Die früher vertretene Ansicht, daß infloge des periodisch höheren Druckes der Dampfverbrauch kleiner sei, wird heute kaum noch verfochten. Der wahre Zweck und der Vorteil

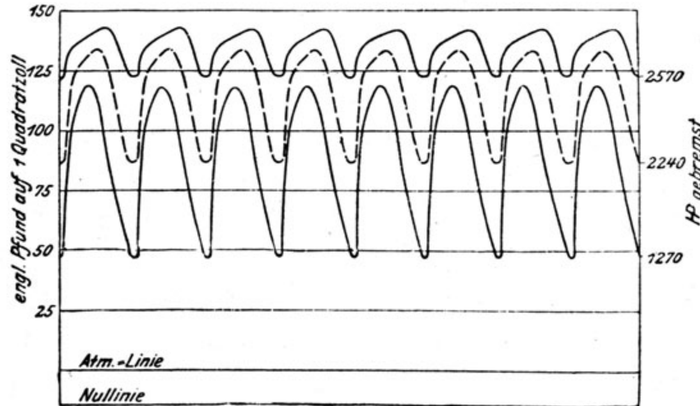


Abb. 512. Druckschwankungen der älteren Parsonsturbine.

der Einrichtung ist, daß vermöge der Schwingung, wie oben erläutert, der Einfluß der Gelenkreibung, also die Unempfindlichkeit des Reglers, so gut wie aufgehoben sind.

Von festländischen Ausführungen verdient die früher von F. Tosi verwendete wegen des kinematisch auch sonst gut brauchbaren Drehsteuerschiebers Erwähnung. Die hier nur leicht schwingende Bewegung wird durch das Exzenter A (Abb. 513) eingeleitet und auf Stange B übertragen. Die Rückführung (Abb. 514) geht von der Spindel des entlasteten Drosselventiles aus und wird durch Stängelchen S auf den Steuerschieber übertragen. Letzterer besteht nach Abb. 515 aus dem entlasteten Zylinder C, in dessen Mantel eine Anzahl wechselweise mit dem Einlaß G und dem Auslaß H kommunizierender Schlitze ausgearbeitet sind.

Der Kraftkolben ist einfach wirkend, d. h. die Abwärtsbewegung wird durch Federdruck bewirkt. Rückt nach Eröffnung des Steuerschiebers der Kraftkolben in irgendeiner Richtung fort, so verstellt die Ventilspindel mittels Welle E das ebenfalls entlastete Futter D stets in solchem Sinn, daß die zum Kraftzylinder führenden Kanäle wieder geschlossen werden, der Kolben also zur Ruhe kommen muß. Jeder Kolbenstellung entspricht eine bestimmte Lage des Futters D, mithin ein bestimmter Winkel des Schiebers, eine bestimmte Lage der Reglermuffe. Die eindeutige Zuordnung von Reglerhub und Leistung ist erreicht.

Die Durchflußregelung mit gestängeloser Rückführung der A.-G. Brown, Boveri & Cie. besteht darin, daß ein Ölstrom von unveränderter Menge, oder mit unverändertem Anfangsdruck die Reglerorgane ständig durchflutet, wobei jedoch die Ausflußöffnung durch den Regler mehr oder weniger gedrosselt, also ein mehr oder minder hoher Steuerungsdruck eingestellt wird. Indem man den einfach wirkenden Kraftkolben durch eine Feder im Gleichgewicht hält, wird jeder Größe des Öldfuckes eine bestimmte Höhenlage des Kolbens, eine bestimmte Eröffnung des zugehörigen Ventiles, also letzten Endes jeder Reglerstellung eine bestimmte Leistung der Maschine zugeordnet. Abb. 516 stellt die Ausführung des Kraftkolbens Y mit dem Hauptdrosselventil W und dem in einem Gehäuse untergebrachten Abschlußventil S dar. Die zusätzliche Abflußöffnung X ist nur ein schmaler aufrechtstehender Schlitz, der durch den gewährten Mehrabfluß verhindern soll, daß bei plötzlichem Wachsen des Öldruckes Kolben Y zu hoch steigt, d. h. „überreguliert“. Das Drosselventil wird mit schmaler Sitzfläche nahezu entlastet ausgeführt. Der zweiteilige Sitz wird durch Schraubenmutter M niedergehalten. Die mitdargestellte Sicherheitsabschlußvorrichtung besprechen wir weiter unten. Die eigentliche Durchflußöffnung O wird nach Abb. 517 durch die vom Regler mehr oder weniger erhobene rotierende Hülse F mehr oder weniger verengt. Indem man die Hülse E mittels einer magne-

tischen Schaltvorrichtung hebt oder senkt, kommt der untere oder der obere Teil des Regulatorhubes zur Geltung mit einer entsprechenden Veränderung der Drehzahl.

Die Schwunggewichte des Reglers *B* sind so aufgehängt, daß einem vergrößerten Ausschlag bei zunehmender Geschwindigkeit ein Senken der Hülse *F*, also ein Sinken des Öldruckes in der Zuleitung

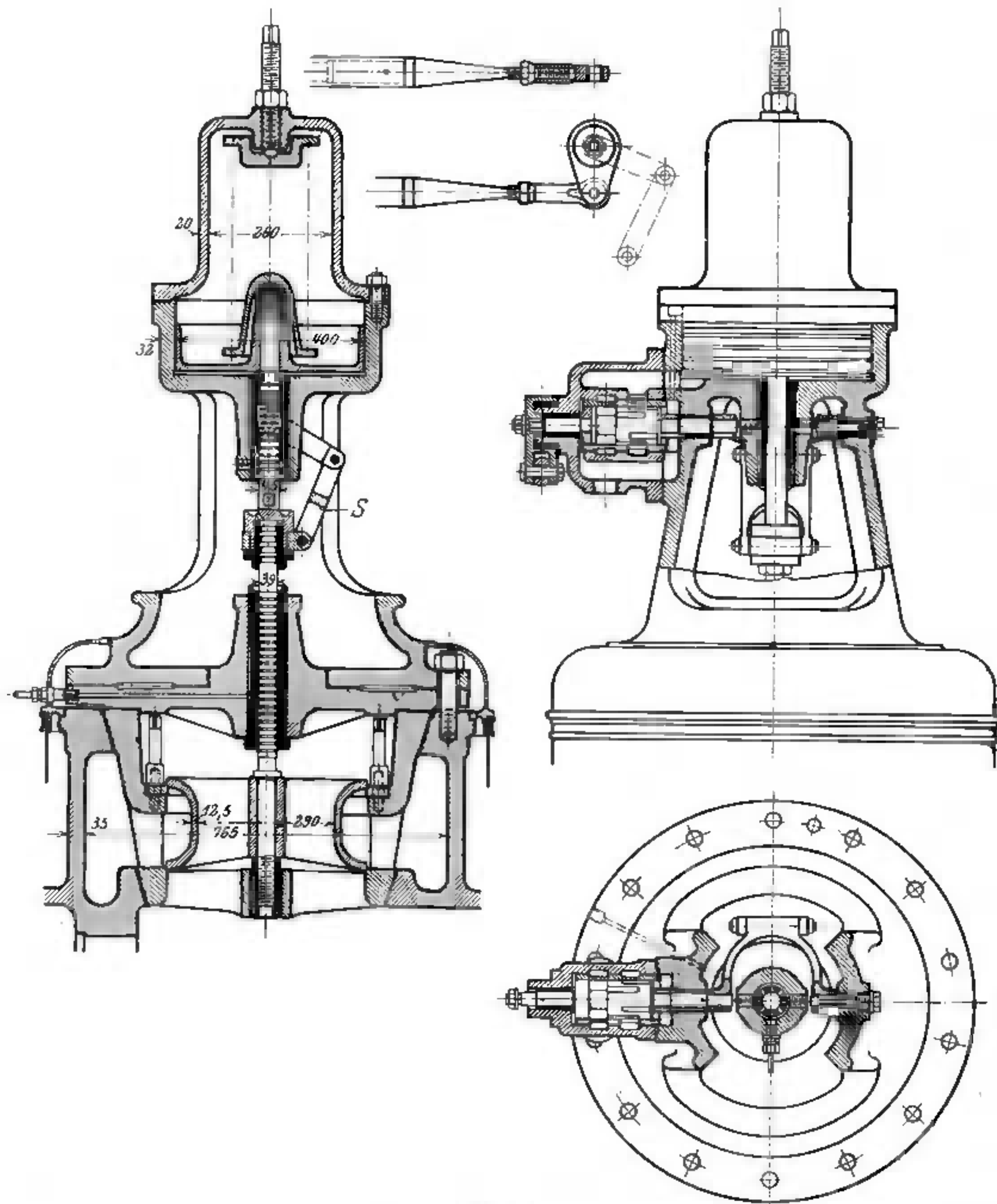


Abb. 513—515. Regel- und

C, mithin einem Schließen der Dampfventile entspricht. Hebel *D* dient zum Anheben des Reglers von Hand (mittels Verlängsrungshebels). *J* bedeutet den Sicherheitsregulator, der durch Verdrehung des Hebels *M* das Kölbchen *Q* freigibt und durch die Kugeltransmission *N* das Hauptventil auslöst. *K* ist eine Zahnradölpumpe.

Die **„Unruhe“** endlich wird hier weit vollkommener als bei **Parsons** dadurch erzeugt, daß die Reglerhülse oben um etwa $^1/_2$ bis 1 mm schräg abgeschnitten ist, und so bei einer einzelnen Durchfluß-

Abb. 513.

Steuergetriebe von Tosi.

öffnung während jeder Umdrehung der Hülse einen Höchst- und Mindestwert der Eröffnung freigibt, mit entsprechender Druckschwankung. Diese wird so klein eingestellt, und besitzt der Drehzahl entsprechend eine so große Periodenzahl (300—500 in der Minute), daß die Kraftkolben kaum merklich, indes genügend angehoben werden, um die Reibung der Ruhe zu überwinden, und die „Unempfindlichkeit“ der Reglerorgane auszumerzen.

Die gestängelose Rückführung der **Firma Tosi** benützt als Kraftgetriebe ebenfalls einen einfachwirkenden Kolben, auf dessen Oberseite eine Feder, auf dessen Unterseite ein veränderlicher Öldruck einwirken.

Die Einstellung des Öldrucks erfolgt nach Abb. 518 dadurch, daß der Regler mittels des Hebels *H* den Regulierschieber *L* betätigt, wobei infolge des vorhandenen Öldrucks über dem Kraftkolben dieser

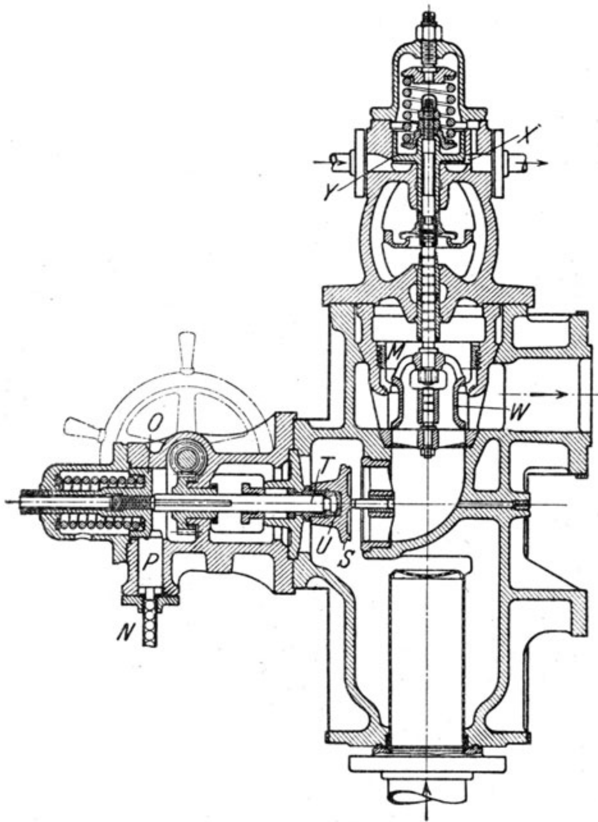


Abb. 516. Drossel- und Abschlußventil von Brown, Boveri & Cie.

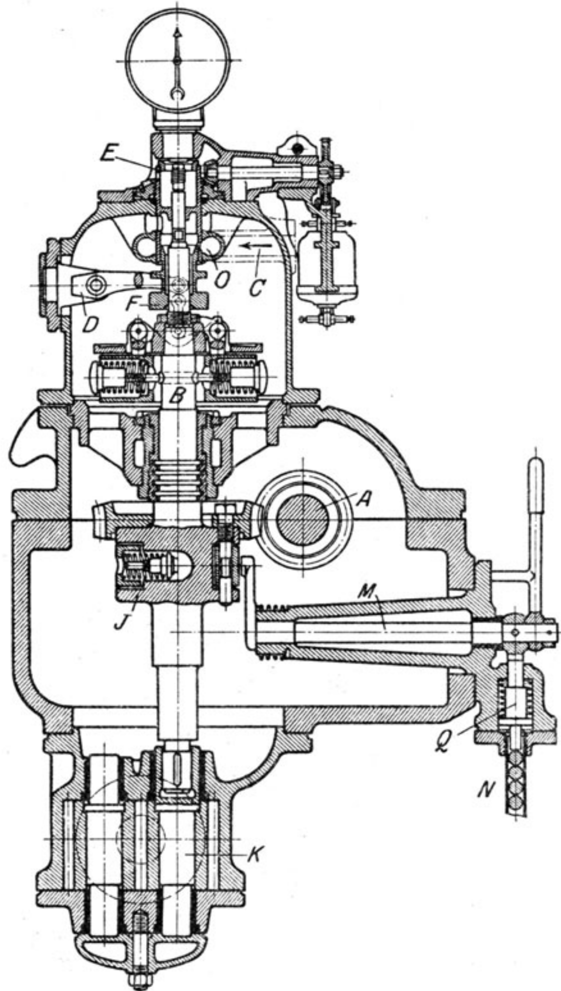


Abb. 517. Durchflußregelung von Brown, Boveri & Cie.

den Drehpunkt *C* festhält und zwar wird beim Sinken des Reglers Ventil *L* gehoben und dem Drucköl Zutritt über den Kolben gewährt, der infoge wachsenden Öldruckes seine Gegenfeder zusammendrückt und gleichzeitig Ventil *L* in seine Mittelstellung zurückführt. Das Regelgetriebe wird erheblich vereinfacht, wenn man nach Abb. 519 den Regler unmittelbar auf das Steuerventil einwirken läßt, und dieses seinerseits koaxial mit dem Kraftkolben anordnet. Der Regler muß bei vergrößerter Fliehkraft das Steuerventil senken, so daß Drucköl durch Kanal *E* und *c* über den Kolben hinweg abfließt und der Kolben sinkt, bis der Kanal im Kraftkolben wieder geschlossen ist. Auf diese Weise wird der neuen Reglerstellung ein neuer und zwar kleinerer Öldruck zugeordnet, den man durch eine an *f* angeschlossene Rohrleitung auf den Kraftkolben wirken läßt.

Die hydraulische Regelung der Sulzer-Turbine beruht auf der Erzeugung „hydraulischen" Druckes durch eine den Fliehkraftregler vertretende Öl-**Kreiselpumpe**, wodurch das Steuerventil des eigentlichen Reglerkraftgetriebes betätigt wird; meines Wissens die erste praktische Ausführung dieses neuen Verfahrens.

Schema der Regelvorrichtung. Wir gehen von der Zahnradölpumpe *z*, Abb. 520, aus, die die ganze Turbine mit Drucköl von etwa 1,5 at versieht. Leitung I führt zur Steuerung des Sicherheitsabschlußventils *q*, das bei Überschreitung der normalen Umlaufzahl

um 10 v. H. den Dampfzufluß abstellt. Diesem Zwecke dient der Sicherheitsregler *r*, der in später zu beschreibender Weise auch den Kolben des Kraftgetriebes beeinflußt. Zum Verstellen der Umlaufzahl dienen Vorrichtung *j* und Leitung II, in die die „Unruhe“ *k*, die Druckschwankung im ganzen System erzeugt, eingebaut ist. Leitung III führt das eigentliche Kraftöl dem Reglergetriebe zu, das durch Kolben *e* das Regelventil h_1 für Normalleistung betätigt. Für Überlast treten nacheinander die Ventile h_2 und h_3 mit zusätzlichen Düsengruppen in Tätigkeit.

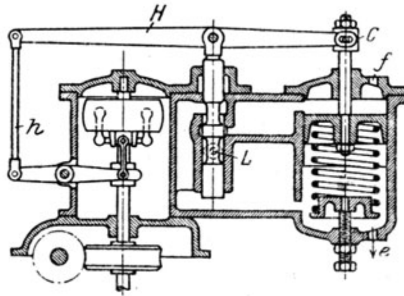


Abb. 518.

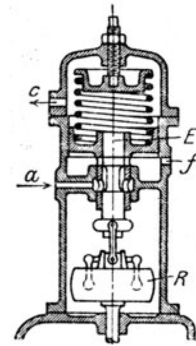


Abb. 519.

Gestängelose Rückführung nach Tosi.

Abb. 520. Hydraulisches Reglergetriebe der Sulzerturbine.

Abb. 521. Kraftkolbensteuerung zu Abb. 520.

Abb. 522. Schnitt C—D zu Abb. 521.

Das Kraftgetriebe, Abb. 521 u. 522, besteht zunächst aus dem Flügelrade a der Kreiselpumpe, die das Öl aus dem auf unveränderliche Höhe (durch Bohrungen in der Welle) angefüllten Behälter a_1 schöpft. Der erzeugte Ölüberdruck wächst mit dem Quadrat der Umfangsgeschwindigkeit und wirkt auf den Kolben b, der so weit nach oben geschoben wird, bis die Gegenkraft der Federn c_1, c_2 dem Öldruck gleich ist. Der Kolben verhält sich mithin ähnlich wie das Schwunggewicht eines gewöhnlichen Federreglers. Um die erforderliche Stellkraft zu erhalten, überträgt man indes seine Bewegung unter Zwischenschaltung eines Kraftgetriebes auf das Regelventil h_1, Abb. 521. Der Kraftkolben e wird von Schieber d, der, mit dem Kolben b fest verbunden (oder aus einem Stück) ist, gesteuert. Der Schieber ist hohl, damit das Drucköl von der Kreiselpumpe Zutritt zum Kolben b erhält. Die Steuerung ist einfachwirkend, indem die Feder c_1 den Kolben b stets nach abwärts drückt.

Das von der Pumpe kommende Kraftöl tritt bei p, Abb. 522, in die Muschel c des Schiebers, strömt beim Sinken des Kolbens b, sobald die Steuerkante a_2 den Kanal d_1 freigibt, unter den Kraftkolben e und hebt diesen an. Beim Steigen des Schiebers tritt Muschel e_1 mit Kanal d_1 in Verbindung und gestattet dem Öl Abfluß durch Kanal e_2, worauf Kolben e sinkt und das Regelventil h_1 schließt.

Die Rückführung wird bei der Sulzerschen Regelung durch Einschaltung des Hebels f erreicht, der, auf den Lenker gh als Widerlager gestützt, die Bewegung des Kraftkolbens auf die Federstütze l überträgt und den Steuerschieber beim Sinken des Kraftkolbens, durch Vermehrung des Federdruckes, gegen die Mittellage herabdrückt. Das Umgekehrte findet beim Steigen des Kraftkolbens statt.

Der Regelvorgang spielt sich hiernach, z. B. bei plötzlicher Entlastung der Turbine, wie folgt ab: Der Öldruck im Kreiselrade wächst mit der Umlaufzahl und hebt den Steuerschieber d unter Zusammendrückung der Federn $c_1 c_2$; Kolben e sinkt, verkleinert den Dampfzufluß und drückt mittels Hebel f das Federende herab, so daß die Federspannung den Öldruck überwindet und den Steuerschieber in die Mittellage zurückdrängt. Bei vollständiger Entlastung befindet sich e in seiner tiefsten Lage, die Federzusammendrückung hat den Höchstwert erreicht; mit ihr steigt das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit der Turbine, d. h. der Geschwindigkeitsunterschied, den man sonst Ungleichförmigkeit des Reglers nennt. Sind hierfür z. B. 4 v. H. vorgeschrieben, so muß hiernach die Federspannung gegenüber Vollast quadratisch, d. h. um rund 8 v. H. zunehmen.

In Wahrheit ist jedoch der Regler mit einer besonderen Isodrom-Vorrichtung versehen, durch die die „Ungleichförmigkeit" für die erste Zeit nach der Gleichgewichtsstörung eine wesentliche Erhöhung erfährt, die jedoch alsbald wieder selbstätig verschwindet. Sie wird durch Kolben m mit der zugehörigen Steuerung, Abb. 521, gebildet und stellt eine neuartige, sinnreiche Lösung der Aufgabe dar. Der Kolben m hat eine ringförmige schmale Muschel[1]). Sobald im vorhin betrachteten Regelvorgang Hilfskolben l seinen Abwärtsgang antritt, nimmt er vermöge des Ölpolsters bei l_1 Kolben m mit. Hierdurch wird indessen Kanal n aufgedeckt, und das Öl kann aus dem Raum l_1 nach q und von hier durch Öffnung q_1 ins Freie entweichen. Die Spannung der Außenfeder c_1 schiebt daher Kolben m allmählich in seine Mittellage zurück. Die kleinen Bohrungen in den höchsten Punkten von l und m dienen zur stetigen Entlüftung. Der Ölverlust ist unbedeutend. Führt Kolben l umgekehrt eine Bewegung nach oben aus, so folgt Kolben m infolge des Federdruckes nach, öffnet jedoch Kanal m_1, der mit der Druckleitung durch m_2 in Verbindung steht, so daß das nachströmende Öl den Kolben alsbald zum Zurückweichen veranlaßt. In jedem Falle wird Kolben m zum Schluß in seiner Mittellage, bei der Kanäle m_1 und n geschlossen sind, stehen bleiben. Da aber auch Schieber d beim Beharrungszustand seine Mittellage einnehmen muß, so wird die Spannung der Feder c_1 für alle Belastungen auf einen und denselben Wert zurückgeführt; die bleibende Ungleichförmigkeit ist einzig durch die innere Feder c_2 bedingt. Die starke vorübergehende Vermehrung des Federdruckes durch c_1 erhöht die Stabilität der Regelung und vermindert die Neigung zu Schwingungen im Geschwindigkeits-

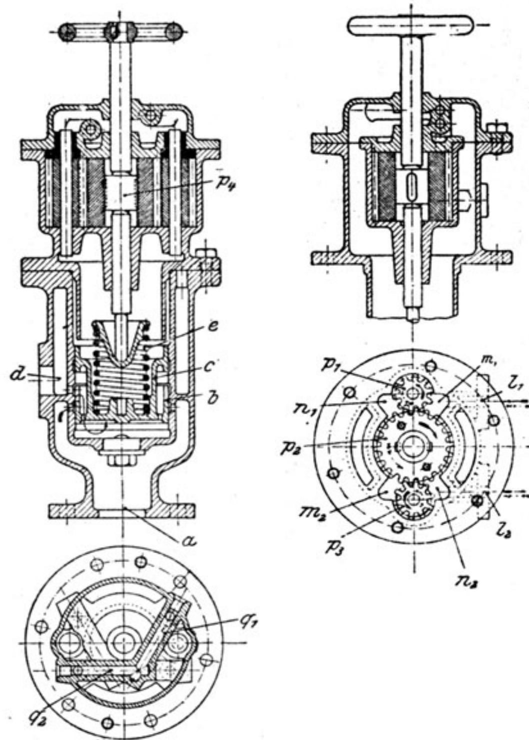


Abb. 523. Drehzahlverstellung zu Abb. 520.

[1]) Infolge der starken Verkleinerung der Abbildung wird man die Wirkungsweise nur mit Hilfe einer vergrößerten Handskizze, mit Erraten dessen, was oben undeutlich ist, verstehen.

verlauf. Im übrigen liegt auf der Hand, daß man gegebenenfalls Feder c_2 ganz weglassen könnte, so daß die Umlaufzahl der Turbine stets auf denselben Wert zurückgeführt würde, was eine vollkommen isodrome Regelung ergäbe.

Verstellung der Umlaufzahl. Der Hohlraum k, Abb. 521, über Kolben b wird mittels Leitung II, Abb. 520, von der Stellvorrichtung j her mit Drucköl versehen. Um den mittleren Betrag der so auf den Kolben ausgeübten Kraft muß der vereinte Druck der Federn $c_1 c_2$ von vornherein kleiner gemacht werden. Vermehrt man den Öldruck in k, so muß der Druck in der Kreiselpumpe zunehmen, und auf diese Weise kann die Umlaufzahl, die zu einer bestimmten Kolbenstellung gehört, innerhalb gewisser Grenzen verändert werden. Die diesem Zweck dienende Stellvorrichtung ist in Abb. 523 dargestellt. Die Pressung des bei a eintretenden Öles wird durch Kante b stets so weit abgedrosselt, daß die auf

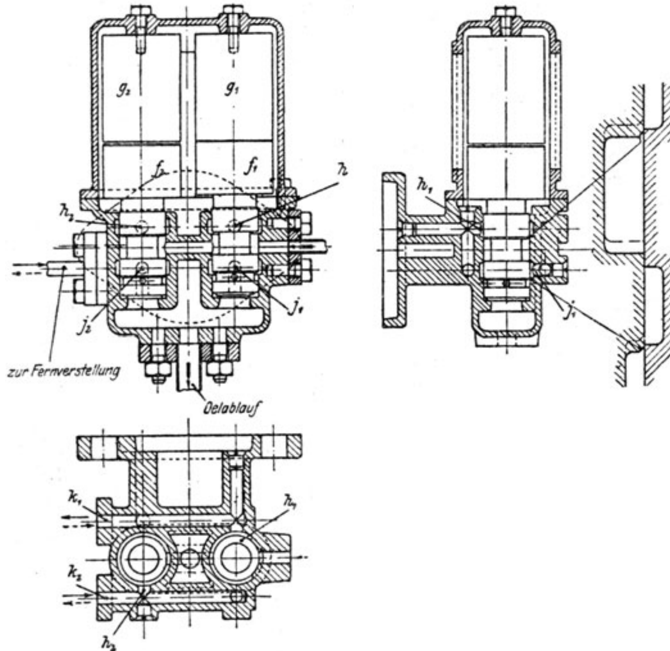


Abb. 524. Fernantrieb der Drehzahlverstellung Abb. 523.

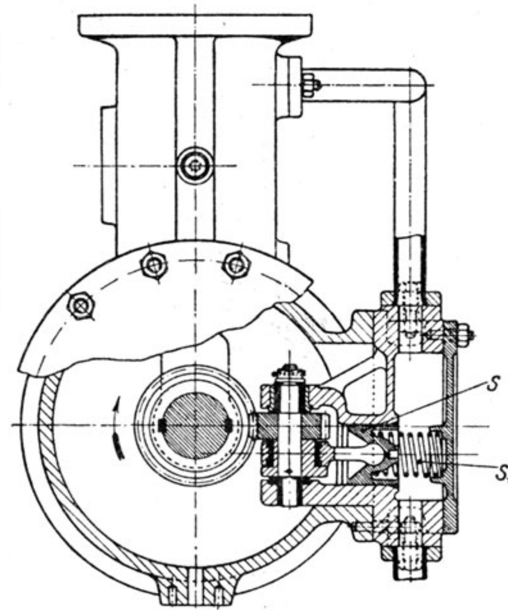


Abb. 525. Die „Unruhe".

Kolben c ausgeübte Gesamtkraft dem von oben wirkenden Federdruck gleich ist. Steigt der Öldruck in der Ableitung d, so wird Kolben c gehoben und die Drosselung vermehrt. Die Spannung der Feder e wird durch Fernantrieb, Abb. 524, vom Schaltbrett aus geregelt. Erhält die Magnetspule g_1 Erregerstrom, so zieht sie den Schieber f_1 empor, wodurch dem Drucköl durch den Kanal $h_1 k_1$ der Zufluß und durch den Kanal $k_2 j_2$ der Abfluß zu und von der Stellvorrichtung freigegeben wird. Wird f_2 angehoben, so kehrt sich mittels der Kanäle $h_2 j_2$ die Strömungsrichtung um. Die Ölleitungen von $k_1 k_2$, Abb. 524, schließen bei $l_1 l_2$, Abb. 523, an, wobei dort Raum m_1 durch die schiefen Bohrungen q_1 und q_2 mit m_2 verbunden wird, so daß der hier erzeugte Öldruck die Zahnräder p_1, p_2, p_3 im Sinne der angegebenen Pfeile in Umdrehung versetzt. Das aus den ähnlich verbundenen Räumen n_1, n_2 austretende Öl fließt durch Leitung l_2 zur Steuervorrichtung zurück. Das mittlere Zahnrad p_2 überträgt seine Bewegung auf die Schraubenspindel p_4, die übrigens auch vom Handrad aus gedreht werden kann.

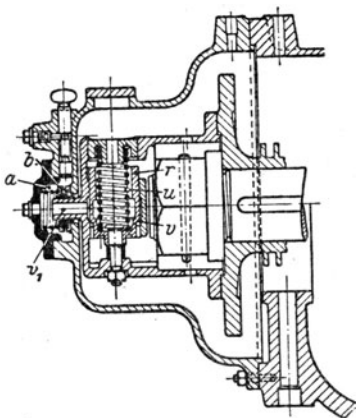


Abb. 526. Sicherheitsregler zu Abb. 520.

Die „Unruhe", Abb. 525, d. h. die Druckschwankung, die alle Regelteile in leichte Schwingung versetzt, wird durch einen Exzenterantrieb des Kolbens s erreicht, der für eine 2000 KW-Turbine einen Raum von etwa 30 ccm 215 mal in der Minute verdrängt und freigibt, wobei Feder s_1 für den Rückschub sorgt. Der Kolben ist in Leitung II, die von der Verstellvorrichtung j, Abb. 520, zum Kolben b, Abb. 521, führt, eingebaut. Die hier erzeugte Schwingung teilt sich naturgemäß dem Kraftkolben e und allen damit zusammenhängenden Teilen mit; die Erfahrung hat gezeigt, daß sogar der allgemeine Ölumlauf, insbesondere auch das Überlastventil mit seinen Zubehörteilen davon betroffen wird.

Der Sicherheitsregler, Abb. 526, wird am freien Ende der Turbinenwelle angeordnet und besteht aus dem Schwunggewicht r, dessen Fliehkraft der Feder u entgegenwirkt. Das Schwunggewicht ist als Kolben ausgebildet, der mit der Kante v dem durch Rohr v_1 zutretenden Drucköl bei etwa 10 v. H. Erhöhung der Umlaufzahl den Weg ins Freie öffnet. Druckraum a ist mit Hilfe der beweglichen, durch Feder angedrückten Linse b mit Beilagen abgedichtet; die erzeugte Druckminderung pflanzt sich durch Leitung IVa, Abb. 520, zum Steuerschieber p fort, von dem aus hinter Kolben n, Abb. 521, Drucköl tritt und das Sicherheitsventil q schließt, wodurch die Turbine abgestellt wird. Gleichzeitig hiermit wird das

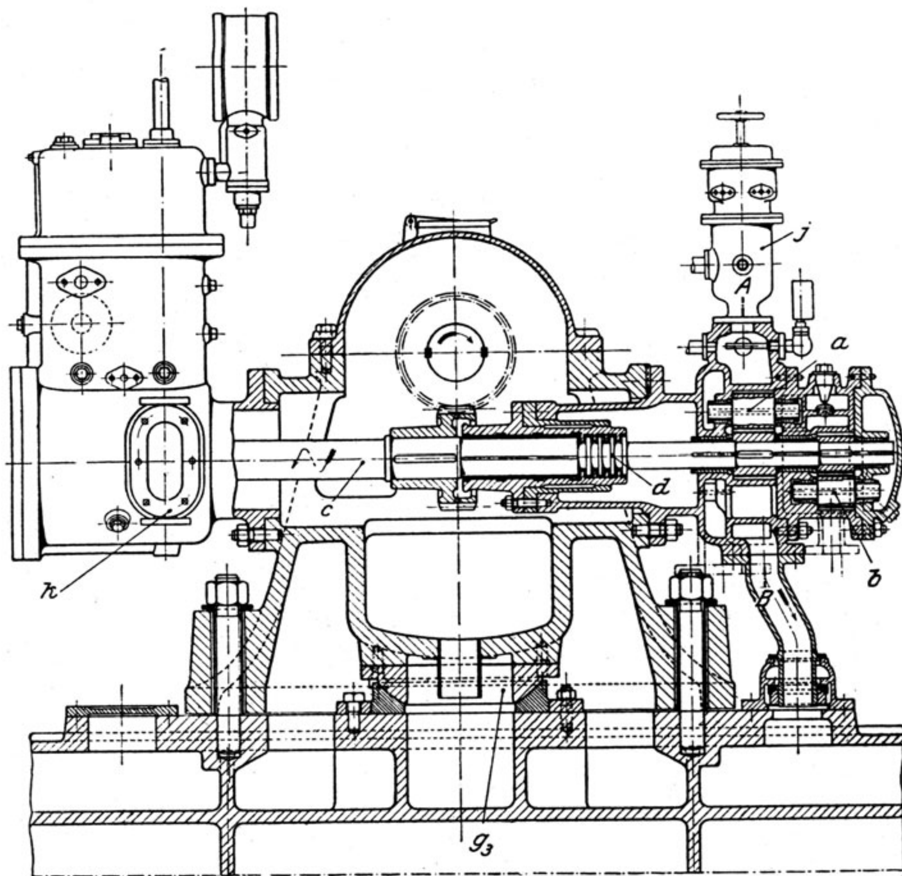


Abb. 527. Pumpen und Regleranordnung zu Abb. 520.

Regelventil an der Turbine geschlossen, indem durch Leitung IVb das Öl unterhalb des kleinen Kolbens s, Abb. 521 und 522, entweicht und dieser durch sein Eigengewicht sinkt. Hierdurch wird Kanal d_2 frei, und Kraftkolben e sinkt seinerseits, wobei das Öl durch Schlitz d_3 in Kolben e und Ringspalte d_4 an Kolben s ins Freie gedrängt wird.

Die Ölpumpen, Abb. 527, sind als Zahnradpumpen ausgeführt, und zwar dient das aus einem mittleren Triebrad und drei Förderrädern bestehende System a für die Regelung, das kleinere System b für eine besondere Entlastungsscheibe. Die Abbildung bietet zugleich ein Bild der Gesamtanordnung der Pumpen und des Reglerkreiselrades an den beiden Enden der durch Schraubenräder angetriebenen wagerechten Querwelle c. An Flansch k wird die Unruhe angeschraubt. Bei g_3 erscheint die früher erwähnte Kugellagerung des vorderen Turbinenfußes im Schnitt.

Überlastventile. Ist der volle Hub des Hauptventiles h_1 nahezu erreicht, so werden die Überlastventile h_2, h_3, Abb. 520, durch die im Oberteil seines Ventildeckels, Abb. 528, angeordnete Druckölsteuerung dem Kraftbedarf entsprechend angehoben. Da auf Ventil h_1 rund die Hälfte, auf h_2 und h_3 je $^1/_4$ der genannten Düsenzahl entfällt, so vermittelt h_2 eigentlich den Übergang von $^3/_4$ zur Normalleistung, und h_3 liefert die auf 25 v. H. zu veranschlagende Überlast. Die Steuervorrichtung besteht aus dem Steuerschieber a, Abb. 528, der, durch Feder b angehoben, Kante c für das durch Leitung V zufließende Drucköl jeweils so lange freigibt, bis der Gesamtdruck des Öles auf die Schieberkreisfläche dem Federdrucke gleich ist. Auf diese Weise entspricht jeder Stellung des Ventiles h_1 ein Öldruck von bestimmter Größe, der sich durch Leitung VI zum Kraftkolben der Überlastventile, Abb. 528a, fortpflanzt. Das Öl gelangt durch die Ringnute d zum kleinen Steuerschieber i, wodurch Feder e auf das entsprechende Maß zusammengedrückt wird. Anderseits findet ungedrosseltes Drucköl durch Leitung Va

in den Ringraum *f* und durch Bohrungen *h* auch über den Kolben *g* Zutritt. Der entstehende Überdruck preßt die Überlastventile auf ihre Sitze, bis die sich hinaufbewegende Steuerkante des Schiebers *i* den Raum *k* mittels Kanales *m* mit dem Abflußraum *l* verbindet. Der Kolben *g* beginnt alsdann infolge des Druckes im Raum *f* zu steigen und folgt dem Schieber, bis Kanal *m* wieder abgeschlossen ist. Während dieser Zeit kann durch die engen Bohrungen *h* nur eine unbedeutende Ölmenge in den Raum *k* nachfließen. Die Steuerung stellt also eine Kraftübertragung mittels Drucköles von der Feder *b*, Abb. 528, auf die Feder *e*, Abb. 528a, dar, wodurch den Stellungen des Hauptregelkolbens in eindeutiger Weise die Stellungen der Überlastventile zugeordnet werden. Im übrigen ist zu bemerken, daß Ventil h_3 auf der Spindel lose sitzt, so daß Ventil h_2 sich zunächst allein erhebt und erst bei weiterem Steigen Ventil h_3 mitnimmt.

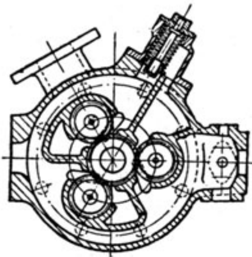


Abb. 527a seitlich zu Abb. 527 in die Achsenrichtung als Querschnitt.

Sicherheitsregler.

Die Sicherheitsregler haben die Bestimmung, im Falle daß der Hauptregulator, sei es infolge Klemmung, sei es infolge Steckenbleibens oder Undichtseins des Hauptdrosselventils versagt, das Durchgehen der Turbine dadurch zu verhüten, daß, wenn die Maschinengeschwindigkeit den normalen Wert um 10 bis 15 v. H. überschreitet, die Hauptabschließung abgesperrt wird. Hierzu eignen sich am besten Federregulatoren, die meist auf der Hauptwelle selbst untergebracht sind

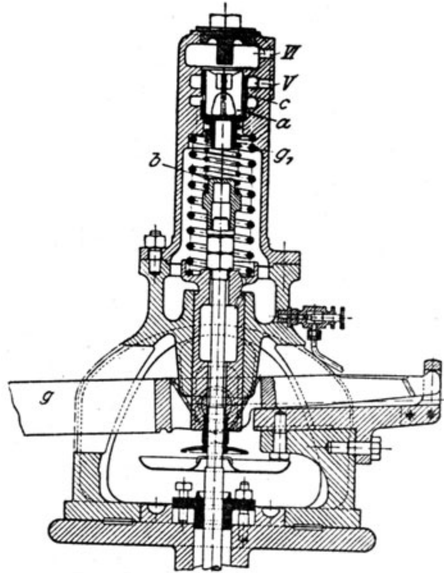
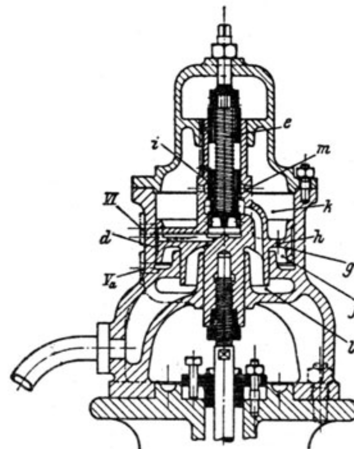


Abb. 528. Steuerung der Überlastventile vom Hauptventil aus.



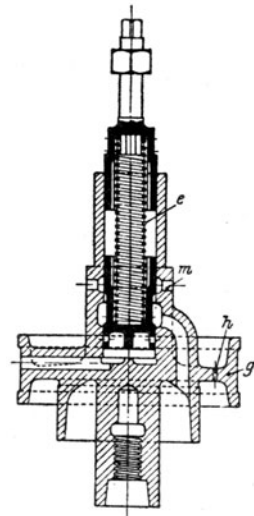


Abb. 528a. Kraftkolbensteuerung der Überlastventile.

und astatisch oder sogar labil ausgeführt werden können, da es nur darauf ankommt, daß sie bei der vorgeschriebenen Drehzahl sicher und rasch in Wirksamkeit treten.

Der Sicherheitsregler der Allgemeinen Elektrizitäts-Gesellschaft, Abb. 529, besteht aus dem Schwungring A, der in Falzen $B_1 B_2$ durch Vorsprünge geführt, infolge der Aussparung C eine (nach abwärts gerichtete) freie Fliehkraft entwickelt. Dieser wird bei der normalen Geschwindigkeit, um Erschütterungen zu vermeiden, durch 10 Ausgleichlöcher D in der Grundbüchse das Gleichgewicht gehalten. Ist die Sicherheitsdrehzahl überschritten, so nimmt der Ring eine exzentrische Lage an und verschiebt hierdurch den Auslöseknaggen. Für vorliegende Ausführung beträgt das Gewicht des Schwungringes 19,96 kg; sein Schwerpunktsabstand 5 mm; die Vorspannung der Feder 110 kg; der Hub 8 mm, die Sicherheitsdrehzahl 1120/min.

Zoelly wendet nach Abb. 530 einen von Anfang an exzentrisch ausgedrehten Schwungring an, mit einem Hub von 8 mm; die Vorspannung der Feder ist 119,5 kg; die Ausklinkdrehzahl 1650. Das Wiedereinklinken, d. h. die Rückkehr in die gezeichnete Stellung, erfolgt bei 1500 Umdr./min.

Der Regler von Brown, Boveri & Cie. besitzt nach Abb. 531 zwei Schwunggewichte $A_1 A_2$, die um symmetrisch gelegenen Bolzen drehbar sind und symmetrisch gelegene Fliehkräfte erzeugen. Die zentral angeordnete Feder ist unterbrochen und wird vermöge Links- und Rechtsgewindes bei $B_1 B_2$ ver-

stellt. Der Ausklinkehebel wird durch den Ansatz C erfaßt und wie in der Seitenansicht dargestellt ist um 25° verdreht. Die in Abb. 517 dargestellte Ausklinkung macht die Kugeln im Übertragungsrohr N

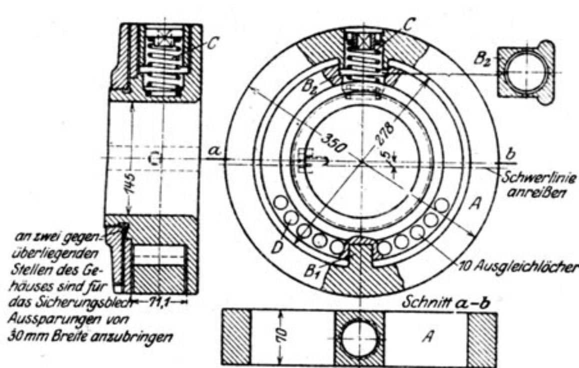


Abb. 529. Sicherheitsregler der A.E.G.

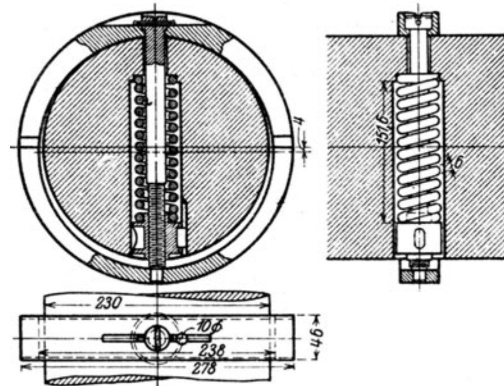


Abb. 530. Sicherheitsregler von Zoelly.

frei, wodurch gemäß Abb. 516 die Stütze des Riegels P nachgibt, so daß sie vom Kolben O vermöge der schiefen Ebene weggedrängt wird, worauf die Feder das Hauptventil S abschließt. Um die Turbine wieder anzulassen, muß mittels des Handrades Spindel T, die zu diesem Behufe bei U ein Spurlager besitzt, zurückgedreht werden, bis Kolben O wieder hochgehoben ist und der Riegel P einschnappen kann.

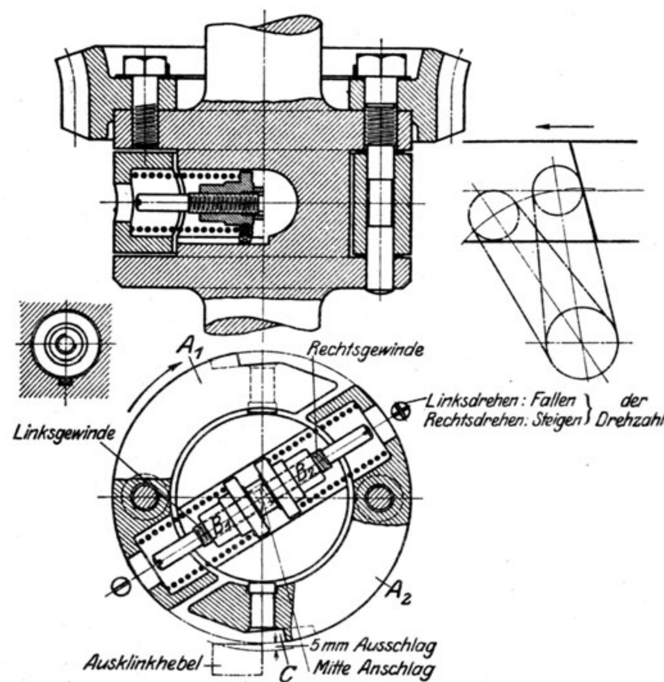


Abb. 531. Sicherheitsregler von B.B.C.

Zubehöre der Regelung. Die Ölpumpen werden neuerdings fast ausnahmslos als Zahnradpumpen ausgeführt, da sich die Kapselwerke mit Flügelkolben für höhere Drucke weniger gut eignen. Abb. 532 zeigt die Ausführungsform von Zoelly.

Die Zahnräder erhalten Evolventenverzahnung mit der beträchtlichen Zahnhöhe von 40 mm auf 160 mm Teilkreis-Durchmesser. Das Spiel der Zahnräder ist axial mit 0,1 mm angenommen. Die Stirnflächen werden obendrein mit je zwei 2 mm tiefen Nuten versehen, durch die den ebenfalls Nuten tragenden Lagerbüchsen Schmieröl zugeführt wird. Damit das Öl aus der Zahnlücke bei der Verdrängung durch den eintretenden Zahn entweichen kann, ist die Grundfläche der Lücke abgeschrägt und es werden die im Längsschnitt Abb. 532a sichtbaren Aussparungen S angebracht.

Um die Lager vor und während des Anfahrens mit Öl versehen zu können, wird eine meist mit Dampf angetriebene Hilfsölpumpe aufgestellt, deren Bauart nach einer Ausführung von Brown,

Boveri & Cie. Abb. 532b veranschaulicht. Ein Kreiselrad K von etwa 150 mm Durchmesser bidet die Pumpe, eine einstufige Turbine T den Antrieb. In kaltem Zustand drückt die sich zusammenziehende

Abb. 532.

Abb. 532a. Zahnradpumpe.

Abb. 532b. Hilfsölpumpe mit Turbinenantrieb.

Welle die durch eine Feder gestützte Labyrinthliderung L etwa herab; in warmem Zustand stellt sich das erforderliche kleine Spiel ein.

Abb. 533.

Abb. 533a.

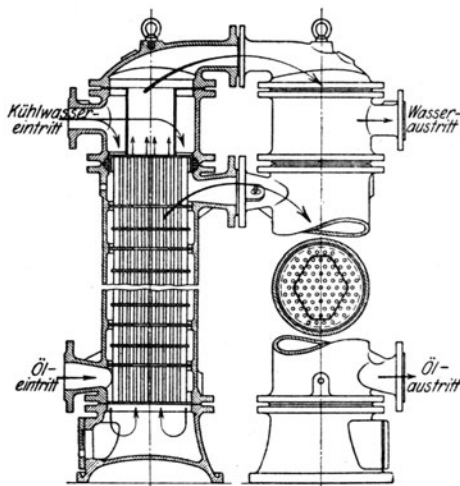
Abb. 533b.

Abb. 533c.

Ölkühler.

Ölkühler. Die Ölkühler bestehen wohl ausnahmslos aus Röhrensystemen, durch die je nach der ausführenden Firma das Öl oder das Kühlwasser zirkuliert. Abb. 533 bis 533c zeigen nach Boella[1]) verschiedene Ausführungsformen, über die folgende Angaben gemacht werden:

Abb.		533	533a	533b	533c
Kühlfläche	qm	2,6	20	19	5,7
Ölgewicht	kg/st	7200	—	9000	2000
Eigengewicht für 1 qm Kühlfläche	kg/qm	135	22,5	36,8	20,8
Wärmedurchgangszahl	Cal/qm/st 1° C	90—160	180—200	70—95	370—490
Das Öl fließt durch oder um die Röhren		um	durch	durch	durch



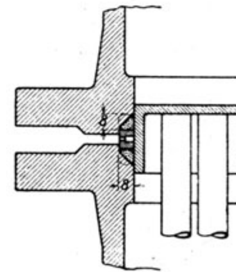


Abb. 534. Abb. 534a.
Ölkühler von Zimmermann.

Hiernach wäre der Kühler Abb. 533c der Wirksamste. Ob die hervortretende Größe seiner Wärmeübergangszahl darin begründet ist, daß jener Kühler aus elliptisch flach gedrückten Röhren gebaut ist, muß dahingestellt bleiben. Der Vergleich des Kühlers Abb. 533,

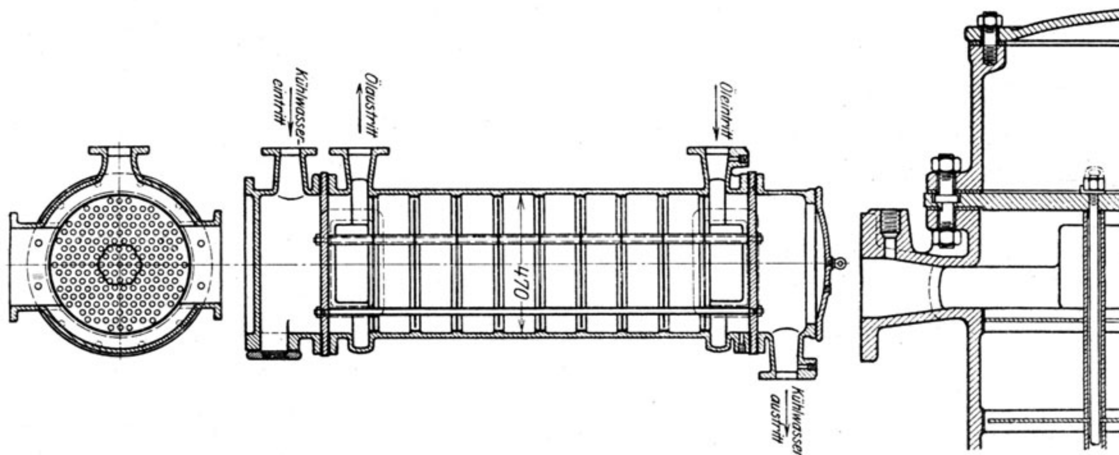


Abb. 535. Abb. 535a.
Ölkühler der A.E.G.

wo das Wasser durch die Röhren strömt und desjenigen Abb. 533b, wo das Öl durch die Röhren strömt, zeigt eher einen Vorteil der erstgenannten Anordnung. Diese wird auch

[1]) Engeneering 1917, Bd. I, S. 198.

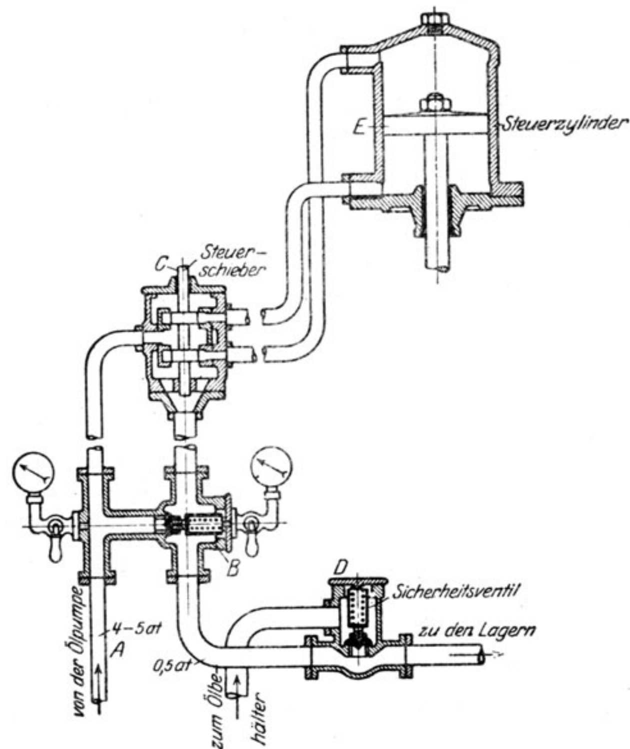


Abb. 536. Ölverteilung der A.E.G.

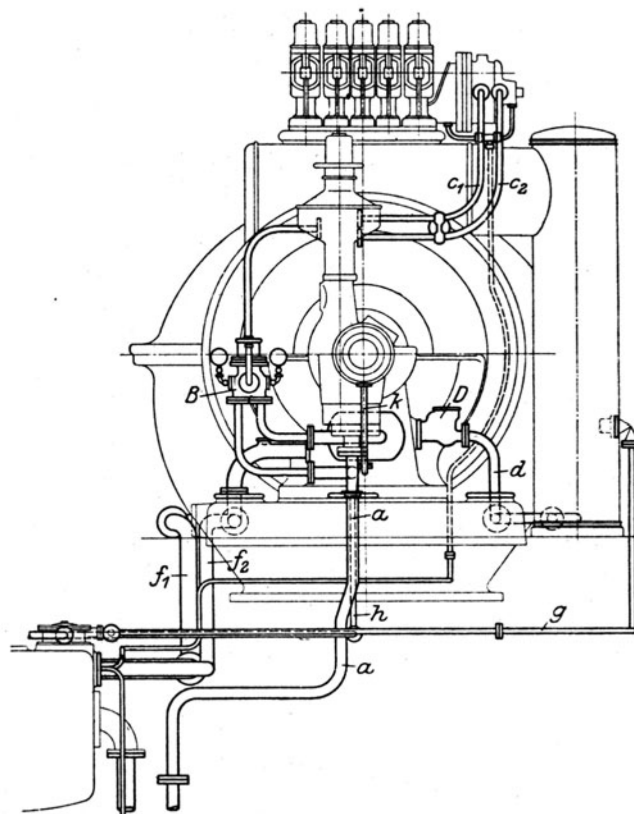


Abb. 538. Stirnansicht zu Abb. 537.

von der bekannten Firma **Dr. O. Zimmermann,** Ludwigshafen a. Rh. bevorzugt, dessen Kühler Abb. 534 die konstruktiv zweckmäßige Anordnung aufweist, daß das Röhrenbündel im Oberteil durch einen verschiebbaren Boden, Abb. 534a, zusammengefaßt, sich frei ausdehnen kann.

Die etwa 15 mm weiten Messingrohre mit Wandstärken von $^3/_4$ bis $1^1/_2$ mm werden nach besonderem Verfahren in die bronzenen Rohrboden entweder hart eingelötet oder eingewalzt. Die bewegliche Bodenabdichtung mit Zwischenring und doppelter Gummischnur ist in Abb. 534a dargestellt.

Die Firma macht mir nachstehende, schätzenswerte Mitteilung über die von der Theorie geforderte Abhängigkeit der Wärmedurchgangszahl von der Strömungsgeschwindigkeit und von der Zähigkeit der Flüssigkeiten. Bei einer Zähigkeitsziffer des Öles von 3 Englergraden, einer Öl-

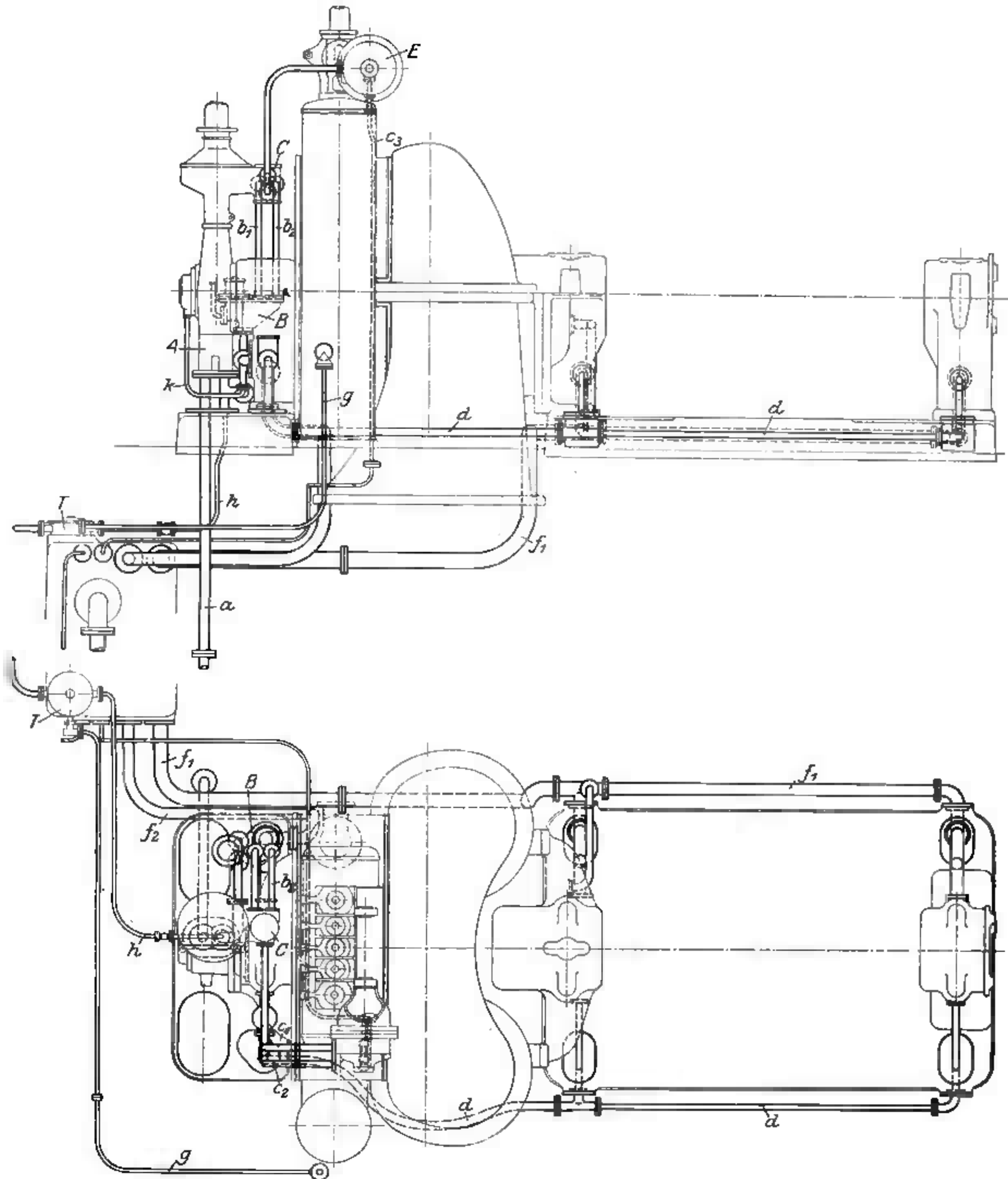


Abb. 537. Ölleitungsplan der A.E.G.

und Wassergeschwindigkeit von je 5 cm/sek ist die Wärmedurchgangszahl 30 Cal/qm/st °C; bei gleicher Ölbeschaffenheit und je 1 m/sek Geschwindigkeit steigt sie auf 750. Besondere Vorsicht ist bei kaltem Wasser und großer Zähigkeit geboten, indem das Öl an den Kühlrohren gewissermaßen „festfrieren", d. h. so dickflüssig werden kann, daß jede Wirbelung aufhört, und die weiter abliegenden Schichten der Kühlwirkung entzogen werden.

Die konstruktive Durchbildung des Ölkühlers ist nach einer Ausführung der **Allgemeinen Elektrizitäts-Gesellschaft** Berlin aus Abb. 535 und 535a ersichtlich. Der Kühler enthält bei 18 qm Kühlfläche 184 Messingrohre mit 21/23 mm Durchmesser.

Anordnung der Ölleitungen.

Seit die unmittelbare Wasserkühlung der Lager nicht mehr üblich ist, besteht die Rohrleitung der Turbine im wesentlichen aus den Öl-, Dampf- und Entwässerungsleitungen.

Je nach der Regelungsart kommt man für die Lagerschmierung und Regelung mit einer Druckölquelle aus oder es müssen zwei vorhanden sein. Das erste Verfahren wird von der Allgemeinen Elektrizitätsgesellschaft durch die in Abb. 536 veranschaulichte Einrichtung ermöglicht.

Das bei *A* mit 4 bis 5 at angelieferte Öl wird bei stillstehendem Regler durch Ventil *B* auf 0,5 at herabgedrosselt und den Lagern zugeführt. Das in der Mittellage des Steuerschiebers *C* durch gewollte unvollständige Überdeckung entweichende Durchflußöl tritt ebenfalls in die Lagerleitung über. Ein stets vorzusehender Überschuß fließt durch Überlaufventil *D* zum Kühler. Tritt der Regler in Wirksamkeit, so fließt von der verdrängenden Kolbenseite des Kraftzylinders *E* ebensoviel Öl ab, als die wirkende aufnimmt. Es steht mithin jederzeit die **gesamte Ölmenge ebensogut den Lagern wie auch der Regelung** zur Verfügung.

Der zu dieser Verteilung gehörende **Ölleitungsplan** ist in Abb. 537, 538 dargestellt. Darin bedeutet *a* die Saugleitung vom Ölkühler her, *A* die Ölpumpe, *B* das Drosselventil, b_1 b_2 Druck- und Ablaufleitung zum Steuerschieber *C*; c_1 c_2 Hin- und Rückleitungen zum Drehkolben des Kraftgetriebes *E*. *D* ist das Überlaufventil, *d* die Druckleitung zu den Dynamolagern, f_1 f_2 die Rückleitungen von den Lagern; c_3 Rückleitung des Sickeröles von *E*, *g* die Dampfleitung zur Turboölpumpe *T*; *h* Öldruckleitung von der Turbopumpe her, *k* Ölleitung zum Sicherheitsregler.

VI. Die Dampfturbinenbauarten.

Die Hauptaufgabe, die jede Dampfturbinenbauart lösen muß, ist die Herabsetzung der Umlaufzahl auf ein praktisch zulässiges Maß unter Wahrung der erforderlichen Betriebszuverlässigkeit und Wirtschaftlichkeit.

Welche Umlaufzahlen praktisch zulässig sind, darüber wird bei den ortsfesten Turbinen in erster Linie der Dynamobau zu entscheiden haben, und zwar im besonderen die Anforderungen der. Wechselstrommaschine. Die in Europa sehr allgemeine Periodenzahl 50 i. d. Sek. läßt im großen ganzen nur die Wahl zwischen 3000, 1500, 1000 und 750 Uml./min für die 2-, 4-, 6-, bzw. 8 polige Maschine. Während bis vor kurzem Wechselstromerzeuger von etwa 15000 kW nicht mehr als 1500 Uml./min machen durften, gilt heute 3000 als wohl erreichbar, und es sind Ausführungen von 25000 kW bei 1500 Uml./min geplant.

Die Länge der Trommeln, die Schwierigkeit des Massenausgleiches, die mögliche Unterstützung der Wellenschwingung durch Unsymmetrie des magnetischen Feldes, die hohe Gleitgeschwindigkeit in den schwer belasteten Dynamolagern lassen indes auch heute den Bau so rasch laufender Maschinen als eine schwierige Aufgabe erscheinen, an die nur Anstalten allerersten Ranges herantreten dürfen. Noch schwieriger ist bekanntlich der Bau der Gleichstrommaschinen. Sehr günstig stellt sich das neuerdings aufgegriffene Gebiet der Kreiselverdichter, das hohe Umlaufzahlen nicht nur zuläßt, sondern verlangt. Aufs äußerste benachteiligt war die Dampfturbine umgekehrt im Schiffsbau, da die Eigenschaften der Schraube zu einer wesentlichen Erniedrigung der Umlaufzahl zwingen. Doch hat hier die Zahnradübersetzung Möglichkeiten eines in seiner Tragweite noch gar nicht übersehbaren Fortschrittes eröffnet.

Die Mittel, die dem Konstrukteur zu Gebote stehen, haben wir im vorangehenden kennen gelernt, — im nachfolgenden wird an Hand von Ausführungen gezeigt, welcher Gebrauch davon gemacht und welche Erfolge erzielt worden sind. Wir halten uns, was die Reihenfolge anbelangt, nicht an die historische Entwickelung, benutzen vielmehr die Stufenzahl als Einteilungsgrund, wobei naturgemäß die Gleichdruckturbine vorauszugehen hat.

103. Turbine von de Laval in der ursprünglichen einstufigen Ausführung.

Carl Gustav Patrik de Laval wurde 1845 im Kirchspiele Orsa der schwedischen Provinz Dalekarlien geboren[1]) und stammt aus einem alten Soldatengeschlecht. Er studierte von 1863 bis 1866 am technologischen Institut der Universität Upsala. Nach kurzer Tätigkeit in der Praxis setzte er seine Studien fort, um besonders in die Mathematik und in die Naturwissenschaft einzudringen. 1872 schloß er seinen Studiengang mit Erlangung der Doktorwürde ab. In der Praxis beschäftigte er sich zuerst im Dienst einer Bergbaugesellschaft mit Schwefelsäurefabrikation und Kupferextraktion. Seine ersten Patente beziehen sich auf Ausbeutung von phosphorsauren Eisen- und Nickelerzen. Sehr bekannt wurden seine Milch-Abrahmmaschinen, die „Separatoren", die ihm die Anregung zur Ausbildung eines als unmittelbare Antriebsmaschine der raschlaufenden Spindeln dienenden Motors brachten. Neben der Dampfturbine beschäftigten de Laval metallurgische Aufgaben, wie elektische Schmelzöfen, Verwertung von armen Blei- und Zinkerzen usw.

Die ursprünglich von de Laval gebaute Turbine war eine einstufige Gleichdruckturbine mit Zahnradübersetzung auf kleine Umlaufzahl. Dank der sorgfältigen Herstellung der Zahnräder können Einheiten bis zu 500 PS gebaut werden.

---

[1]) Dieser kurze Abriß der Lebensgeschichte eines der Vorkämpfer der Dampfturbine ist dem Werke von Matschoß, „Die Entwickelung der Dampfturbine" 1908, Bd. II, S. 614 entnommen.

Schnitte einer 30 pferdigen Einheit sind in Abb. 539 bis 541 dargestellt. Der einseitige Zahnradantrieb wird neuerdings bis zu 500 PS Leistung benutzt, wie Schnitt und Grundriß

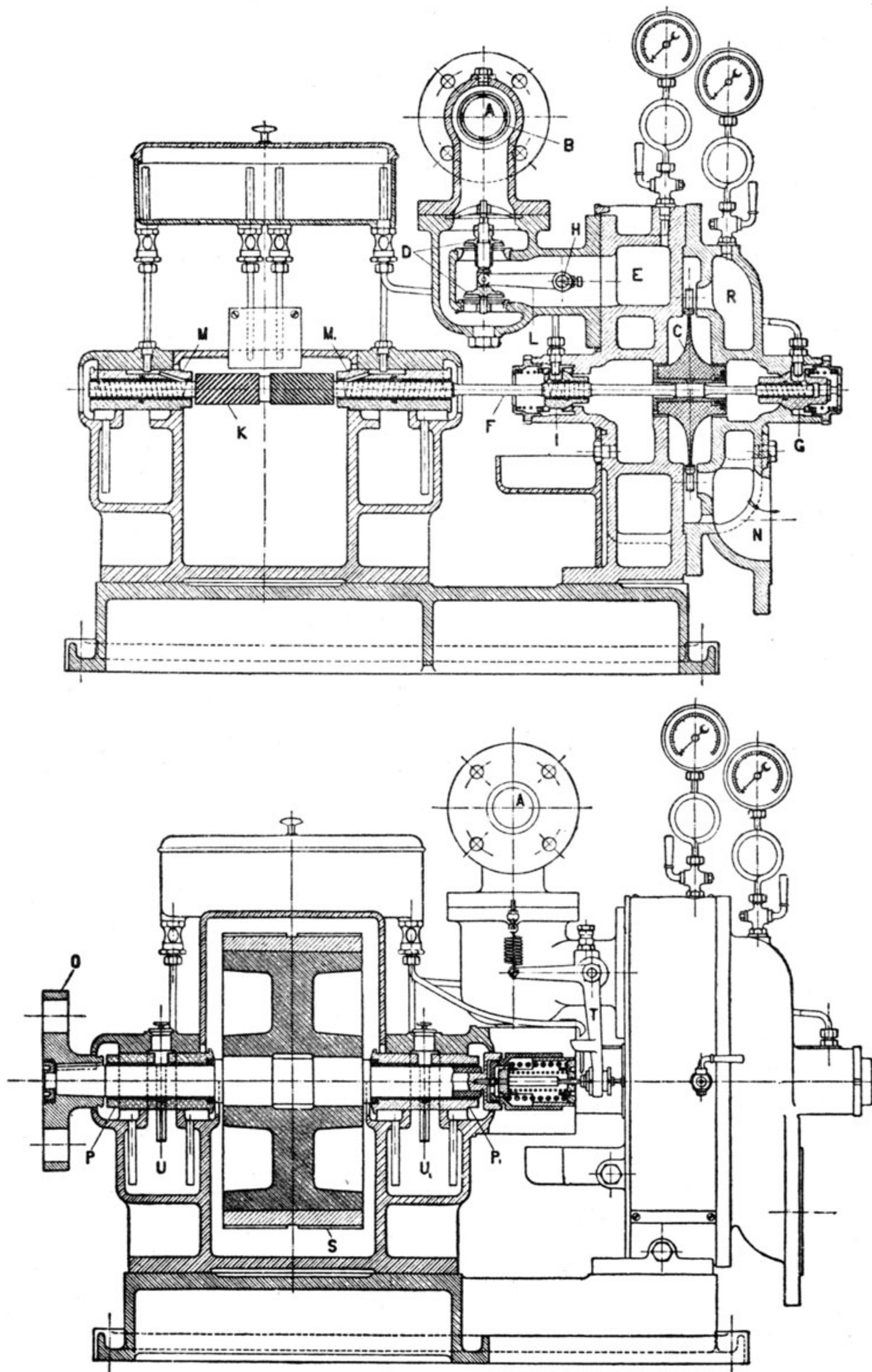


Abb. 539 und 540. de Lavalturbine von 30 PS.

einer derartigen Einheit in Abb. 542 veranschaulicht. Das Außenlager befindet sich hier außerhalb des Dampfraumes. Bei rund 750 mm mittlerem Raddurchmesser und 9870 Umd./min

ist die Umfangsgeschwindigkeit rund 390 m/sek. Das Vorgelege macht 1500 Umdr./min. Bei 50 PS Leistung sind die Drehzahlen für Gleichstromantrieb 20000 und 800/min.

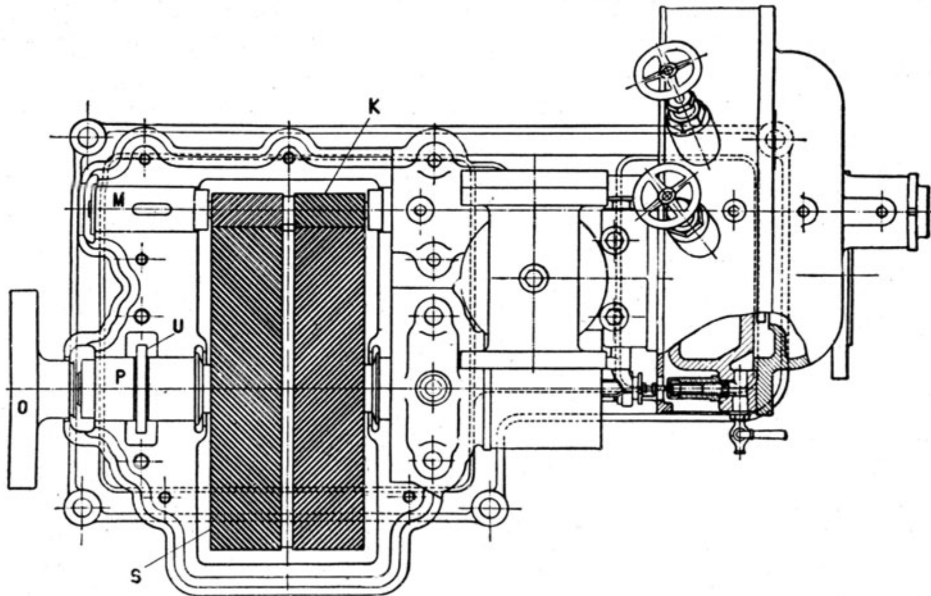


Abb. 541. de Lavalturbine von 30 PS.

Die Regelung beruht auf reiner Drosselung mittels des entlasteten (aus zwei Teilen gleichen Durchmessers zusammengesetzten) Doppelsitzventiles D in Abb. 539 mit direktem Reglerangriff. Bei höchster Reglerstellung wird ein Ventil geöffnet, das die Atmosphäre mit dem Auspuffraum verbindet, wie im Grundriß von Abb. 541 erkennbar und in Abb. 543

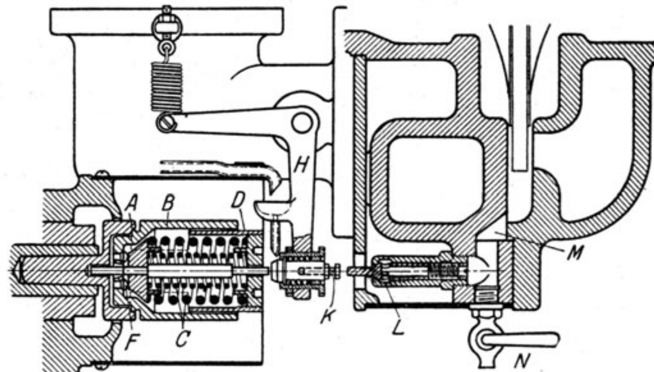


Abb. 543. Aufhebung der Luftleere bei Übergeschwindigkeit.

genauer dargestellt ist, so daß das Vakuum schwindet und die Luftreibung das Rad rascher zum Stillstand bringt. Sind an den gleichen Kondensator noch andere Maschinen angeschlossen, so wird in die Auspuffleitung die Klappe A Abb. 544 eingeschaltet, die mittels E mit N in Abb. 543 verbunden ist und bei Lufteinlaß die Auspuffleitung schließt.

Konstruktion der Einzelteile.

Die Düsen bestehen aus Bronze oder Stahl und werden neuerdings unmittelbar nebeneinander gesetzt. Die Handabschließung einer Einzeldüse, bzw. einer Düsengruppe veranschaulichen Abb. 545 und 546. Meist ist ein Kondensations- und ein Satz Auspuffdüsen vorhanden.

Die Schaufeln werden aus Stahl im Gesenk geschmiedet (s. Abschn. 70), leicht verstemmt, so daß Auswechselung ohne Beschädigung des Rades möglich ist. Die Abnutzung durch den Dampf, der mit einer etwa 800 m betragenden Geschwindigkeit durch die Schaufel

strömt, wird zugegeben, scheint indes auf Jahre hinaus den Dampfverbrauch nicht erheblich zu beeinflussen. So teilte Sosnowski in Revue de Mécanique 1902, Juliheft, mit, daß eine

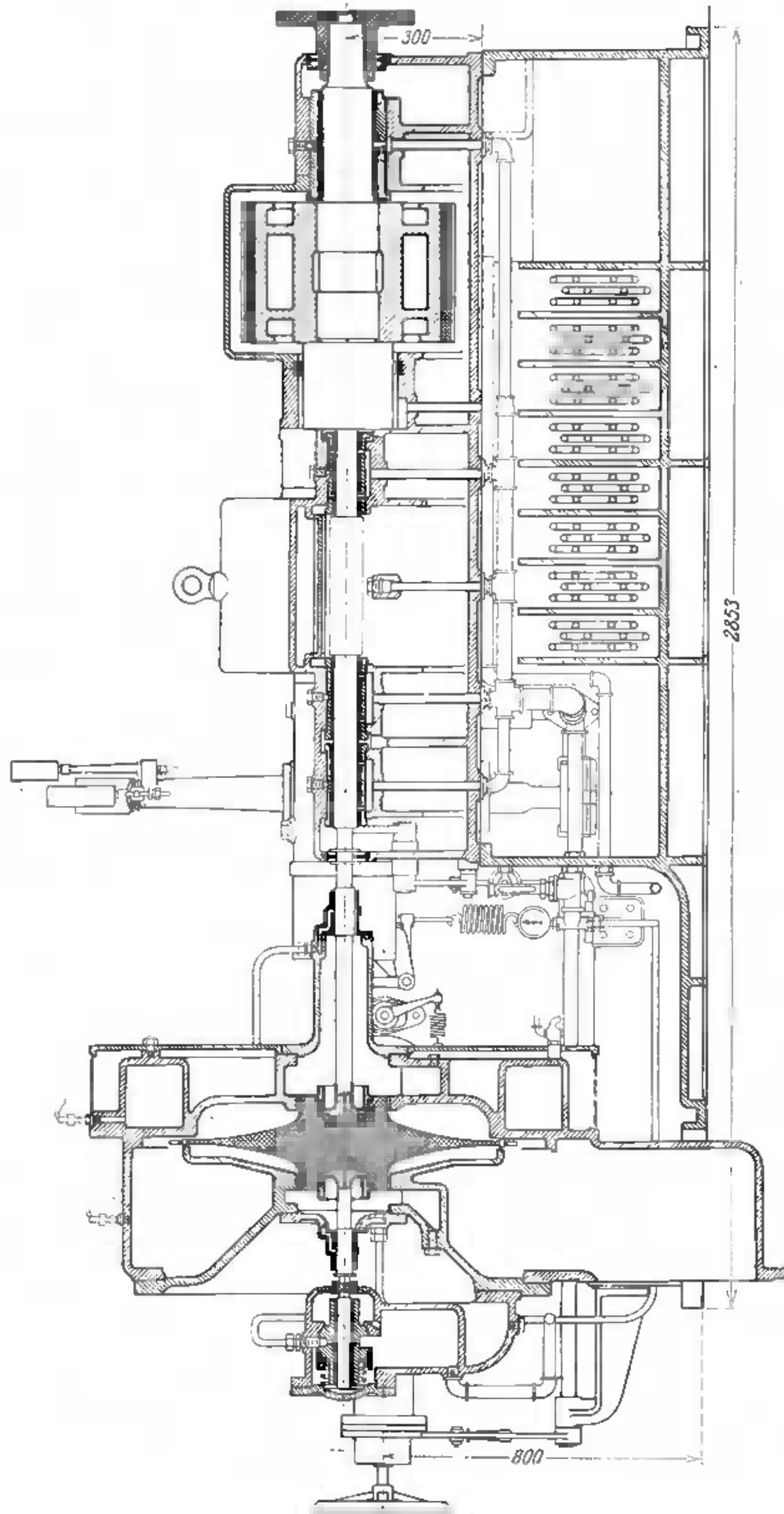


Abb. 542. de Lavalturbine von 500 PS-Leistung mit 390 m/sk Umfangsgeschwindigkeit.

fünf Jahre lang in Betrieb gewesene Turbine bei 64 cm Vakuum 10,07 kg Dampf für die PS_e-st verbraucht habe, während diese Zahl bei einer ganz neuen, am gleichen Orte geprüften

Turbine bei einem um 7 cm besseren Vakuum 9,7 kg betragen habe. Die Kosten der vollständigen Auswechselung der Schaufeln werden als geringfügig angegeben.

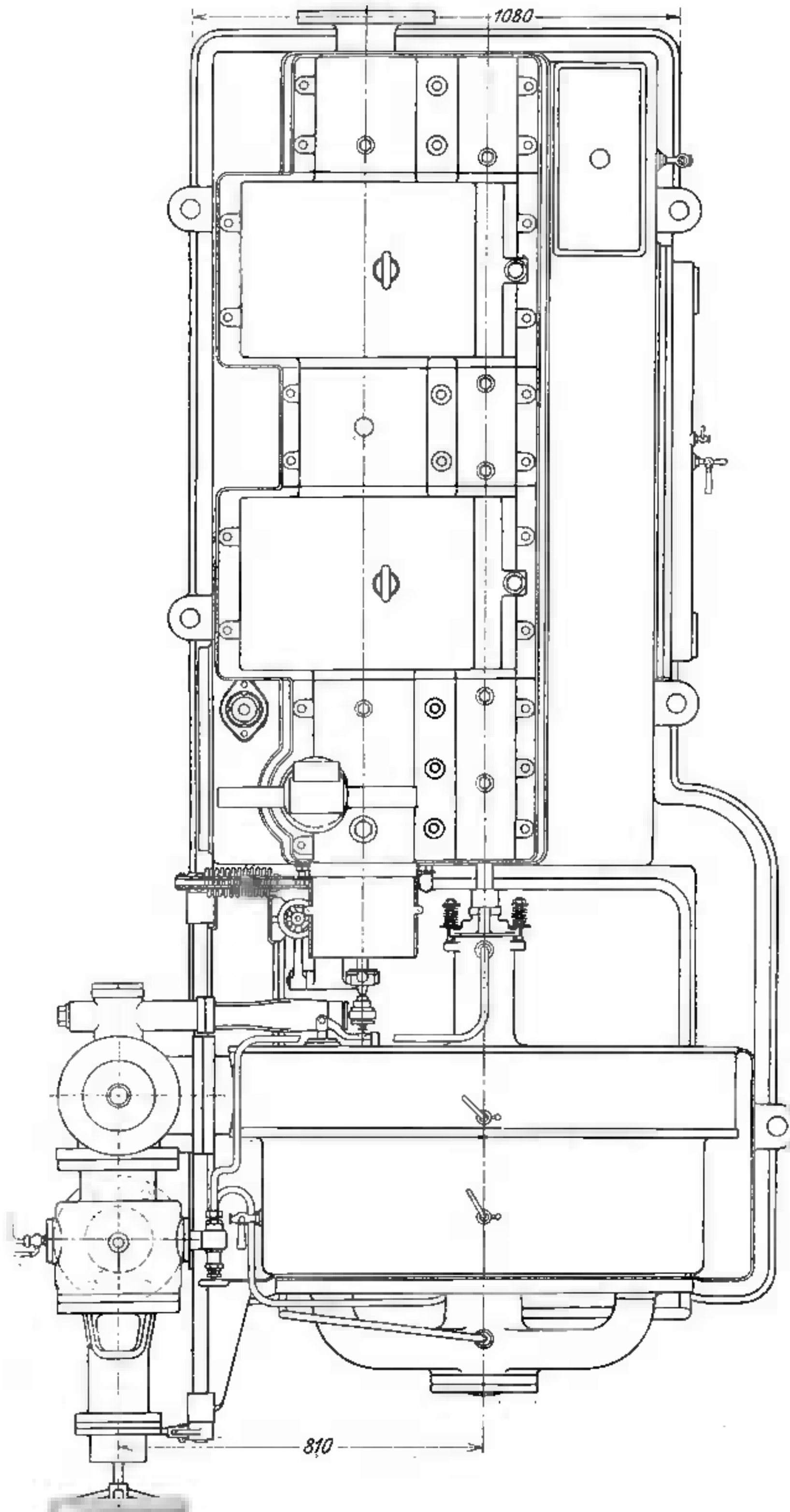


Abb. 542a. Grundriß zu Abb. 542.

Laufräder und Welle wurden in Abschn. 75 und 88 beschrieben.

Die Stopfbüchsen bestehen für kleine Turbinen nach Abb. 547 in der Ausführung

Abb. 544. Schließen der Auspuffleitung bei Übergeschwindigkeit.

Abb. 545.

Abb. 546.

Handregelung.

Abb. 547. Querbewegliche Stopfbüchse.

von Humboldt in Kalk aus Bronze mit Weißmetall-Einguß in Kugellagerung, sind zweiteilig und der Quere nach beweglich. Das Öl wird vorne zugeführt und dringt, durch die Spiralnute zurückgedrängt, langsam ins Innere des Gehäuses, wo es abgefangen und weitergeleitet wird. Bei der 500 PS-Turbine bestehen sie aus einfachen Hülsen, die durch Federn angedrückt, seitlich beweglich und mittels Sperrdampf abgedichtet sind.

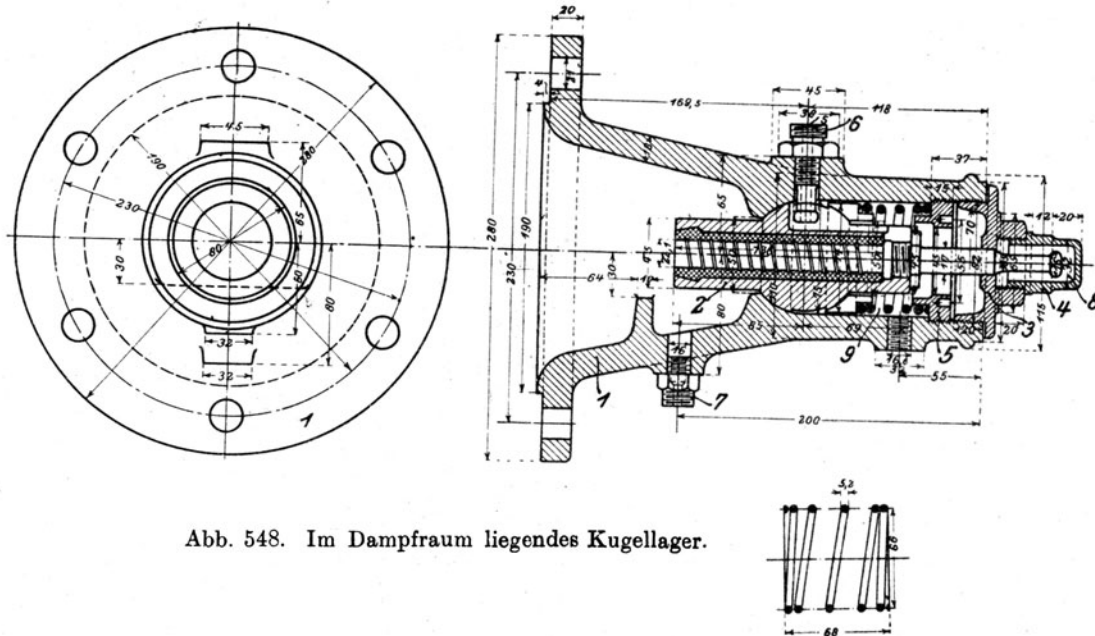


Abb. 548. Im Dampfraum liegendes Kugellager.

Das bei kleineren Einheiten im Innern des Gehäuses untergebrachte Lager wird von Humboldt nach Abb. 548 als Kugellager konstruiert. Der Griff dient zum Herausziehen der einteiligen Schale.

Der Federregler (Abb. 543) mit zwei halbzylinderförmigen Schwunggewichten B ist vorbildlich geworden für manch andere Konstruktion und wird auf einer Vorgelegewelle

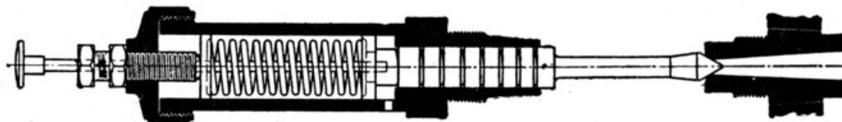


Abb. 549. Selbsttätige Regelung mit abgestimmten Federn.

angeordnet, so daß er bis zu 2300 Uml./min machen muß. Schneide A bildet den Drehpunkt. F ist ein kugelförmige Stütze der Hülse. De Laval hat als einer der Ersten auch die in Abb. 549 dargestellte Reguliervorrichtung angewendet, bei der durch den Regler vor der Turbine eingeleitete Drosselung, infolge verschieden abgestimmter Federkräfte, die Düsenspindeln der Reihe nach zum Schließen veranlassen soll.

Die Zahnräder sind mit ungemein kleiner Teilung als Doppelschraubenräder ausgeführt, damit der axiale Schub aufgehoben werde; es werden Übersetzungen 1 : 10 bis 1 : 13 angewendet. Die Gesamtbreite der Zähne beträgt bei der 500 PS-Turbine etwa 620 mm die Umfangsgeschwindigkeit etwa 36 m/sek.

Versuchsergebnisse.

In den Einzelheiten nachprüfbare Versuche über den Dampfverbrauch liegen in den weit zurückreichenden Mitteilungen von Delaporte vor (Revue de Mécanique 1902, S. 406). Die von ihm untersuchte 200 pferdige Turbine war mit enggestellten Düsen ausgeführt. Die näheren Angaben über den Versuch Nr. 10 sind die folgenden: $p_1 = 10{,}72$ km/qcm abs.; $p_2 = 0{,}166$ kg/qcm abs.; $N_e = 197{,}5$ PS Verbrauch an gesättigtem Dampf 6,9 kg/PS-st. Schädliche Widerstände: Radreibung 10,2 PS, Lagerreibung 2,5 PS. Zahnradvorgelege 2,0 PS. Den Verlust durch das Wiederanfüllen der vor der Düse einherstreifenden entleerten Laufradzellen durch den Dampf der Umgebung schätzt Delaporte auf 1,1 PS. Die schädlichen Widerstände machen nach dieser Rechnung 15,8 PS aus, und die innere Dampfarbeit wäre $N_i = 197{,}5 + 15{,}8 = 213{,}3$ PS. Bezogen auf 1 PS der inneren Dampfarbeit allein beträgt somit der

Verbrauch in 1 Stunde $6{,}90 \cdot 197{,}5 : 213{,}3 = 6{,}39$ kg. Eine Analyse des Versuches auf Grund der älteren Entropietafeln, die rechnerisch auch von Delaporte vorgenommen worden ist, ergibt folgendes:

Verfügbare Wärmeenergie in 1 kg Dampf	154,0 kcal
Verlust in der Düse nach Delaporte 5,2 v. H., d. s. . .	8,0 „
effektive Ausströmungsgeschwindigkeit	$c_1 = 1102$ m
Umfangsgeschwindigkeit nach Delaporte	$u = 343$ „

Der Entwurf eines Geschwindigkeitsplanes mit $\alpha_1 = 20^0$ gibt $w_1 = 787$ m und mit dem probeweise angenommenen $w_2 = 0{,}74\ w_1 = 582$ m, schließlich $c_2 = 326$ m. Die „Bilanz" der Turbine stellt sich wie folgt:

Verlust in der Düse . . . . 8,0 kcal, d. s. 5,2 v. H.,

„ „ „ Schaufel $\left(\frac{787}{91{,}5}\right)^2 - \left(\frac{582}{91{,}5}\right)^2 = 33{,}5$ kcal, d. s. 21,7 v. H.,

„ beim Austritt $\left(\frac{326}{91}\right)^2$ . . . . $= 12{,}7$ kcal, d. s. 8,2 v. H.

Gesamtverlust . . . . 35,1 v. H.

Da nun bei 154 kcal für 1 kg die ideale Turbine $632/154 = 4{,}13$ kg Dampf für die PS-st erfordert, beträgt der Gütegrad der inneren Dampfarbeit $\eta = 4{,}13/6{,}39 = 0{,}649$, oder der Verlust 35,1 v. H. in guter Übereinstimmung mit obigen Annahmen. Die Analyse führt somit, falls wir den von Delaporte für die Düse angenommenen kleinen Verlust als richtig zulassen, auf einen großen Verlust in der Laufschaufel, nämlich $1 - (0{,}74)^2$, d. s. 45 v. H. der anfänglichen kinetischen Energie. Wenn man den Düsenverlust zu 10 v. H. ansetzt, so ergibt sich $w_2 =$ rd. $0{,}83\ w_1$, also der Schaufelverlust rd. 30 v. H. der anfänglichen Energie.

Auf die effektive Leistung bezogen beträgt der thermodynamische Wirkungsgrad $\eta_e = 4{,}13/6{,}9 = 0{,}60$. Über den Dampfverbrauch einer neueren 500 PS Einheit teilt die Firma folgendes mit:

Nutzleistung	kW	189,7	251,5	371,4
Drehzahl	i. d. Min.	734	725	716
Dampfüberdruck nach dem Regul.-Ventil	kg/cm²	11,0	10,0	10,7
Barometerstand	cm Qs.		75,7	
Absoluter Kondensator-Druck	„	4,1	5,2	6,9
Dampftemperatur vor der Turbine . .	°C	252	245	252
Dampfverbrauch	kg f. d. kW/st	9,53	9,31	8,92

104a. Turbine von Seger.

Die Turbine von Seger[1]) war die erste Turbine mit einer Druck- und zwei Geschwindigkeitsstufen in der besonderen Anordnung, daß der aus dem ersten Laufrade tretende Dampf

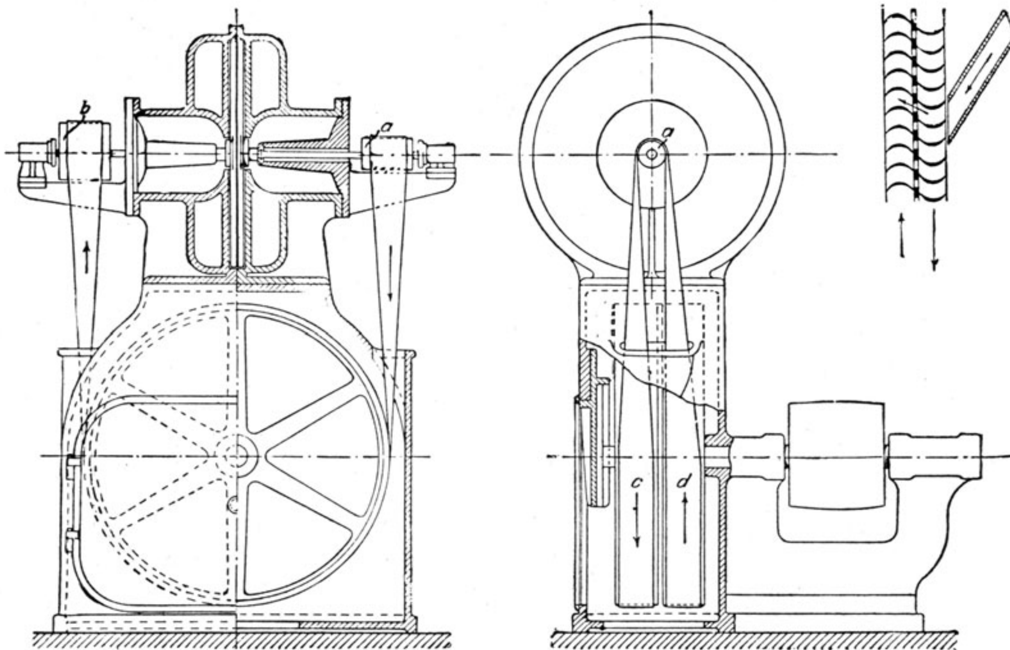


Abb. 550.

[1] Nicht zu verwechseln mit dem Erfinder des Reaktionsrades „Segner".

unmittelbar in ein zweites entgegengesetzt umlaufendes Laufrad einströmt. Seger übertrug die Leistung der beiden Räder durch einen einzigen Riemen auf die rechtwinklig geschränkte Hauptwelle (Abb. 550) und erzielte durch geeignete Wahl der Scheibengrößen die Übersetzung, die durch die Verschiedenheit der Umfangsgeschwindigkeiten bedingt war.

Über den Dampfverbrauch gibt folgender Versuch[1]) Aufschluß:

Drehzahl des ersten Rades	8400 i. d. M.	Eintrittsdruck abs	$p_1 = 7{,}5$ kg/qcm
Drehzahl des zweiten Rades	4200 „	Kondensatordruck abs.	$p_2 = 0{,}111$ kg/qcm
Drehzahl des Vorgeleges	700 „	Bremsleistung	$N_e = 60{,}85$ PS_e

Dampfverbrauch f. d. PS_e-st . . . . $G_e = 10{,}50$ kg.

Mit freiem Auspuff betrug der Dampfverbrauch nach anderweitiger Mitteilung bei 6600 bzw. 3300 Umdr./min und 7,79 kg/qcm Eintrittsüberdruck, 61,37 PS_e-Leistung 16,7 kg·PS_e·st.

Die Fabrikation der Seger-Turbine ist dem Vernehmen nach aufgegeben.

104 b. Die „Elektraturbine“ der A.-G. Kühnle, Kopp & Kausch in Frankenthal.

Die ursprünglich von Ing. Kolb entworfene Elektraturbine wird durch die Verwendung mehrfacher Geschwindigkeitsabstufung mit radialer Beaufschlagung der Laufräder bei einer bis drei Druckabstufungen gekennzeichnet. Die besondere Eignung der radialen Beaufschlagung

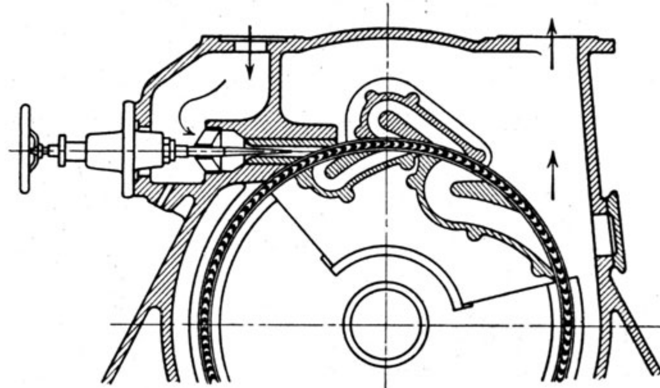


Abb. 551. Elektraturbine.

hierzu zeigt Abb. 551 mit vierfacher Geschwindigkeitsabstufung. Die Querschnitte der Umführungskanäle müssen der verringerten Geschwindigkeit bei gleichbleibender Schaufelung durch Vergrößerung der lichten Weite angepaßt werden. Abb. 552 zeigt die Ausführungsform für die kleine Leistung von 8 PS bei 5000 Umdr./min. Die Turbine ist mit Kohlenstopfbüchsen, Ringschmierlagern und einem Federregulator ähnlicher Konstruktion wie bei de Laval ausgestattet, der auf ein Drosselventil *D* einwirkt. Außerdem ist eine Sicherheitsabschließung, die durch Welle *W* und Riegel *R* wirkt, vorhanden. Die Turbine arbeitet mit freiem Auspuff, daher die kurzen Stopfbüchsen.

Abb. 553 stellt eine Einheit von 750 PS bei 1500 Umdr./min dar, die aus der ersten Druckstufe Heizdampf abzugeben hat, während die zweite Stufe bei *K* mit dem Kondensator verbunden ist. Die Lagerschalen haben Kugelstützflächen. In *S* am Wellenende ist der Sicherheitsregler eingebaut; die zur Niederdruckstufe führenden Überströmventile V_1 V_2 werden nur von Hand betätigt. Die neueste Ausführungsform Abb. 554 zeigt den Längsschnitt einer Turbine von 1000 PS bei 3500 Umdr./min und drei Druckstufen. Abb. 555 ist der Schnitt durch das Hochdruckrad mit zwei Geschwindigkeitsstufen, Abb. 556 der Schnitt durch das Mitteldruckrad mit zwei, und das Niederdruckrad mit einer Geschwindigkeitsstufe. Abb. 557 zeigt die Außenansicht der Regelung. Das Hochdruckrad wird durch zwei von Drosselreglern beeinflußte Düsen und einer von Hand zu betätigenden Überlastdüse beaufschlagt. Das Mitteldruckrad erhält 6 Düsen. Infolge der zunehmenden Wellenstärke ist die Turbine mit einem Kammlager am Hochdruckende versehen. Nach Lichtbild 558 wird bei größeren Einheiten auch von Kraftgetrieben Gebrauch gemacht, die unmittelbar

[1]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1901, S. 641.

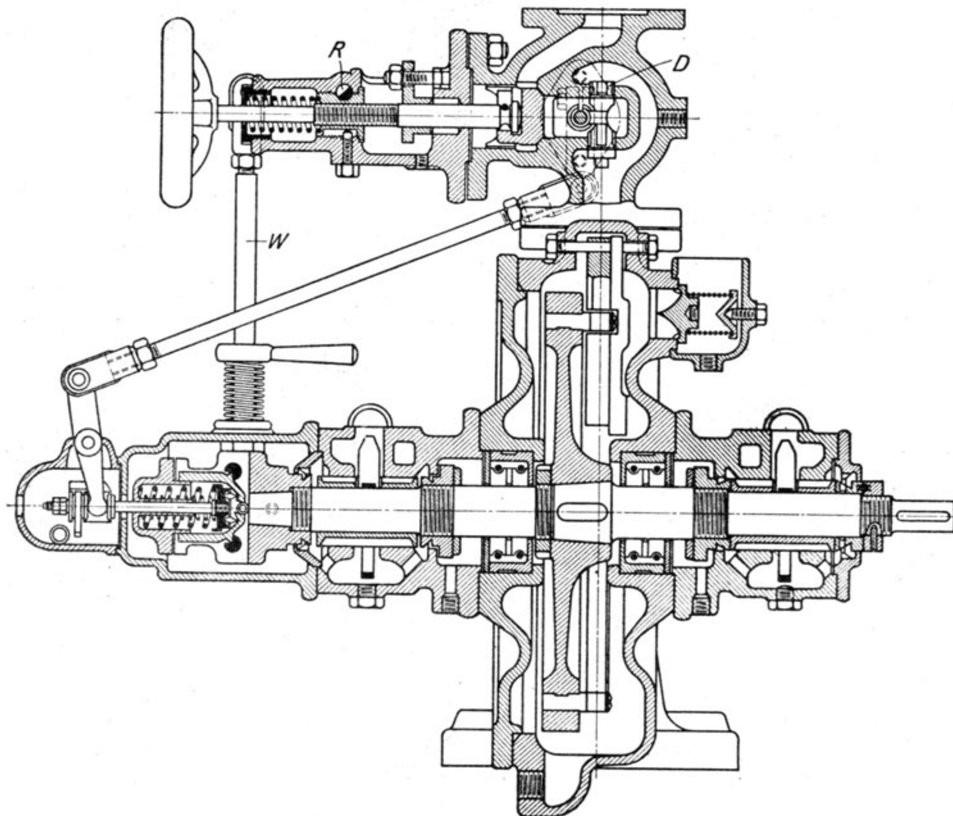


Abb. 552. Elektraturbine von 8 PS bei 5000 Umdr./min.

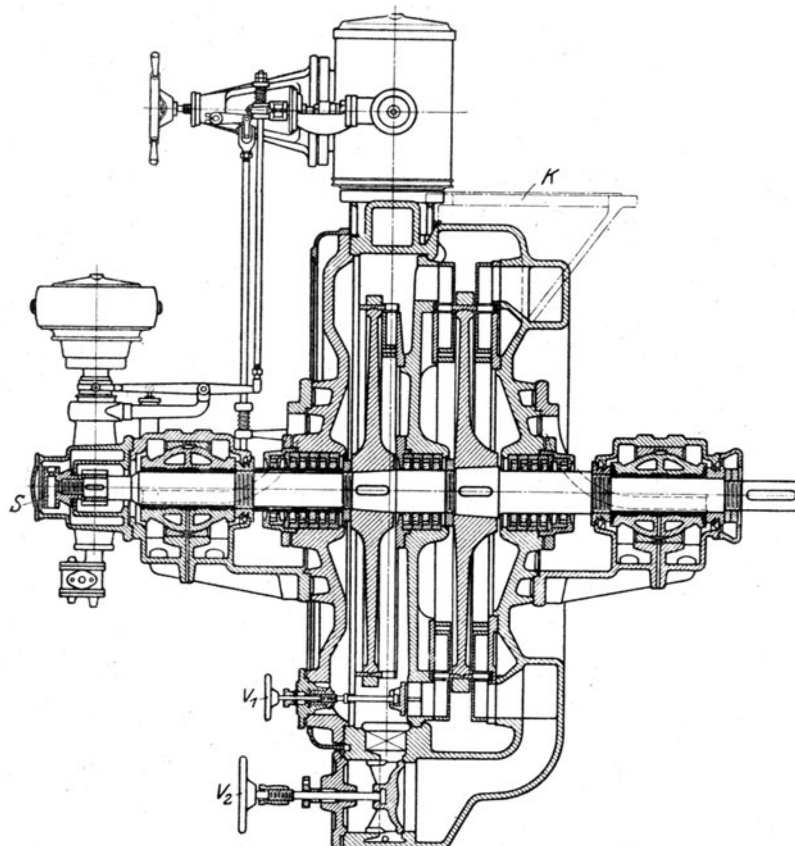


Abb. 553. Elektraturbine von 750 PS-Leistung bei 1500 Umdr./min.

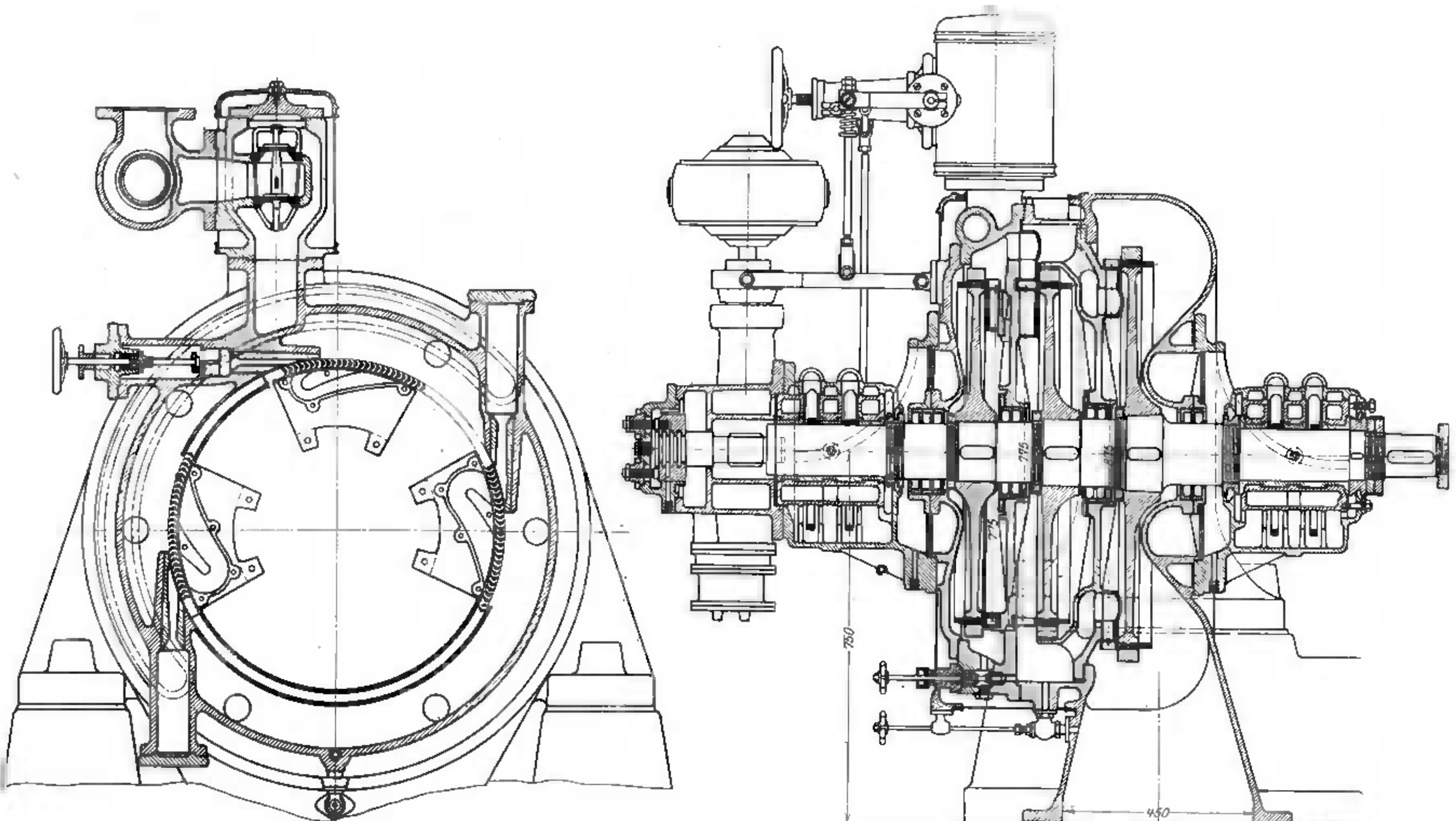


Abb. 555. Schnitt durch das Hochdruckrad zu Abb. 554.

Abb. 554. Dreistufige Elektraturbine von 1000 PS-Leistung bei 3500 Umdr./min.

auf die Kegelspindeln der Hochdruckdüsen einwirken. Von den konstruktiven Einzelheiten sind zunächst die Düsen hervorzuheben, die gemäß Abb. 551 durch einen schlanken Kegel so verengt werden, daß bei abnehmender Belastung dem sinkenden Stufendruck entsprechend

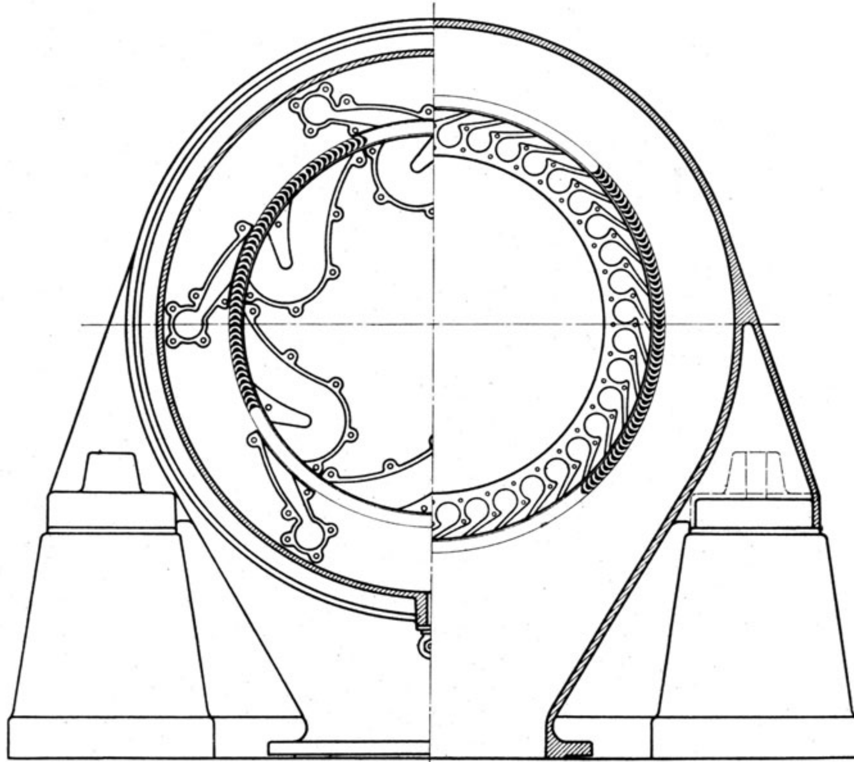


Abb. 556. Schnitt durch das Mittel- und das Niederdruckrad zu Abb. 554.

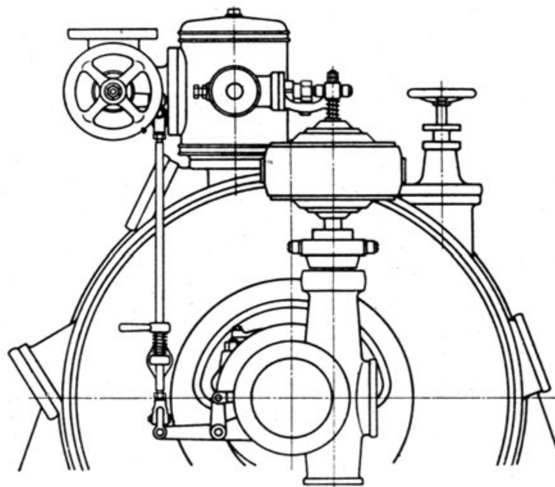


Abb. 557. Regelung zu Abb. 554.

der Mindestquerschnitt der Düse verkleinert wird[1]). Die Schaufeln werden aus profilierten Stäben gefräst und durch einen warm aufgezogenen Ring aus hochwertigem Baustoff zusammengehalten. Um diesen Ring keinen Biegungsbeanspruchungen auszusetzen, sind, wie

[1]) An der ursprünglichen Elektraturbine war nach Abb. 559 eine Mengenregelung mit einer verschiebbaren Zunge, in der mit einem rechteckigen Querschnitt versehenen Düse in Gebrauch, wobei das Verhältnis des äußersten zum Mindestquerschnitt dem jeweiligen Ausdehnungsverhältnis angepaßt sein sollte.

besonders aus Abb. 554 hervorgeht, die Schaufeln jenseits der Beaufschlagungsseite verlängert, so daß der Schwerpunkt jeder einzelnen davon in die Scheibenmitte fällt[1]).

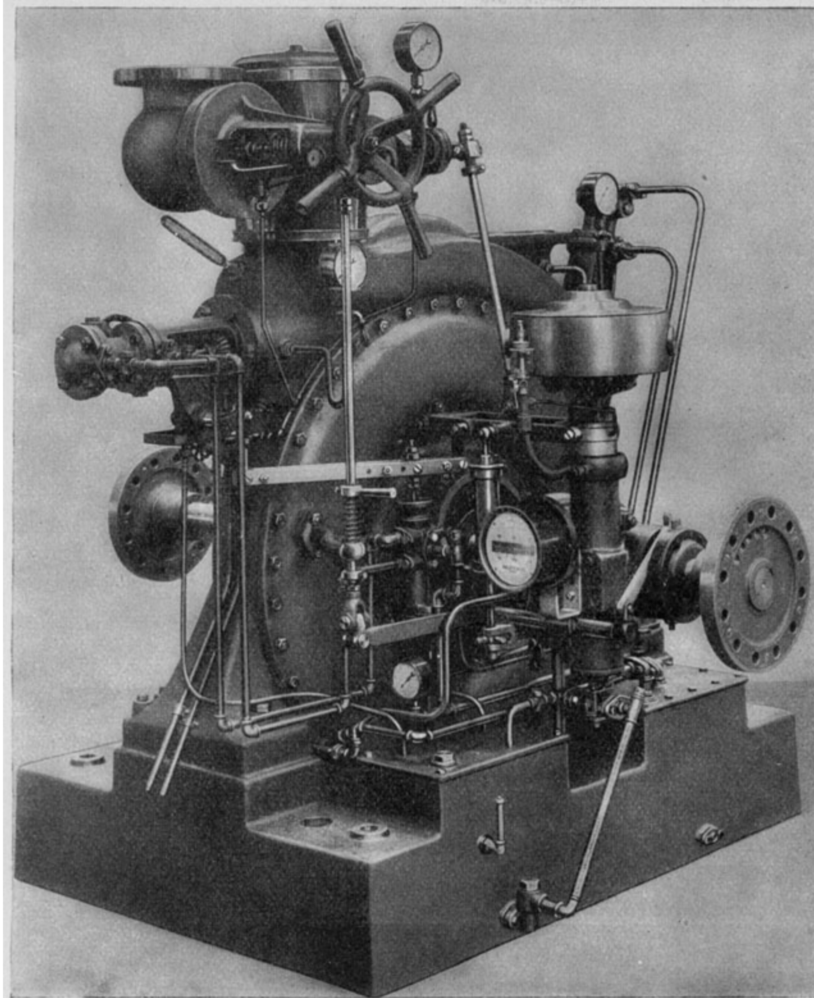


Abb. 558. Elektraturbine mit Regler-Kraftgetriebe.

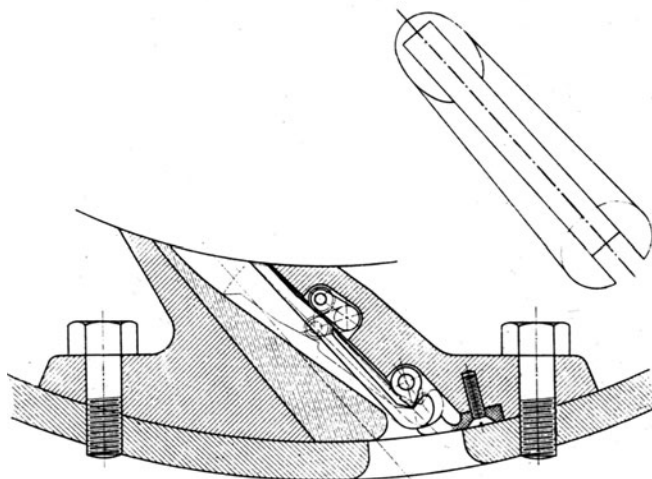


Abb. 559. Alte Düse für Mengenregelung.

[1]) Die ursprüngliche Elektraturbine benutzte auch die in Abb. 560 dargestellte Schaufelbauart, bei der die Schaufeln durch schwach konische Ringe *f* festgehalten werden. Bohrung *g* diente zum Festhalten wie auch mittels besonderer Abpreßschrauben zum Herausdrücken des (gegenüberliegenden) Ringes.

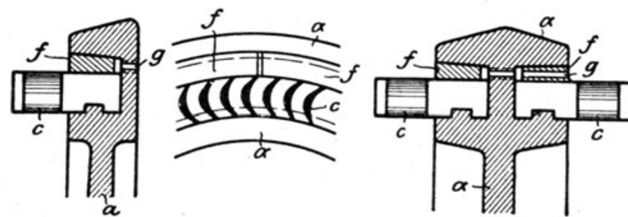


Abb. 560. Ältere Schaufelbefestigung.

Abb. 561. Elektraturbinen-Anlage.

Versuchsergebnisse.

An einer älteren zweistufigen Etektraturbine von 450 PS_e Leistung wurden von Prof Brauer[1]) folgende Ergebnisse festgestellt.

Belastung	Druck des Dampfes vor den Düsen	Temperatur des Dampfes vor den Düsen	Druck des Dampfes im Zwischenbehälter	Druck des Abdampfes	Temperatur des Abdampfes	Uml./min	Leistung		Dampfverbrauch	Dampfverbrauch für 1 PS_e/st	Dampfverbrauch für 1 PS_e auf 90 v. H. Vakuum umgerechnet	Thermodynamischer Wirkungsgrad (Zust. v. d. Düsen, eff. Leist.)
	at abs.	°C	at abs.	at abs.	°C		kW	PS_e	kg/st	kg/st	kg/st	v. H.
4/4	13,5	298	1,05	0,118	60	2010	310,8	458	3129	6,82	6,45	51,5
3/4	13,3	286	0,83	0,113	55	2000	247,0	373	2567	6,87	6,60	51,0
2/3	11,3	294	0,75	0,106	61	1980	203,3	313	2248	7,18	7,06	48,1
1/2	9,1	290	0,60	0,107	65	1975	147,2	224	1835	8,18	8,11	43,6
1/3	7,2	272	0,46	0,115	64	1990	103,3	165	1525	9,24	8,85	42,0

Über den Dampfverbrauch der neuen Elektraturbine geben die nachfolgenden Mitteilungen der Herstellerin Auskunft.

Raddurchmesser mm	Leistung PS	Drehzahl in der Minute	Bemerkungen	Dampf- Überdruck at	Dampf- Temperatur °C	Gegendruck at Überdruck	Dampfverbrauch kg f. d. PS/st
300	8	3000	mit Dynamo	8	175	0	28
475/475	40	3000	mit Dynamo	9½	182	0,3	16,5
875/875	100	1500	„ „	10	250	0,5	16
1000	200	1450	mit selbstätiger Düsenregulierung	8	175	0,2	20
1200/1200	775	1600	für Gegendruck „ Kondensation	12 12	350 350	1,2 80 v. H. Vakuum	13 9
775/725	350	3000	Entnahme Turb.	9,5	290	75 „ 0,6 at Überdruck	8¾ 16

Die Gesamtanlage einer mit zwei Elektraturbinen von je 75 PS_e und 1 Turbine von 200 PS ausgestatteten Zentrale (im Gaswerk Kassel) wird durch Abb. 561 veranschaulicht.

105. Die Riedler-Stumpf-Turbine.

Des wesentliche Kennzeichen der früher von der Allgemeinen Elektrizitätsgesellschaft in Berlin gebauten Riedler-Stumpf-Turbine besteht in der eigenartig geformten Pelton-Schaufel, Abb. 562, mit radialer Beaufschlagung des Laufrades.

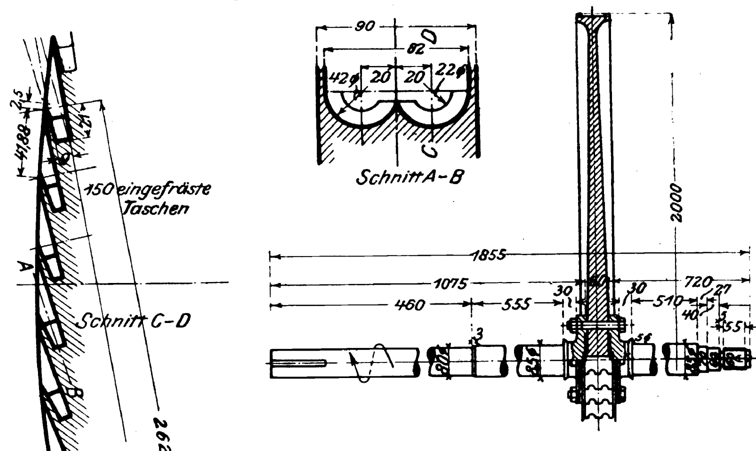


Abb. 562. Riedler-Stumpf-Turbine von 2000 PS.

[1]) Nach Meuth, Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1908, S. 182.

Abb. 563 veranschaulicht die 2000 pferdige Turbine in der Zentrale Moabit der Berliner Elektrizitätswerke, die mit einem Rad und einstufiger Wirkung konstruktiv eine nicht zu übertreffende Einfachheit darbietet. Das zugehörige Laufrad besitzt nach Abb. 562 eine symmetrische Doppelschaufel mit zentral eintretendem Dampfstrahl.

Abb. 563. Gesamtanordnung zu Abb. 562.

Da es auf der Hand lag, daß bei einstufiger Wirkung die günstigste Umfangsgeschwindigkeit kaum erreicht werden kann, wurden nach Abb. 564 Geschwindigkeitsstufen eingeführt. Es sind zwei Schaufelreihen im gleichen Kranz nebeneinander angeordnet. Der Strahl tritt in der Mitte ein und wird beim Verlassen der ersten Reihe durch die Umkehrschaufeln gefaßt und auf die zweite Reihe geleitet, die der verminderten Dampfgeschwindigkeit entsprechend steiler gestellt sind. Um den Düsen auszuweichen, muß ein weiter Bogen beschrieben werden, was erhöhte Reibungen bedingen muß. Doch ist anderseits durch Zusammenrücken der Düsenenden ein nahezu zusammenhängender Dampfstrahl erzielt.

Abb. 564. Umkehrkanäle.

Versuchsergebnisse.

Über eine in der Zentrale Moabit der Berliner Elektrizitätswerke aufgestellt gewesene 2000 pferdige Riedler-Stumpf-Turbine liegen folgende Mitteilungen von F. Rötscher[1]) vor. Die normale Umlaufzahl war 3000, was mit 2 m Raddurchmesser 314 m/sek Umfangsgeschwindigkeit ergibt. Die Turbine arbeitete einstufig mit Kondensation. Die Umlaufzahl wurde bis auf 3800 i. d. Min. gesteigert, daher mit dem in Abb. 562 dargestellten Rad 398 m/sek Geschwindigkeit erreicht. Die Beanspruchung des Rades in den Bohrungen der Nabe muß hierbei eine ungewöhnlich hohe gewesen sein. Die Nebenverluste sind sehr sorgfältig ermittelt worden und ergaben die Lagerreibung mit der Umlaufzahl verhältnisgleich wachsend, und zwar 14 PS bei 3000 Uml./min. Für die Radreibung (und Ventilation) fand Rötscher in Pferdestärken

$$N_r = 5{,}8 \cdot 10^{-8} \gamma n^{2{,}82},$$

[1]) Mitteil. üb. Forschungsarb. 1908, Heft 50.

wo n die Min.-Drehzahl bedeutet. Bei 90 v. H. Vakuum beträgt N_r etwa 22 PS. Die Strahlungsverluste erreichen bei voller Leistung nur etwa 0,5 v. H. des verfügbaren Gefälles. Die Hauptergebnisse sind in nachstehender Zahlentafel vereinigt:

Versuche von Rötscher an einer 2000pferdigen Riedler-Stumpf-Turbine 1902 und 1903.

Anfangsspannung vor den Düsen	14		11		7		kg/qcm abs.
Dampftemperatur vor den Düsen	264		253		214°		C
Vakuum	91		92		93,6		v. H.
Gesamt-Dampfmenge	3,25		2,66		1,728		kg/sek
Umlaufzahl	1800	3800	1800	3800	1400	3400	i. d. Min.
Effektive Leistung (ohne Abzug für Luftpumpe)	1278	2030	985	1590	502	905	PS
Thermodyn. Gesamtwirkungsgrad bez. auf effektive Leistung und Zustand vor der Düse	35,7	56,7	34,6	55,9	28,9	52,2	v. H.
Verlust in der Düse (geschätzt)	15		17,5		20		„ „
„ „ „ Schaufel	35,4	22,9	36,0	22,9	36,8	15,2	„ „
„ „ „ Auslaßgeschwindigkeit	12,8	1,7	10,6	1,3	12,8	1,5	„ „
„ „ „ Lager- und Radreibung	0,6	3,2	0,7	1,8	0,5	1,9	„ „
Verlust durch Strahlung	0,5	0,5	0,6	0,6	1,0	1,0	„ „

Der Düsenwinkel war $\alpha_1 = 11^0 4'$, der Schaufelwinkel $\beta_1 = \beta_2 = 17^0\,38'$. Für die maximale Leistung bei 3800 Uml./min folgt hieraus die relative Eintrittsgeschwindigkeit $w_1 = 790$ m/sek, die relative Austrittsgeschwindigkeit $w_2 = 530$ m/sek, daher die Geschwindigkeitszahl $\psi = \frac{w_2}{w_1} = 0{,}672$. Aus obigen Angaben kann man weiterhin nachrechnen, daß bei 1900 Uml./min der Eintritt nicht mehr stoßfrei war, sondern einem Stoßwinkel von rd. 5^0 entsprach. Trotz dieser kleinen Abweichung sinkt die Geschwindigkeitszahl sofort auf den Wert $\psi' \simeq 0{,}5$, was auf eine besondere Empfindlichkeit der Stumpfschen Schaufelform gegen Stoß schließen läßt.

Die ungünstige Schaufelwirkung im Verein mit der Abnutzung infolge der hohen Dampfgeschwindigkeit und Schwierigkeiten mit den ungleich erwärmten Scheiben waren wohl die hauptsächlichen Gründe, warum die Allgemeine Elektrizitätsgesellschaft den Bau dieses Turbinensystems aufgegeben hat.

105a. Die Terry-Turbine.

Die Terry Steam Turbine Co. in Hartford, Conn., baut die in Abb. 565 dargestellte Turbine mit einem Laufrad der Stumpfschen Art, und fünfmaliger Geschwindigkeitsabstufung nach Abb. 566. Neben einfacher Drosselregelung sind von Hand einstellbare Zusatzdüsen vorhanden. Die Umkehrschaufeln besitzen schiefe Scheidewände, so daß der

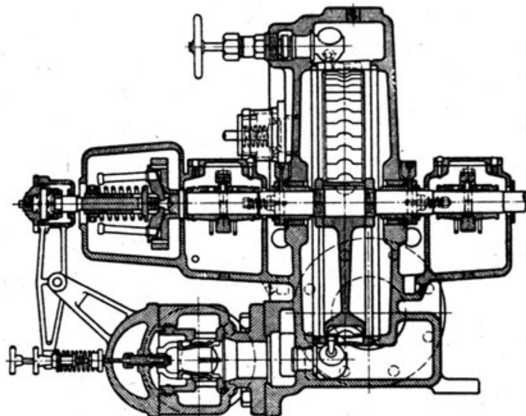


Abb. 565. Terryturbine.

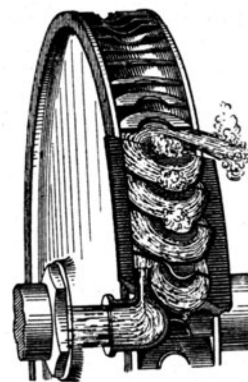


Abb. 566. Fünffache Strahlwendung der Terryturbine.

Dampfstrahl im Sinne der Strömung aus einer Schaufel in die nächst vorangehende geführt wird. Über den Dampfverbrauch macht die Erstellerin nach Zeugnissen der Marine der Vereinigten Staaten folgende Angaben.

Terry-Turbine für Ventilatorantrieb.

Gegendruck at Überdr.	0,0				0,721			
Drehzahl i. d. Min.	1000		1600		1000		1600	
Dampfdruck at Überdr.	6,62	9,41	10,7	15,5	5,77	7,96	10,7	15,1
Leistung PS_e	23,5	33,5	38,0	55,2	20,5	28,2	38,0	53,5
Dampfverbrauch f. d. PS_e/st·kg/st	37,9	26,6	35,6	25,9	43,5	31,6	37,6	26,7
Raddurchmesser	610 mm							

Der Gesamtverbrauch i. d. Stunde nimmt innerhalb der angegebenen Grenzen mit der Leistung linear zu.

106. Die Turbine der General Electric Company in Schenectady.

Die General Electric Company in Schenectady hat ursprünglich ein auf den Patenten von Curtis fußendes, in allen Teilen originelles, Turbinensystem entwickelt, das als

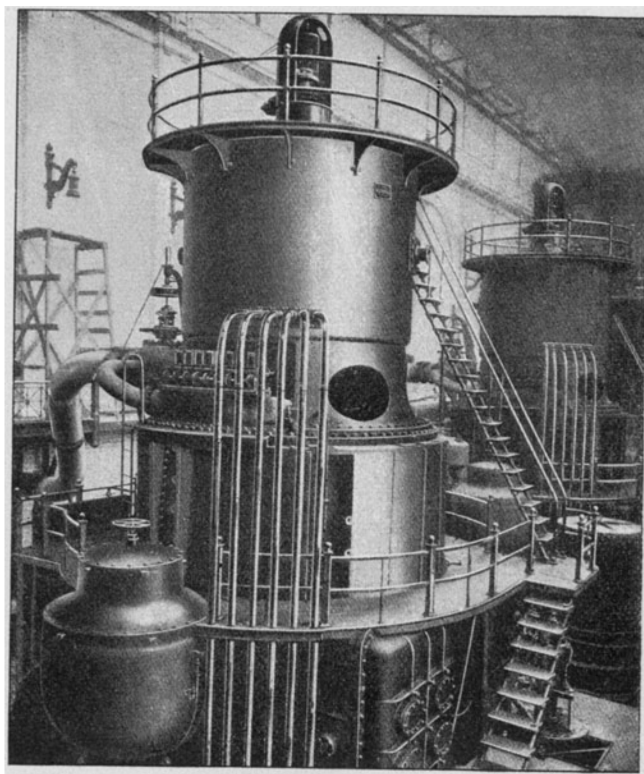


Abb. 568. 12000 kW-Turbine in Chicago.

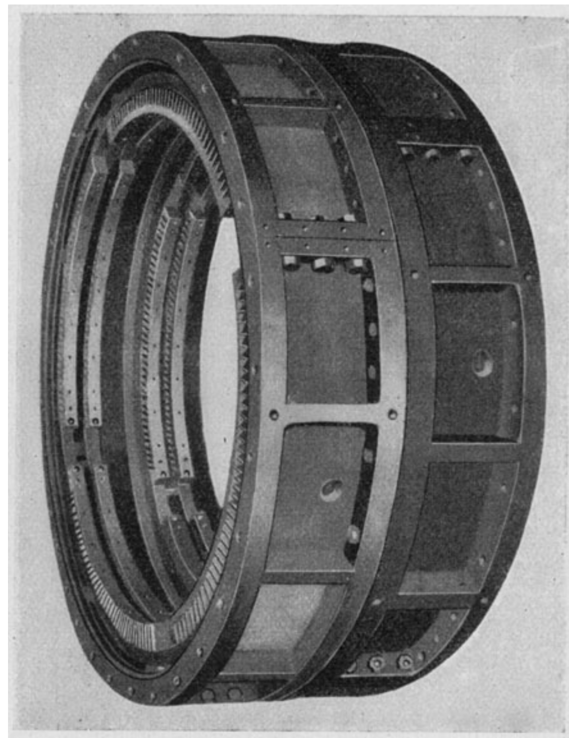


Abb. 569. Vierfach geteiltes Gehäuse.

spezifischer Vertreter des amerikanischen Dampfturbinenbaues gelten darf. Das Hauptmerkmal war anfänglich die Anwendung von wenigen, höchstens fünf Druckstufen, die aber in jeder Stufe mit zwei oder drei Geschwindigkeitsstufen versehen waren. So erhielt eine

Einheit von	500 kW	1800	Uml./min	2	Druck-	mit	je	2	Geschwindigkeitsstufen,
„ „	1000 „	1500	„	4	„	„	„	2	„
„ „	2500 „	900	„	4	„	„	„	2	„
„ „	10000 „	750	„	5	„	„	„	2	„

In früheren Zeiten wurde ausschließlich die stehende Bauart gepflegt, die naturgemäß die kleinste Grundfläche beansprucht und mannigfache Vorteile in Hinsicht der Lagerabnützung, des Massenausgleichs u. a. gewährt. Der Zusammenbau war freilich schwieriger,

Additional material from *Dampf- und Gasturbinen,*
ISBN 978-3-642-50544-7 (978-3-642-50544-7_OSFO2),
is available at http://extras.springer.com



und die Einführung des Systems setzte gründlichste Betriebserprobung aller Konstruktionsteile voraus, doch war die Zugänglichkeit der inneren Teile eine befriedigende. Neuerdings

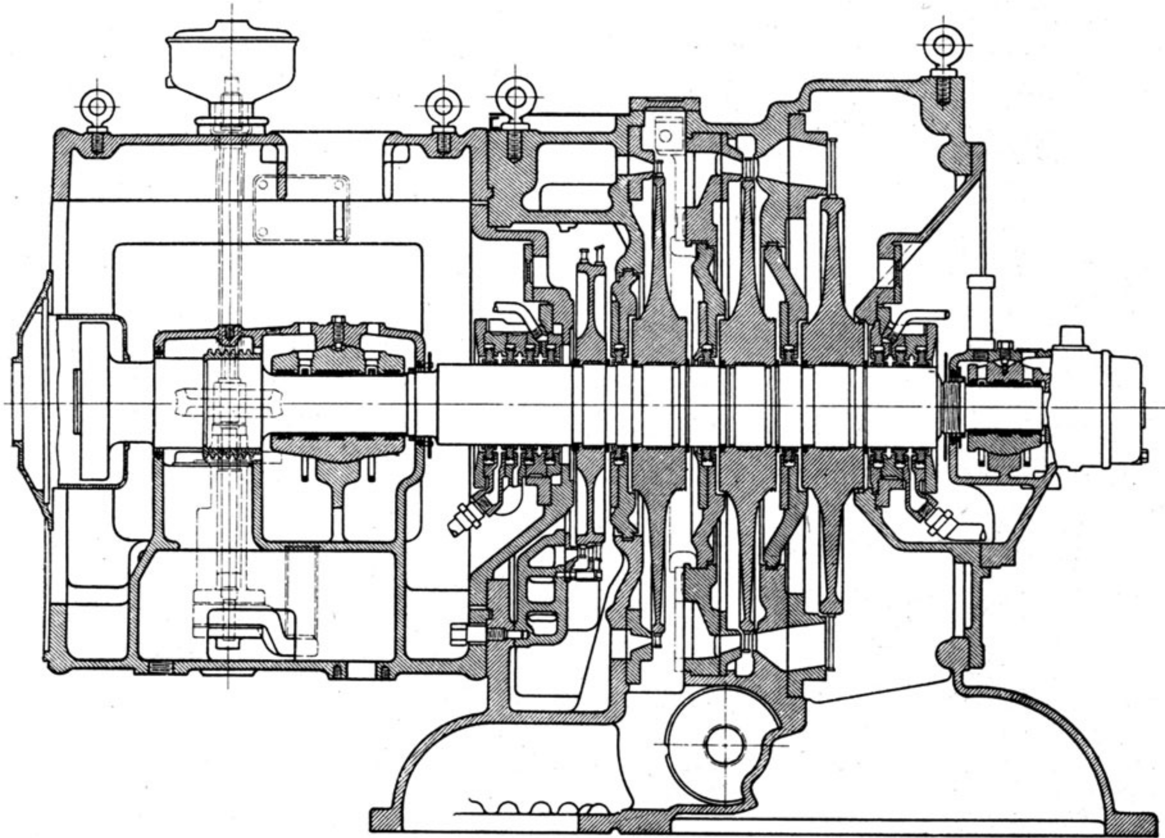


Abb. 570. Liegende Turbine der G. E. Co. 2000—2500 kW-Leistung 3600 Umdr./min.

ist die Gesellschaft zur liegenden Bauart übergegangen. Die in hohem Maße lehrreiche Lösung der Schwierigkeiten, die bei der stehenden Anordnung auftauchten, rechtfertigt jedoch auch heute eine eingehende Besprechung derselben.

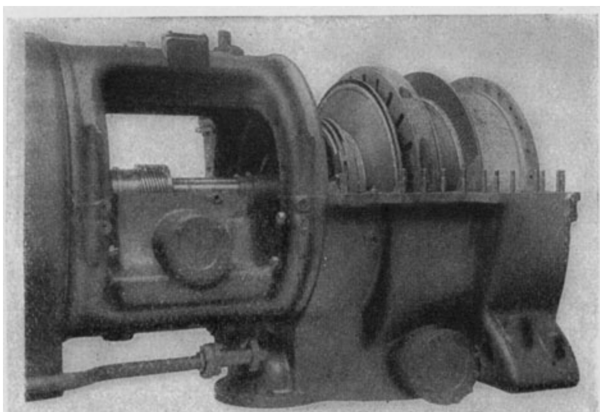


Abb. 571. Schaubild der Turbine Abb. 570.

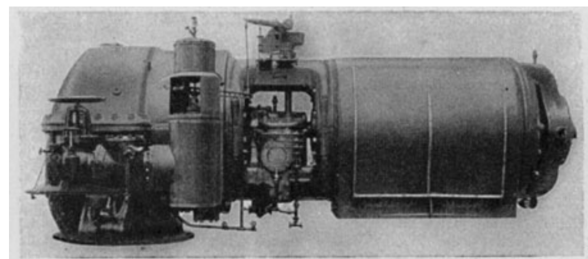


Abb. 572. G. E. Co.-Turbine mit Stromerzeuger am Hochdruckende.

Der Gesamtaufbau einer 12000 kW-Einheit mit 750 Uml./min ist in Abb. 567 (Tafel II) dargestellt. Die Höchstleistung für eine begrenzte Dauer beträgt bei Kondensationsbetrieb 14000 kW; bei Auspuffbetrieb 8000 kW. Schaubild 568 zeigt die 12000 kW-Turbine der Fisk-Street-Station in Chicago. Die Gehäuse der großen Turbinen sind durch senkrechte

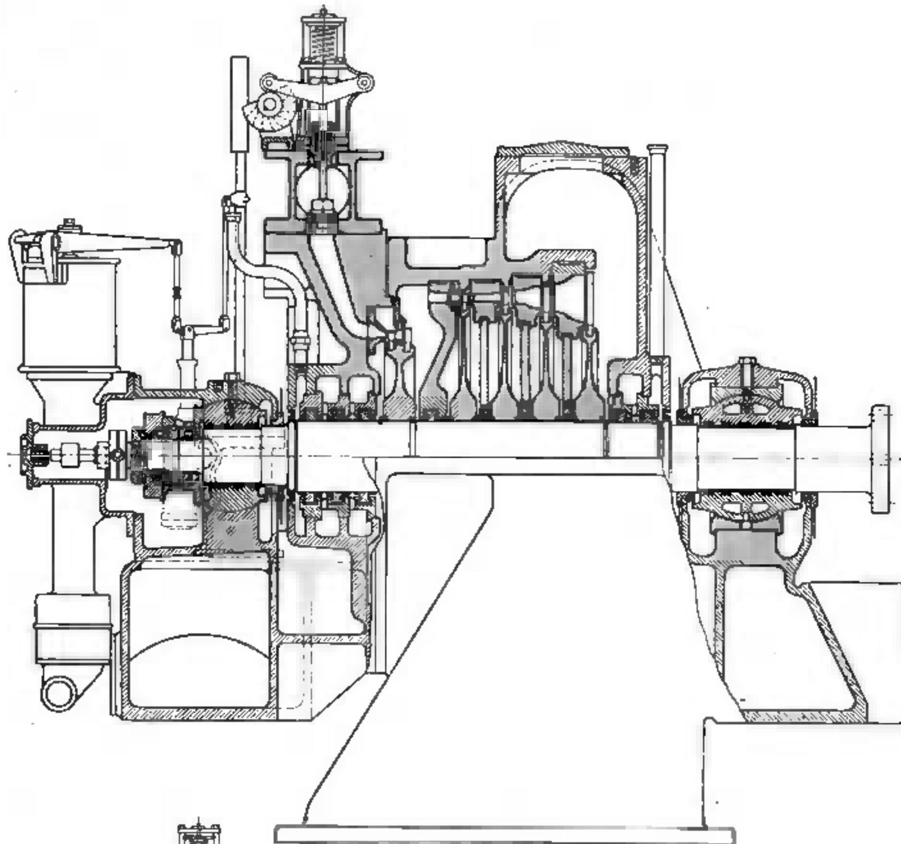


Abb. 573. G. E. Co.-Turbine von 4000 kW-Leistung bei 3600 Umdr./min.

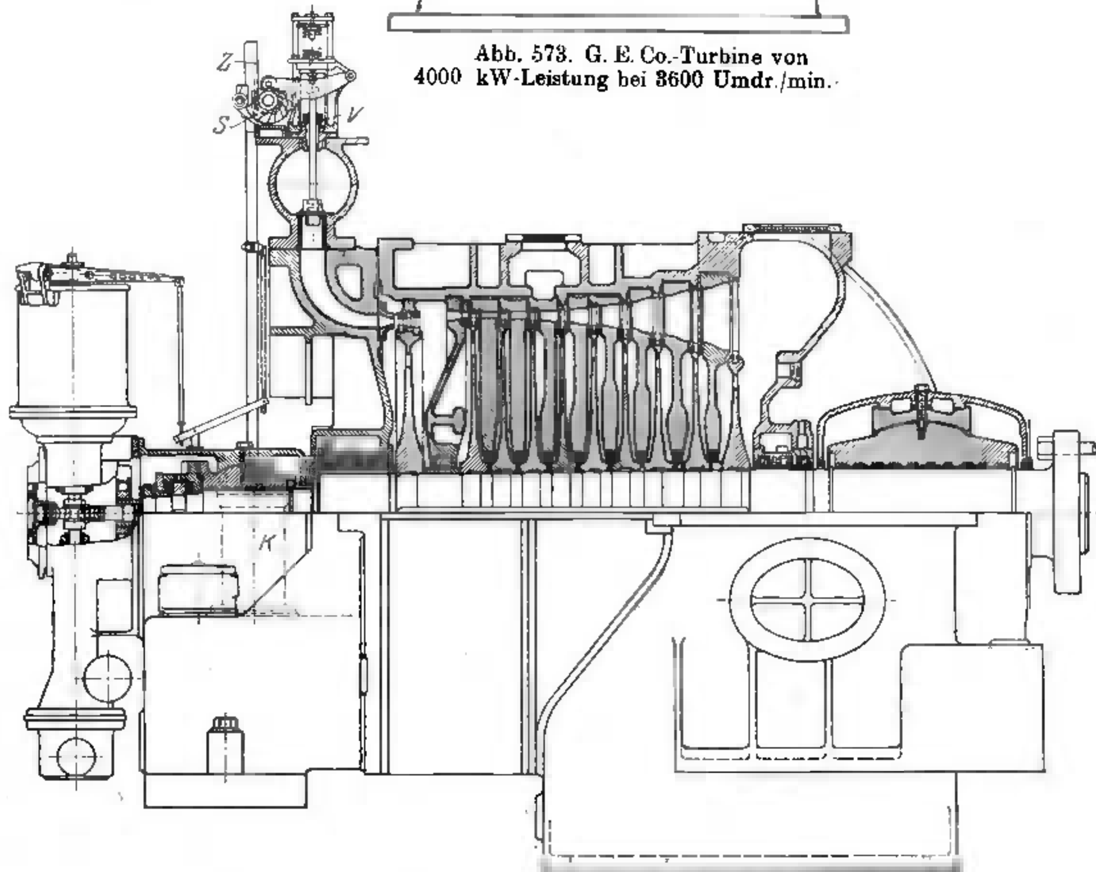


Abb. 574. G. E. Co.-Turbine von 10000 kW-Leistung bei 1500 Umdr./min.

Ebenen in vier Teile getrennt: bei kleinen Einheiten auch durch wagerechte Schnitte, wie Abb. 569 veranschaulicht.

Die liegende Bauart einer 2000 bis 2500 kW-Turbine mit 3600 Umdr./min ist in

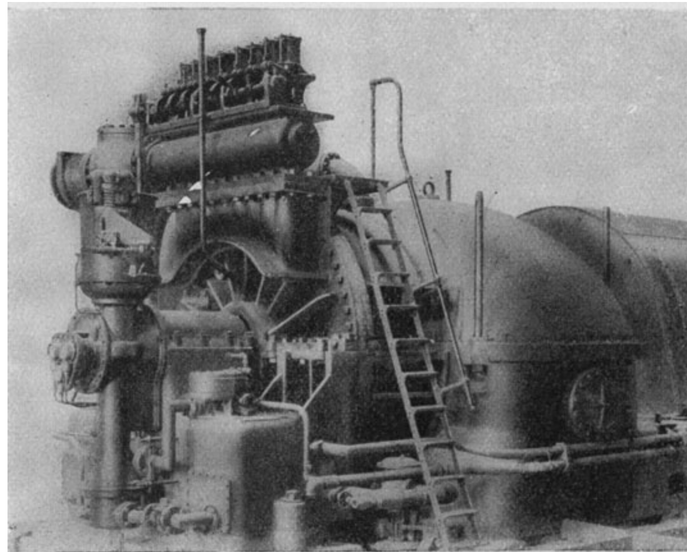


Abb. 575. Schaubild der Turbine Abb. 574.

Abb. 570 dargestellt. Auf ein Curtisrad kleinen Durchmessers folgen drei einfache Druckstufen mit größeren Rädern. Der am vorletzten Leitrad punktiert angedeutete Gitterdreh-

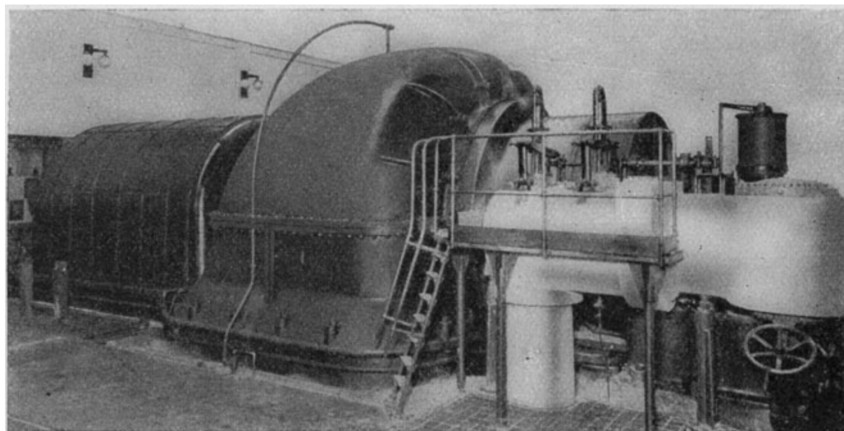


Abb. 577. G. E. Co-Turbine in Detroit von 45000 kW-Leistung.

schieber kommt bei Dampfentnahme oder Zweidruckturbinen (s. Abschn. 141 bis 144) zur Anwendung. Die halb abgedeckte Turbine, Schaubild 571, läßt den Schieber besser erkennen. Schaubild 572 zeigt die in Europa ungewöhnliche Anordnung, daß der Stromerzeuger an das Hochdruckende der Welle gekuppelt ist.

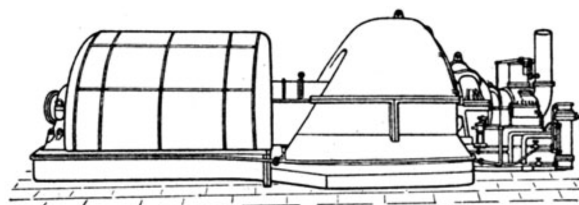


Abb. 577a. Beherrschende Größe des Abdampfgehäuses.

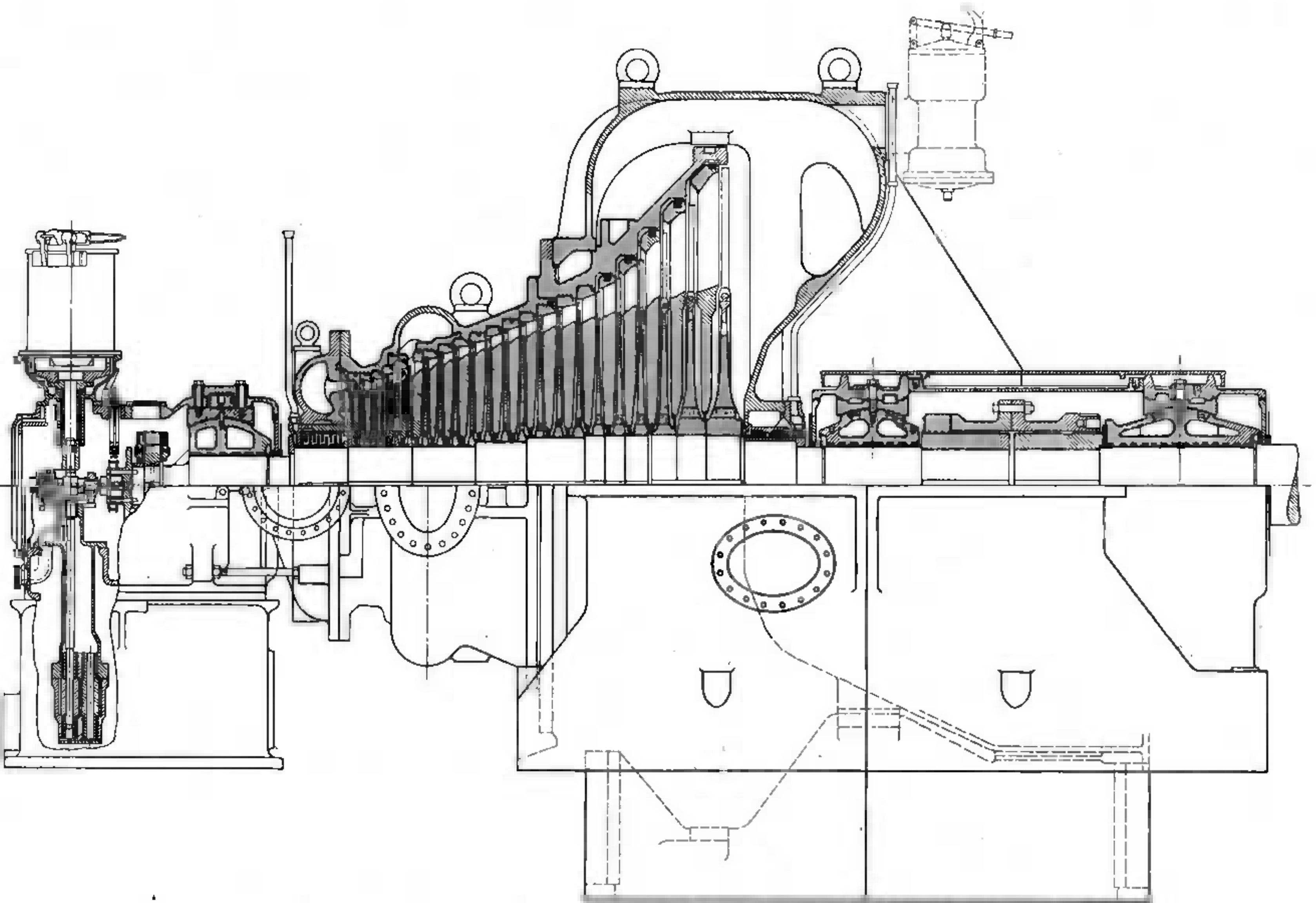


Abb. 576. G.E.Co.-Turbine von 35000 kW-Leistung bei 1500 Umdr./min. mit 22 einfachen Druckstufen.

Die etwas größere Einheit Abb. 573 von 4000 kW-Leistung mit 3600 Umdr./min besteht aus einer Curtis- und vier einfachen Druckstufen. Bei 10000 kW-Leistung wird für die in Abb. 574 dargestellte Bauart die Drehzahl auf 1500 /min herabgesetzt. Daher bei einem Hochdruck-Curtisrad neun einfache Druckstufen erforderlich sind. Schaubild 575 bietet eine Ansicht des Gehäuses samt Steuerung.

In Abb. 576 wird die neueste Ausführung der Großturbine, mit 35000 kW-Leistung bei 1500 Umdr./min veranschaulicht. In angenähert hyperbolischem Anstieg wächst der mittlere Laufraddurchmesser von schätzungsweise 1140 mm auf 3000 mm, bei einer größten Schaufellänge von schätzungsweise 700 mm, so daß die Umfangsgeschwindigkeit an der Schaufelspitze bis an 290 m/sek heranreicht[1]). Das Curtisprinzip ist ganz verlassen und die Zahl der einfachen Druckstufen auf 22 erhöht. Hinter der 6. Stufe mündet der Überlastungsdampf durch den weiten elliptischen Rohrstutzen, dessen Hälfte in der Ansicht sichtbar ist, ein. Das Gehäuse ist im wesentlichen durch den breiten Fuß der Abdampfleitung gestützt. Als Verbindung mit dem vorderen Lagerständer dienen lediglich zwei schlanke Distanzbolzen, damit dieser der Wärmedehnung des Gehäuses folgt. Das Hochdruckgehäuse besteht aus Stahlguß, ebenso die fünf letzten Zwischenböden. Das vordere Wellenende trägt zunächst das (undeutlich dargestellte) Spurlager, dann den Sicherheitsregler und den Antrieb des normalen Reglers, an dessen Spindelverlängerung die Zahnradölpumpen

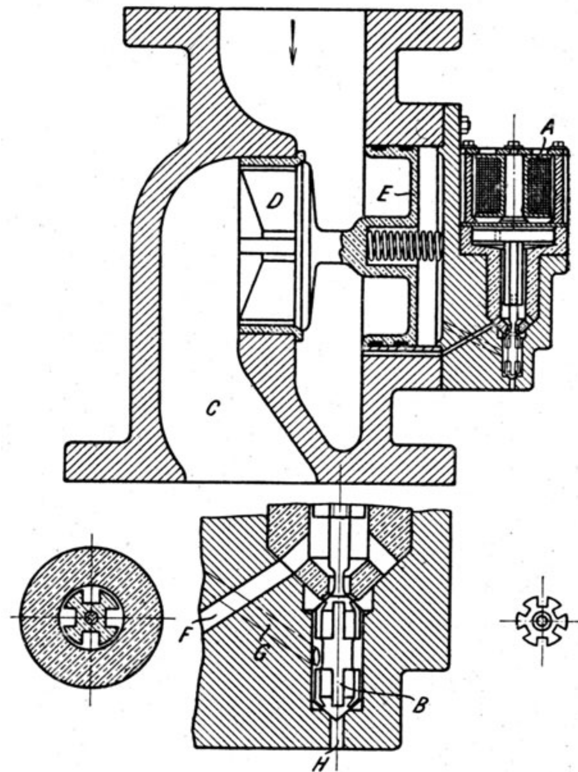


Abb. 578.
Verlassene elektrische Regelung der G. E. Co.

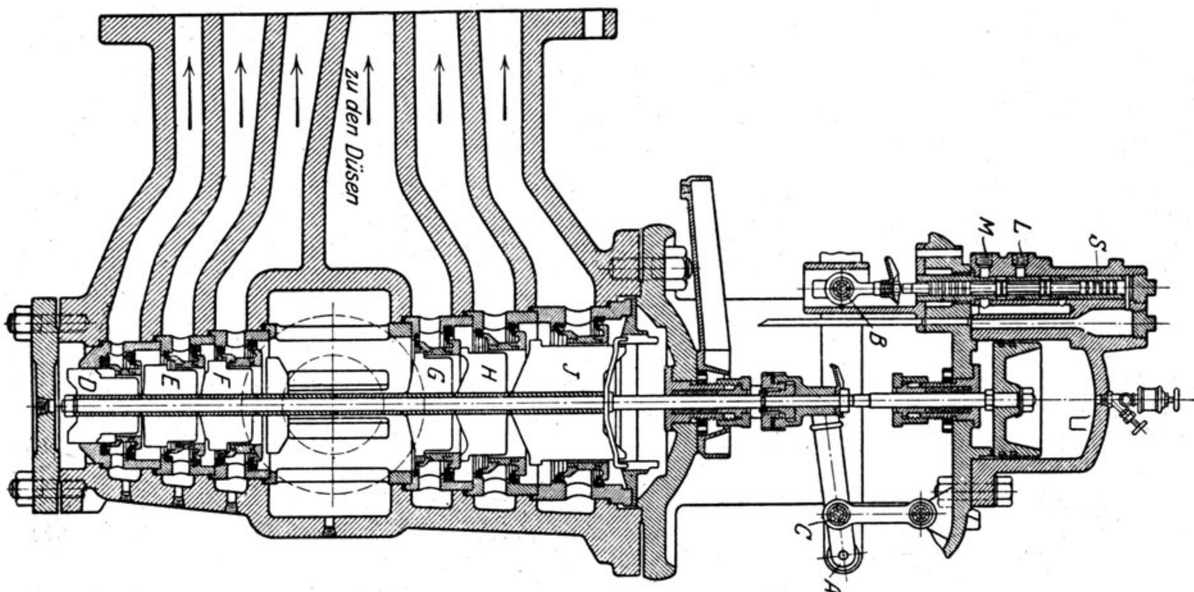


Abb. 579. Kraftgetriebe mit Gruppenventilen.

[1]) The Electric Review, Apr. 1918, S. 348.

angeschlossen sind. Schaubild 577 (von einer 45000 kW-Turbine in Detroit stammend), ebenso wie die Seitenansicht Abb. 577a, läßt die äußerst kräftige Verbindung des Abdampfgehäuses mit dem Fundament erkennen. Im Vordergrunde sind die Ventile für Normallast und Überlast sichtbar.

Abb. 580. Gegossener Düsensatz.

Die Regelung bestand von Anbeginn an in reihenweisem Öffnen und Schließen von Düsengruppen. Die neueste Anordnung tritt am klarsten in Abb. 574 u. 575 hervor. Der Regler betätigt den Kraftkolben K, der seinerseits mittels Zahnstange Z die auf gemeinsamer Welle aufgekeilten unrunden Scheiben S verdreht und die zu den Düsengruppen führenden Ventile V öffnet und schließt. Bei den ganz großen Einheiten greift man auf die einfache Drosselung in Verbindung mit dem Überlastzusatzventil zurück. In Abb. 577 ist ersichtlich, daß hierfür die gleiche Zustellung mit Zahnstange und unrunden Scheiben verwendet wird.

Von den älteren Ausführungsformen der Regelung glauben wir im Interesse der Studierenden, die für elektrische Regler zu schwärmen pflegen, die in Abb. 578 dargestellte Konstruktion, vorführen zu sollen. Darin bedeutet A eine elektrische Spule, deren Kern den im Dampfraum liegenden Kolben und hierdurch Steuerventil B anzieht oder fallen läßt. C ist der Zugang zur Düse, D das Abschlußventil,

Abb. 581. Gegossene Leitvorrichtung.

Abb. 582. Eingegossene Leitschaufeln.

E ein Kraftkolben. In der gezeichneten Lage gelangt Frischdampf durch Bohrung F am Ventil B vorbei, durch Bohrung G hinter Kolben E, und schließt Ventil D ab. Wird durch magnetischen Zug Ventil B gehoben, so ist dem Frischdampf der Zugang gewehrt, und der Dampf hinter dem Kolben kann durch Bohrung G und H ins Freie (oder zum Kondensator) entweichen. Der Querschnitt von E ist um soviel größer als der von D, daß der Frischdampf trotz der auf den Kolben wirkenden Hilfsfeder Ventil D öffnet.

Da infolge Unzuverlässigkeit der elektrischen Kontakte die Vorrichtung nicht befriedigte, ging man zu einer mechanischen Betätigung über. Statt der magnetischen Spule wurde ein dem Ventil B ganz ähnliches Organ mittels Rollhebel und Walze, an der der Regler unmittelbar angriff, betätigt. Die Vielheit der Organe war ein Mangel, der erst durch das moderne Kraftgetriebe mit Rückführung beseitigt wurde.

Für kleinere Einheiten wird die in Abb. 579 dargestellte Anordnung der Gruppenventile benutzt. Sechs Doppelsitzventile werden durch die Rippensterne einer gemeinsamen Spindel so mitgenommen, daß die inneren Ventile F, G zuerst, die äußeren Ventile D, J zuletzt aufgehen. Auf dem Rückwege der Spindel werden die Ventile zwangsweise geschlossen, falls sie klemmen sollten. Am äußeren (linken) Ende des Hebels AB greift der Regler an und steuert mittels Schieber S den Kraftkolben. L und M sind Ein- und Auslaß der Kraftflüssigkeit, als welche hier Dampf verwendet wird, ohne daß der Kraftkolben mit einer weiteren Bremsvorrichtung versehen wäre.

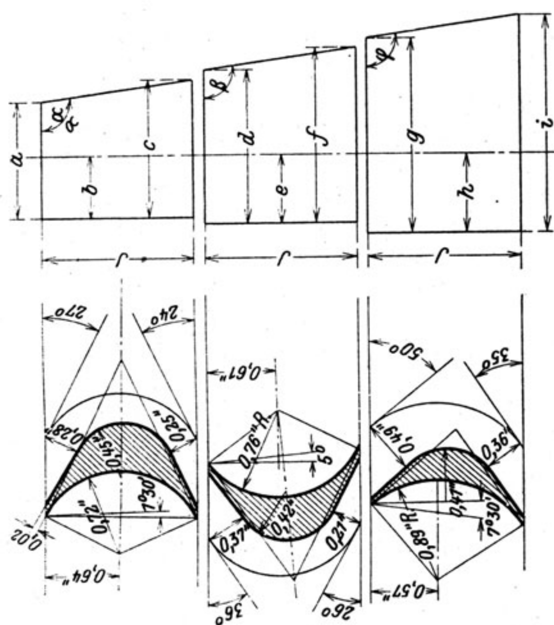


Abb. 583. Laufschaufeln zu Abb. 584.

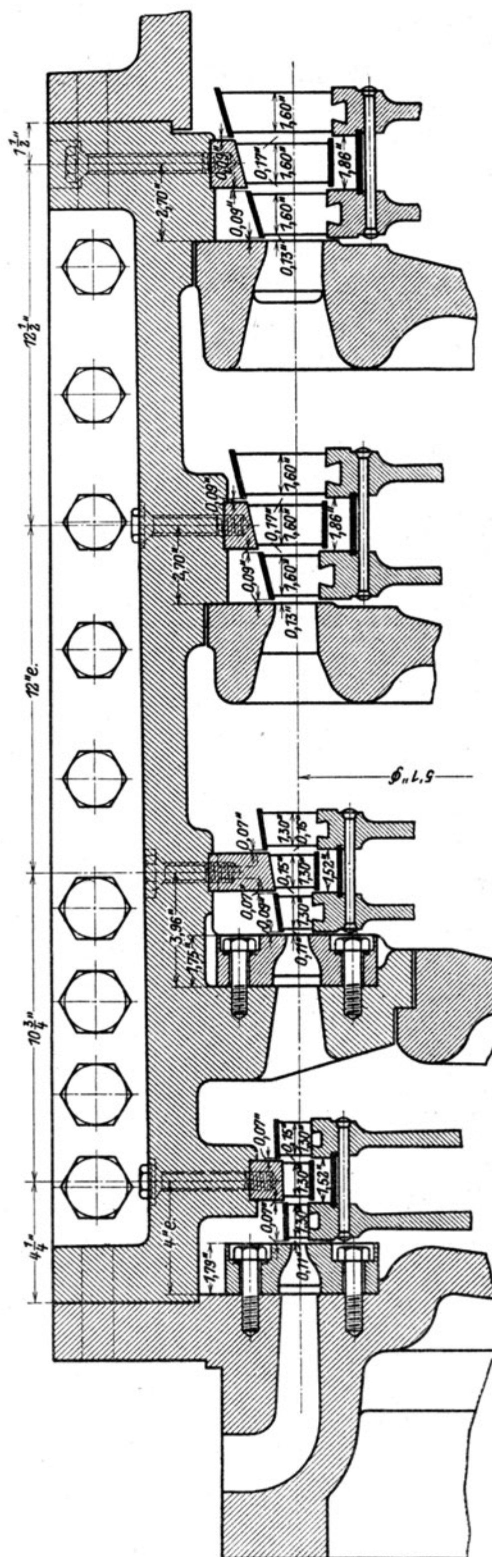


Abb. 584. Beschaufelung einer älteren G. E. Co.-Turbine von 1000 kW-Leistung.

Konstruktion der Einzelteile.

Die G. E. Co. ging als erste mit der Herstellung von in einem Stück sauber gegossener unbearbeiteter Düsensätze voran. Abb. 580 und 581 stellen solche Düsen für die erste Stufe einer stehenden 1000 kW-Turbine dar. Größere Düsen erhalten eingegossene Schaufeln nach Abb. 582, mit Verlegung der Erweiterung in die Seitenwände.

Die Laufschaufeln wurden ursprünglich aus dem vollen Kranz gefräst (gehobelt); später mit Schwalbenschwanz eingesetzt. Form und Erweiterungsverhältnisse einer aus 4 zweikränzigen Curtisrädern bestehenden älteren 1000 kW-Turbine mit 1500 Umdr./min gehen aus Abb. 583 und 584 wie auch aus nachfolgender Zahlentafel hervor.

Zahlentafel (Maße in engl. Zoll).

Stufe	Zeichen											
	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	α	β	φ
1	0,66	0,33	0,72	0,88	0,41	0,94	1,10	0,49	1,16	1,30	92°	92°	92°
2	1,00	0,50	1,19	1,35	0,58	1,54	1,70	0,66	1,89	1,30	98°	98°	98°
3	1,62	0,81	1,99	2,21	0,92	2,58	2,80	1,03	3,17	1,60	103	—	—
4	2,22	1,10	2,62	2,84	1,22	3,24	3,46	1,33	3,86	1,60	104	—	—

Eine neuere Befestigungsart bei ganz großen Einheiten (Abb. 576) besteht in der Umklammerung des Radkranzes durch den als Gabel ausgebildeten Schaufelfuß. Wie Abb. 585 deutlicher erkennen läßt, verhindert dabei der Falz X ein seitliches Auseinanderspreizen der Gabel. Wie das Schlußstück aussieht, wird nicht mitgeteilt. Bei den kleineren Einheiten (Abb. 574) ist der Schaufelfuß ähnlich wie bewährte europäische Vorbilder mit Hammerkopf versehen und wird vom Kranze umfaßt.

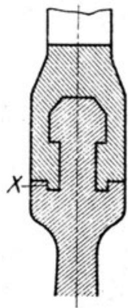


Abb. 585. Schaufelbefestigung.

Die Laufscheiben sind nach Abb. 570 auf Büchsen aufgepreßt, so daß nur der mittlere Teil der Nabenlänge aufliegt. Nach Abb. 574 ist die Welle innerhalb der Nabe abgestuft und die Nabe liegt mit schmalen Arbeitsleisten je außen auf, so daß die Scheiben leicht abstreifbar sind. In Abb. 570 wird jede Scheibe durch zwei halbierte, in Nuten der Welle eingelegte Ringe axial gehalten. Der eine Ring ist in die Nabe eingelassen; der andere wird durch Aufschrumpfen eines vollen Ringes zusammengehalten.

Die Stopfbüchsen sind in der Mehrzahl der Fälle mit Labyrinthdichtung versehen (s. Abb. 570 und 586). Kohlenringbüchsen sind in Abb. 587 veranschaulicht.

Die Lager erhalten durchweg Kugelschalen. In Abb. 573 und 574 sind die Schalen unmittelbar mit Blocklagern verbunden. Bei bloß dreimaliger Stützung des Turbinen- und

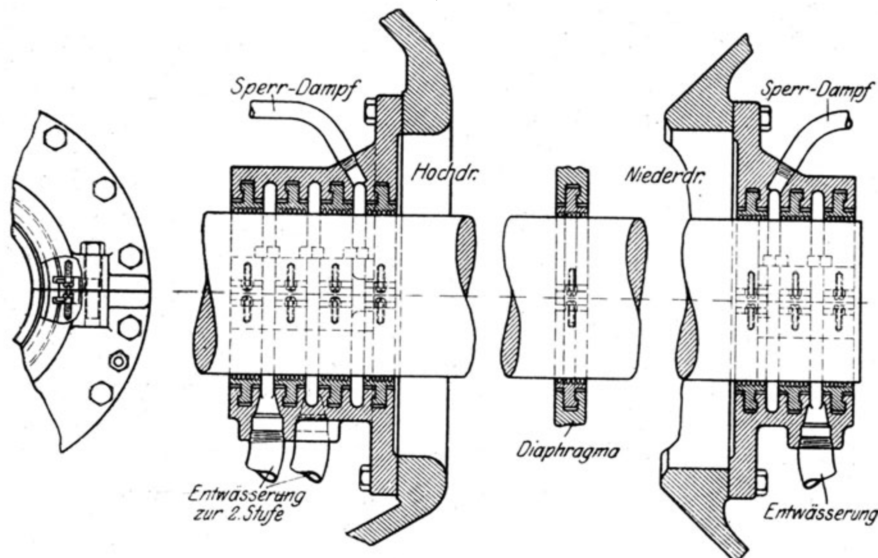


Abb. 586. Labyrinth-Stopfbüchsen.

Dynamoläufers, wie in Abb. 574, erhält das mittlere Lager eine bedeutende (heute vielleicht schon herabgesetzte) Tragfläche.

Bei kleineren Einheiten werden die Unterschalen durch in den Weißguß eingebettete Rohrschlangen (Abb. 588) gekühlt. X sind Klammern zum Festhalten der Schlangen vor dem Vergießen. Die Ringe dienen zur Sicherheitsschmierung.

Abb. 589 stellt den Schnitt durch ein Blocklager mit Einstellung in der Achsenrichtung durch Schnecke A und Gewinde B dar. Die Stützbolzen C der Blöcke D zeigen eine

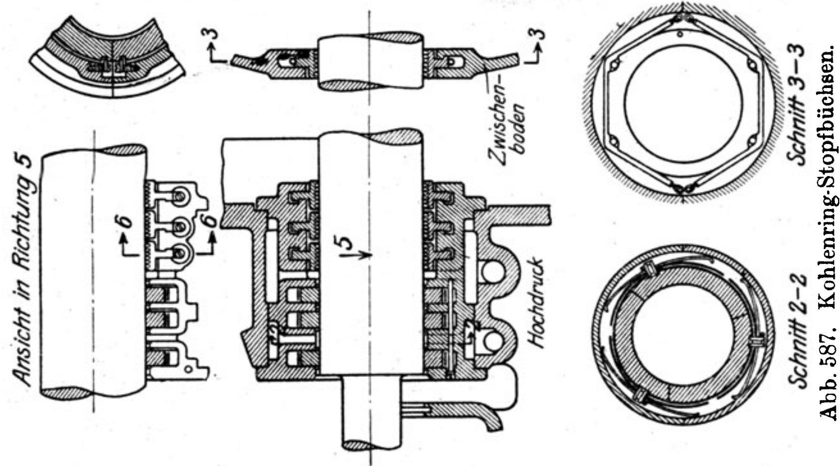


Abb. 587. Kohlenring-Stopfbüchsen.

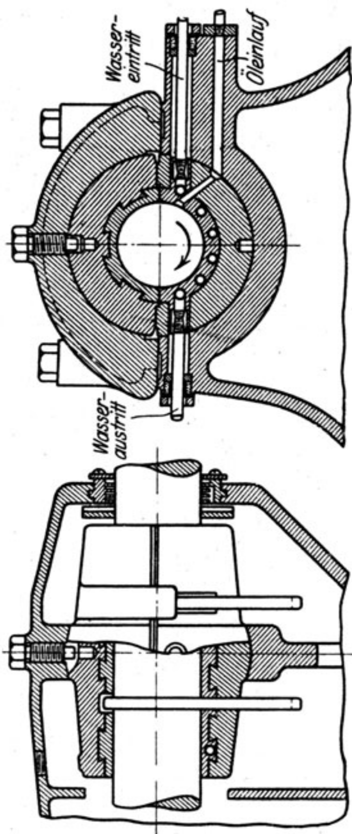


Abb. 588. Lager mit gekühlter Unterschale.

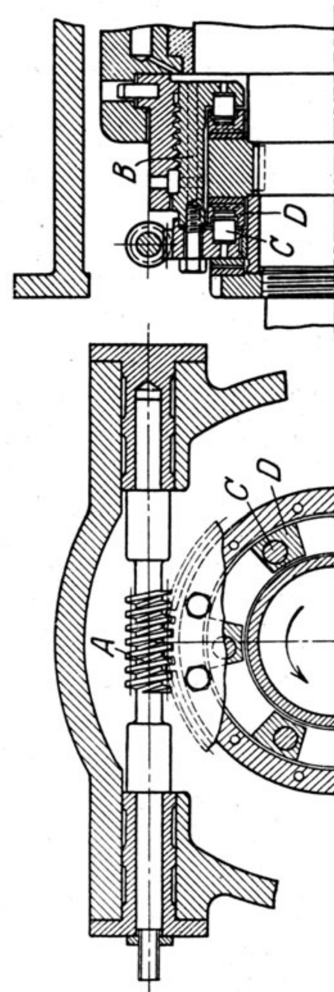


Abb. 589. Blocklager der G. E. Co.

stark exzentrische Lagerung. Zum feinen Einstellen des Lageröldruckes wird ein Drosselhahn (Abb. 590) verwendet.

Versuchsergebnisse.

In Ermangelung von Mitteilungen über den Dampfverbrauch neuerer Ausführungen bringen wir in der nachfolgenden Zahlentafel die Ergebnisse der Versuche an den stehenden 8000 kW-Turbinen in

Chicago, die auch heute noch Beachtung verdienen. Es sind darin einesteils die Angaben enthalten, die „Engineering“ 1907 in Bd. II, S. 111, andernteils diejenigen, die der Chefingenieur der G.E.Co. Emmet in Electr. World, 11. Jan. 1908 veröffentlicht hat. Obwohl es wahrscheinlich ist, daß sich die Versuche auf eine und dieselbe Turbine beziehen, sind die thermodynamischen Wirkungsgrade in den beiden Fällen doch erheblich verschieden. Der günstige Wert von 66,6 v. H. bezogen auf die elektrische Leistung, den die Experten von Emmet feststellten, sinkt auf 61,6 herab, wenn die Angaben von „Engineering“ zugrunde gelegt werden. Die Erklärung des scheinbaren Widerspruches ist einfach die, daß bei den Versuchen, über die „Engineering“ berichtet, das Vakuum so tief war, daß in der letzten Stufe allenthalben die Schallgeschwindigkeit übertroffen wurde und das Vakuum in das Laufrad gar nicht mehr eindringen konnte. Auf Grund einer Untersuchung mit angemessen gewählten Annahmen über die Turbinendimensionen kommt man zu dem Ergebnis, daß die Grenze für den Kondensatordruck ganz wenig unterhalb 0,03 kg/qcm abs. gelegen sein dürfte; die Erniedrigung desselben auf 0,0155 bedingte also eine fast nutzlose Ausdehnung nach dem Austritt aus der letzten Laufschaufel. Die von Emmet gelieferten Zahlen erscheinen im Lichte dieser Untersuchung, deren Wiedergabe uns indes zu weit führen würde, durchaus einwandfrei.

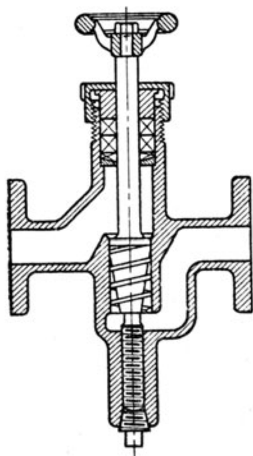


Abb. 590. Öldrosselhahn.

Zahlentafel 2.

Versuche an 8000 kW-Curtis-Turbinen in Chicago.

	Fisk-Station nach Engineering 1907, Bd. II, S. 111.					Nach Emmet in Electr. World, 11. Jan. 1908			
Leistung . . . . kW	5374	8070	10156	12108	13900	6000	8000	10000	12000
Dampfdruck vor der Turbine kg/qcm abs.	12,42	14,89	13,40	13,84	14,96	13,70	13,70	13,70	13,70
Temperatur . . . . Grad C	267,2	261,8	274,3	275,6	275,0	262,8	262,8	262,8	262,8
Überhitzung . . . . Grad C	73,9	64,5	81,7	82,2	77,8	69,44	69,44	69,44	69,44
Kondensatordruck . . . . . kg/qcm abs.	0,0197	0,0155	0,0183	0,0228	0,0238	0,0345	0,0345	0,0345	0,0345
Dampfverbrauch f. d. kW-st kg	5,965	5,895	5,850	5,920	6,170	6,026	5,917	5,919	6,010
Theoret. Dampfverbrauch für die kW-st . . . . kg	3,640	3,525	3,575	3,645	3,640	3,940	3,941	3,937	4,006
Thermodynamischer Wirkungsgrad bezogen auf Dampfzustand vor der Turbine und elektr. Leistung (ohne Abzug des Kondens. Kraftverbrauchs) . . . . v. H.	61,1	59,8	61,1	61,6	59,0	65,4	66,6	66,5	66,6

106a. Die Schulz-Turbine.

Die Turbine von Schulz stellt den ersten Versuch dar, die Leitradquerschnitte aller Stufen einstellbar zu machen.

Die in Abb. 591 u. 592 dargestellte Turbine von 1400 PS_e Leistung bei 1500 Uml./min besitzt fünf zweikränzige Curtisräder. Die eigentliche Regelung erfolgt zwar mittels des in der Verlängerung der Achse angeordneten Federreglers Lavalscher Art, der auf ein Drosselventil einwirkt. Um indessen bei kleineren Dauerleistungen beste Ergebnisse zu erzielen, versieht Schulz die Mehrzahl der vorderen Leiträder mit von Hand einstellbaren Schiebern, die gemäß Abb. 593 u. 594 von gemeinsamer Welle oder durch Stirnräder bewegt werden können und in gemeinsamem Rahmen eine Anzahl einzelner durch Federn angepreßter kreisrunder Abschlußplatten enthalten. Hierdurch kann ganz oder nahezu vollkommene Mengenregelung, ähnlich wie bei einer einstufigen Turbine erreicht werden. Es liegt auf der Hand, daß die Einstellung der letzten Leiträder am wenigsten wirksam ist, daher sie weggelassen wird. In allen Fällen wird nur der Querschnitt des ersten Leitrades der Leistung verhältnisgleich verändert, in den folgenden ist die Verkleinerung geringer, wodurch der sonst schroffe Druckabfall beim Übergange zum unveränderten Niederdruck-Leitrad ausgeglichen wird. Da indessen die Ergebnisse mit den erhöhten Herstellungskosten nicht Schritt gehalten haben, wird die Turbine in der vorliegenden Form heute nicht mehr gebaut.

Es erübrigt sich daher auf Einzelheiten einzugehen. Wir beschränken uns auf die Mitteilung der Versuchsergebnisse einer von der A.-G. Weser-Bremen im Jahre 1908

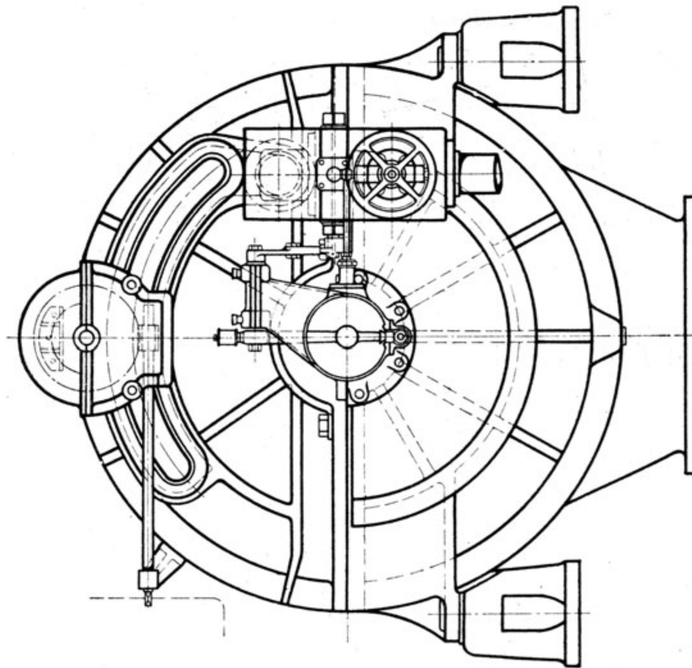


Abb. 592.

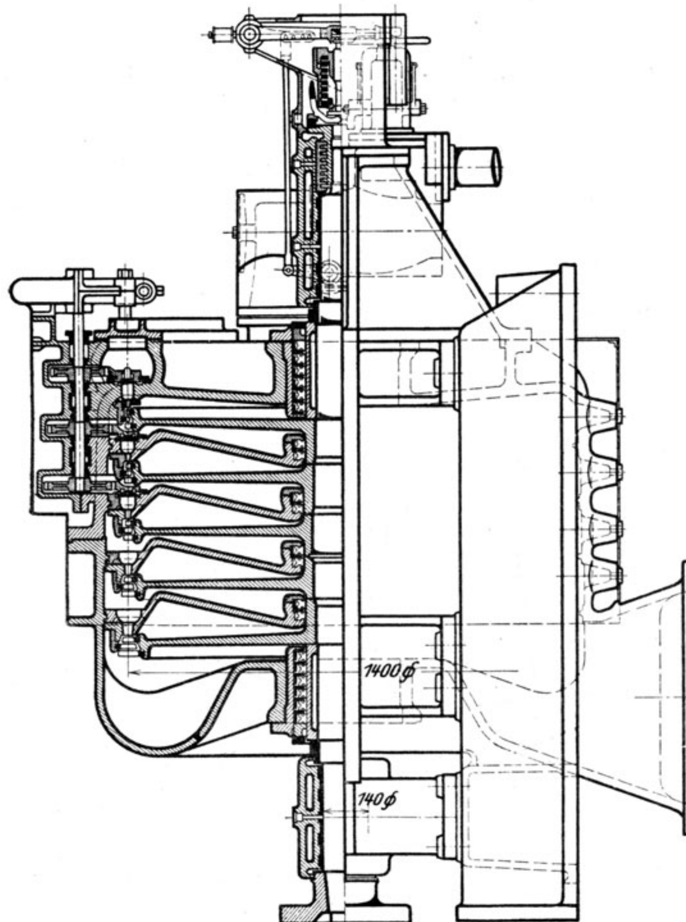


Abb. 591.

Schulz-Turbine.

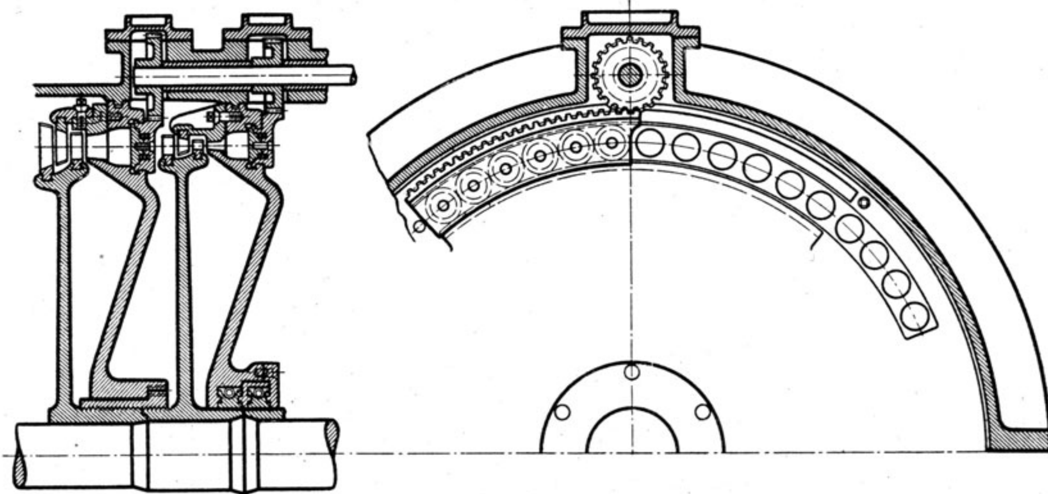


Abb. 593 u. 594. Regulierschieber der Schulz-Turbine.

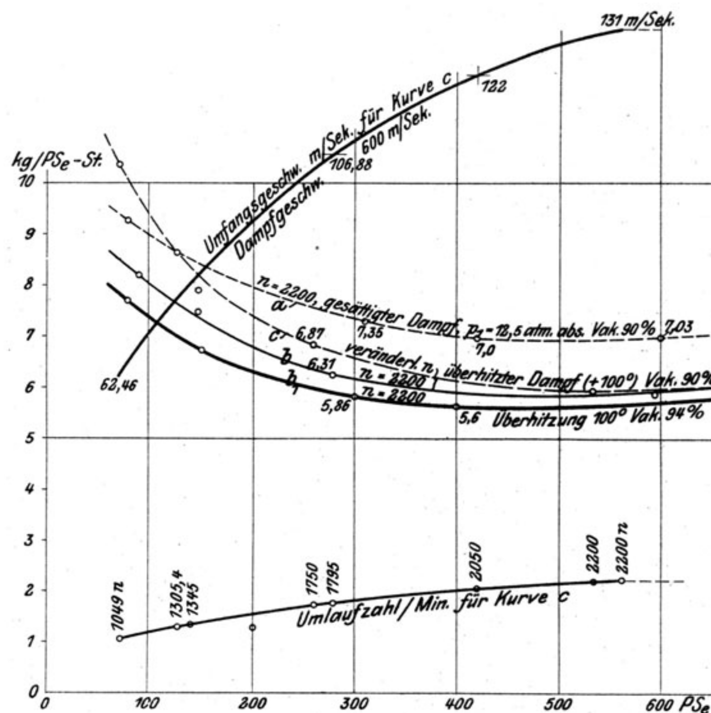


Abb. 595. Versuchsergebnisse der Schulz-Turbine.

erstellten 650 PS-Turbine, die in Abb. 595 graphisch zusammengestellt sind. Die Versuchsumstände der Schaulinien a, b, b_1 sind in die Abbildung eingetragen; Schaulinie c entspricht einer wachsenden Leistung mit steigender Umlaufzahl, ungefähr in dem Verhältnis wie diese Größen sich bei Schiffsturbinen mit der Fahrgeschwindigkeit ändern.

107. Turbinen der Allgemeinen Elektrizitätsgesellschaft Berlin.

Die maßgebenden Gesichtspunkte bei der Ausbildung des Turbinensystems der A. E.-G. waren nach Veröffentlichungen und Mitteilungen des Leiters der Dampfturbinenfabrik Dr. h. c. O. Lasche die folgenden: Im Jahre 1902, als die A. E.-G. den Bau von Dampfturbinen in ihr Fabrikationsgebiet aufzunehmen beschloß, war die Turbine von de Laval über Leistungen von etwa 300 PS noch nicht hinausgekommen und die Turbine von

Parsons entsprach in ihrer damaligen Gestalt nicht den Anforderungen, die hinsichtlich Einfachheit, Betriebssicherheit und Dampfverbrauch wünschbar waren. Daher begann man im Jahre 1904 mit dem Bau der Tangentialturbine nach Vorschlägen von Riedler und

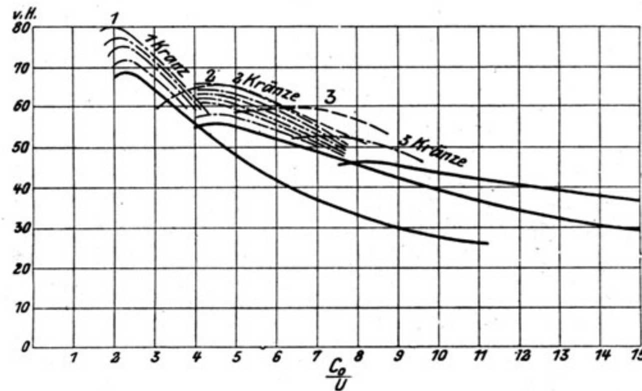


Abb. 596. Wirkungsgrade ein- bis dreikränziger Räder aus dem Jahre 1909.

Stumpf, die als „Einrad“turbine größte Einfachheit besaß und gute Wirtschaftlichkeit in Aussicht stellte. Die damit gemachten Erfahrungen ließen indes erkennen, daß die Führung des Dampfstrahles in den taschenförmigen Schaufeln und den langen Umkehrkanälen dieser Turbine ungünstiger ist als bei der üblichen axialen Beaufschlagung. Überdies stellte sich die Herstellung als sehr kostspielig heraus. Inzwischen war die Curtisturbine durch die General Electric Co. bis zu den größten Einheiten ausgebildet worden. Daher wurde

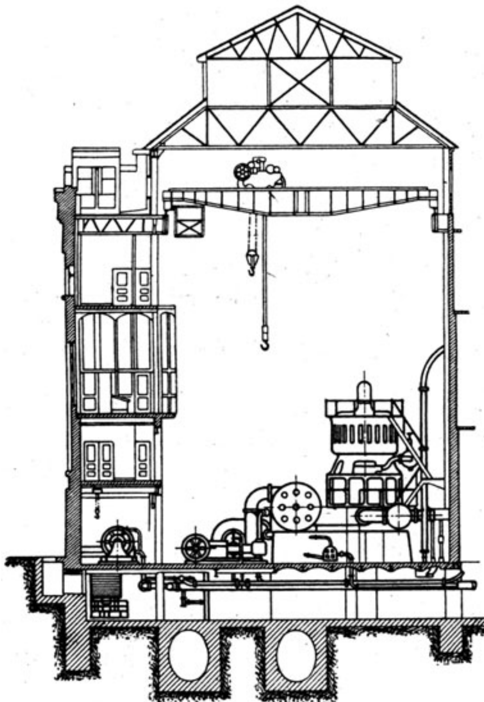


Abb. 597.

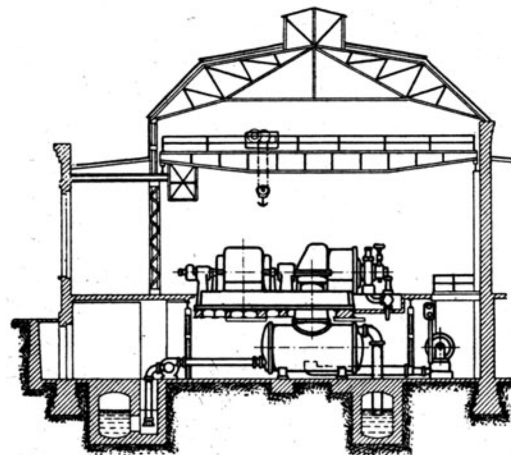


Abb. 598.

Raumbedarf der stehenden und liegenden Anordnung (1909).

mit dieser Gesellschaft eine Interessengemeinschaft in Form von Erfahrungsaustausch, Patentbenützung und Gebietsabgrenzung abgeschlossen und der endgültige Turbinentypus als eine Verbindung der Curtisturbine für die erste Stufe mit der mehrstufigen Gleichdruckturbine für den Rest festgelegt. Das Curtisrad erlaubt die Anwendung größter Überhitzung und ermöglicht schon bei zweikränziger Ausführung Entspannung auf wesentlich niedrigere

Temperaturen und Drucke. Durch zweckentsprechende Ausbildung wurde sein Wirkungsgrad erheblich über den Wert gebracht, den Außenstehende für erreichbar hielten; trotzdem ist selbstverständlich der Höchstwert der mit dem einfachen Axialrad erreichbaren Wirkungsgrade merklich besser, wie die aus dem Jahre 1909 stammende Zusammenstellung der A. E.-G. Abb. 596 zeigt. Somit konnte durch vorzügliche Durchbildung des Niederdruck-

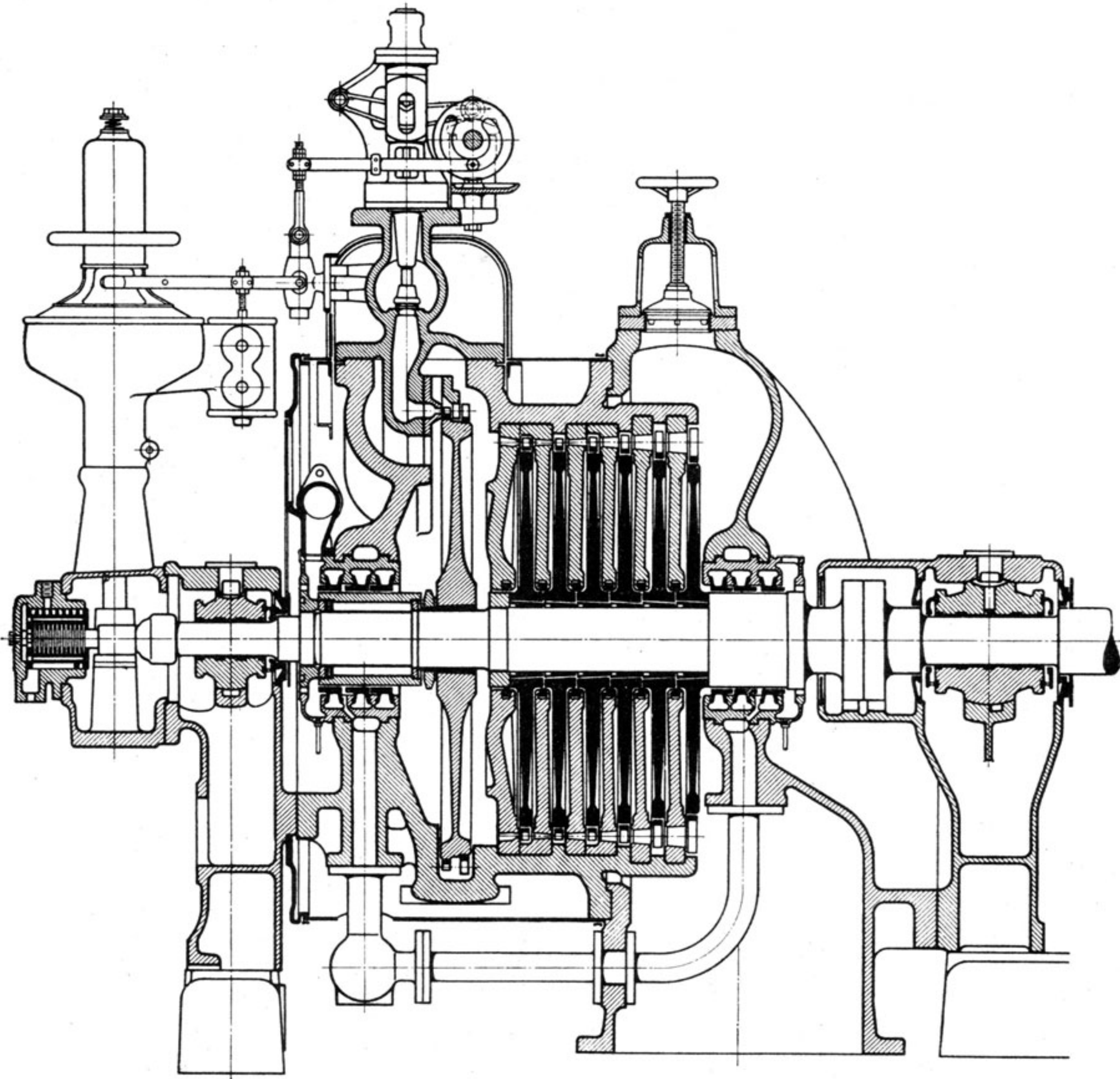


Abb. 599. A. E. G.-Turbine für kleinere Leistungen.

teiles die anfängliche Einbuße eingebracht und die Wirtschaftlichkeit der Turbine im ganzen so gehoben werden, daß sie den höchsten Ansprüchen genügte. Die stehende Bauart der Curtisturbine wurde mit der wagerechten vertauscht, die den europäischen Anforderungen an Zugänglichkeit und Bequemlichkeit des Auf- und Abbaues entspricht. Hierdurch schien zwar der Vorteil der Curtisturbine, eine sehr geringe Grundfläche zu beanspruchen, aufgehoben; allein die ebenfalls aus dem Jahre 1909 stammenden Abb. 597, 598, die eine Gesamtanlage der General Electric Co. und der Allg. Elektr.-Gesellsch. veranschaulichen, zeigen, daß infolge des Raumbedarfs der Hilfsmaschinen, die nicht im Fundament der Curtisturbine untergebracht werden können, der Unterschied verschwindet oder zugunsten der liegenden Bauart ausfällt, denn der Maschinenraum der Curtisturbine ist wohl etwas schmäler, dafür aber um ein Drittel länger als derjenige der A. E.-G. Die Richtigkeit dieser Erwägungen wurde dadurch vollauf erwiesen, daß Dr. Lasche an dem

ursprünglich aufgestellten Programm nun schon fast zwei Jahrzehnte unverändert festhalten konnte. In der Tat ist die heutige Ausführungsform der A. E.-G.-Turbine nach den Zusammenstellungsbildern 599—603 die folgende.

Kondensationsmaschinen für Leistungen von 200 kW aufwärts erhalten nach Abb. 599

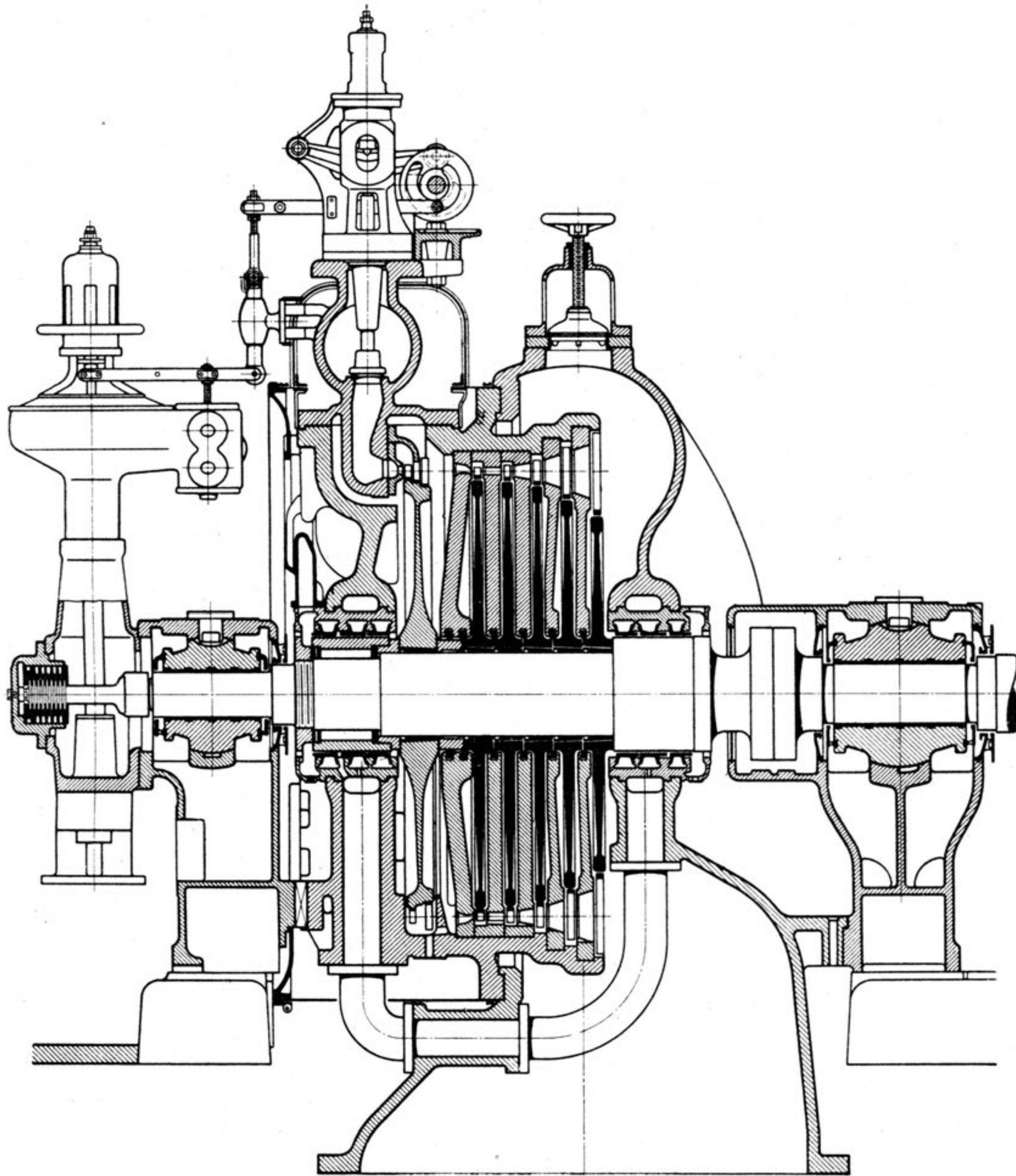


Abb. 600. A. E. G.-Turbine für mittlere Leistungen.

ein größeres Curtisrad in der ersten Stufe mit stärkerer Dampfausdehnung, so daß der Rest des Gefälles durch eine Gruppe von kleineren Gleichdruckrädern aufgezehrt werden kann. Bei mittleren Leistungen, Abb. 600, werden die Durchmesser der einfachen Druckstufen vergrößert, wodurch bei gleicher Dampfausnützung ihre Zahl herabgesetzt werden kann. Große Leistungen ($>$ 5000 kW) erlauben nach Abb. 601 weitere Vergrößerung der Umfangsgeschwindigkeit und Herabsetzung der Gleichdruckstufen auf 4. Bei ganz großen Leistungen wird, um die Schaufellänge des letzten Rades in ein günstiges Verhältnis zum Durchmesser zu setzen, entweder eine Teilung der letzten Stufen in zwei parallel ge-

schaltete, gemäß Abb. 602 vorgenommen, oder es wird gemäß Abb. 603 der Durchmesser des letzten Rades sprungweise nach Bedarf vergrößert. Bei ganz kleinen Leistungen (für Hilfsmaschinenantriebe) kommt man mit einer Druckstufe, aber dreikränzigem Curtisrade aus, wie Abb. 604 für 25 kW und Abb. 605 für 50 kW Leistung (letztere mit Gleichstromdynamo gekuppelt) veranschaulichen. Die beiden letzten Turbinen sind für Antriebe mit Gegendruck bestimmt, daher die verhältnismäßig kleine Weite der Abdampfstutzen.

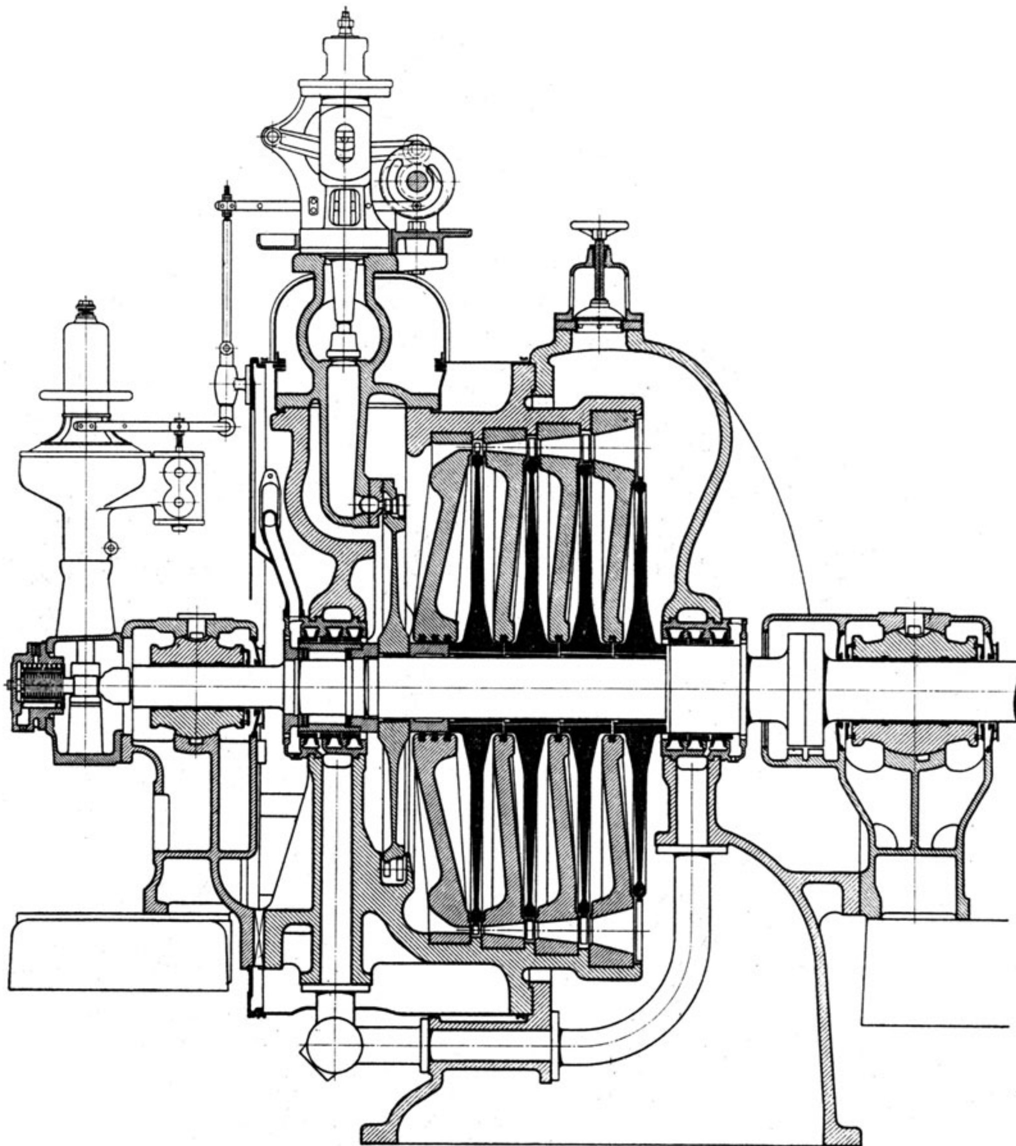


Abb. 601. A. E. G.-Turbine für große Leistungen mit herabgesetzter Stufenzahl.

Den Gesamtaufbau einer 5000 kW-Turbine mit 3000 Umdr./min veranschaulicht Lichtbild 606. Lichtbilder 607, 608 zeigen den Gesamtaufban einer Turbine von 50000 kW Leistung bei 1000 Umdr./min, deren abgehobener Gehäuseoberteil in Lichtbild 609 dargestellt ist. Über diese derzeit (1921) größte eingehäusige Dampfturbine der Welt können folgende nähere Angaben gemacht werden[1]):

---

[1]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1918, S. 335. Nach brieflicher Mitteilung von Dr. Lasche ist diese Turbine im Goldenbergwerk des Rheinisch-Westfälischen Elektrizitätswerkes in Knappsack bei Köln mit einer Schwesterausführung gleicher Größe seither in Betrieb gestellt worden.

Additional material from *Dampf- und Gasturbinen,*
ISBN 978-3-642-50544-7 (978-3-642-50544-7_OSFO3),
is available at http://extras.springer.com



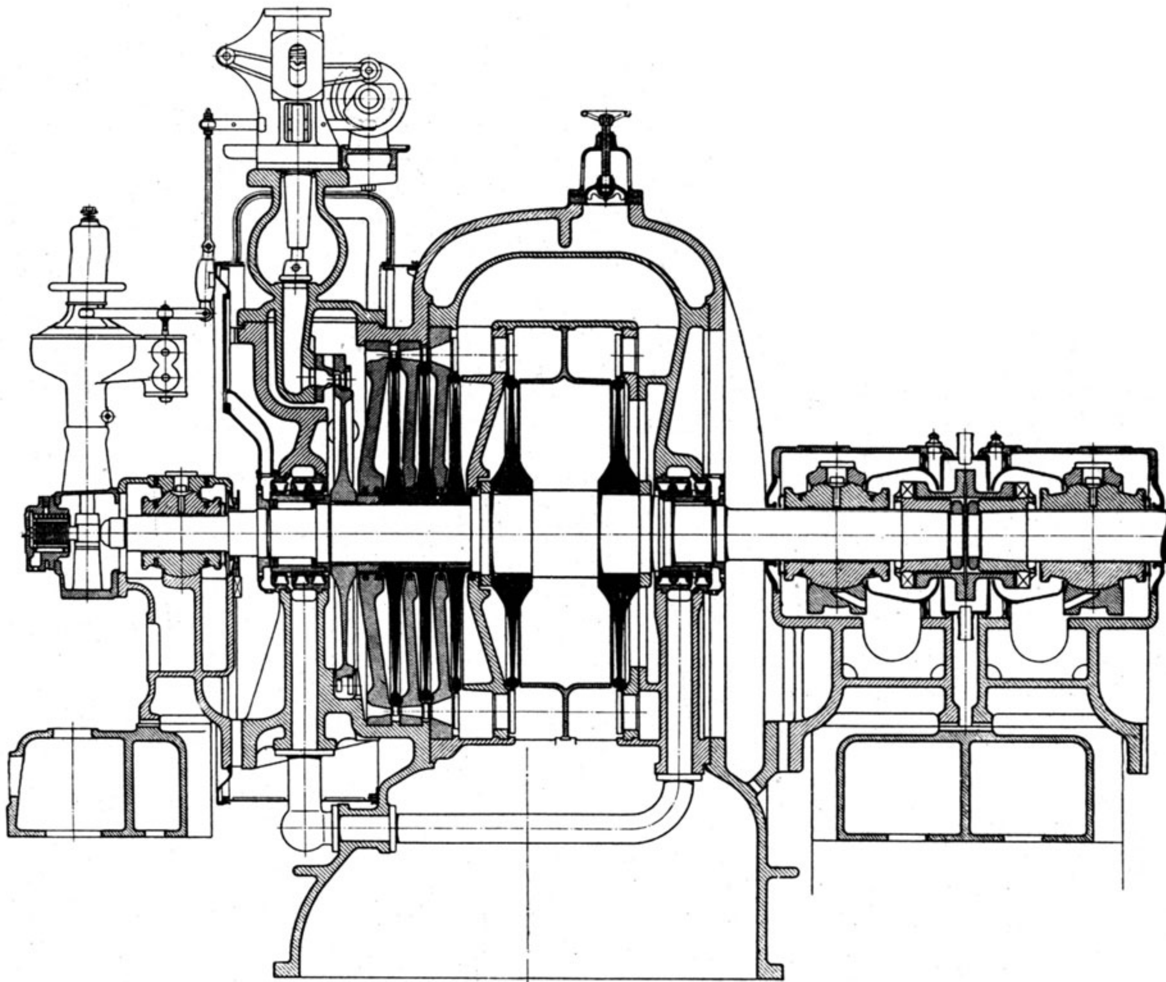


Abb. 602. A.E.G.-Turbine für große Leistungen mit verdoppeltem Niederdruckrad.

Leistung	50000 kW oder 60000 kVA
Umdrehungen i. d. Min.	1000
Stromspannung (Drehstrom)	7000 V
Erregung	220 V
Anfangsdruck	12 at Überdr.
Anfangstemperatur	325° C
Kühlwassertemperatur	27° C
Zahl der Räder	10
Raddurchmesser	3400—3800 mm
Umfangsgeschwindigkeit	180—200 m/sek
Wellendurchmesser im Lager	600 mm
Umfangsgeschwindigkeit im Lager	32 m/sek
Durchmesser des Dynamorotors	2200 mm
Dessen Umfangsgeschwindigkeit	115 m/sek
Rotorlänge einschließlich Lagerschenkel	9 m
Schleuderprüfzahl des Dynamorotors	1500/min
Desgl. für einzelne Platten versuchsweise	2000—2400 min
Lagerumlaufgeschwindigkeit bei der Schleuderprobe	47 m/sek
Durchmesser der beiden Abdampfstutzen	2400 mm
Gesamtgewicht der Turbine	250 t
Turbinenrotor allein	49 t
Gesamtgewicht der Dynamo	225 t

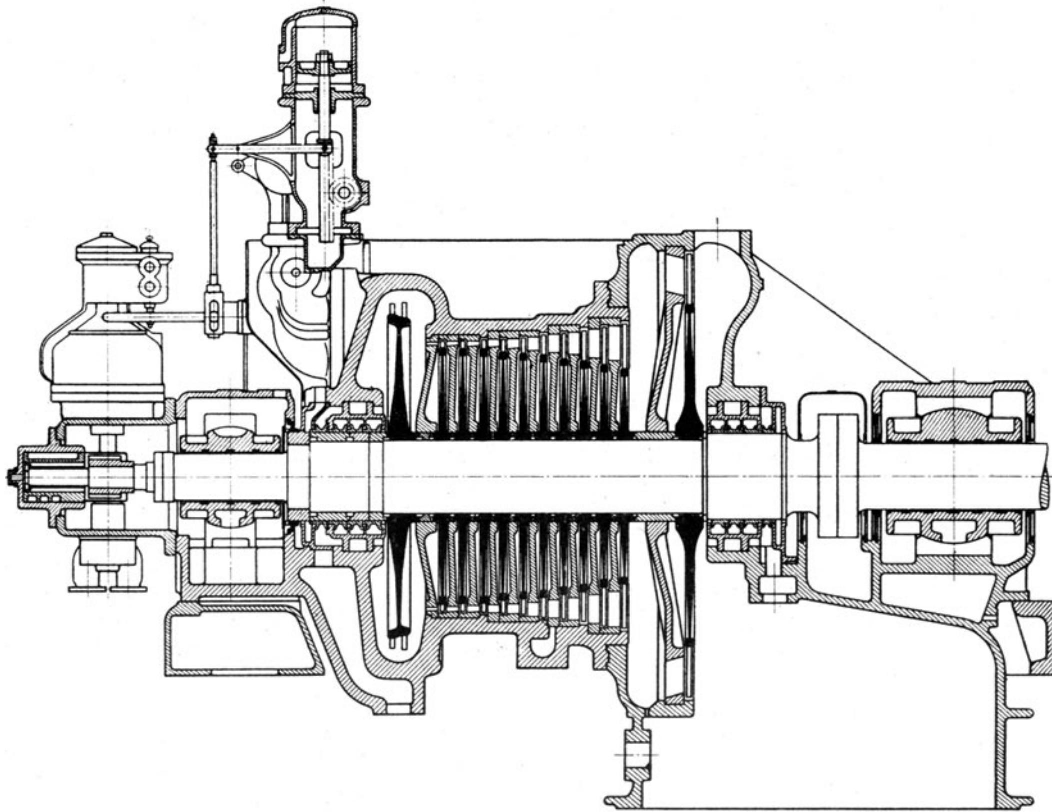


Abb. 603. A. E. G.-Turbine für große Leistungen mit vergrößertem Niederdruck-Rad.

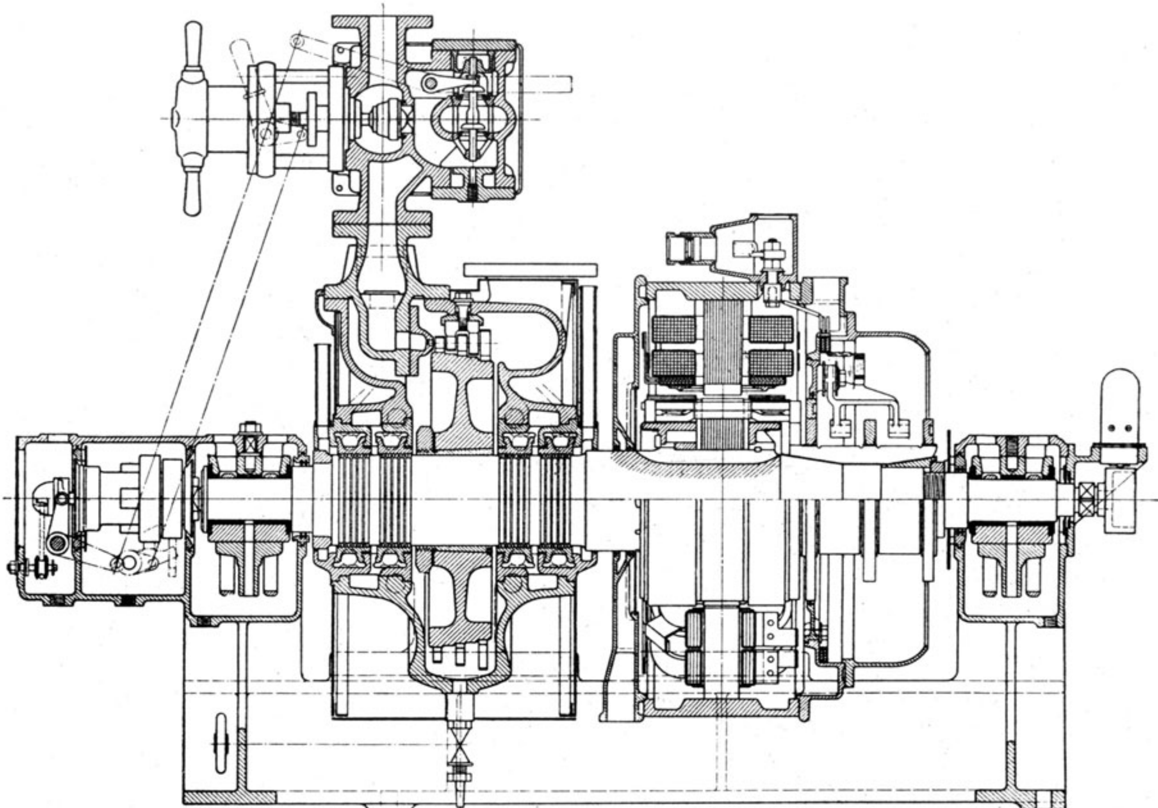


Abb. 604. A. E. G.-Klein-Turbine für 25 kW-Leistung.

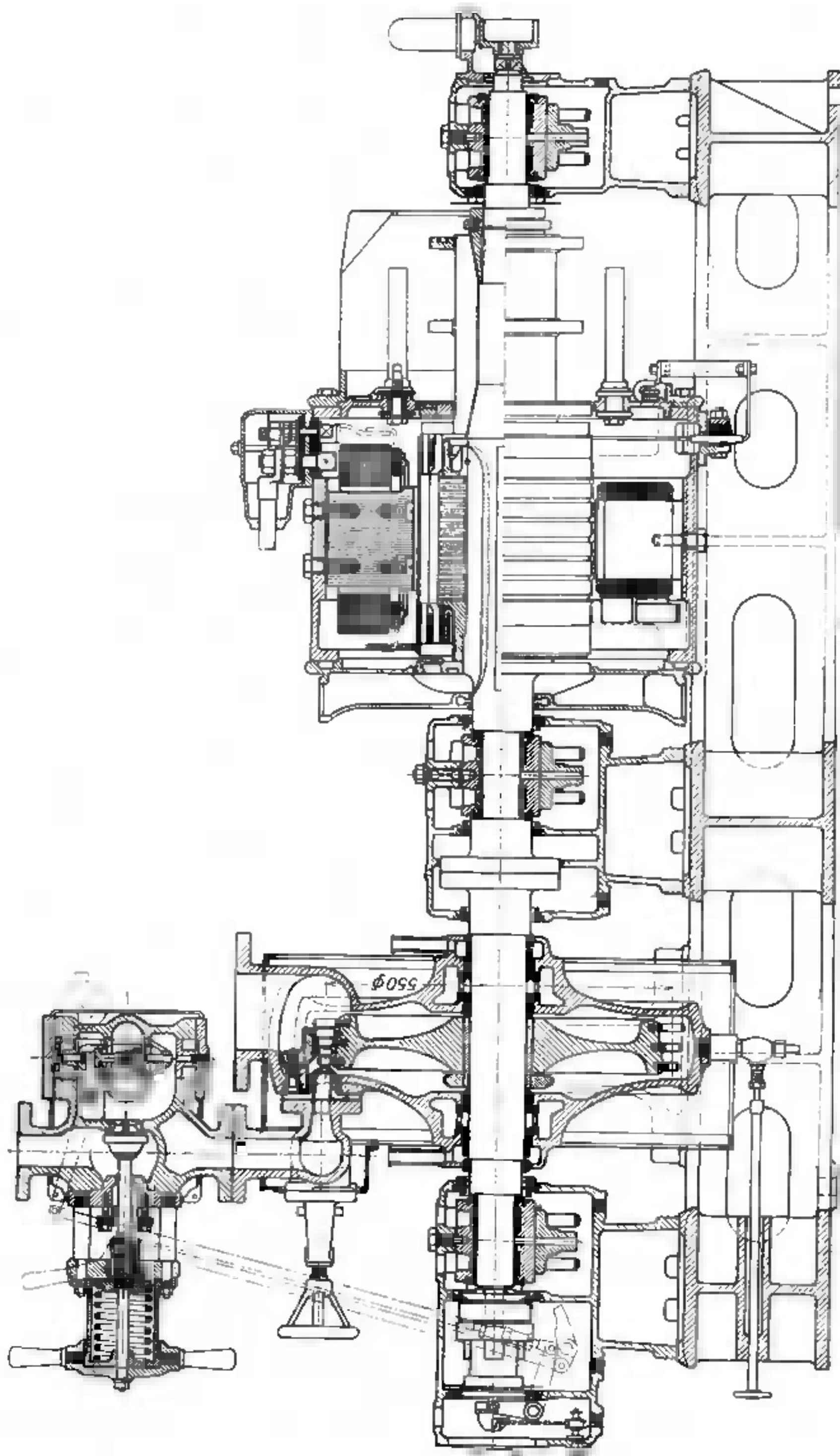


Abb. 605. A. E. G.-Klein-Turbine für 50 kW-Leistung.

Dynamorotor	106 t
Kühlfläche der zwei Kondensatoren je	3000 qm
Gewicht eines Kondensators	100 t

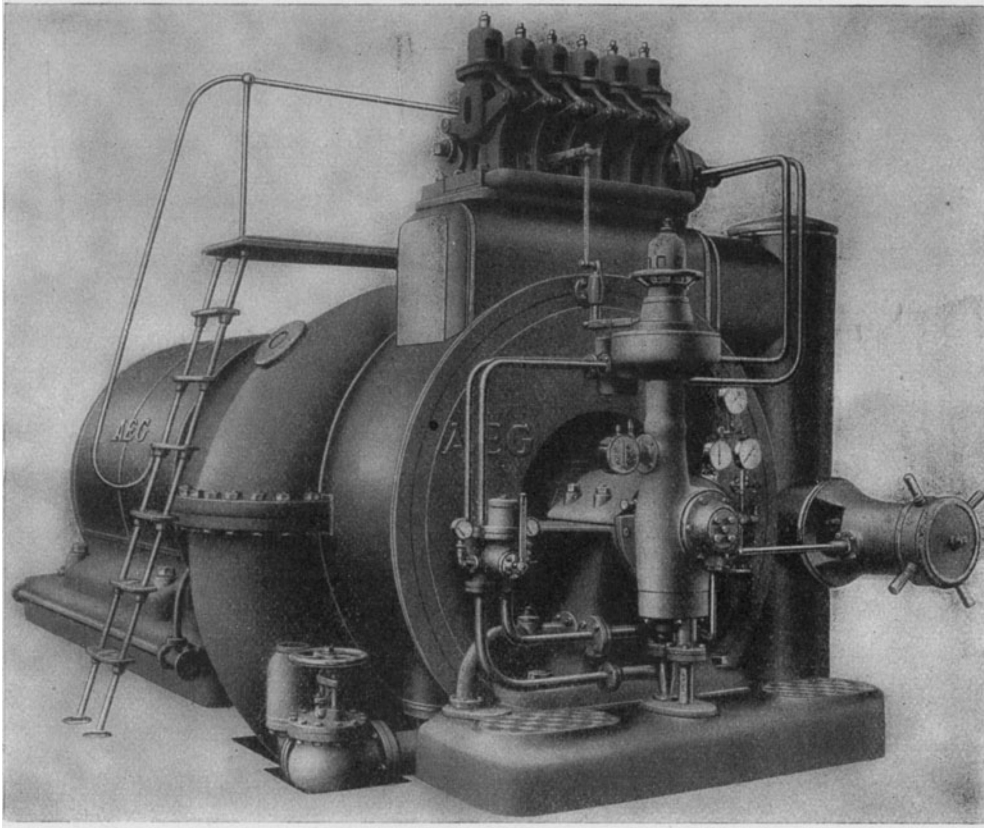


Abb. 606. Gesamtaufbau einer A.E.G.-Turbine für 5000 kW-Leistung bei 3000 Umdr./min.

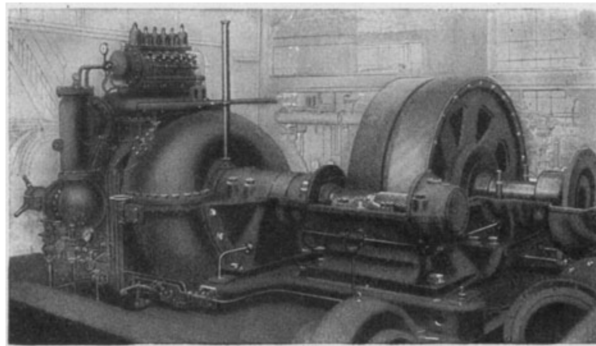


Abb. 610. A.E.G.-Turbine von 3000 kW-Leistung mit Zahnradübersetzung von 3000 auf 300 Umdr./min.

In neuerer Zeit hat die A. E.-G. die Verwendung von Zahnradgetrieben auch für ortsfeste Anlagen in Aussicht genommen. So stellt Lichtbild 610 ein Getriebe zur Übertragung von 3000 kW bei einem Drehzahlverhältnis von 3000 auf 300 zum Antriebe einer Gleichstromdynamo dar, die bekanntlich erheblich niedrigere Drehzahlen erhalten müssen als Wechselstromerzeuger.

Nachfolgende Kennzeichen des allgemeinen Aufbaues verdienen besonders hervorgehoben zu werden. Bis zu Leistungen von 10000 kW wird die Turbinenwelle mit der Dynamowelle durch eine starre Kupplung verbunden und beide Rotoren im ganzen durch drei Lager gestützt. Nur bei ganz großen Ausführungen ordnet man 4 Lager und eine

bewegliche Zwischenkupplung, an. Das Gewicht der ganzen Turbine wird durch die Lagerständer getragen, wovon der vordere auf seiner Fundamentplatte gleiten kann. Daher wird die Zuleitung für den Frischdampf, wie Abb. 607 zeigt, mittels Kugelgelenk beweglich ausgebildet. Besonderes Gewicht wird auf den Ausgleich des Axialschubes gelegt, daher die Labyrinthkämme auf Büchsen von gleichem Durchmesser wie die Naben der Scheiben gleiten. Es kann mithin nur ein kleiner Axialschub übrig bleiben, der durch ein äußeres fliegendes Kammlager von kleinen Abmessungen aufgenommen wird.

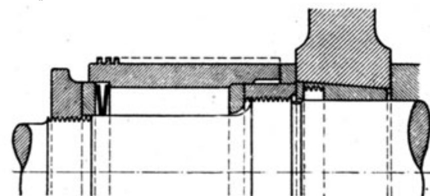


Abb. 611. Laufrad und Labyrinthbüchsen.

Die Regelungsart ist in Abschn. 102 besprochen worden und wirkt durch Mengenbeeinflussung mittels schrittweisen Öffnens von 4—6 Düsengruppen.

Die Zweidruck- und Dampfentnahmeturbine der A. E.-G. samt ihren Steuerungen werden im Abschn. 141—144 erläutert.

Konstruktion der Einzelteile.

Die Leit- und Laufschaufelherstellung ist in Abschn. 70 und 73 beschrieben. Die Laufscheiben werden im allgemeinen durch konische Büchsen gestützt. Man stellt die

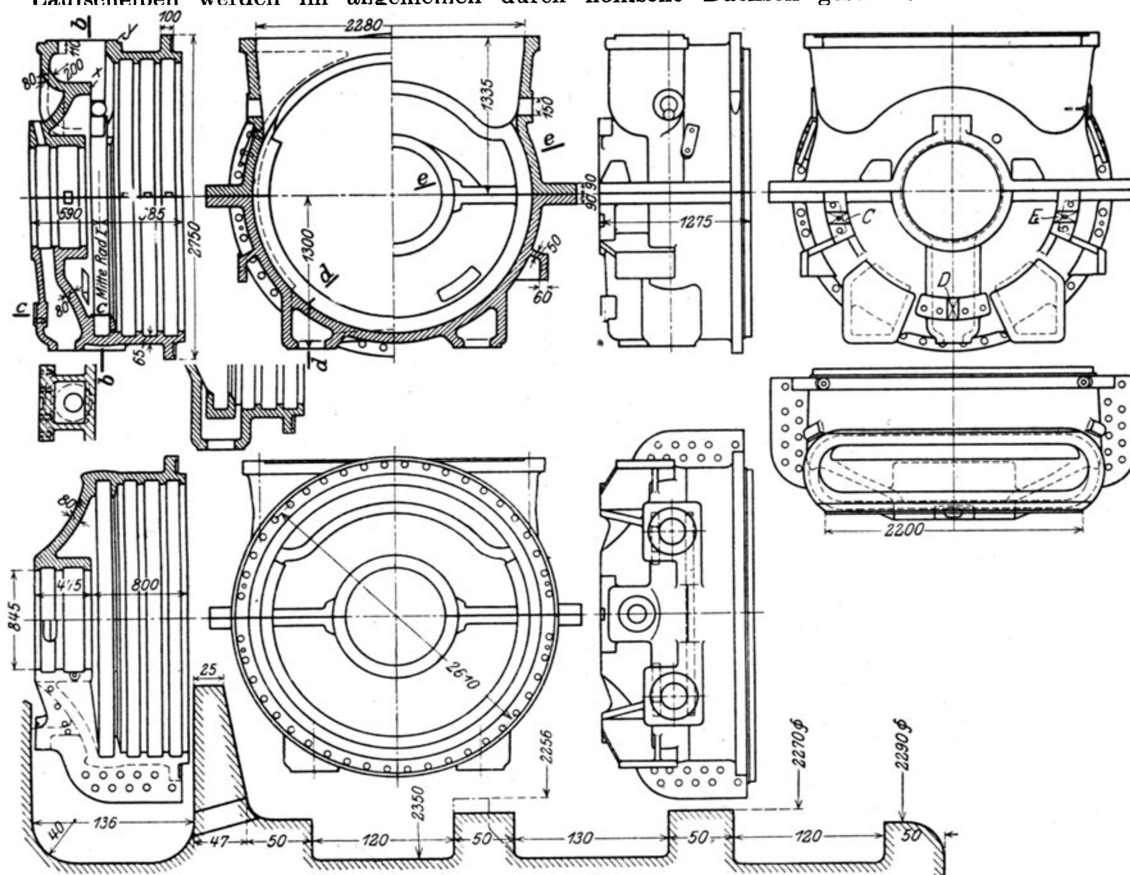


Abb. 612. Hochdruckgehäuse.

Eindringungstiefe dieser Büchsen durch vorheriges mäßiges Einpressen fest und drückt sie beim endgültigen Zusammenbau in die vorgewärmte Scheibe, um eine so bemessene Zugabe tiefer hinein, daß das Rad die vorgeschriebene Schrumpfung erhält. Gemäß Abb. 611 erhalten die Büchsen ein inneres Schraubengewinde, mittels dessen sie herausgezogen werden können. Eine Beilage füllt den Zwischenraum bis zu der nächsten Nabe aus. Die Turbinenlager wurden in Abschn. 96 besprochen. Die Stopfbüchsen desgleichen in Abschn. 97. Die Büchse für die Labyrinthkämme wird gemäß Abb. 611 durch zwei (Bellevillesche)

Federplatten gestützt, damit eine Verschiedenheit ihrer Wärmedehnung gegenüber der Welle unschädlich bleibt.

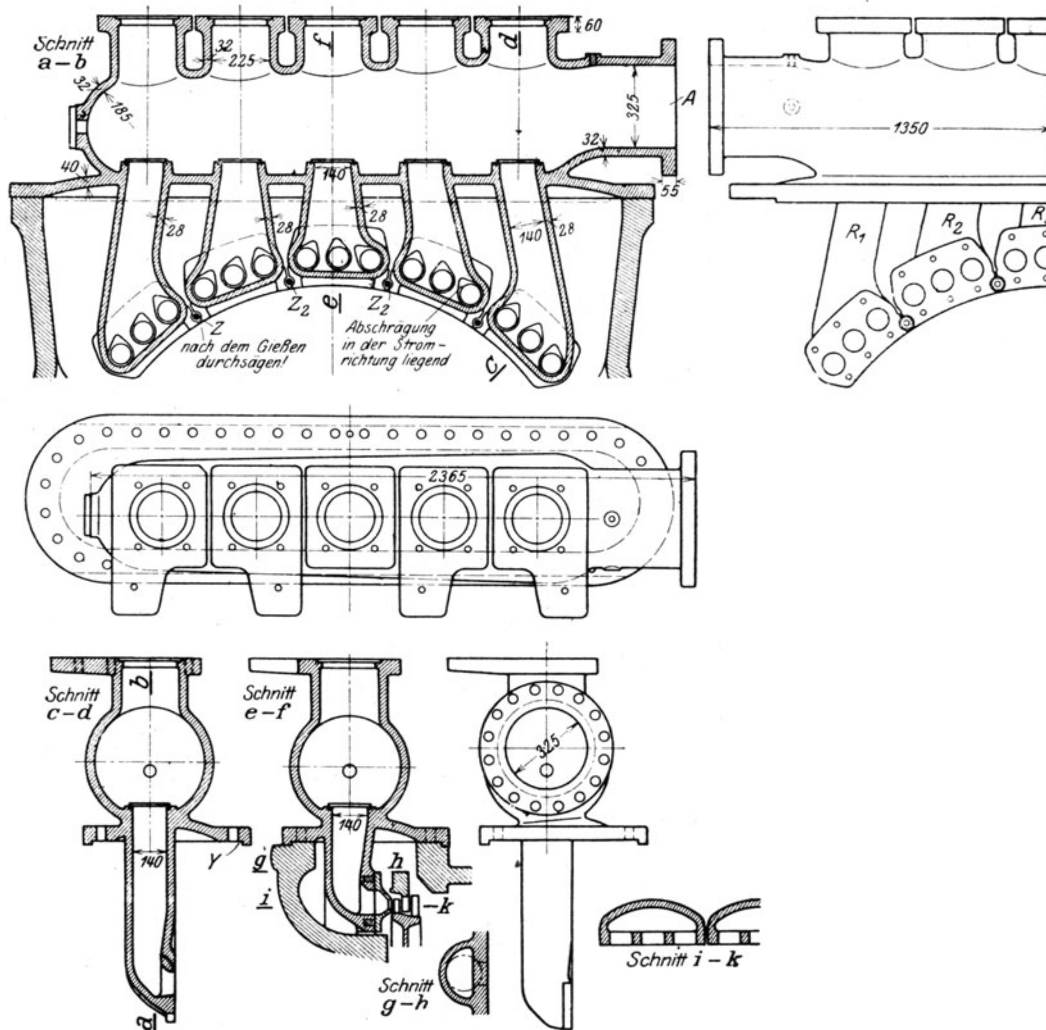


Abb. 613. Düsenkasten.

Die Konstruktion der nach einwärts verjüngten Zwischenböden wurde in Abschn. 98 besprochen. Das Hochdruckgehäuse Abb. 612, das im Oberteil einen langen Schlitz zur Aufnahme der Düsenzuleitung erhält, ist infolge der starken Entspannung in der ersten Stufe der verhältnismäßig niedrigen Pressung von etwa 3 at Überdruck ausgesetzt. Daher ist es möglich, die Festigkeit des fehlenden Wandstückes einerseits durch die 100 mm starke Rippe X, anderseits durch das Übergreifen des Deckels in den Falz Y zu ersetzen. Beachtenswert ist die große Breite der seitlichen Flanschen, in denen die Schrauben nach Art einer Doppelnietung angeordnet sind. Endlich ist darauf hinzuweisen, daß der Anschluß des vorderen Lagerständers, dessen Form in Abb. 607 besonders deutlich sichtbar ist, nicht auf der Ausdehnung des ganzen Flansches, sondern bloß durch begrenzte Auflagerungsflächen bei CDE erfolgt, wodurch eine vorzügliche Wärmeisolierung jenes Lagerständers erreicht wird. Bei C und E erkennt man

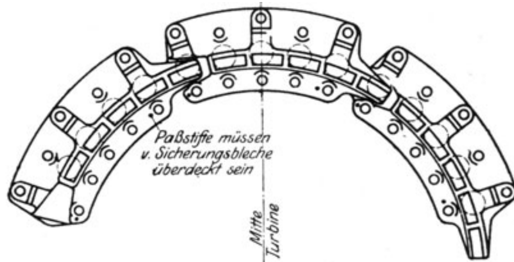


Abb. 613 a. Düsengruppen-Ansicht.

zugleich die wagerechten Keile, durch die das Gewicht der Turbine auf den Ständer übertragen wird, während Keil *D* eine Querverschiebung in der Wagerechten verhindert.

Abb. 613 stellt den zugehörigen Einströmkasten dar. Das in Abb. 606 sichtbare senkrecht emporstehende Dampfrohr schließt an diesen bei *A* an und verzweigt sich in fünf

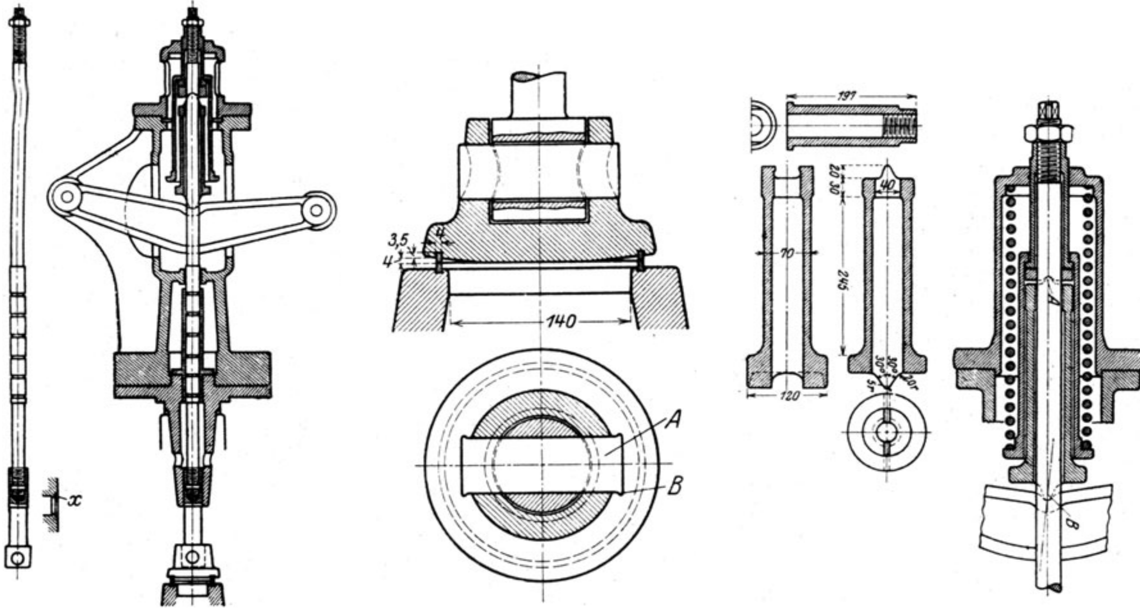


Abb. 614. Gruppenventiloberteil. Abb. 615. Ventil zu 614. Abb. 616. Federgehäuse mit Lenkstange.

aus gleich viel Düsen bestehende Gruppen. Die Berührung mit der Gehäusewand beschränkt sich auf den Befestigungsflansch. Hervorzuheben ist gegenüber der einer älteren Ausführung angehörenden Konstruktion, Abb. 503, die Trennung der zu den einzelnen Düsen-

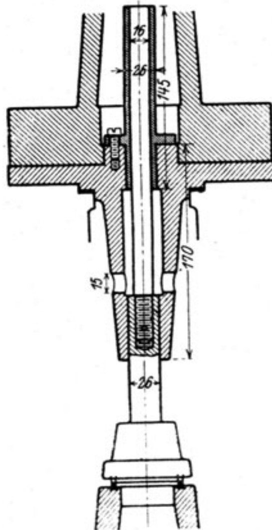


Abb. 617. Geschliffene Führungs- und Dichtungshülse.

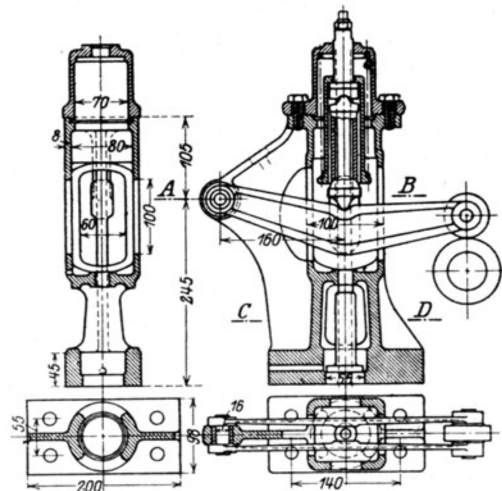


Abb. 618. Deckel mit Steuerhebel.

gruppen führenden Zuleitungen $R_1\,R_2\,R_3$, wodurch die vollkommene Freiheit und Unabhängigkeit der Wärmedehnung gewährleistet wird. Nur um die Stirnfläche genau in einer Ebene zu erhalten, sind je in die Fugen die Schrauben $Z_1\,Z_2\,Z_3$ eingefügt; jedoch, wie ersichtlich, mit hinreichendem Spiel versehen, um die Wärmeverschiebung nicht zu behindern. Wie gut der aus den Düsen tretende Strahl zusammenhält, erkennt man an der

Ansicht von drei Düsengruppen, Abb. 613a, einer kleineren Einheit. Abb. 614 zeigt ein Gruppenventil mit Deckel und Steuerhebel. An der Einzeldarstellung des Ventils in

Abb. 619. Federregler.

Abb. 620. Reglereinzelheiten.

Abb. 615 erkennt man die zweckmäßige Befestigung der Spindel mittels Bolzens A, der durch den bei B angestauchten Vorsprung am Herausrutschen verhindert ist. Die eingewalzten Dichtungsringe bestehen, wie bei Überhitzung selbstverständlich ist, aus Nickel. In Abb. 614 beachte man die Vernietung der Bohrung für den Sicherungssplint bei x. Nach Abb. 616 ist das Federgehäuse zum Ausgleich des Bogenpfeiles des Steuerhebels mit der in (gerundeten) Schneiden gelagerten Lenkstange $A\,B$ versehen. Abb. 617 ist die geschliffene Führungs- und Dichtungshülse zur Spindel; Abb. 618 der Deckel mit Steuerungsdoppelhebel und Steuerungsrolle.

Die Regler sind bei großen Ausführungen Federregler der Hartungschen Abart, so

Abb. 621 zu 620.

in Abb. 606. Bei kleinen Einheiten wird eine das Lavalsche Vorbild verbessernde Konstruktion, Abb. 619, verwendet. Sonderdarstellungen der mit Schneidenenden versehenen Zwischenstängelchen sind Abb. 620 und 621. Dieser Regler wirkt nach Abb. 604, 605 unmittelbar auf das Drosselventil ein. Der Sicherheitsregler wurde in Abschn. 102 beschrieben. Das Ausklinkgestänge desselben ist in Abb. 622 dargestellt. Darin bedeutet A das Dampfzuleitungsrohr.

Abb. 622. Ausklinkgestänge zum Sicherheitsregler.

Das Hauptabschließungsventil wird durch Abb. 623 veranschaulicht. Die senkrechte Anordnung des Handrades wird bei großen Einheiten infolge der höheren Lage des Abschließungsventiles durch ein auf der Spindel selbst befindliches Handrad nach Abb. 624

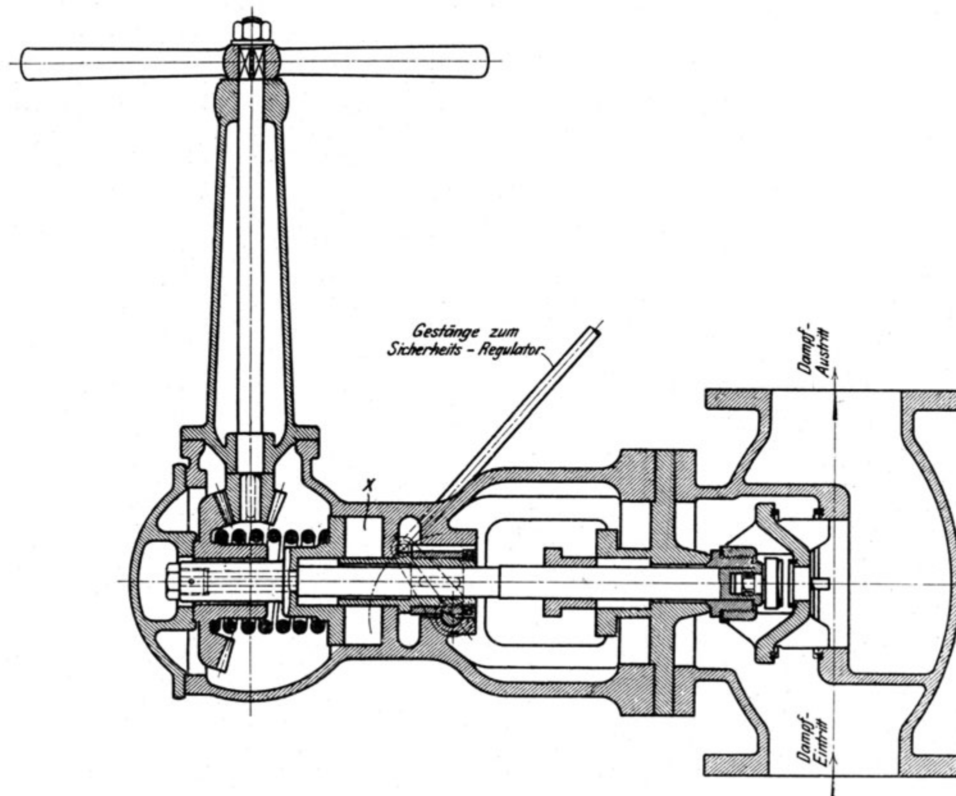


Abb. 623. Hauptventil mit Schnellschluß.

ersetzt. Dort ist auch die Einzelheit des Auslösungsknaggens x deutlicher erkennbar. Die in Abb. 503 dargestellte Ventilführung ist durch die Konstruktion nach Abb. 617 ersetzt.

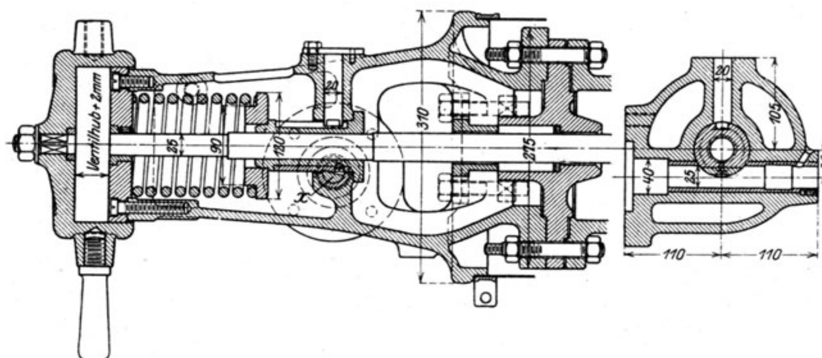


Abb. 624. Neuere Auslösevorrichtung.

Versuchsergebnisse.

Sehr ausführliche, den Einfluß aller maßgebenden Größen aufhellende Versuche sind an der 4000 kW-Einheit in der Zentrale Moabit der Berliner Elektrizitätswerke angestellt worden. Dabei wurde bei abgekuppeltem Regulator durch Drosseln von Hand der jeweilige Druck vor den Düsen unveränderlich gehalten. Reichte eine Düsengruppe nicht mehr aus, so wurde eine weitere Gruppe zugeschaltet, was die Sprünge in den zu besprechenden Schaulinien des Dampfverbrauches erklärt.

Der Dampfverbrauch für die Einheit der Leistung ist in Abb. 625 zusammengestellt. Beachtenswert ist die geringe Zunahme des Verbrauches zwischen Voll- und Halblast.

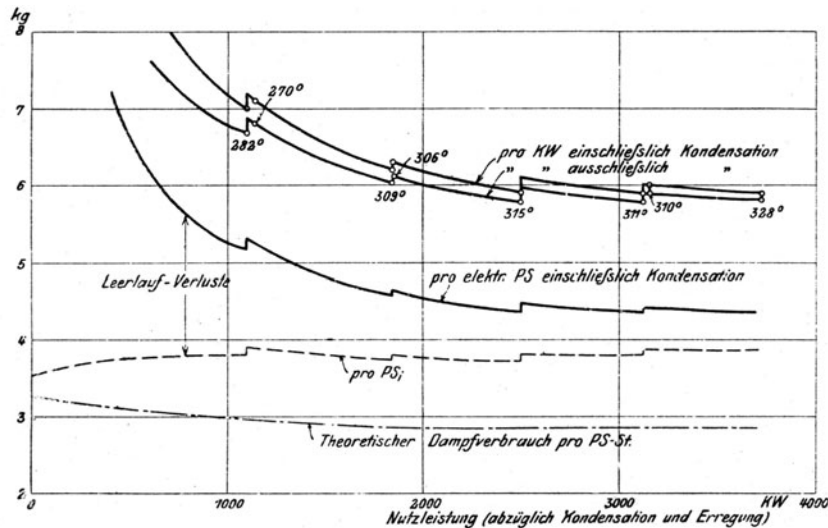


Abb. 625. Dampfverbrauch f. d. kW/st.

Der **Einfluß der Luftleere** im Abdampfstutzen steigt nach Abb. 626 mit der Tiefe der Luftleere und ist in v. H. ausgedrückt wenig verschieden für halbe und volle Belastung. Vor dem Drosselventil herrschten 12 at Überdruck und 315° C.

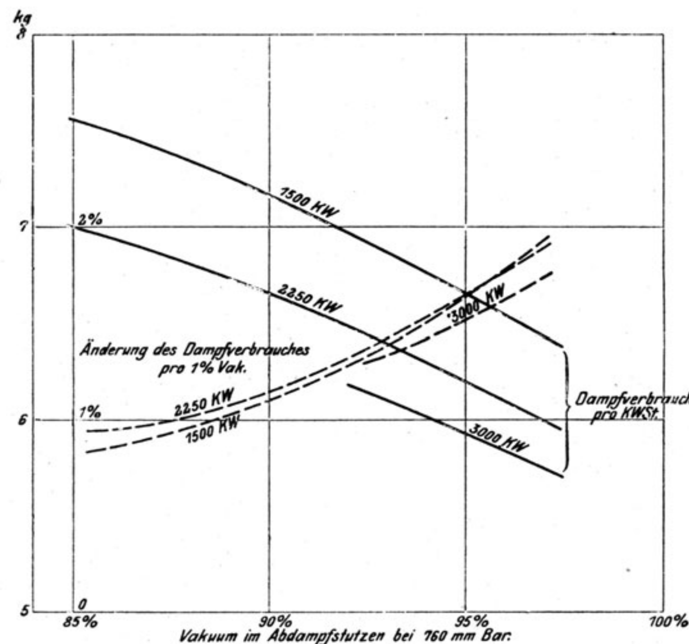


Abb. 626. Einfluß der Luftleere.

Der **Einfluß der Überhitzung** bewirkt nach Abb. 626a zwischen 250 und 300° C im Mittel eine Verbesserung des Dampfverbrauches um 1 v. H. auf je 5,7° C Überhitzung. Die Luftleere betrug bei diesen Versuchen 95,7 v. H.

Der Dampfverbrauch bei **Drosselung** statt der Einzelregelung ergab sich in Abhängigkeit der Belastung und der Zahl der offenen Düsen nach Abb. 627 naturgemäß wesentlich stärker veränderlich, als bei „idealer“ Düsenregelung, die durch die punktierte Linie dargestellt wird.

Bei **wachsender Überhitzung** aber einem **unveränderlichen Anfangsdruck** vor den Düsen von 13 at abs. und wenig veränderlicher Luftleere im Abdampfrohr von im Mittel 95,7 v. H. betrug die Leistung an den Klemmen bei 200° C Dampftemperatur 3020 kW, bei 350° C 3220 kW, nahm also (linear)

um 4 v. H. auf je 20,5° C Dampftemperatur zu. Die gesamte Durchflußmenge nimmt demnach bei unveränderlichem Anfangsdruck, aber steigender Überhitzungstemperatur ab.

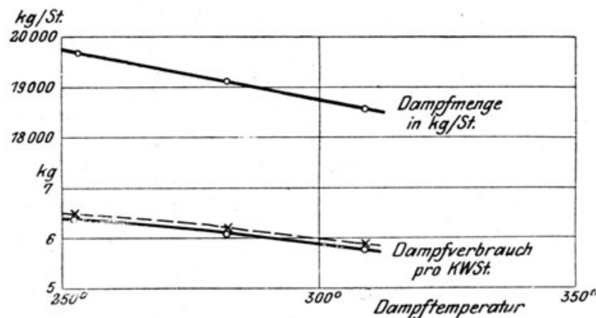


Abb. 626a. Einfluß der Überhitzung.

In Abb. 627a ist die **Leistungsparabel** zwischen 1000 und 1700 Uml./min bei 11,6 at Überdruck 324° C Dampftemperatur vor den Düsen und 95 v. H. Vakuum im Abdampfstutzen darstellt. Man ist bei der normalen Umlaufzahl noch ziemlich weit vom Scheitel entfernt und könnte den Dampfverbrauch entsprechend vermindern.

Der **Leerlaufverbrauch** zeigt sich ebenfalls erheblich abhängig von der Zahl der geöffneten Düsen und von der Dampftemperatur gemäß nachfolgender Zahlentafel

Zahl der geöffneten Düsen		4	8	12
Absoluter Druck vor den Düsen	at	1,95	1,00	0,76
Dampftemperatur vor den Düsen	°C	205	217	240
Dampfverbrauch in der Stunde	kg	1520	1600	1680

Die Luftleere betrug im Mittel 95 v. H. Verglichen mit 18 bis 19000 kg stündlichem Dampfverbrauch der vollen Belastung ist der Leerlaufverbrauch außerordentlich klein.

Die Messung des Druckes vor der zweiten Stufe (Abb. 627b) erweist diesen als verhältnisgleich zum Drucke vor der ersten Stufe, wodurch das in Abschn. 67 aufgestellte Gesetz bestätigt wird.

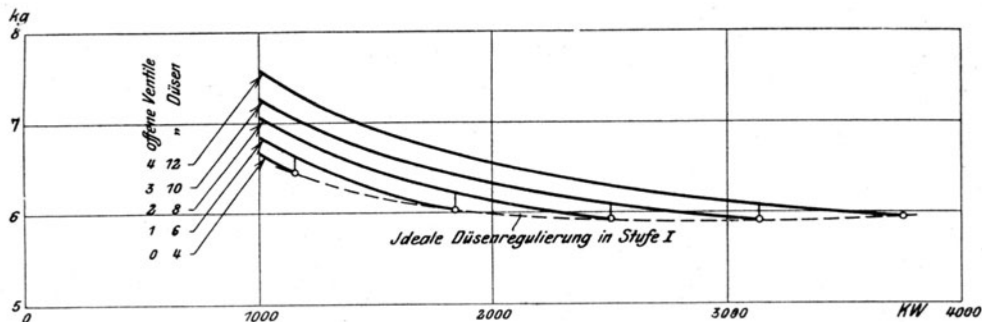


Abb. 627. Dampfverbrauch bei Drosselung.

Die A. E.-G. mißt der richtigen Ausführung der Stopfbüchsen größte Wichtigkeit bei, nachdem sie durch Beobachtung festgestellt hatte, daß eine in schlechtem Zustand befindliche Niederdruckstopfbüchse der 3000 kW-Turbine 1100, ja bis 1500 kg „Sperrdampf" in der Stunde verbrauchen konnte. Seither sind Meßdüsen in die Frischdampfzuleitung der Stopfbüchse eingebaut und letztere so vervollkommnet, d. h. offenbar die Zahl der Labyrinthe so weit vergrößert, daß der Dampfverlust bei einer 6000 kW-Einheit nur noch 100 kg/st ausmacht. Um vom Unterschied in der Wärmedehnung zwischen Welle und Gehäuse unabhängig zu sein, dichten die Labyrinthe nicht in axialer, sondern in radialer Richtung.

Im Dezember 1908 wurde eine **4000 kW-Turbine** in der **Zentrale Rummelsburg** der Berliner Elektrizitätswerke vom Dampfkessel-Überwachungsverein der Zechen im Oberbergamtsbezirk Dortmund unter Mitwirkung des Berliner Dampfkessel-Revisionsvereins untersucht und die in nachfolgender Zahlentafel 1 enthaltenen Ergebnisse festgestellt. Die elektrische Energie wurde doppelt gemessen, der Berechnung die Angaben der Instrumente des Essener Vereins zugrunde gelegt, die durch die Physik.-Techn. Reichsanstalt geprüft

worden waren. Beim Vollbelastungsversuch Nr. 6 wurde für die kW-st die kleinste Verbrauchszahl vor 5,43 kg, ausschließlich, — bzw, 5,51 kg, einschließlich Kondensationsarbeit festgestellt. Wenn man noch bemerkt, daß der Verbrauch bis zur halben Last nahezu unverändert bleibt, so muß man die Ergebnisse als glänzend bezeichnen. Zu diesem Erfolg hat auf der einen Seite die hohe Überhitzung (350° vor der Turbine), auf der anderen die tiefe Temperatur des Kühlwassers beigetragen. Allein darin eben besteht das Verdienst des Konstrukteurs, daß die Turbine die hohe Überhitzung ohne Gefährdung verträgt und daß die Erzeugung der hohen Luftleere von bis 98,2 v. H. nur 60 kW, d. h. 1,4 v. H. der Gesamtleistung beansprucht hat.

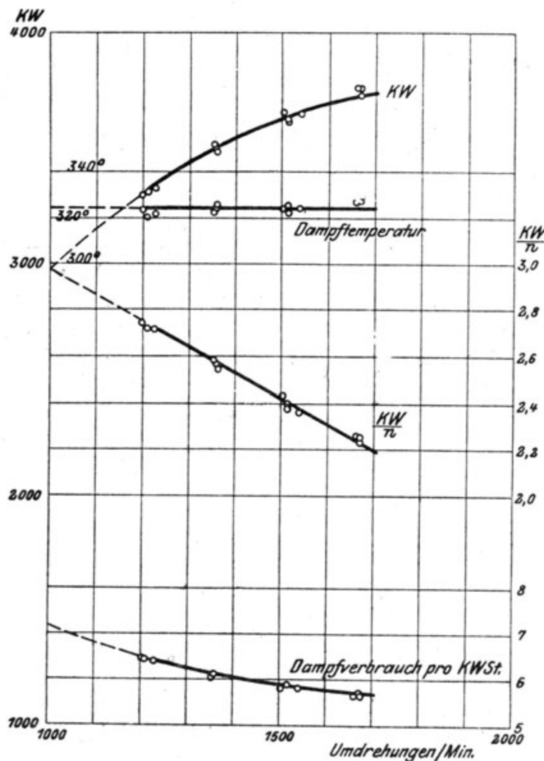


Abb. 627 a. Leistungsparabel.

Von besonderem Interesse ist der in Zahlentafel 2 berechnete Wärmeverbrauch für die effektive Pferdestärke und Stunde.

Der thermodynamische Wirkungsgrad würde offenbar noch höhere Werte aufweisen, wenn die Turbine für das hohe Vakuum gebaut worden wäre. Der jetzt noch große Auslaßverlust könnte wesentlich herabgesetzt, der Dampfverbrauch ermäßigt werden. Das Hauptinteresse wendet sich dem Wärmeverbrauch zu, der ohne Rücksicht auf den Kesselverlust 2712 kcal oder mit 0,80 Kesselwirkungsgrad 3380 kcal für die eff. PS-st erreicht.

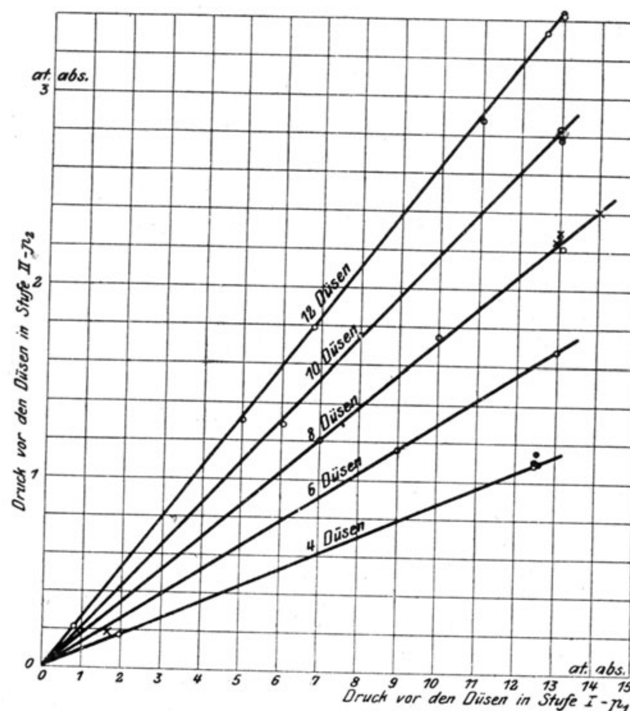


Abb. 627 b. Druck vor den Düsen und vor der II. Stufe.

Zahlentafel 1.

4000 kW A. E.-G. Dampfturbine in der Zentrale Rummelsburg. Dezember 1908.

		Nummer des Versuchs					
		1	2	3	4	5	6
1	Dauer des Versuches in Minuten	59′25″	60′	59′20″	60′	60′	60′
2	Höhe der Belastung	1/2	1/2	3/4	3/4	1/1	1/1
3	Zusatzventile	geschlossen	geschlossen	1 Ventil geöffnet	1 Ventil geöffnet	2 Ventile geöffnet	2 Ventile geöffnet
4	Umdrehungen in der Minute	1490	1501	1500	1500	1495,4	1497,7
5	Dampfdruck, Atm. Überdruck, Admissionsspannung	12,4	12,5	12,3	12,3	12,2	12,2
6	Temperatur des Admissionsdampfes in °C	334	345	333	330	341	350
7	Vakuum in mm Quecks.	755,5	753,8	754,4	754,4	750,1	748,6
8	Barometerstand in mm	769,0	769,0	769,0	769,0	768,7	769,0
9	Vakuum in v. H. des vorhandenen Barometerstandes	98,2	98,0	98,1	98,1	97,6	97,3
10	Lufttemperatur in °C am Barometer	23	25	23	24	24	25
11	Temperatur des Kühlwassers vor dem Kondensator in °C	2,5	3,0	2,5	2,5	3,0	3,0
12	Temperatur des Kühlwassers hinter dem Kondensator in °C	10,0	10,0	12,0	12,5	14,0	16,0
13	Temperatur des Kondensates in den Meßgefäßen in °C	7,0	7,0	7,5	8,0	9,0	10,0
14	Kondensatmenge in kg/st	11898,00	11935,42	17780,40	17702,26	23294,02	23011,16
	Drehstromerzeuger:						
15	Spannung in Volt	6040	6080	6080	6080	6060	6070
16	Stromstärke in Ampere	191,6 [1]	195,2 [1]	298,0	298,8	371,0 [1]	370,5 [1]
17	Drehstromenergie in kW, festgestellt mit den Instrumenten des Dampfkesselvereins Essen	2200	2236	3240	3247	4232	4239
18	Drehstromenergie in kW, festgestellt mit den Instrumenten der B. E.-W.	2189	2213	3238	3239	4196	4196
19	$\cos \varphi$	ca. 1,00	ca. 1,00	ca. 1,00	ca. 1,00	ca. 0,99	ca. 0,99
20	Leistung der Erregermaschine in kW	9,9	9,9	11,1	11,1	12,7	12,7
21	Energieverbrauch der Kondensation in kW	57,3	58,6	59,2	59,2	62,9	59,4
22	Drehstromenergie — Kondensationsenergie in kW	2142,7	2177,4	3180,8	3187,8	4169,1	4179,6
23	Dampfverbrauch für d. kW-st bezogen auf die Drehstromenergie	5,40	5,34	5,49	5,45	5,50	5,43
24	**Dampfverbrauch für die kW-st bezogen auf die Drehstromenergie — abzüglich d. Kondensationsenergie**	**5,54**	**5,48**	**5,59**	**5,55**	**5,59**	**5,51**

Zahlentafel 2.

	Nummer des Versuchs					
	1	2	3	4	5	6
Anfänglicher Wärmeinhalt . . . kcal	745,5	751,1	745,0	743,6	749,3	753,7
Dampfverbrauch d. idealen Maschine für die kW-st . . . kg	3,39	3,42	3,48	3,46	3,50	3,50
Thermodynamischer Wirkungsgrad, bezogen auf elektrische Nutzleistung mit Abzug des Kondensationsarbeitsverbrauchs . . . v. H.	61,2	62,5	62,3	62,3	62,6	63,5
Wirkungsgrad des Stromerzeugers . v. H.	89,5	89,7	91,8	91,7	93,1	93,1
Wärmeverbrauch für die effektive PS-st, bezogen auf Speisewasser von 0° C ausschließlich Kesselverlust . . . **kcal**	**2720**	**2716**	**2712**	**2785**	**2870**	**2845**
Gesamter thermischer Wirkungsgrad bezogen auf Kohle und effektive Leistung mit 80 v. H. Kesselwirkungsgrad . . . **v. H.**	**18,6**	**18,6**	**17,9**	**18,2**	**17,6**	**17,8**

[1]) Nur in einer Phase gemessen.

108. Turbine der Bergmann-Elektrizitätswerke A. G. Berlin.

Die Bergmannturbine besteht aus einem zweistufigen Geschwindigkeitsrad als erste Stufe und aus einer Anzahl einfacher Druckstufen, wie Abb. 628 für eine Einheit von 2500 kW bei 3000 Umdr./min darstellt.

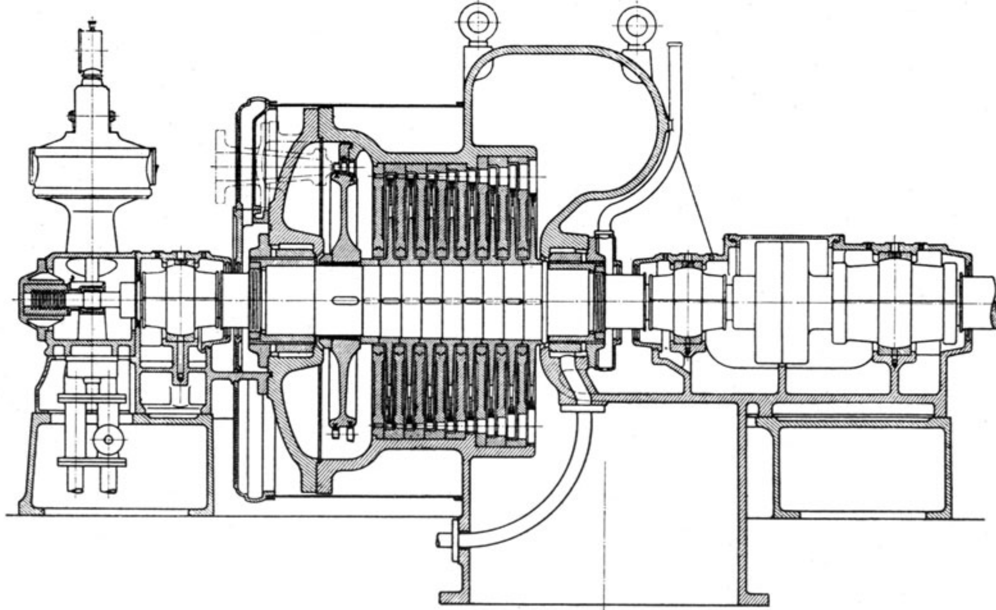


Abb. 628. Turbine der Bergmann-Elektriz.-Werke A.-G.

Die Regelung ist nach Abb. 629 eine Mengenregelung, mit 5 Düsengruppen, die je durch ein Doppelsitzventil gesteuert werden. Der Überdruck auf die massiv ausgeführten

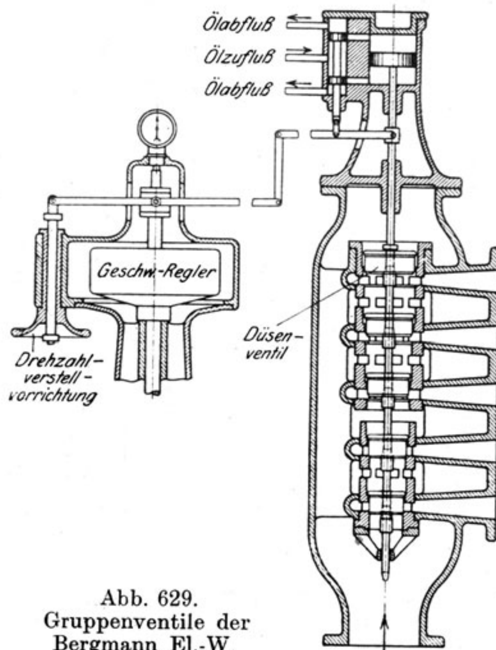


Abb. 629. Gruppenventile der Bergmann El.-W.

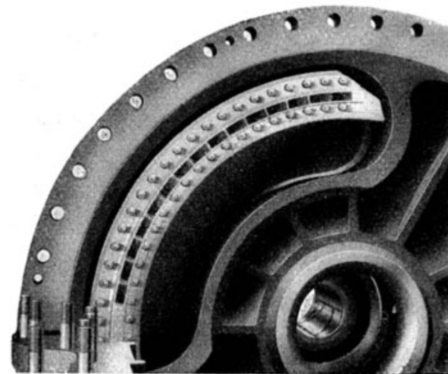


Abb. 630. Gegossene Leitkänale der 1. Stufe.

Ventile sichert dichten Schluß. Der Kraftkolben hebt die Ventile, mit dem obersten angefangen, der Reihe nach an, wobei die kegelförmigen Anpässe der Spindel ein gut zentrisches Anheben und Absetzen der Ventile ermöglichen. Nach außen ist nur eine Abdichtung erforderlich.

Additional material from *Dampf- und Gasturbinen,*
ISBN 978-3-642-50544-7 (978-3-642-50544-7_OSFO4),
is available at http://extras.springer.com



Die Leitvorrichtung der 1. Stufe hat gegossene Schaufeln und wird auf ein Verteilungsstück besonders aufgeschraubt (Abb. 630), die übrigen bestehen aus eingegossenen Nickelblechschaufeln.

Die Laufschaufeln für mäßige Umfangsgeschwindigkeit aus gepreßtem Blech sind in Abschn. 70 besprochen worden. Bei höheren Geschwindigkeiten wird die Klammerschaufel (Abb. 630a) angewendet, bei der die Biegebeanspruchung der Gabelarme durch die Auflage im Falz X des Kranzes wesentlich herabgesetzt wird. Für das Einbringen der Schaufeln dienen die Anschnitte Y (Abb. 630b), die durch eine entsprechend geformte Schlußschaufel ausgefüllt werden. Durch Zerreißversuche an Probestücken wurde nach Mitteilung der Firma festgestellt, daß die Sicherheit der Schlußschaufel gegen Fliehkräfte die gleiche ist wie bei den anderen Schaufeln. Dies liegt offenbar daran, daß das bei Z in den Kranz einschneidende Gewinde der Befestigungsbolzen S mitträgt.

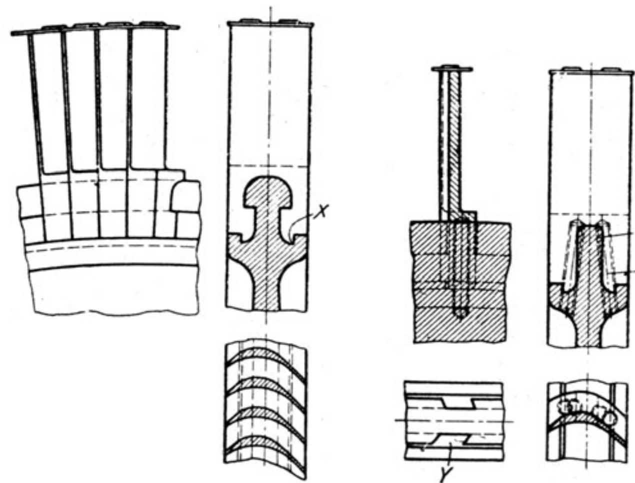


Abb. 630a. Klammerschaufel. Abb. 630b. Schlußschaufel mit Befestigung.

Die Stopfbüchsen haben Labyrinthliderung. Das Gehäuse der dargestellten Einheit ist mit dem Niederdruckturbinen- und dem Dynamolager in einem Stück gegossen. Der vordere Deckel ist einteilig und mit dem Hochdrucklager zentrisch verschraubt. Der zugehörige Lagerbock kann axial gleiten.

109. Die Zoelly-Turbine.

Die A.-G. der Maschinenfabriken von Escher, Wyß & Co., Zürich-Ravensburg, trat Ende 1903 mit der Turbine ihres technischen Direktors, Dr. h. c. Zoelly, vor die Öffentlichkeit. Die Konstruktion bewährte sich und erlangte alsbald wachsende Bedeutung, da sie die erste Dampfturbine war, die neben den damals schon auf längere Erfahrung zurückblickenden Systemen von Parsons und de Laval auf praktische Betriebssicherheit Anspruch erheben konnte. Die Folge war die Bildung des europäischen Zoelly-Syndikates, dem eine größere Anzahl namhafter Firmen angehören. Die reine Druckstufen-Einteilung wurde der Curtisschen Geschwindigkeitsabstufung wegen der kleinen Strömungsgeschwindigkeit, also (insbesondere bei gesättigtem Dampf) geringerer Schaufelabnutzung, vorgezogen, Anderseits jedoch wurde die Stufenzahl im Vergleich mit der Rateau-Turbine auf das äußerste, damals als zweckmäßig anzusehende Maß von zehn herabgesetzt, wodurch sich kurze Wellen und eine gedrungene Bauart ergaben. Durch ein im Verhältnis größeres Gefälle der ersten Stufe wurde so rasch als mit der Wirtschaftlichkeit verträglich herabexpandiert. Die Ergebnisse waren derart günstige, daß die Firma den Grundlinien des ersten Entwurfes bis heute treu bleiben konnte.

Die Bauart der Turbine ist für große Leistungen durch Längenschnitt (Abb. 631) veranschaulicht. Die 15000 PS-Einheit besitzt bei 3000 Umdr./min 7. Stufen, wobei die eigentlichen Radscheiben angenähert gleichen Durchmesser erhalten, während die Schaufellänge nach außenhin scharf zunimmt. Die drei letzten Stufen sind in das Innere des Abdampfrohres verlegt, wodurch bei bequemer Dampfführung die äußere Baulänge der Turbine gekürzt werden kann. Die kritische Drehzahl liegt unterhalb der normalen in der Gegend von 2000 bis 2200/min, so daß die Welle verhältnismäßig schlank gehalten und die Undichtheit durch das Spiel in den Zwischenwänden herabgesetzt werden kann. Die Dampfzuführung für die Überlastung erfolgt durch ein das Hochdruckgehäuse ringförmig umgebendes Rohr A, von dem aus etwa sechs radial stehende autogen geschweißte Zweigröhren den Dampf der zweiten Stufe zuführen. Der Eintritt erfolgt durch einen schmalen Spalt, damit der vom ersten Laufrad kommende Dampfstrom durch den Zusatzdampf wenig gestört wird. Das Gehäuse ist schwebend angeordnet, sein Gewicht wird durch

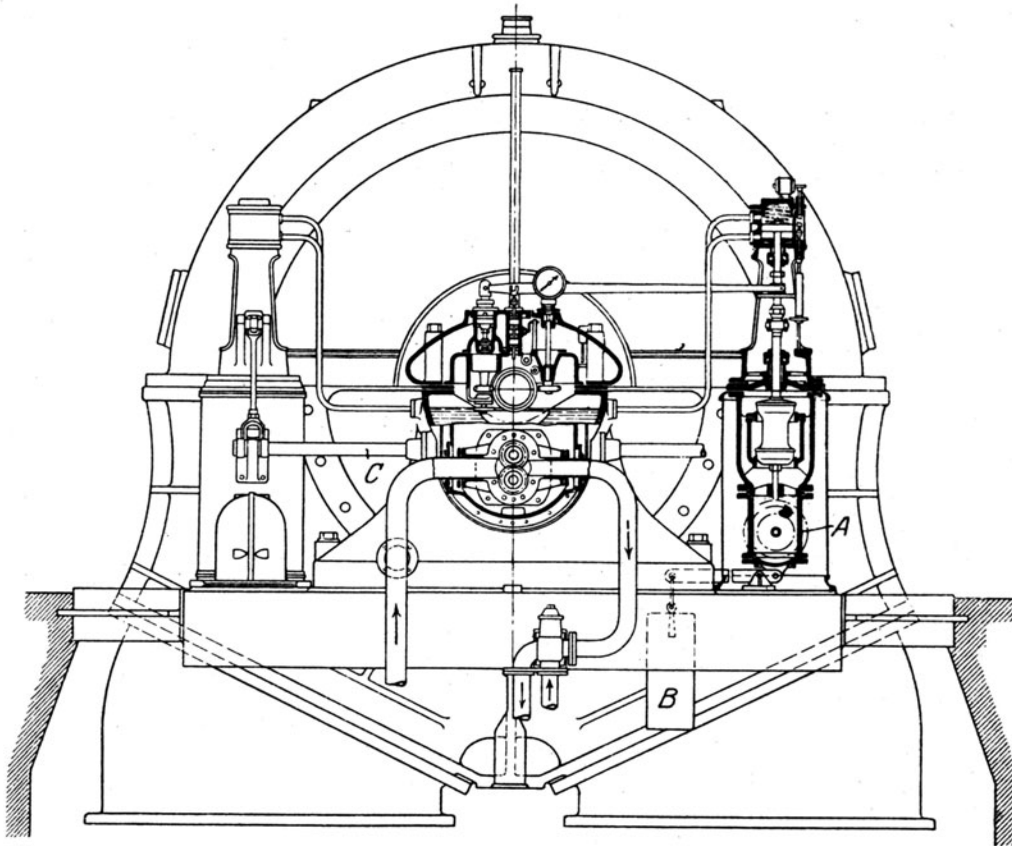


Abb. 632. Regulieranordnung einer 30000 PS-Zoelly-Turbine.

breite halbkreisförmige Flanschen auf die Lagerböcke übertragen. **Das Niederdrucklager** springt dabei konsolartig vor, um die Stützlänge zu vermindern. **Eingelegte Keile** $C_1 C_2$ wie auch $D_1 D_2$ sichern die richtige Lage der Längsachse. **Infolge der zuverlässigen Ver-**

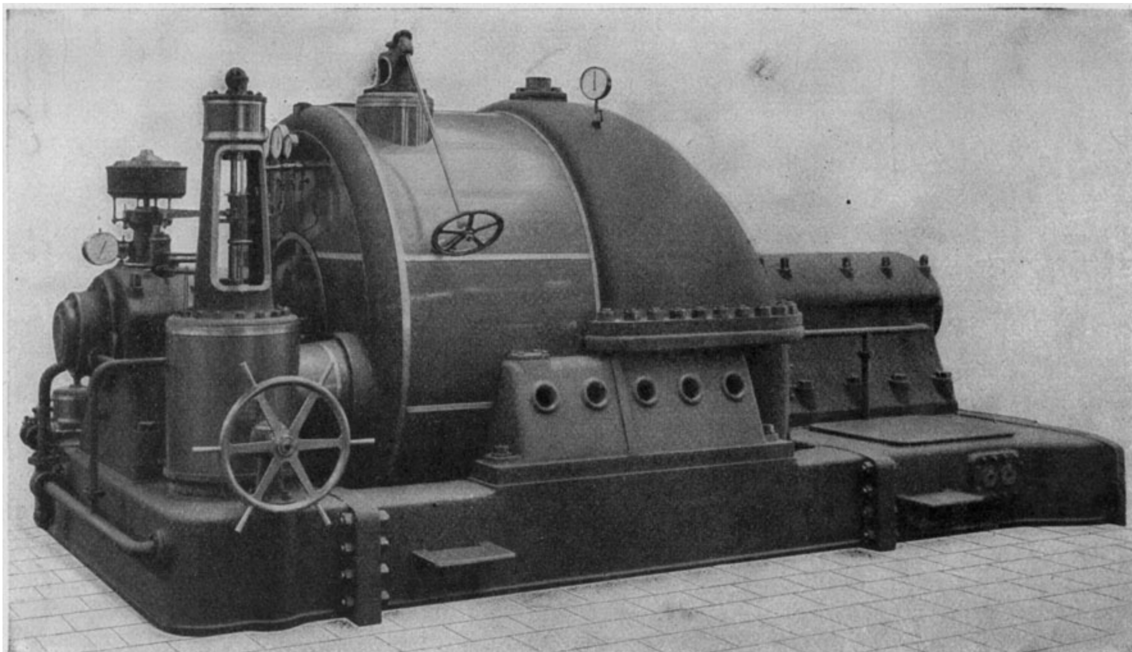


Abb. 633. Zoelly-Turbine von 18000 PS-Leistung bei 1500 Umdr./min. ältere Stützungsart.

bindung der Lagerständer konnte der Grundrahmen auf die leichte Gleitplatte $E_1 E_2$ und die schwachen Verbindungsschienen E_3 beschränkt werden.

Abb. 631a veranschaulicht die Stirnansicht der Turbine; desgleichen Abb. 632 diejenige

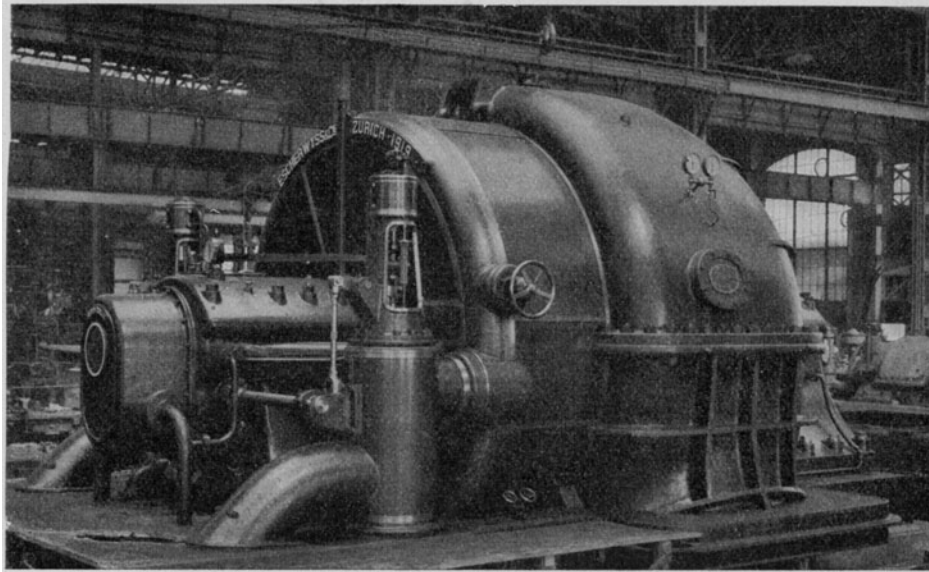


Abb. 634. Zoelly-Turbine von 30000 PS Leistung bei 1500 Umdr./min. Neuere Stützungsart.

einer Einheit von 30000 PS-Leistung bei 1500 Umdr./min. Letztere läßt erkennen, daß sowohl die Dampfzuleitung wie das Abdampfrohr in symmetrischer Anordnung doppelt ausgeführt sind.

Die äußere Ausbildung einer 18000 PS-Turbine bei 1500 Umdr./min zeigt Lichtbild 633 mit der älteren Stützungsart durch einen breiten mittleren Fuß und unabhängigen Lagern.

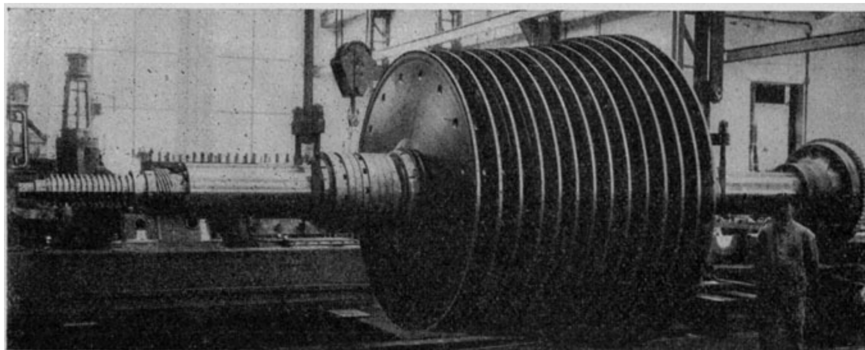


Abb. 635. Läufer einer 15000 PS-Turbine bei 1000 Umdr./min.

Im Gegensatz hierzu stellt Abb. 634 die Außenansicht der neuen Stützungsart mit freiem Auspuffrohr für die 30000 PS-Turbine dar.

Lichtbild 635 stellt den Läufer einer 15000 kW-Turbine dar, der infolge der verhältnismäßig niedrigen Drehzahl von 1000 Umdr./min noch mit 14 Stufen ausgeführt worden war.

Die Regelung ist an Hand der Abb. 508, Abschn. 102, besprochen worden, und beruht, wie man auch in Abb. 631a erkennt, auf einem Kraftgetriebe mit starrer Rückführung und Drosselung der ersten Stufe, mit von Hand oder selbsttätig zuschaltbarem Überlastventil.

Konstruktion der Einzelteile. Die Leitschaufeln werden eingegossen, wie in Abschn. 73 besprochen wurde. Die Laufschaufeln werden aus dem Vollen gefräst nach folgendem in Abb. 636 mit den entsprechenden Zahlen bezeichnetem Arbeitsgang: 1. Fräsen eines prismatischen Stückes und Abschneiden auf richtige Länge. 2. Fräsen der hohlen Schaufelfläche. 3. Ausfräsen der schrägen Schaufelschulter an der inneren Seite. 4. Fräsen

des Schaufelrückens mit Hohlfräse, derart, daß die Schaufelstärke nach außen abnimmt. 5. Anschärfen der Eintrittskante. 6. Desgl. der Außenkante. 7. Anfräsen der Nietzapfen. 8. Kegeligfräsen des Schaufelfußes entsprechend dem Zentriwinkel der Teilung. 9. Fräsen der Befestigungsnuten im Schaufelfuß. 10. Fräsen der Ausrundung zu der schrägen Schaufelschulter auf dem Rücken der Schaufel. 11. Polieren mit Schmiergelscheiben.

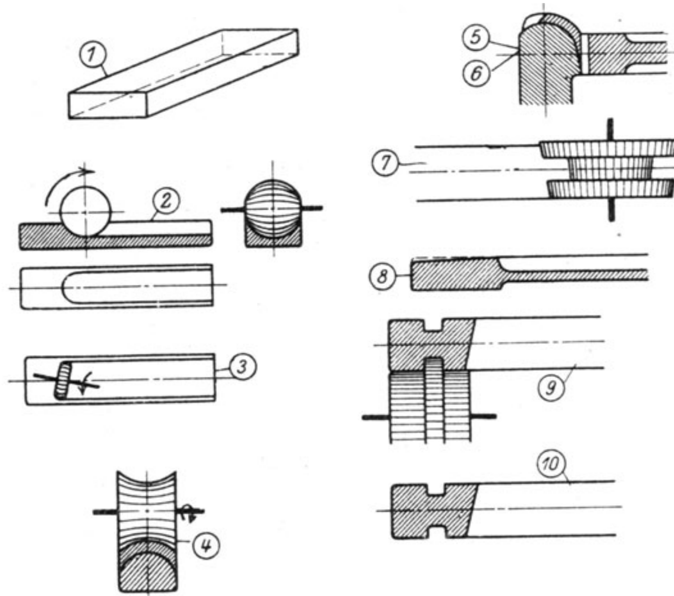


Abb. 636. Herstellung der Zoellyschaufeln.

Abb. 637 veranschaulicht das sinnreiche **Kranzschloß**. Neben dem Hauptausschnitt X für das Einbringen der Schaufeln sind zwei schmale Einschnitte Y vorhanden. Die Schlußschaufel A besitzt einen T-förmigen Fuß; die Nachbarschaufeln B sind etwas dicker, Schau-

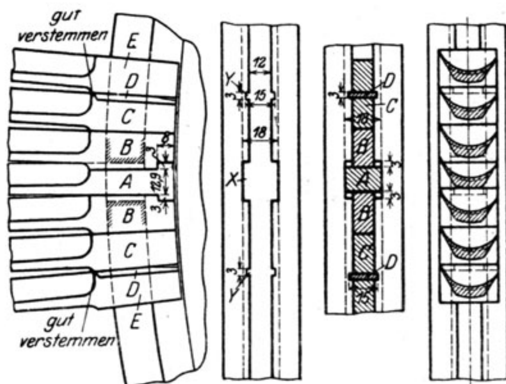


Abb. 637. Kranzschloß.

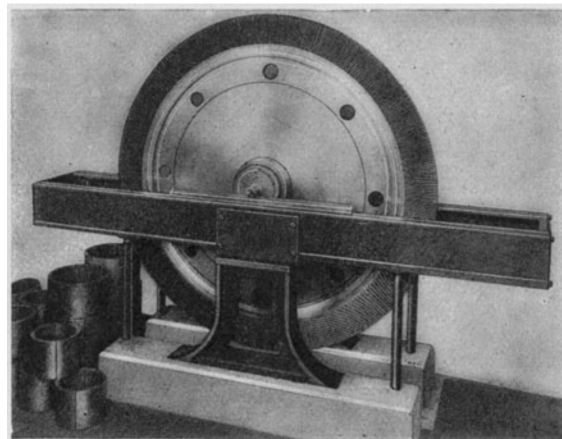


Abb. 638. Statische Auswuchtung der Einzelräder.

feln C etwas dünner, so daß, bevor Keile D hereingebracht sind, Schaufel A als letzte eingelegt werden kann. Hierauf schiebt man B und C zusammen, legt Keile D ein und verstemmt sie.

Für den Massenausgleich der **Laufräder** erweist sich die nach vorhergehendem Ausschleudern des Rades und der Beschaufelung erfolgende statische Auswuchtung jedes einzelnen Rades als hinreichend. Die hierzu dienende, aus zwei ausgerichteten Wangen bestehende Vorrichtung ist in Abb. 638 dargestellt. Wie ersichtlich, macht man die gehärteten Zapfen so dünn als möglich.

Die Lager für den Niederdruckteil und die Dynamowelle sind in Abb. 639, diejenigen für den Hochdruck einer kleineren Turbine in Abb. 640 veranschaulicht. Die großen Lager besitzen voll ausgegossene Unterschalen und nur teilweise ausgegossene Oberschalen. Das Spurlager ist entgegen den älteren Ausführungen am Hochdruckende angebracht. —

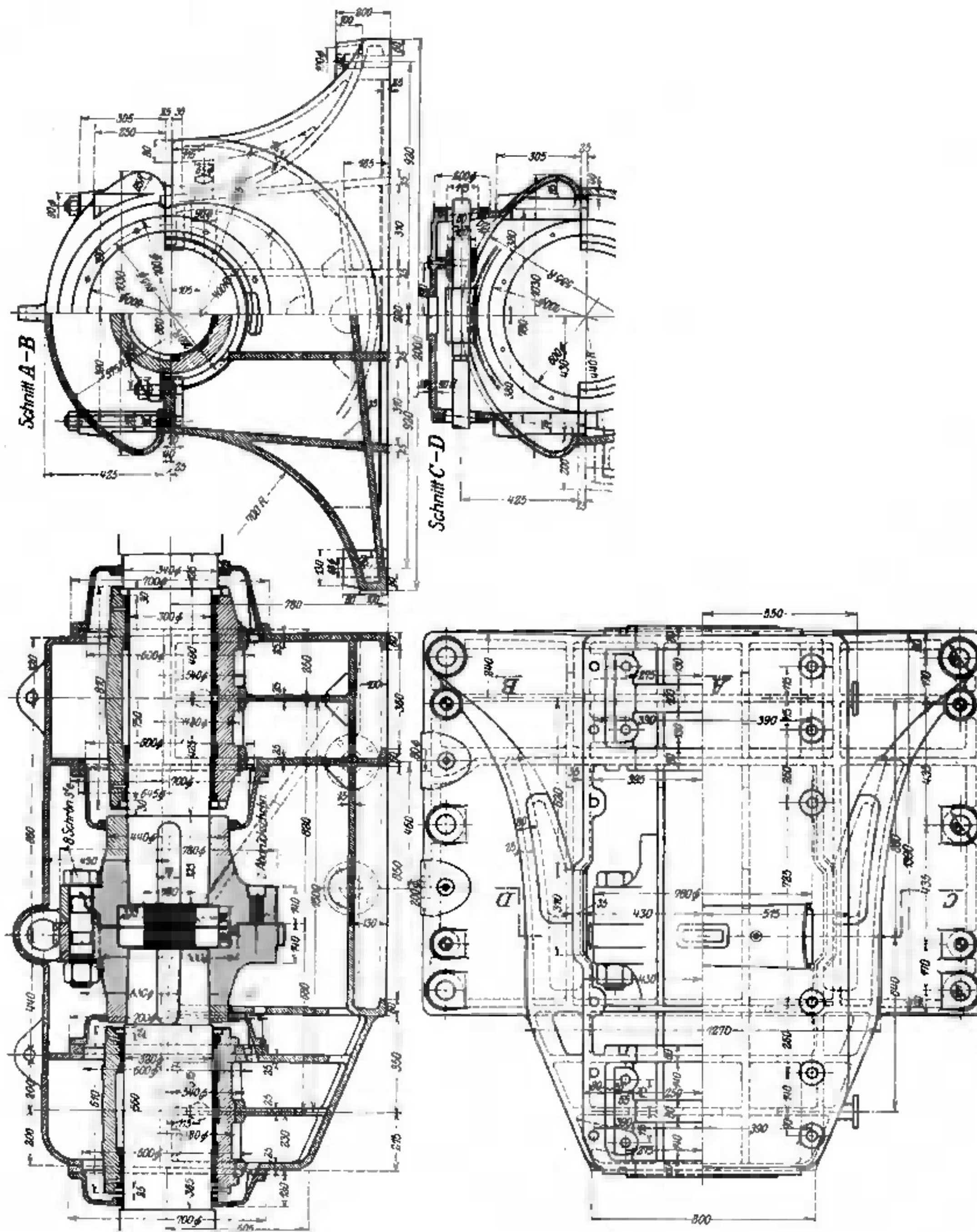


Abb. 639. Niederdruck-Lagerständer.

Damit jedoch trotz Erwärmung des Gehäuses die relative Lage von Welle und Gehäuse unverändert bleibe, ist das Spurlager in Büchse *A* gleitbar, und vermöge der Bolzen *B* mit dem vordern Gehäusedeckel für sich starr verbunden. Die Bolzen sind durch Ausschnitte im Lagerständer zum Zwecke der Einstellung zugänglich gemacht.

Das Abdampfgehäuse für Einheiten bis 20000 PS wird durch Abb. 641 veranschaulicht. Beachtenswert sind vier Versteifungsschrauben *Z*, durch die die Federung des

gegen die Stopfbüchse hin eingestülpten Endes vermindert werden soll. Zur Aufnahme des auf die ebenen Bodenflächen wirkenden Überdruckes dienen drei durchgehende Rippen *Y*.

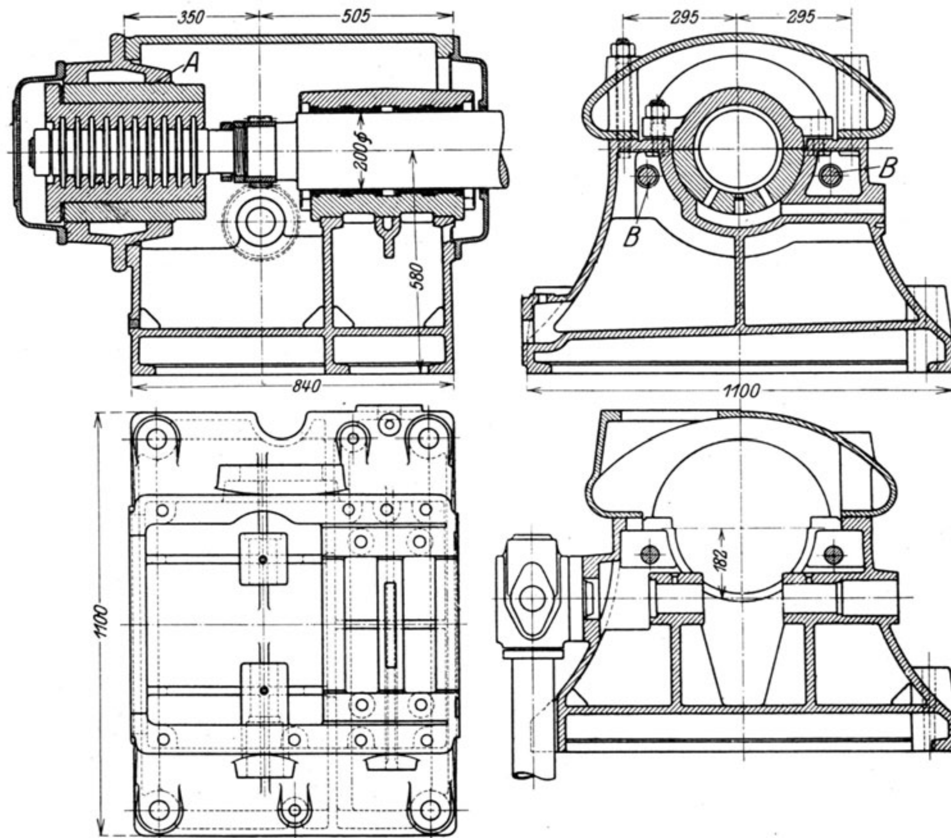


Abb. 640. Hochdrucklager mit Kammzapfen und Distanzbolzen *B*.

Das Gehäuse wird durch den Verbindungsflansch *X* auf den Lagerständer abgestützt. Noch größere Einheiten erhalten nach Abb. 642 eine doppelte Ausströmung mit sehr kräftiger Versteifung des zwischen den Rohrstutzen stehen bleibenden Gehäuseteiles. Der (verkehrt

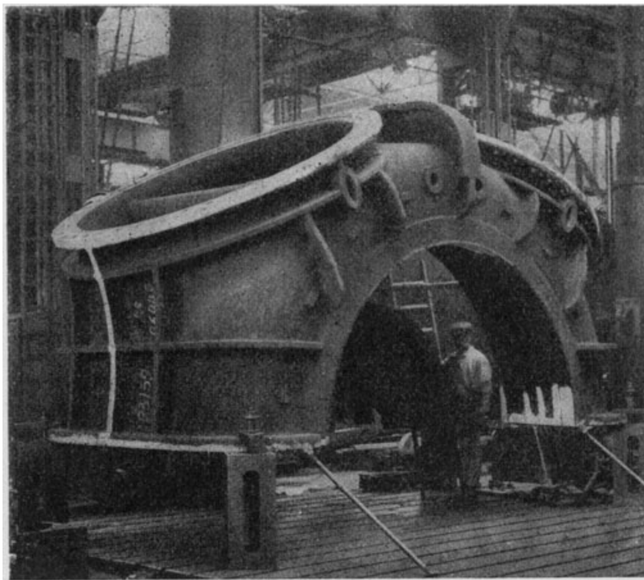


Abb. 642. Abdampfgehäuse großer Einheiten.

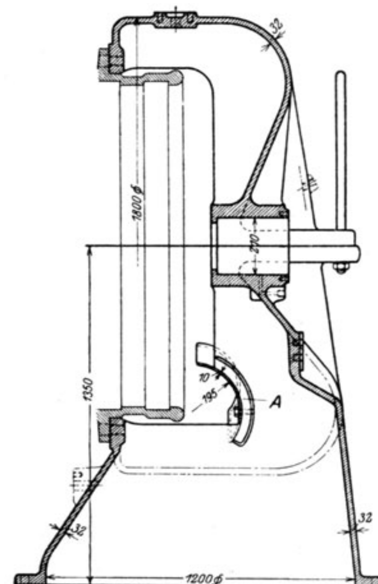


Abb. 642a. Abdampfgehäuse mit Ablenkschaufel *A*.

aufgestellte) Unterteil läßt im linken Abdampfrohr auch eine diametral verlaufende Versteifungsrippe erkennen.

Abb. 641. Turbinengehäuse.

Am kleineren Abdampfgehäuse (Abb. 642 a) ist die aus gepreßtem Blech hergestellte Ablenkschaufel *A* beachtenswert, die dem unteren Teil des Dampfstromes die Richtung vorschreibt.

An dem in ein Hochdruck- und Niederdruckteil getrennten Gehäuse einer 500 PS-Turbine wurden vom Verfasser Messungen über **den Verlauf der Wandtemperatur** veranstaltet, über die die beigefügte Zahlentafel Aufschluß gibt. Die Gehäuse hatten 800 bzw. 940 mm Durchmesser bei rund 600 und 800 mm Länge und 35 und 30 mm Wandstärke. Die Temperatur t_1 bezieht sich auf das Einströmungs-, t_2 auf das Ausströmungsende des Hochdrucks, $t_3 t_4$ desgleichen auf das Niederdruckende.

Die stündliche Dampfmenge betrug rd. 4000 kg, der Druck im Zwischenrohr etwa 0,8 kg/qcm abs. Die Durchsicht der Zahlenwerte zeigt, daß das vordere Hochdruckende um rd. 30° kühler war als der Admissionsdampf. Die Ausströmseite stimmt mit der Dampftemperatur nahezu überein. Der Vorderdeckel am Niederdruck ist ebenfalls kühler als der Dampf, das Ausströmende stimmt überein.

Zahlentafel.

Gehäusetemperaturen einer 500pferdigen Dampfturbine.

Zeit	Kesseldruck kg/cm² abs.	Temperatur vor dem Ad.-Ventil	Admissionsdruck vor 1. Leitrad. kg/cm² abs.	Temperatur des Dampfes t	Gehäusetemperaturen t_1	t_2	t_3	t_4	Vakuum (Kondensatorraum). cm Quecks.	Temperatur des Auspuffdampfes t_5
		°C		°C	°C	°C	°C	°C	cm	°C
5^{40}	9,00	231,0	6,60	216,0	185,1	96,7	73,6	54,2	63,0	54,4
5^{42}	8,80	225,5	6,60	213,0	185,1	96,7	73,5	54,2	63,0	54,4
5^{43}	8,75	224,0	6,62	207,0	184,7	96,7	73,6	54,4	63,0	54,5
5^{45}	8,80	233,0	6,70	215,0	184,5	96,8	73,9	54,4	63,0	54,6

Die Gehäuse werden auf stehenden Bohrbänken gebohrt (Abb. 643).

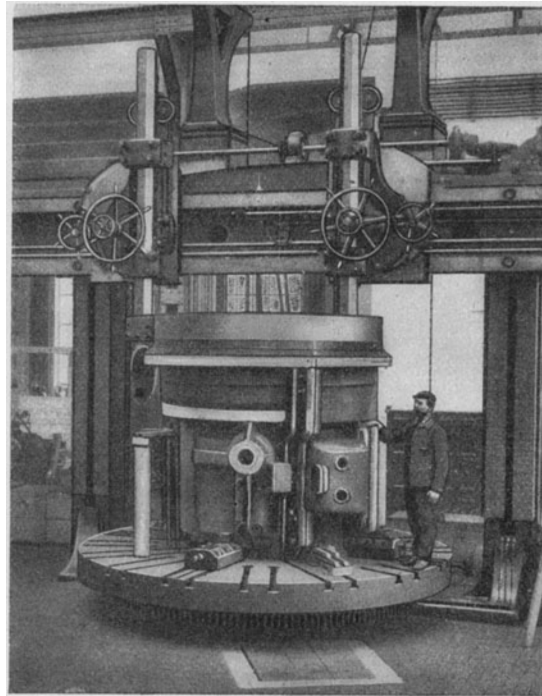


Abb. 643. Stehende Gehäuse-Drehbank.

Das Regel- und Drosselventil wird gemäß Abb. 644 ganz entlastet. Der zugehörige Kraftzylinder ist in Abb. 645 dargestellt. Wie ersichtlich, kann der Angriffspunkt des Regulatorstellhebels auf der mit langem Gewinde versehenen Spindel durch Verdrehen der mit Zahnrad versehenen Mutter von Hand oder mittels der kleinen Schnecke elektrisch vom Schaltbrett aus verschoben und dadurch die mittlere Drehzahl geändert werden. Einzelheiten des gewöhnlichen Reglers sind in Abb. 645a dargestellt.

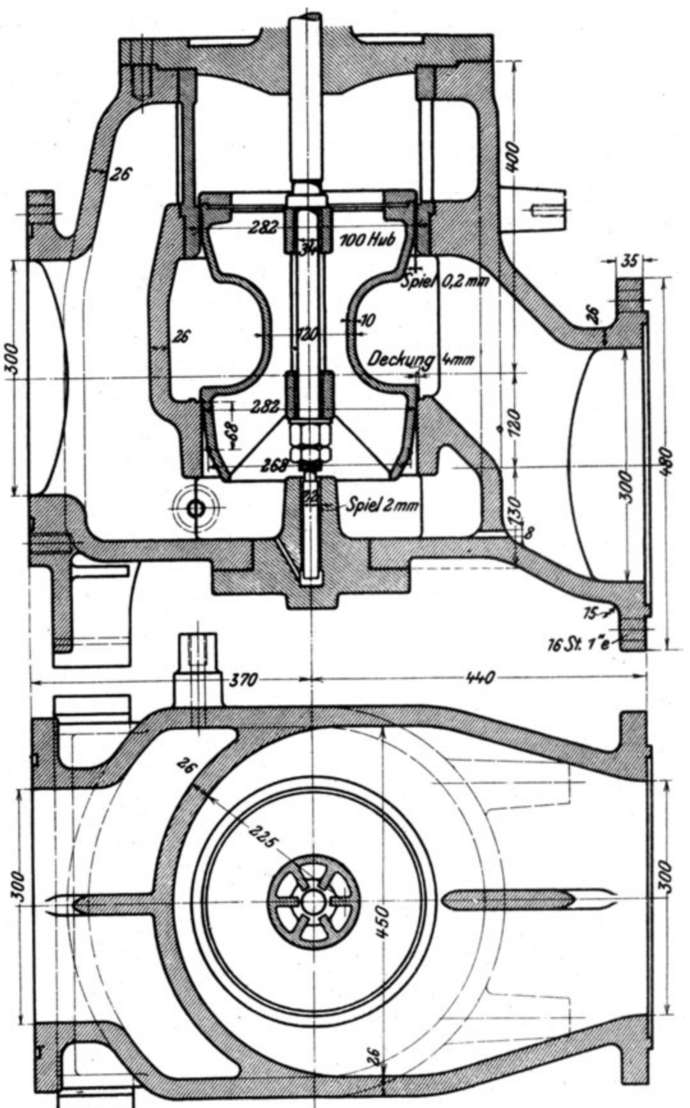


Abb. 644. Regel- und Drosselventil.

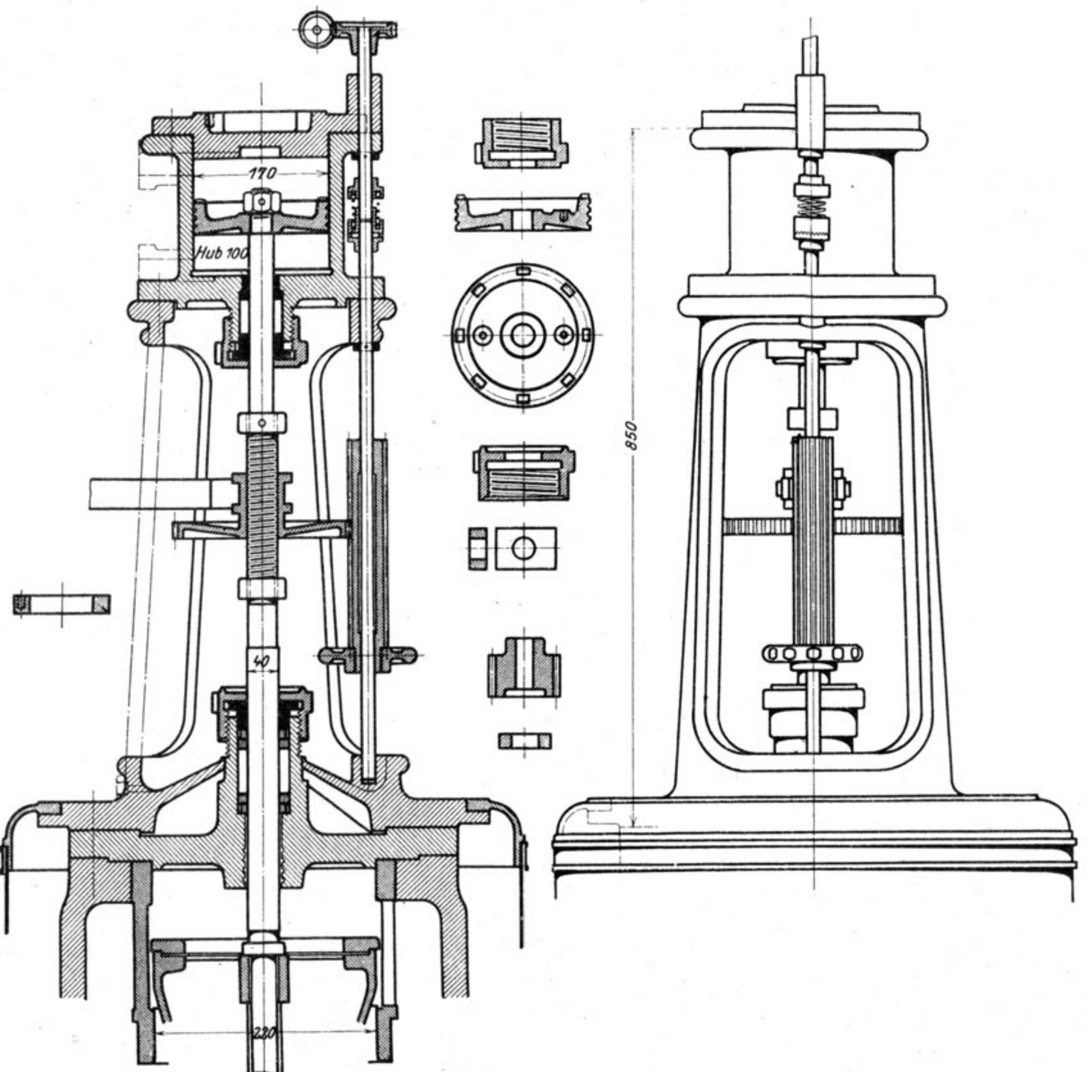


Abb. 645. Kraftzylinder.

Die neue Regelung mit einem dem Regler vorgeschalteten Kraftkolben und Öldurchfluß ist in den Abb. 508—510 dargestellt und dort besprochen. Desgleichen der Sicherheitsregler in Abb. 530.

Die Verbindung des letzteren mit der Hauptabschließung und diese selbst veranschaulicht Abb. 646.

Zur Ölversorgung während des Anlassens und ebenso während des Abstellens

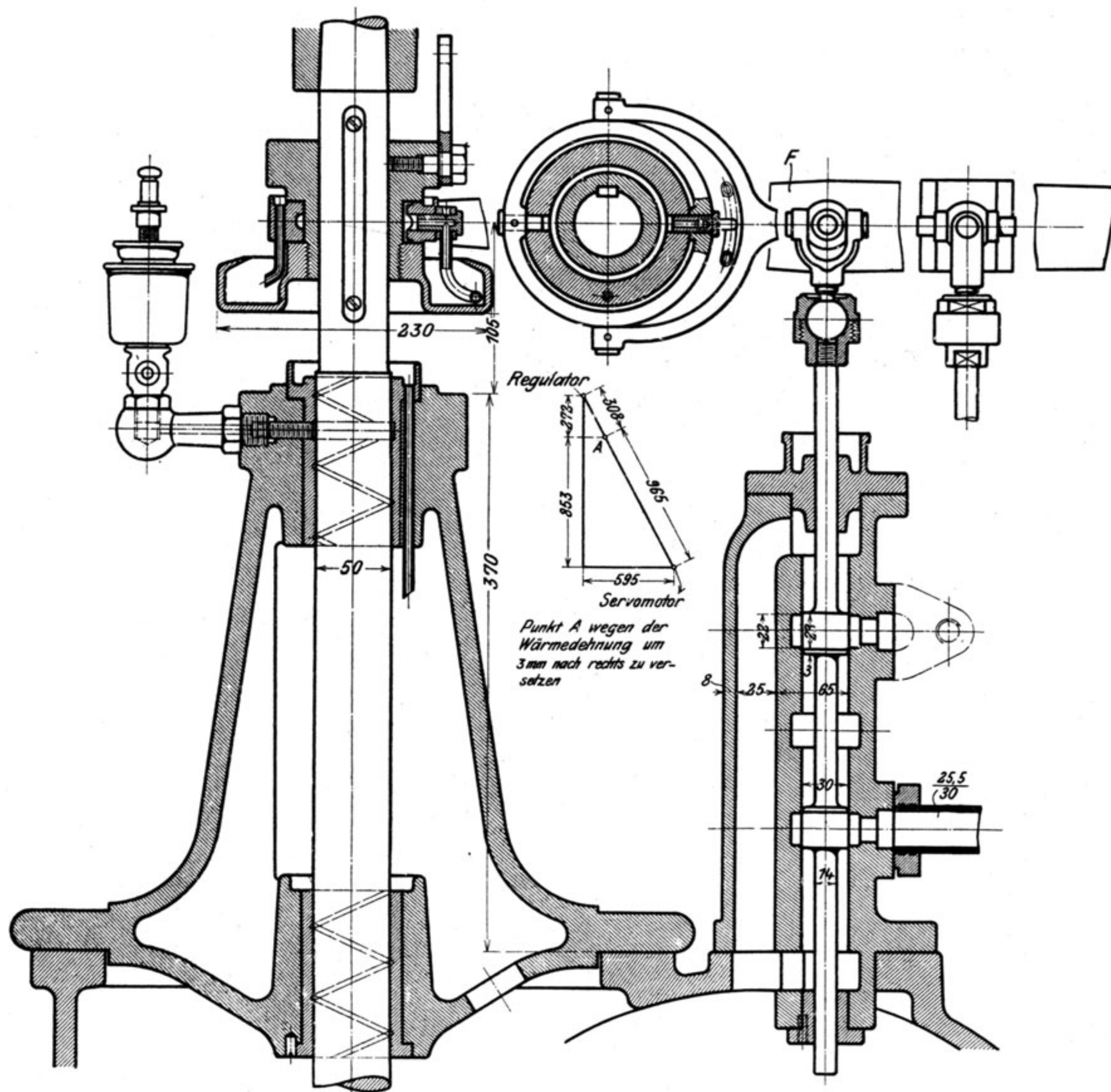


Abb. 645a. Regler-Einzelheiten.

dient die Kreiselpumpe Abb. 647 mit unmittelbarem Antrieb durch ein Dampfturbinchen von etwa 200 mm Raddurchmesser. Im normalen Betrieb wird das Öl durch eine Zahnradpumpe beschafft, die in Abschn. 102 besprochen wurde.

Die Kupplung der Turbine mit der Dynamowelle ist starr (Abb. 639). Der Kupplungsflansch wird nach Abb. 648 mit einem Zahnkranz versehen und dient mittels ausrückbarer Schnecke als Andrehvorrichtung.

Über den Dampfverbrauch der Zoellyturbine teilt mir die Firma die in nachfolgender Zahlentafel angegebenen Werte mit.

Abb. 646. Hauptabschließung mit Sicherheitsauslösung.

Versuchsergebnisse Zoellyscher Turbinen.

Nr.	Ort der Aufstellung		Neu-Staßfurt		Escaut					Moabit I			Moabit II		
	Versuch-Nr.		1	2	1	2	3	4	5	1	2	3	1	2	3
	Belastung		4/4	3/4	1/4	3/4	2/4	4/4	5/4	4/4	3/4	2/4	4/4	3/4	1/2
1	Elektr. Nutzleistung, einschließlich Erregung, ausschließlich Kond.-Arb.	kW	2492	1863	1333	3715	2494	4993	6188	8390	6390	4240	20382[1])	15440[1])	10362[1])
2	Umlaufszahl/min		3000	3000	1509	1504	1506	1505	1509	3000	3000	3000	1510	1520	1525
3	Wirkungsgrad des Generators	v. H.	95	94	87,4	94,7	92,7	95,7	95,8	95,4	94,5	92,2	95,7	95,0	93,4
4	Effekt. Nutzleistung der Turbine	PS_e	3564	2690	2073	5340	3665	7100	8780	11950	9190	6250	29000	22120	15080
5	Druck vor dem Turbinenventil	at abs.	13,80	13,98	13,39	12,20	13,26	12,90	12,84	14,79	14,96	15,33	14,23	14,15	14,45
6	Temperatur vor dem Turbinenventil	°C	305,7	296	295,1	308,0	305,7	319,4	310,5	354,0	358,7	354,9	321,6	313,3	312,2
7	Druck vor dem 1. Leitrad	at abs.	13,50	10,30	2,97	7,65	5,17	10,07	12,35	13,83	10,73	7,37	13,89	10,56	7,27
8	Luftleere im Turbinenausströmrohr	v. H.	91,2	93	98,1	96,8	97,5	96,15	95,3	92,2	94,4	95,9	95,3	96,14	96,9
9	Gemessen. Dampfverbrauch	kg/kW/st	5,98	6,12	6,32	5,62	5,76	5,42	5,47	5,27	5,35	5,48	4,93	5,04	5,20
10	Gemessen. Dampfverbrauch ausschließlich Kond.-Arb.	$kg/PS_e/st$	4,18	4,23	4,07	3,90	3,92	3,80	3,84	3,70	3,72	3,73	3,38[2])	3,41[2])	3,43[2])
11	Wärmeinhalt des Dampfes vor der Turbine beim Eintritt	i_0	732,1	727,0	727,0	734,6	732,5	739,7	735,2	756,8	759,3	756,5	—	—	—
12	Theoret. Dampfverbrauch	$kg/PS_e/st$	3,09	3,03	2,61	2,73	2,65	2,77	2,87	2,77	2,71	2,62	2,79	2,74	2,67
13	Thermodyn. Wirkungsgrad bezogen auf **effekt. Leistung** und Zustand v. der Turbine (ausschl. Kond.-Arb.)	. H.	74,0	71,6	64,2	70,2	67,7	73,0	74,7	74,9	72,8	70,5	82,6	80,4	77,9

[1]) Abzüglich Erregung.

[2]) Mit Abzug der für die Hilfsturbine erforderlichen Dampfmenge.

Für die neue Anlage in Gennevilliers bei Paris, die mit 35000 kW-Turbinen ausgestattet wird und später mit Speisewasservorwärmung durch Zwischendampf arbeiten soll, sind bei 22 at Üb. 350° C vor der Turbine folgende Gewährleistungen eingegangen worden.

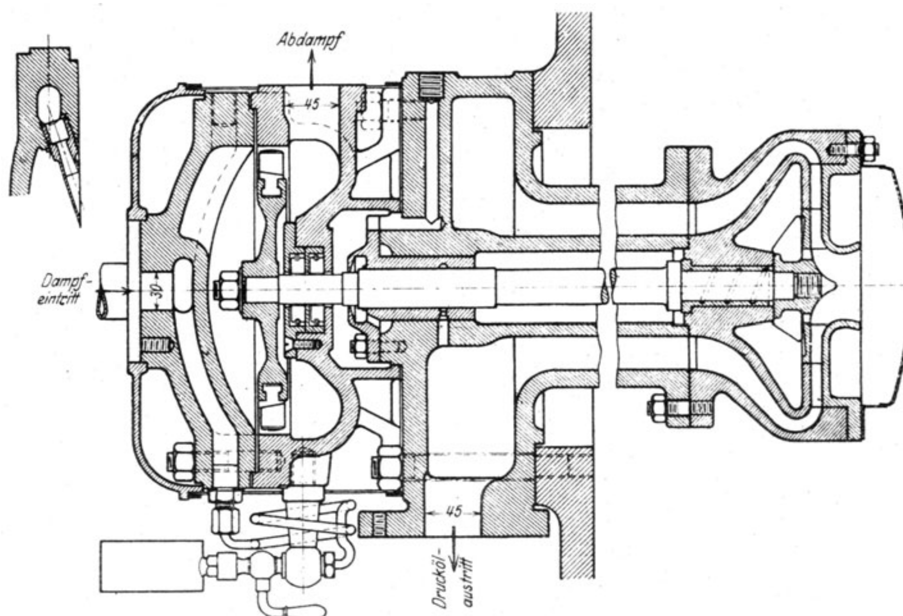


Abb. 647. Turbopumpe für Öl.

	Belastung kW	9000	18000	26000	35000
Dampfverbrauch ohne Speisewasser-vorwärmung	kg/kW-st	5,30	4,72	4,57	4,50
Wärmeverbrauch	kcal/kW-st	3875	3445	3327	3263
Luftleere	v. H.	97,6	97,4	97,1	96,3
Kondensattemperatur	°C	18	19	21	24
Mit 2stufiger Speisew.-Vorwärmung soll der Wärmeverbrauch betragen	kcal/kW-st	3619	3180	3085	3030
Temp. der Speisewasservorwärmung	°C	78,8	91,3	91,8	93,0

Die Zahlen verstehen sich ohne Abzug des Kondensatorkraftverbrauches. Der letztangeführte Wärmeverbrauch bedeutet einen Wirkungsgrad, bezogen auf die Klemmen des

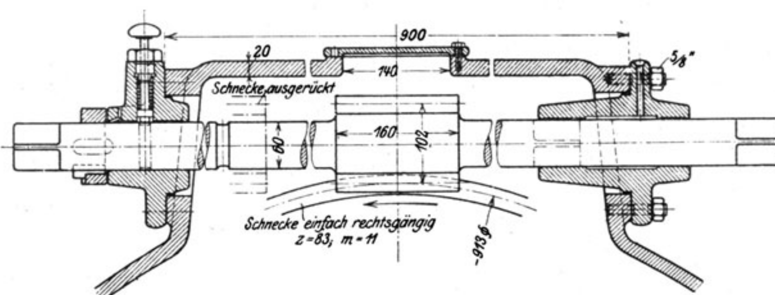


Abb. 648. Andrehevorrichtung.

Stromerzeugers von 859,4 : 3030 = 0,283. Mit 0,96 Wirkungsgrad des letzteren, 2,0 v. H. Kraftverbrauch des Kondensators und 0,85 als Wirkungsgrad des Dampfkessels ergibt sich [0,283 : 0,96] 0,98 × 0,85 ≃ 0,245 als Brennstoffnutzungsgrad, bezogen auf die elektrische Leistung.

110. Turbine der Maschinenfabrik Augsburg-Nürnberg A.-G., Nürnberg.

Die Turbine der M. A.-N. wird nach Abb. 649 entweder als vielstufige Gleichdruckturbine der Zoellyschen Bauart, oder nach Abb. 650 als Verbindung einer Gleichdruckturbine mit einem zweikränzigen Curtisrad in der ersten Stufe ausgeführt. In beiden Fällen

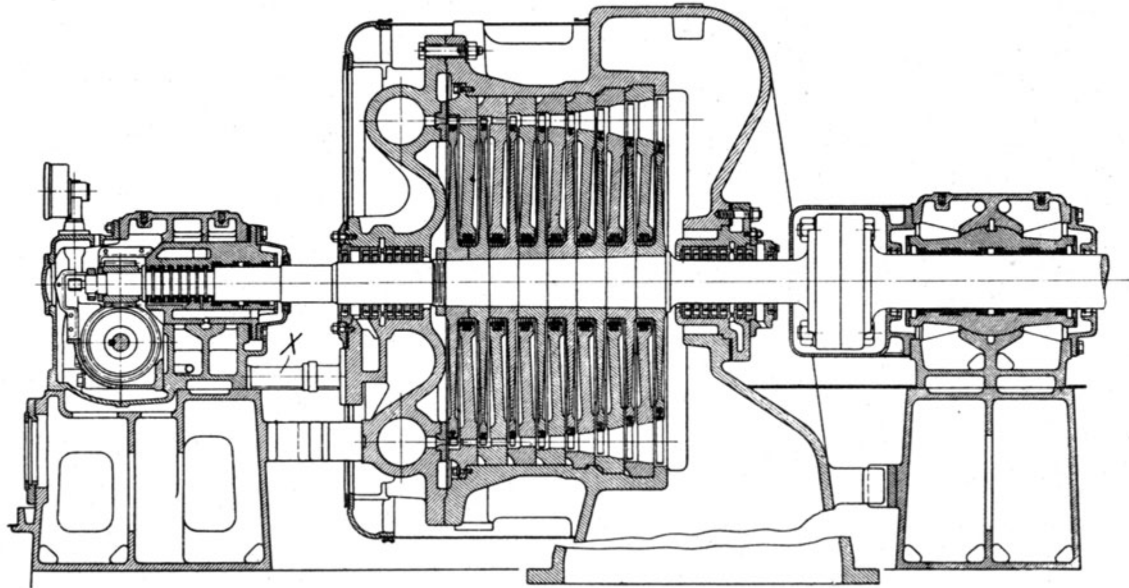


Abb. 649. M.-A.-N.-Turbine Zoellyscher Bauart.

werden Turbine und Dynamowelle in bloß drei **Lagern** gestützt und durch feste Flanschkupplung verbunden. Das Kammlager ist mit dem vorderen Traglager vereinigt. Die richtige gegenseitige Lage von Gehäuse und Welle wird schon bei den älteren Ausführungen durch

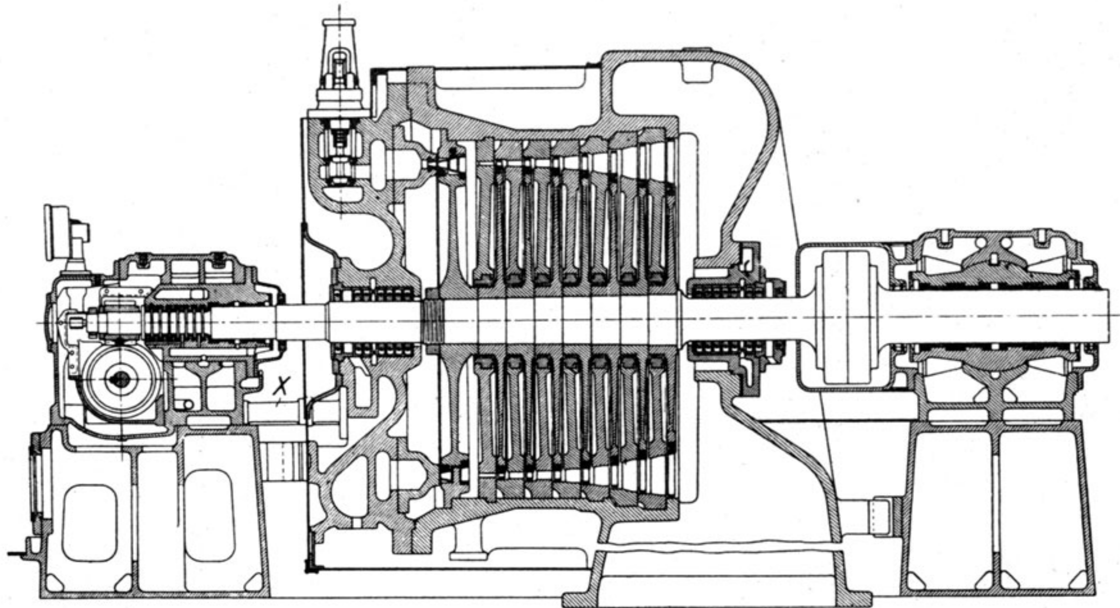


Abb. 650. M.-A.-N.-Turbine mit vorgeschaltetem Curtisrad.

die Streben X zwischen Lagerständer und Gehäuse gesichert. Der Achsenregler samt Zahnradölpumpe und deren Antriebe sind im Ständer des Hochdrucklagers untergebracht. Die Änderungen der Bauart beim Übergang zur modernen raschlaufenden Turbine werden

durch Längenschnitt und Ansichtszeichnungen Abb. 651, 652 einer Turbine von 14300 PS Leistung bei 3000 Umdr./min veranschaulicht. Die auf 250 m/sek zu schätzende Umfangsgeschwindigkeit ermöglicht mit 6 einfachen Druckstufen auszukommen. Das ganze Gehäusegewicht wird durch breite halbkreisförmige Flanschen auf die Lagerständer übertragen.

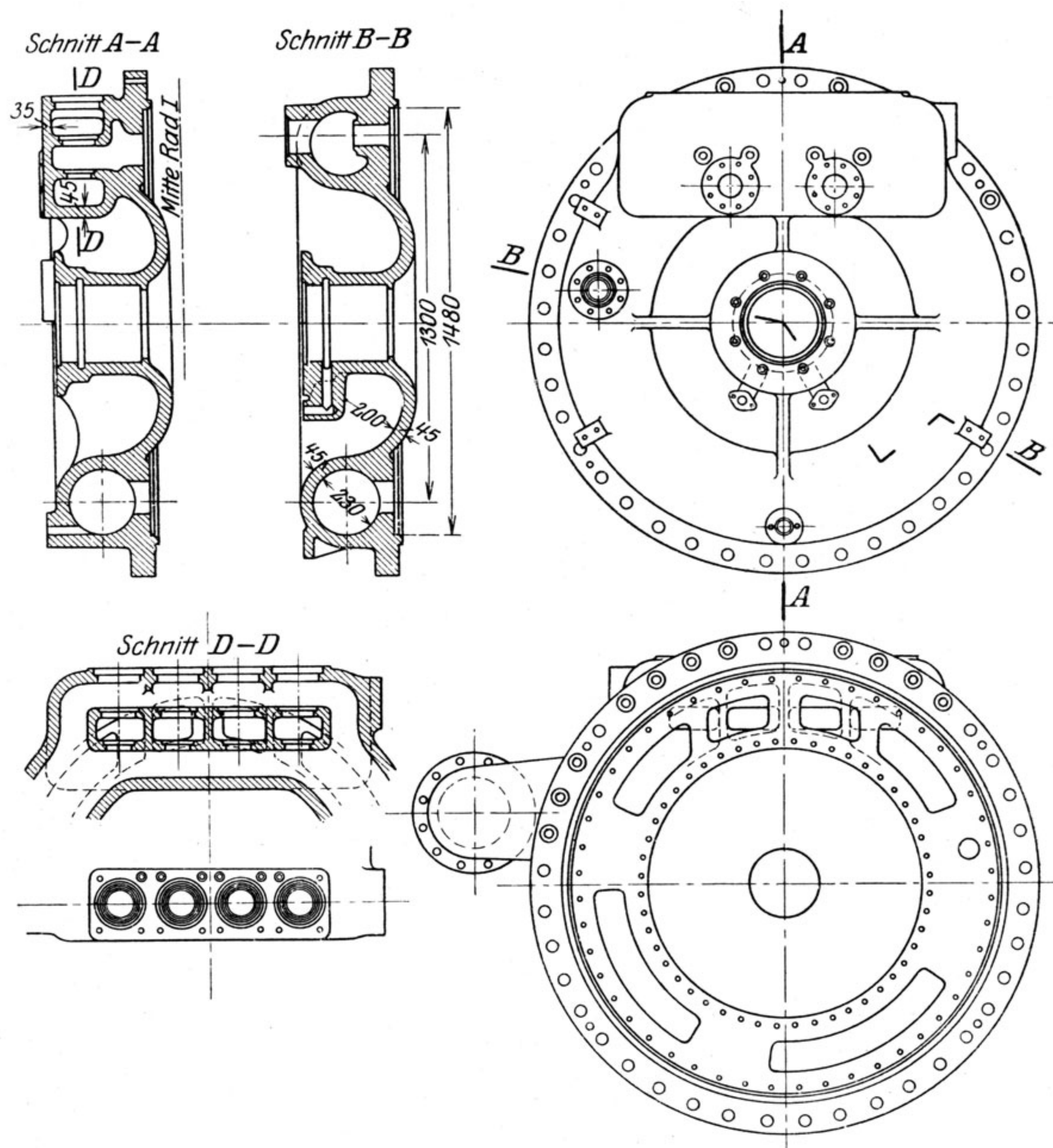


Abb. 654. Hochdruckdeckel zur Curtisstufe.

Die in Hinsicht auf die Festigkeit günstige konsolartige Auskragung des Niederdrucklagerständers bedeutet nicht zugleich eine so starke exzentrische Stützung wie man in der Seitenansicht Abb. 652 erkennt. Das Gewicht der Dampfleitung wird durch Federn *F* Abb. 651a aufgefangen. Symmetrisch zum Hauptdampfrohr *A* ist die Dampfzuleitung *B* für Überlast zum Leitrad der 3. Stufe (von Hand betätigbar) angeordnet. *T* bedeutet die mit Dampf angetriebene Hilfsölpumpe für das Anlassen und Abstellen.

Konstruktion der Einzelteile.

Die Leitschaufeln sind in üblicher Weise in die Zwischenwände eingegossen. Die Laufschaufeln sind nach Abb. 653 aus dem Vollen gefräst und bei größerer Länge an

Additional material from *Dampf- und Gasturbinen,*
ISBN 978-3-642-50544-7 (978-3-642-50544-7_OSFO5),
is available at http://extras.springer.com



der Wurzel mit einer größeren Breite als oben versehen. Die Abbildung läßt auch das Kranzschloß erkennen. Der Ausschnitt x ist breit genug, um den Fuß S der Schaufel hindurchzulassen, worauf die mit einem T-förmigen Anker versehene Beilage U, endlich der Schlußkeil V eingesetzt und durch Verstemmen der Beilage U gesichert wird.

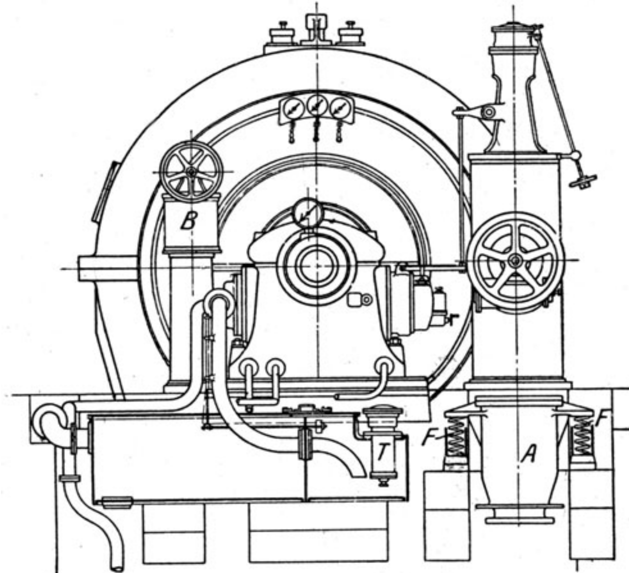


Abb. 651a Stirnansicht zu 651.

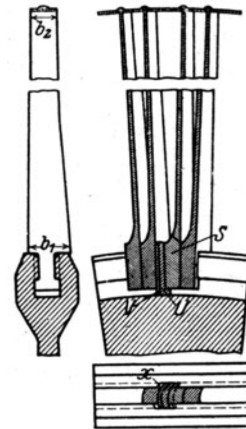


Abb. 653. M.-A.-N.-Laufschaufeln.

Die Laufräder werden auf Sprengringe aufgepreßt mit einer Schrumpfung, die der Fliehkraftdehnung des Rades am Hochdruckende entspricht. Im Niederdruckende genügen etwas geringere Schrumpfungen.

Die Stopfbüchsen und Kohlenringe sind in Abb. 458 veranschaulicht. Der zur 14000 PS gehörende Hochdruckdeckel ist in Abb. 468, desgleichen das Niederdruckgehäuse in Abb. 469 ausführlich dargestellt. Zu erwähnen wäre, daß der Deckel mittels Kopfschrauben befestigt wird, jedoch mit schmiedeeisernem Stiftgewinde, das durch in die Gehäusewand eingeschraubte Hülsen gebildet wird.

Der zur Curtisstufe Abb. 650 gehörende Hochdruckdeckel besteht nach Abb. 654 ebenfalls aus einem Stück und zeigt dieselben kennzeichnenden weichen Formen. Die Zweidruck- und Dampfentnahmeturbine der M. A.-N. werden in Abschn. 141 u. 144 besprochen.

Die Regelung ist bei vorgeschaltetem Curtisrad eine Verbindung von Drosselung mit schrittweisem Öffnen von Düsengruppen; bei reinen Gleichdruckturbinen bloße Drosselung und wurde in Abschn. 102, Abb. 506, erläutert.

110a. Turbine der Aktiengesellschaft Weser in Bremen.

Die A.-G. Weser begann ursprünglich mit dem Bau der Schulzturbine, über die wir im Abschn. 106a berichtet haben. Die heutige „Weserturbine" ist gemäß Abb. 655 die Verbindung einer Druckstufenturbine mit einem zweikränzigen Hochdruck-Curtisrad. Die in Abb. 656 und 656a dargestellte Regulierung wirkt durch reine Drosselung. Die Einstellung auf Teillasten erfolgt durch Abschluß der in 6 Gruppen geteilten Düsen von Hand, jedoch wird auch die selbsttätige Gruppenregelung gebaut. Abb. 657 stellt die Hauptabschließung mit Sicherheitsauslösung dar. Das in der Dampfzuleitung vorgesehene große Sicherheitssieb S macht ein weites Gehäuse notwendig, dessen Gewicht durch Feder F abgestützt wird. An den Laufscheiben darf auf die Verstärkung der Scheibendicke an der Nabe hingewiesen werden, die es ermöglicht, die wegen Druckausgleiches notwendige Bohrung dicht an die Nabe

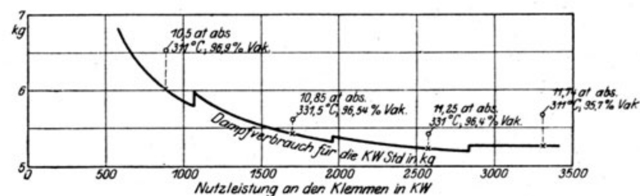


Abb. 658 Dampfverbrauch der „Weser"-Turbine.

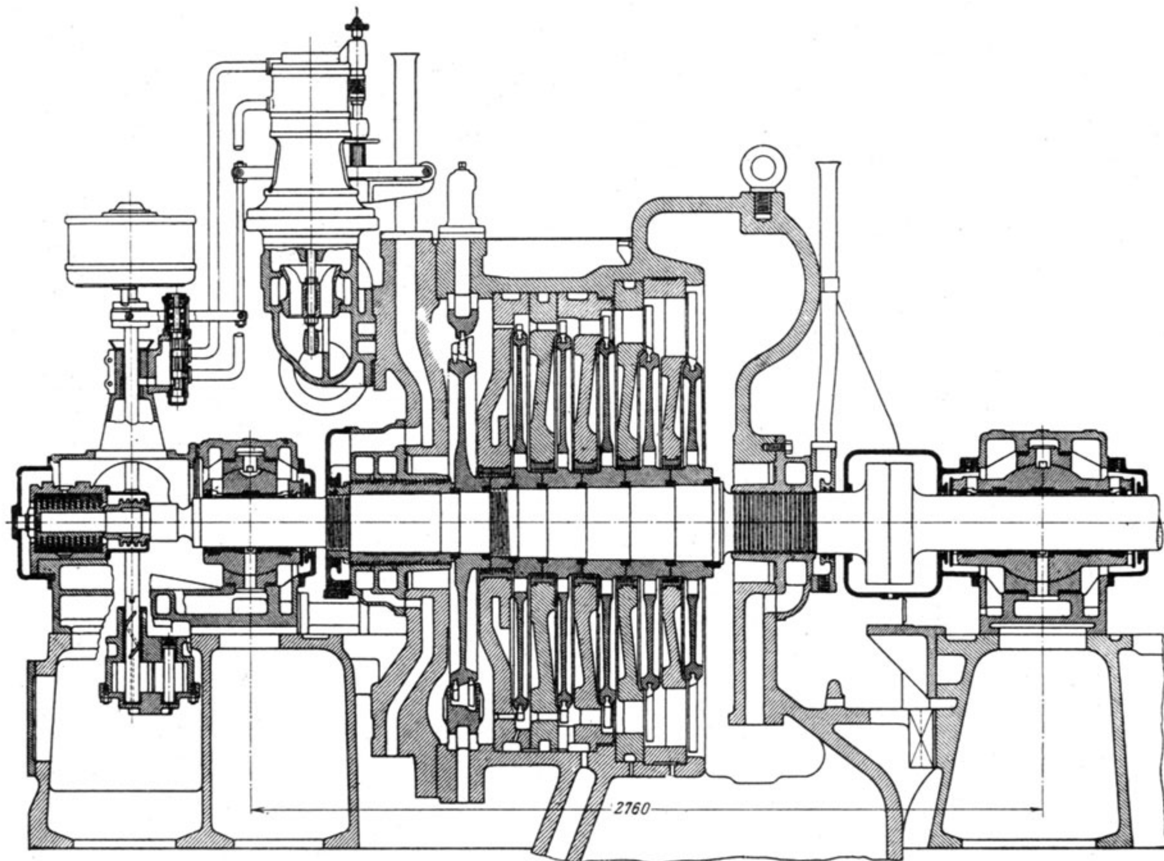


Abb. 655. „Weser"-Turbine.

Abb. 656.

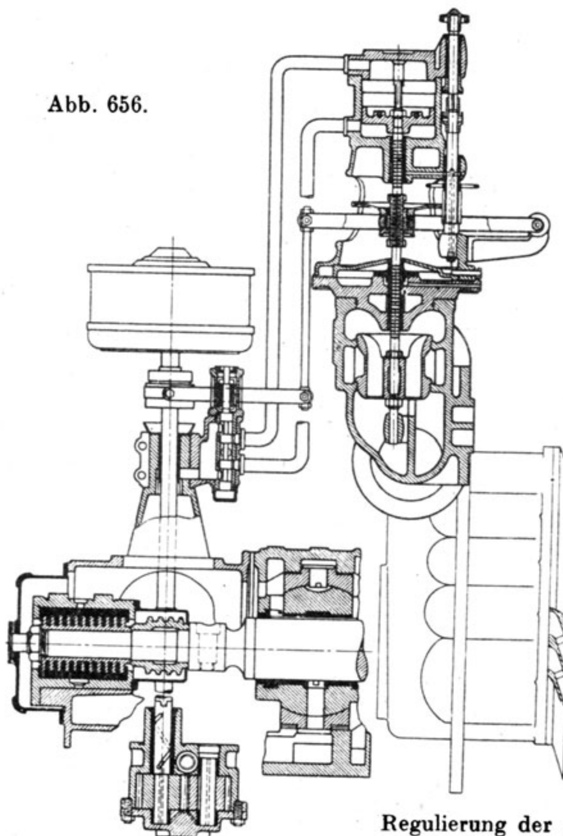
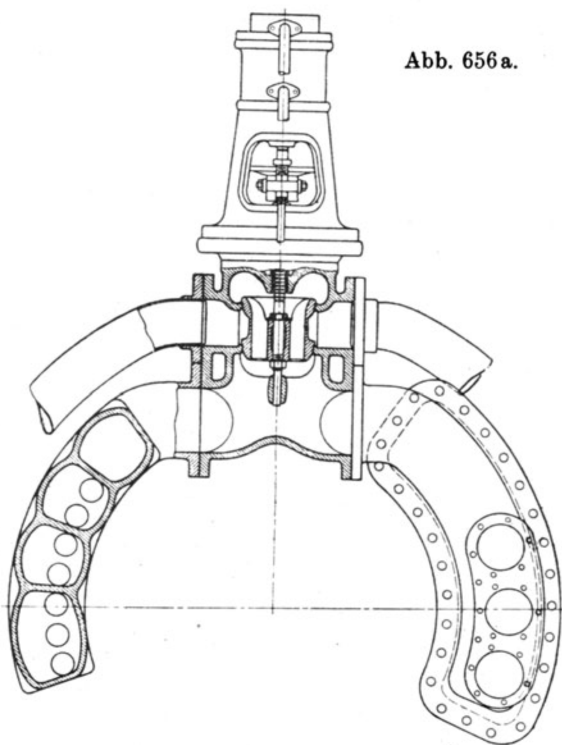


Abb. 656a.



Regulierung der „Weser"-Turbine.

heranzuführen. Über den Dampfverbrauch einer Turbine von 5000 PS Leistung bei 3000 Umdr./min gibt Abb. 658 Aufschluß. Die runden Punkte bedeuten die Beobachtungsergebnisse, die mit Kreuz versehenen die Umrechnung auf 350° C Dampftemperatur.

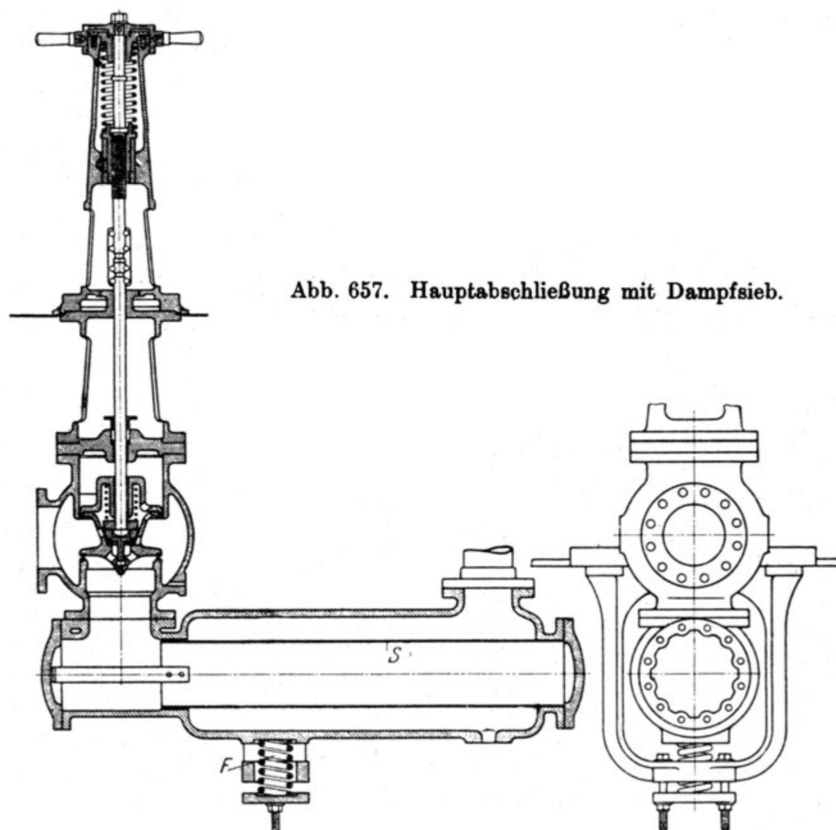


Abb. 657. Hauptabschließung mit Dampfsieb.

Der stündliche Dampfverbrauch im Leerlauf beträgt 7 v. H. desjenigen bei 3000 kW Leistung. Die angegebenen Drücke herrschten vor den Düsen. Die Luftleere bezieht sich auf 760 mm Barometerstand. Der thermodynamische Wirkungsgrad ist 70,2 v. H. bei 350° C bezogen auf die elektrische, — und 73 v. H. bezogen auf die effektive Leistung.

111. Die Turbine von Gebrüder Stork & Co. in Hengelo.

Gebrüder Stork & Co. bauen Zoellyturbinen und bevorzugen bei Einheiten von über 6000 kW die Teilung der letzten Niederdruckstufe, wodurch 12000 kW bei 3000 Umdr./min in einem Gehäuse ausführbar werden. Im übrigen ist der allgemeine Aufbau dem der Zoellyturbine gleich, und es erübrigt sich weiteres Eingehen hierauf. Hingegen verdienen nachfolgende wertvolle Mitteilungen über die feinere Ausbildung der Regelung und gewisser Einzelheiten, die ich der Firma verdanke, Beachtung. Gebr. Stork begegnen dem starken Wachsen der gußeisernen Leiträder bei hoher Überhitzung durch Trennung des Schaufelkranzes (mit eingegossenen Schaufeln) von dem eigentlichen Zwischenboden, der aus besonders legiertem, nicht wachsendem Gußeisen angefertigt wird. Die Stopfbüchsen mit Kohleringen bewähren sich auf der Niederdruckseite, am Hochdruck ist bei höheren Temperaturen oder bei höherer Geschwindigkeit die Abnützung groß und es treten Brüche auf. Daher wird bei großen Einheiten Labyrinthdichtung vorgezogen.

Über die Labyrinthdichtung der Zwischenböden haben wir in Abschn. 97 berichtet. Der übliche Federregler wird in Reihenfabrikation mittels Bohr- und Fräskasten auf Vorrat hergestellt. Um dabei der richtigen Funktion ohne Pröbeln sicher zu sein, erwies es sich zweckmäßig, die Schwunggewichte aus Schmiedeisen anzufertigen, wodurch Unterschiede in Gewicht und Schwerpunktslage, die bei Gußeisen infolge Undichtheit (Blasen) unvermeidlich sind, ausgemerzt wurden.

Bei **Kleinturbinen** wird der Öldruck für die Regulierung durch eine Kreiselpumpe erzeugt. Abb. 659 stellt die Zusammenstellung der Regelung für eine 200 kW-Turbine dar. Die Einzelheiten des Kraftgetriebes sind aus Abb. 660 ersichtlich. Das von der Kreiselpumpe gelieferte Drucköl tritt bei

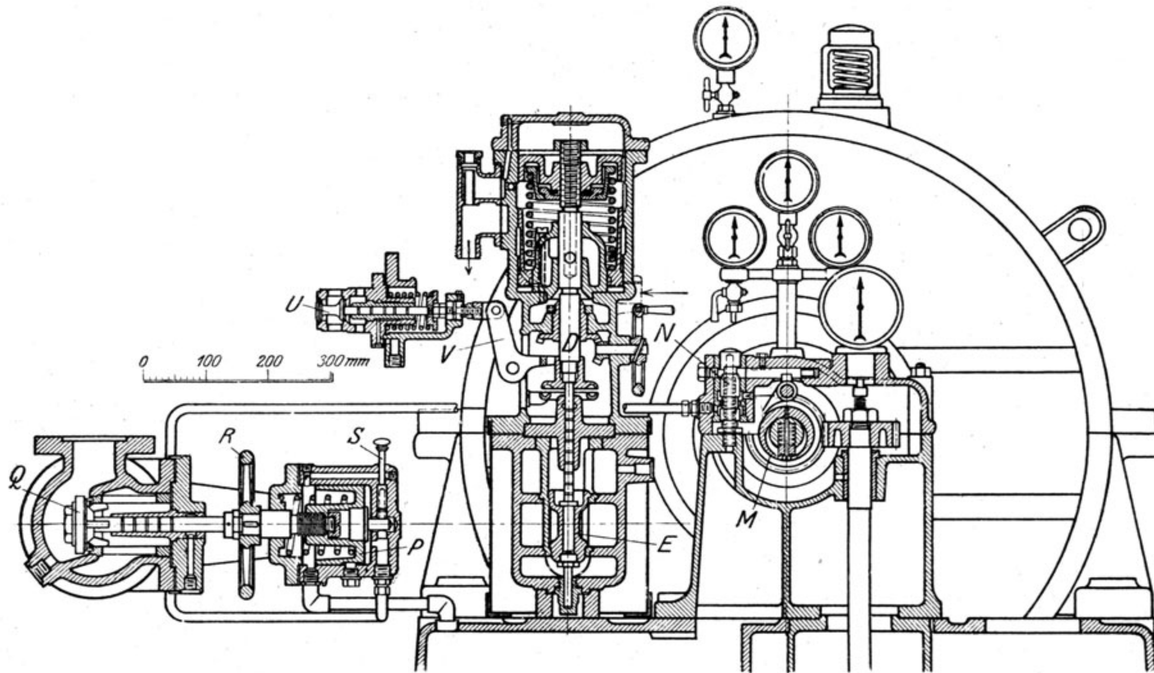


Abb. 659. Reglergetriebe der Stork-Turbine.

A ein, hebt, wenn die Drehzahl steigt, den Kolben *B* an, so daß auf dem Wege der Pfeile der Zutritt über den Kolben *C* frei wird, wodurch dieser die Feder *L* zusammendrückt, den Kolben *B* in seine ursprüngliche Stellung zurückführt und Spindel *D* mit Drosselventil *E* (Abb. 659) sich senkt. Im Fall

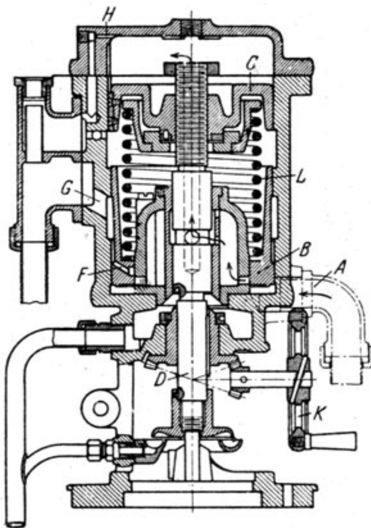


Abb. 660. Einzelheiten des Kraftkolbens.

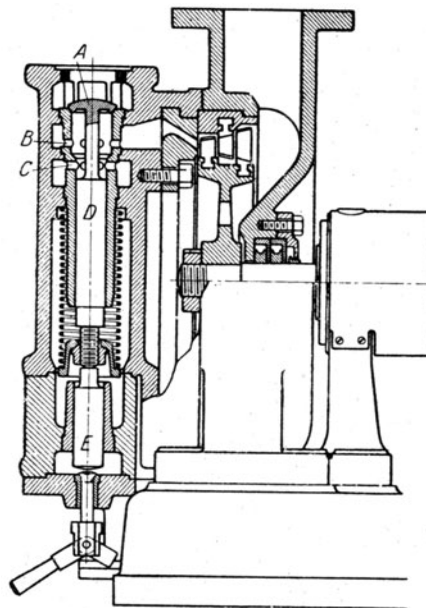


Abb. 661. Kesselspeisepumpenregelung.

einer Abnahme der Geschwindigkeit wird Kolben *B* sinken und das Öl durch Kanal *F* und *G* ins Freie entweichen. Die kleine Bohrung *H* sorgt für ständigen leichten Durchfluß und Entlüftung. Um die Drehzahl zu ändern, wird Spindel *D* mittels Handrades *K* gedreht, wodurch die Feder *L* gespannt oder gelöst wird. Die Turbine ist mit einem Sicherheitsregler *M* ausgestattet, der bei Überschreitung

der zulässigen Geschwindigkeit Ventil N umstellt, so daß das Öl unter dem Hilfskolben P ins Freie abfließt und das Hauptabsperrventil Q sich schließt, was übrigens auch mittels Handgriffes S bewerkstelligt werden kann. Ventil U dient der Überlast und wird durch Hebel V angehoben, sobald der Hub des Hauptventiles E eine gewisse Grenze überschritten hat.

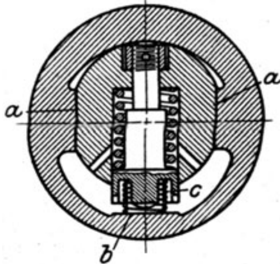


Abb. 662.

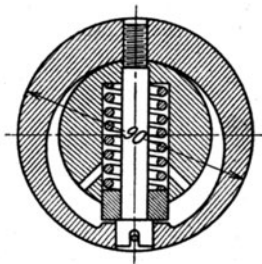


Abb. 663.

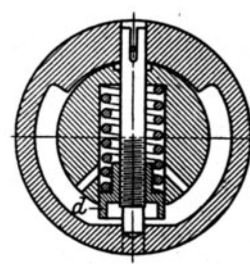


Abb. 664.

Entwickelungsgang des Sicherheitsreglers

Eine Verbesserung an der Regelung von Kesselspeiseturbinen stellt Abb. 661 dar. Darin bedeutet A das Dampfventil, B Zuleitungskanäle zur ersten, C Zuleitungskanäle zur zweiten Düsengruppe des zweikränzigen Curtisrades. Dem auf die Spindel von A ausgeübten Dampfdruck wirkt bei E der von der Kreiselpumpe erzeugte Wasserdruck entgegen. Steigt dieser zu hoch, so hebt er die Spindel an, und der Zuleitungskanal C wird vermöge der Kante D gedrosselt. Somit wird die Geschwindigkeit der Turbine auf konstanten Unterschied zwischen Dampf- und Wasserdruck geregelt, was logischer und wirtschaftlicher ist als konstanter Wasserdruck. Gegen Durchgehen ist ein Sicherheitsregler eingebaut.

Der normale Sicherheitsregler hat lehrreiche Wandlungen durchgemacht. Die ursprüngliche Ausführung Abb. 662 benutzte wie üblich einen exzentrischen Ring mit den Führungsflächen a. Da indessen die Maschinenwärter trotz dahin lautender Betriebsvorschriften die Vorrichtung nicht regelmäßig prüften, konnte sich Öl in jenen Flächen festsetzen und die Beweglichkeit des Ringes hindern.

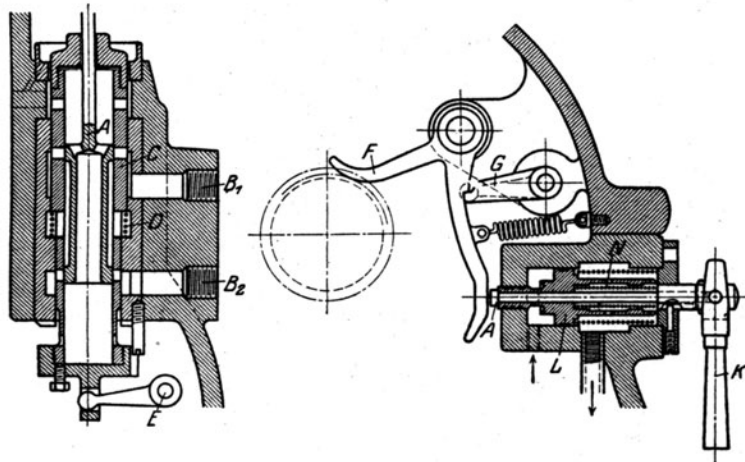


Abb. 665. Sicherheitsauslösung.

Um jener Fahrlässigkeit entgegenzuwirken, wurde bei b ein Spiel zwischen Ring und dem Federhalter vorgesehen und die Hilfsfeder c eingeschaltet. Im Betriebe wird der Ring bei b anliegen, im Stillstand wird ihn Feder c veranlassen, das kleine Spiel zurückzulegen, so daß eine Bewegung in die Flächen a hineinkommt. Da dies jedoch nicht zum Ziele führte, wurden Gleitflächen a beseitigt und das Schwunggewicht nach Abb. 663 nur durch den Federbolzen geführt, was mit dem Nachteil verbunden ist, daß beim Nachspannen der Feder die an sich kleine Exzentrizität des Ringes geändert wird. Daher erteilte man dem Ringe schließlich die Form 664, die größere Exzentrizität zuläßt. Hier verschiebt sich beim Federnachspannen nur die gegen Drehung gesicherte Schraubenmutter d, und der Regler befriedigte ganz.

Die Ausklinkvorrichtung, die zu obigem Sicherheitsregler gehört, besteht nach Abb. 665 aus dem Winkelhebel F, der beim Ausschwingen Hebel G freigibt, wodurch der auf der gleichen Welle sitzende Hebel E der Hülse C ein Ausweichen nach oben gestattet. Dies vollzieht sich unter der Wirkung der Feder D, unterstützt durch den Öldruck, auf den bei D befindlichen Absatz des Kolbens C. A ist der Steuerschieber des normalen Kraftgetriebes, der die Zuleitung B_1 die über, und die Zuleitung B_2, die unter den Kraftkolben führt, steuert. Durch die Erhebung von C wird B_1 mit dem Zufluß, B_2 mit dem Abfluß ins Freie verbunden und das Hauptventil zwangsweise geschlossen. Um die Turbine

wieder in Gang zu setzen, muß man Kolben C von Hand herabdrücken, bis Hebel G eingeklinkt hat. Dies ist jedoch nur möglich, wenn der zur Handabstellung dienende Stift in Hülse L die gezeichnete Stellung innehat. Diese wird durch die vorspringende Nase des Hebels K erzwungen, indem man den Hebel wagerecht stellt. Der sich wieder einstellende Öldruck wirkt nun auf die Unterfläche des Kölbchens L, das die Feder N noch etwas zusammendrückt, und den Drehpunkt von K um ganz wenig nach rechts schiebt, so daß K frei wird und durch sein Eigengewicht herunterfällt, und die Sicherheitsvorrichtung zum Spielen bereit macht. Man läßt auf Kolben L den Lageröldruck wirken, damit beim Versagen der Pumpen ebenfalls selbsttätige Auslösung erfolge.

112. Die mehrstufige Turbine der Aktiebolaget de Lavals Ångturbin in Stockholm.

Diese von de Laval im Jahre 1893 gegründete Gesellschaft nahm seit 1907 auch den Bau von mehrstufigen Gleichdruckturbinen auf, deren Konstruktion aus Abb. 666 hervorgeht. Die 1000 PS-Einheit mit 3000 Umdr./min besteht aus einem 2stufigen Curtisrad und 6 einfachen Rädern mit rd. 150 m/sek Umfangsgeschwindigkeit. Das vordere Lager

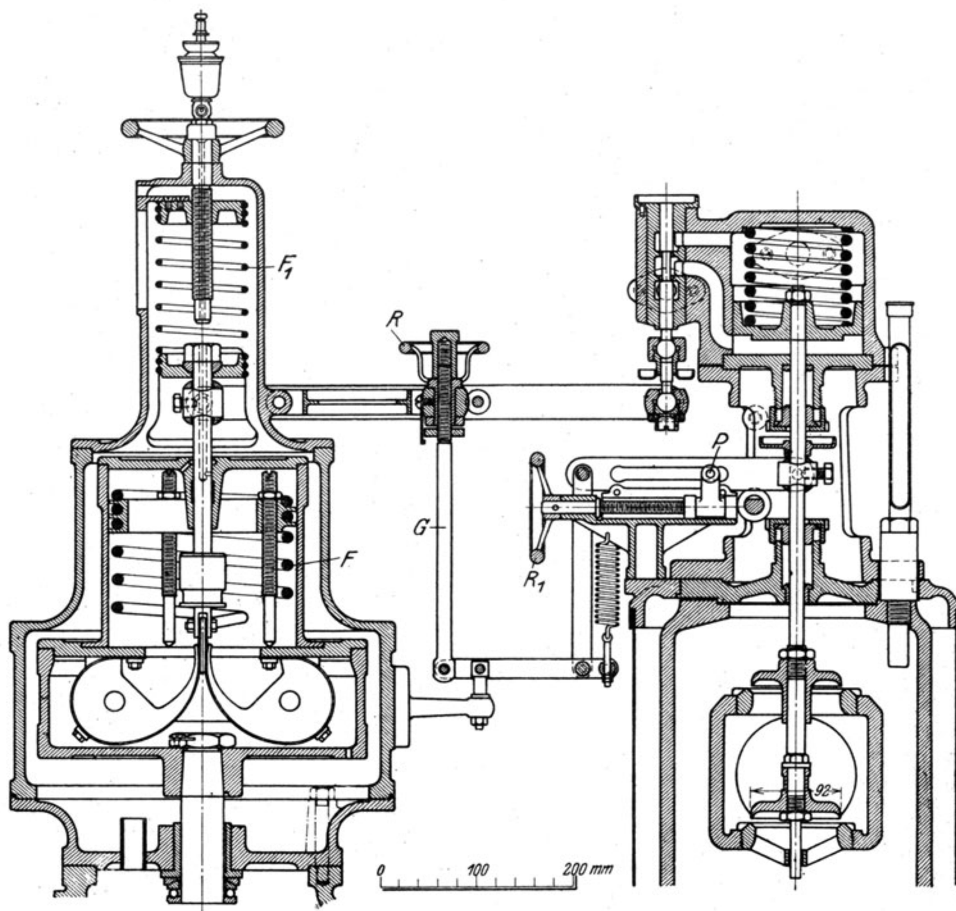


Abb. 667. Kraftgetriebe mit „Evolvent“-Regler.

ist fliegend am Deckel befestigt, das hintere auf den Rahmen aufgesetzt. Für die Drosselregelung (mit von Hand zuschaltbaren Düsengruppen) Abb. 667 wird der von der „Karlstads Mekaniska Verkstad“ hergestellte Evolvent-Regler verwendet, dessen Schwunggewichte, von elastischen an den Enden befestigten Stahlbändern umschlungen, an den wagerechten (oberen) Führungsflächen so gut wie reibungsfrei abrollen. Die Regelung gestattet eine Verstellung der mittleren Drehzahl um $\pm$ 12 v. H. der normalen, was durch Nachspannen der Hilfsfeder F_1 und Verlängerung der Stangenlänge G mittels Handrades R geschieht. Außerdem kann die Ungleichförmigkeit zwischen 1 bis 6 v. H. verändert werden, indem man den Drehpunkt P des Rückführungsgestänges mittels Handrades R_1 verstellt, d. h. den

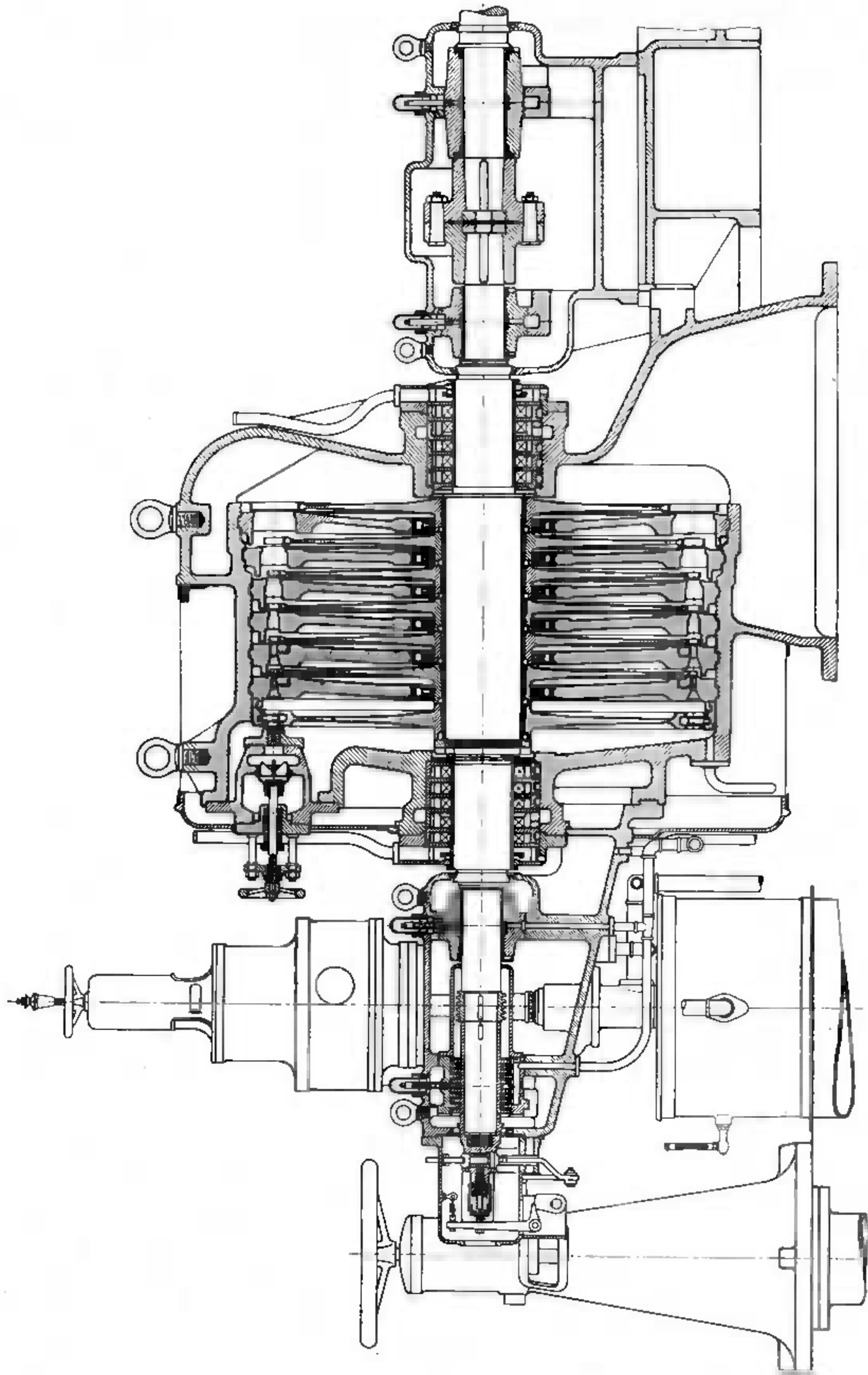


Abb. 666. Mehrstufige Gleichdruckturbine der Aktiebolaget de Lavals Ångturbin.

nutzbaren Reglerhub verkleinert oder vergrößert. Stange *G* wird auch durch eine Isodromvorrichtung ersetzt. Die vorzügliche Wirkung der Regelung wird durch Tachogramm, Abb. 668, einer 500 kW-Turbine bestätigt, die bei 400 kW Entlastung kaum 1 v. H. Geschwindigkeitsänderung aufweist.

Für die Schaufelkonstruktion ist die bewährte Methode de Lavals (Abschn. 70) beibehalten. Die Firma schreibt es dem breiten Befestigungsfuß zu, daß Schaufelbrüche gar nicht vorkommen.

Die Scheiben werden auf konische geschliffene Hülsen aufgepreßt; die größeren unter vorhergehender Erwärmung, um genügende Vorspannung zu erhalten. Die Zwischenabdichtungen, Abb. 669, sind als Labyrinthe ausgebildet

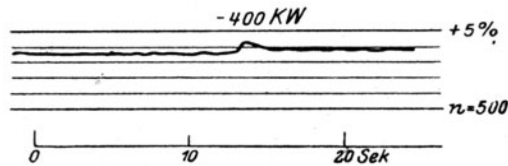
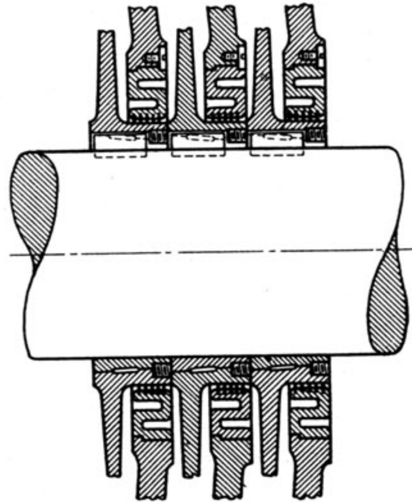


Abb. 668. Tachogramm einer 500 kW-Turbine.


Abb. 669. Zwischenabdichtung.

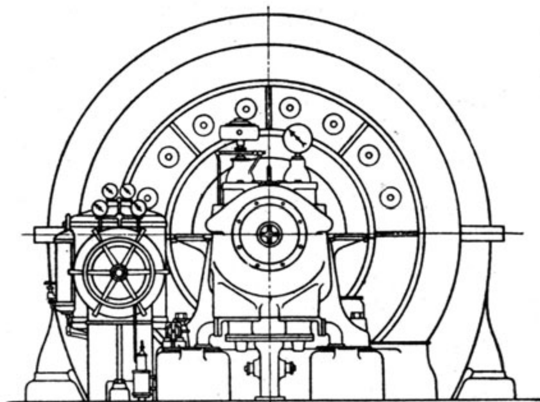
und werden in *S*-förmig ausgehöhlte Gußnaben eingesetzt, die jeder Temperaturänderung rasch folgen Die Spiele betragen 0,4 bis 1,2 mm im Durchmesser.

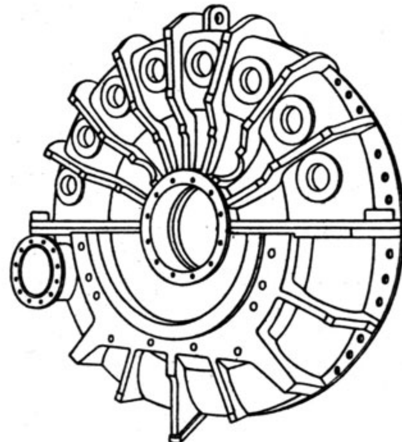
Die Kupplungen sind teils starr, teils elastisch. Die letzteren wurden in Abschn. 84a besprochen.

Über die anziehenden Lösungen der Firma im Bau von Dampfentnahmeturbinen berichten wir in Abschn. 144.

113. Die Rateau-Turbine.

A. M. Rateau ist einer der Vorkämpfer des Dampfturbinenbaues und führte schon in den 90er Jahren des vorigen Jahrhunderts in Verbindung mit dem Hause Sautter, Harlé & Cie. in Paris kleinere Gleichdruckturbinen mit tangentialer Beaufschlagung und


Abb. 671. Vorderansicht zu 670.


Abb. 672. Rippenversteifung des Hochdruckgehäuses.

einer Schaufelung aus, die der Versuchsschaufel Abb. 179 ähnlich war. Gegen 1897—98 trat das genannte Haus mit Verbundturbinen, die aus zwei hintereinander geschalteten Gleichdruckrädern bestanden, vor die Öffentlichkeit. Im Jahre 1900 wurden an der Pariser Weltausstellung dem Preisgericht die Bestandteile und Zeichnungen einer 1000pferdigen Torpedobootmaschine vorgewiesen[1]), die als vielstufige Gleichdruckturbine gebaut war und als erstes Exemplar des Systems „Rateau" anzusehen ist.

[1]) Das Preisgericht, dem Verfasser als Mitglied angehörte, beschloß, von einer Prämiierung abzusehen, da Betriebsergebnisse noch mangelten.

Die ursprünglich übliche Bauart war zweigehäusig.

Die neuere Ausführungsart der Turbine der Société Générale de Construction Méchanique (früher Garnier et Faure-Beaulieu), Paris[1]) besteht nach Abb. 670 aus einer Verbin-

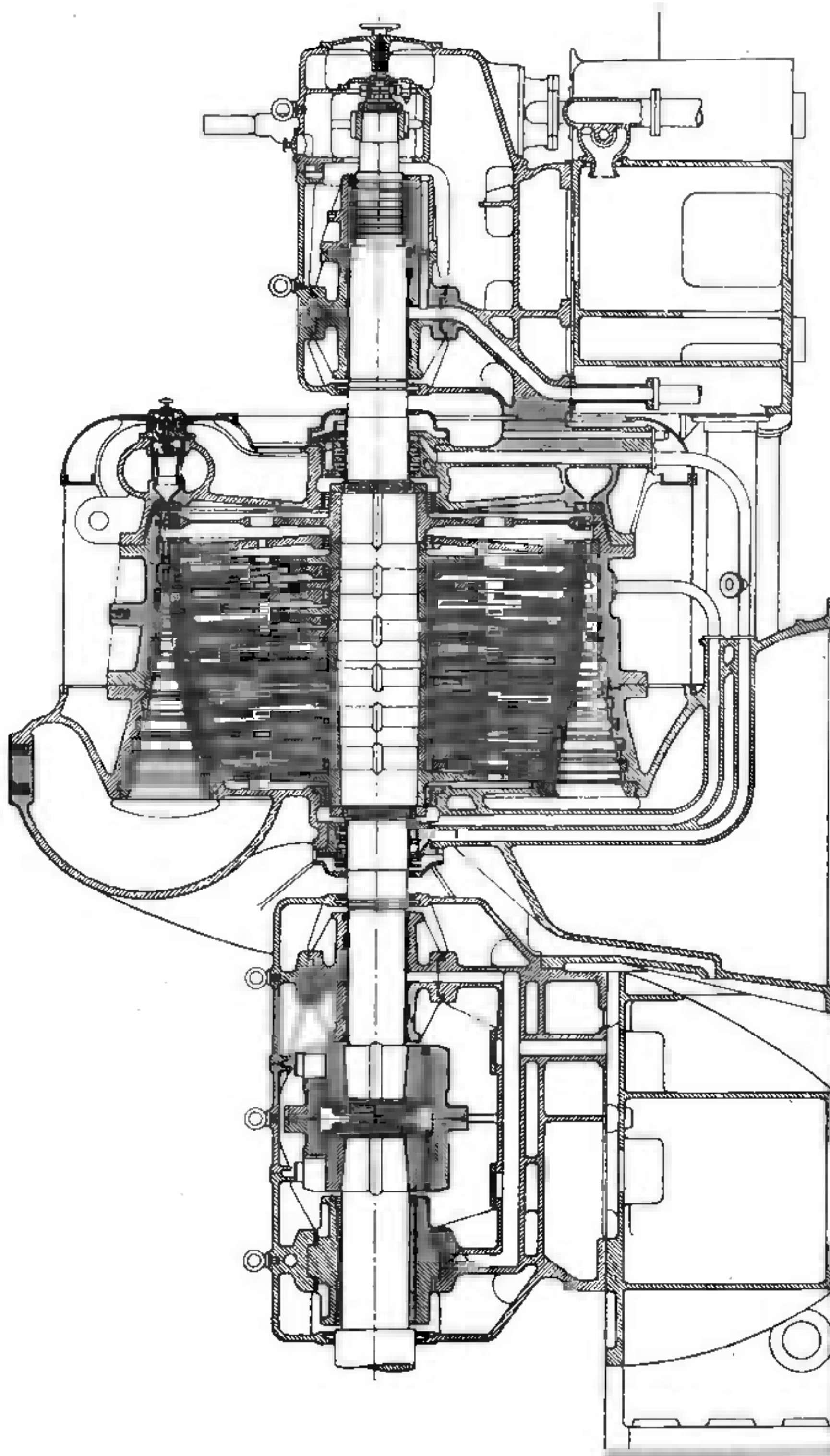


Abb. 670. Rateau-Turbine von 10000 bis 15000 kW-Leistung bei 1250 Umdr./min.

dung einer 11stufigen Gleichdruckturbine mit einem zweikränzigen Curtisrad. Die Turbine soll normal 10000, maximal 15000 kW leisten bei 1250 Umdr./min, 14 at abs. Dampfdruck,

[1]) Nach La Technique Moderne, 15. Febr. 1913.

300° Dampftemperatur. Abb. 671 zeigt die Vorderansicht der Turbine. Der Vorderteil des Gehäuses stützt sich auf den Lagerständer. Eine Ansicht der sehr starken Versteifung des Hochdruckwulstes durch Radialrippen bietet Skizze 672. Das Abdampfgehäuse besitzt besondere Füße.

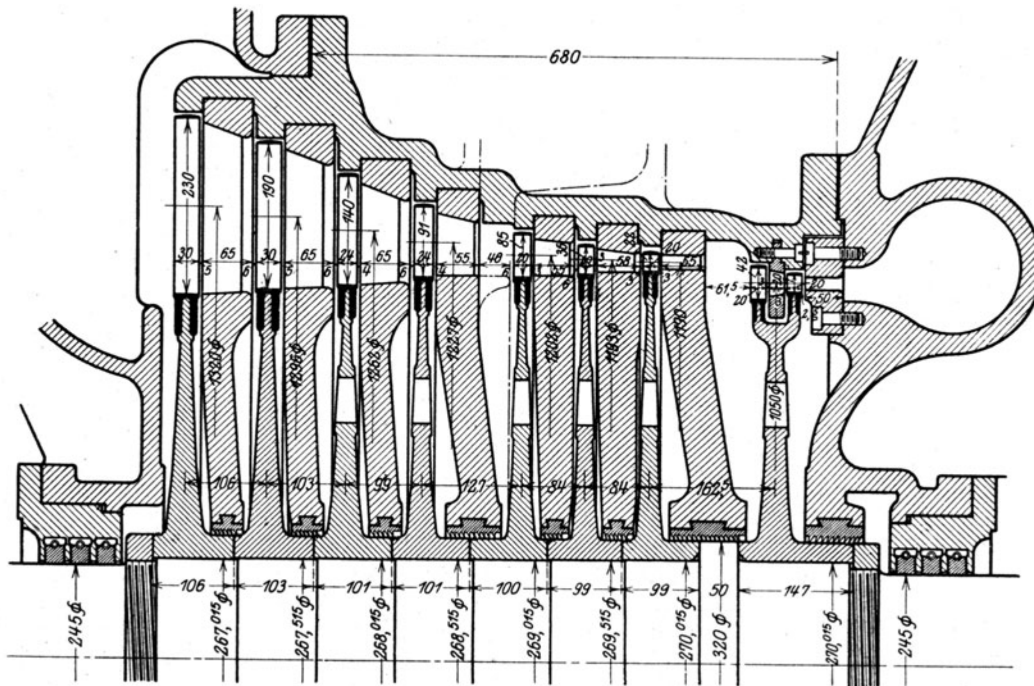


Abb. 673. Längenschnitt einer Rateau-Turbine von 6000 kW bei 3000 Umdr./min.

Die neuere Ausführung einer 6000 kW-Turbine mit 3000 Umdr./min zeigt die mit der Zahlentafel vereinigten und in Abb. 673 eingetragenen Ausmaße.

Stufe	Curtisrad	1	2	3	4	5	6	7
Mittl. Drchm. mm	1050	1190	1193	1202	1227	1262	1296	1320
Leitradwinkel (Eintr. Kante u. Austritt)	16	92×105 / 16	92×105 / 16	92×105 / 16	92×105 / 16	91×104 / 17	91×104 / 21	85×95 / 32
Laufradwinkel .	23×26 / 18 42×45 / 35	30×33 / 27	30×33 / 27	30×33 / 27	30×35 / 27	32×35 / 27	47×42 / 35	52×65 / 50
Leit- und Laufrad Schaufel längen mm	16 / 20 36 / 42	19 / 22	30 / 36	48 / 55	80 / 91	130 / 140	185 / 190	225 / 230
Leitradquerschnitt qcm .	—	159,5	254	408	705	1270	2325	4310

Die Schaufelerweiterung geht im wesentlichen nach dem Außenrand hin. Die Umfangsgeschwindigkeit wächst von 165 m/sek am Curtisrad auf 207 m/sek in der letzten Stufe.

Von den Einzelheiten haben wir die aus dem Vollen gefrästen Schaufeln in Abschn. 70 beschrieben. Die Regelung ist eine Verbindung der Drosselung mit Düsengruppenabschließung, wie Abb. 674 zeigt. Darin bedeutet *a* den Angriff des Reglers, *b* den Kraftkolben, *c* einen vom Kraftkolben zwangsweise bewegten Schieber, der durch Leitung *e* die Gruppenventile *d* betätigt. Ein solches Gruppenventil besteht nach Abb. 675 aus der als Kolben ausgebildeten Ventilglocke *f*, auf deren Rückseite das Rohr *e* die Verbindung mit dem oben erwähnten Schieber bildet. Das Besondere der Steuerung ist, daß der Schieber eine Verbindung mit dem Raume *g* hinter dem ersten Leitrade herstellt, so daß Kolben *f* durch den wenig gedrosselten Druck im Raume *h*, der auf seine nicht ausgeglichene (Differential-) Ringfläche wirkt, geöffnet wird. Um den Anprall zu mäßigen, wird unterwegs eine bei *k* angebrachte (nicht sichtbare) Bohrung geschlossen und der übrig-

bleibende Inhalt muß durch die in eine kleine Öffnung ausmündende Bohrung *m* nach *e* unter Drosselung abströmen. Bei einer Abnahme der Belastung wird durch *e* Frischdampf

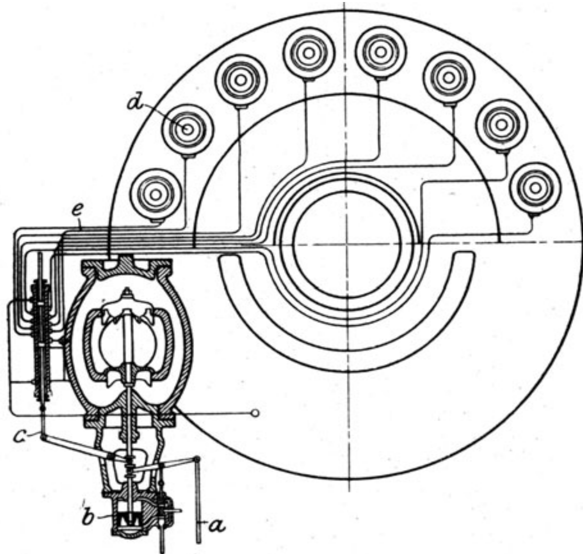


Abb. 674. Regelgetriebe von Rateau.

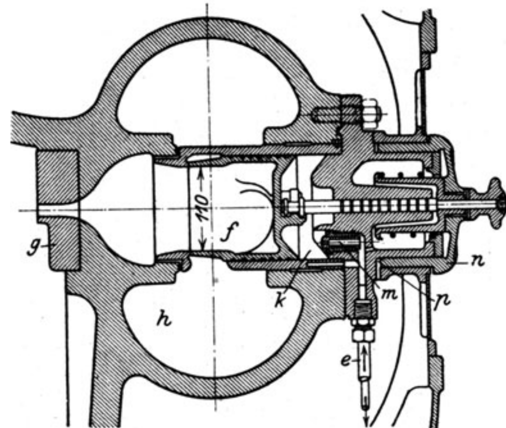


Abb. 675. Düsengruppenventil von Rateau.

zugeführt und der Schlag des Ventiles auf den Sitz wird durch Kolben *n* und Pufferraum *p* gemildert.

114. Turbine der Maschinenfabrik Örlikon.

Der allgemeine Aufbau der Turbine geht aus dem Längenschnitt Abb. 676 hervor, der eine Turbine von 5000 kW Leistung bei 3000 Umdr./min darstellt. Abb. 677 ist eine Zusammenstellung der Steuerung, 678 ein Lichtbild der Turbine. Die Örlikonturbine hat von Anfang an ausgiebigen Gebrauch von Öldrucksteuerung und ausgedehnten Sicherheitsmaßnahmen gemacht. Das Regelungskraftgetriebe besteht aus dem Drosselventil *A*, Kraftkolben *B*, Steuerventil *C*, Fliekraftregler *D*, die in üblicher Weise durch Zustellhebel *E* zusammenwirken. Nachdem *A* voll eröffnet hat und das Spiel *F* des Überlasthebels überwunden ist, wird das Überlastventil *G* angehoben. Die Sicherheitsvorkehrungen bestehen zunächst in zwei voneinander unabhängigen Sicherheitsreglern, wovon der erste *H* auf der Hauptreglerwelle angebracht ist. Das Hauptabsperrventil *J* kann aus der Schlußstellung mittels des Handrades *L* um den zum Leerlauf erforderlichen Hub von Hand angehoben werden. Für vollen Betrieb wird Drucköl auf die untere Seite des Kolbens *K* zugelassen und so ganz geöffnet, die Druckleitung *M* führt zu dem als Ventil ausgebildeten Sicherheitsregler *H*. Bei Überschreitung der zulässigen Drehzahl öffnet dieser, so daß das Drucköl ins Freie austreten kann und das Ventil *J* sich unter der Federbelastung schließt. Die gleiche Wirkung wird durch einen zweiten auf der Hauptwelle befindlichen Sicherheitsregulator Abb. 679 erreicht.

Dieser besteht aus dem Schwungring *a*, der durch Winkelhebel *b*, dessen Drehpunkt im festen Teil *c* gelagert ist, durch Stängelchen *d* und Zwischenstück *e* den Steuerschieber *f* betätigt. Der Ansatz an *e* soll die Fliehkraft von *d* ausgleichen. Kanal g_1 führt über, Kanal g_2 unter den Kolben des Absperrventiles; bei *h* wird Drucköl zugeführt. In der gezeichneten Lage wird somit das Absperrventil angehoben. Wird die Normalgeschwindigkeit überschritten, so verstellt der Regler den Schieber *f* nach rechts. und die Hauptabschließung wird geschlossen. Dieser zweite Sicherheitsregler ist nicht labil, sondern fängt schon unter der normalen Drehzahl beispielsweise für eine Turbine von 3000 Umdr./min bereits bei 2800 Umdr. zu spielen an, und bewegt, wie ersichtlich, einen Zeiger *k*, der auf einer Skala die Drehzahl der Maschine anzeigt. Eine dritte Sicherheitswirkung, die diese Anordnung ermöglicht, besteht darin. daß wenn die Welle aus irgendeinem Grunde sich nach dem Niederdruckende hin zu verschieben beginnt, Schieber *f* mitgenommen wird, dabei schon bei einem Weg von 1,5 mm umsteuert und so die Maschine abstellt. Bekanntlich kommen bei minder aufmerksamer Kesselwartung sog. **Wasserschläge** vor, bei denen infolge der Ausfüllung der Laufradquerschnitte mit Wasser ein Überdruck, demgemäß eine im voraus gar nicht in Rechnung stellbare axiale Kraft entsteht, die auch der bestentworfenen

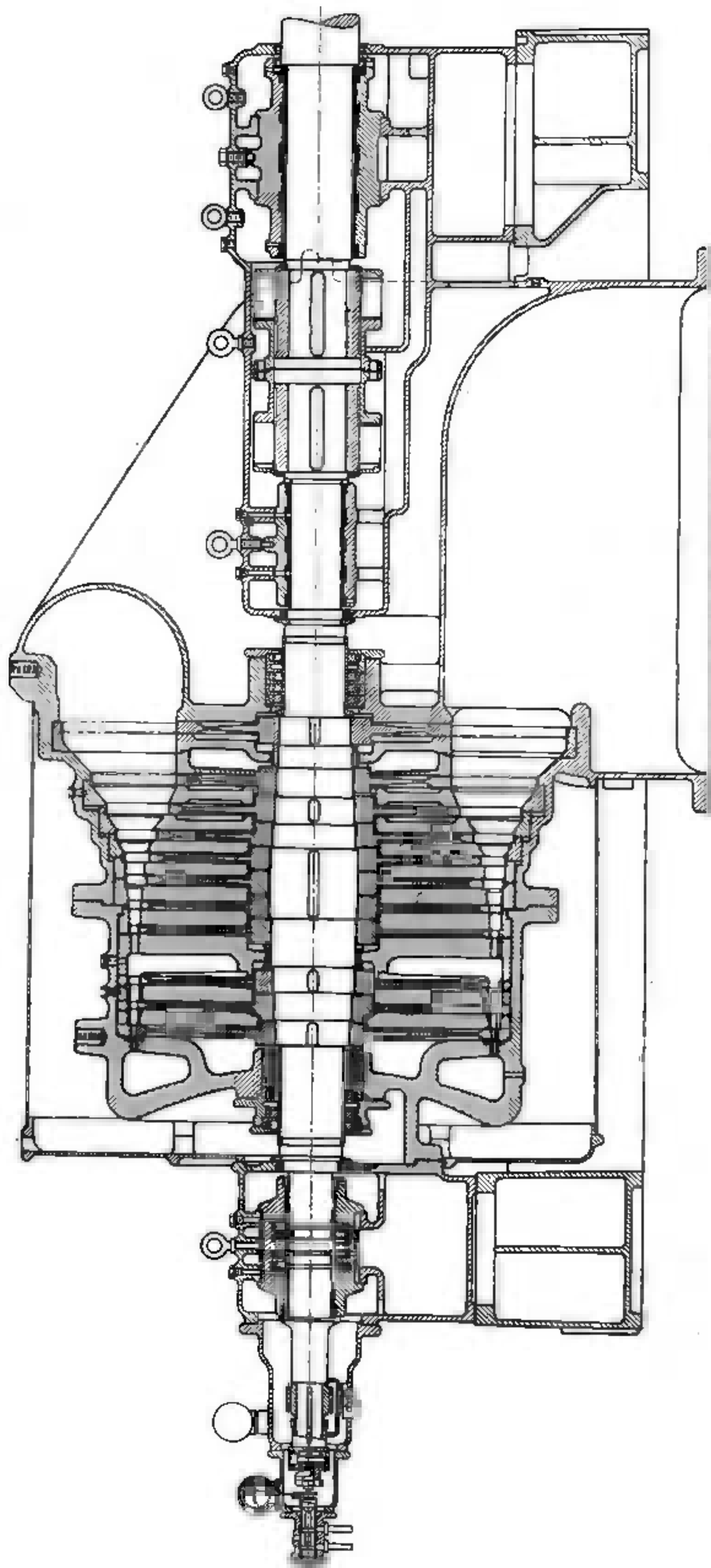


Abb. 676. Örlikon-Turbine von 5000 kW.-Leistung bei 3000 Umdr./min.

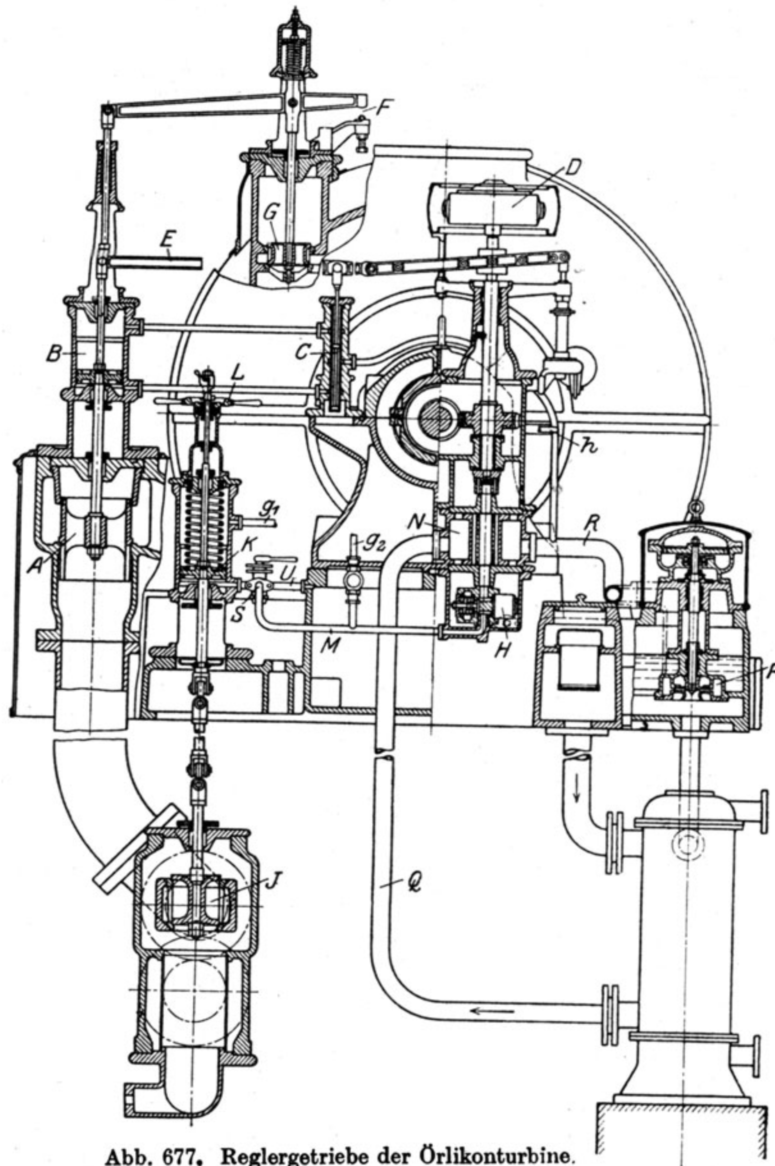


Abb. 677. Reglergetriebe der Örlikonturbine.

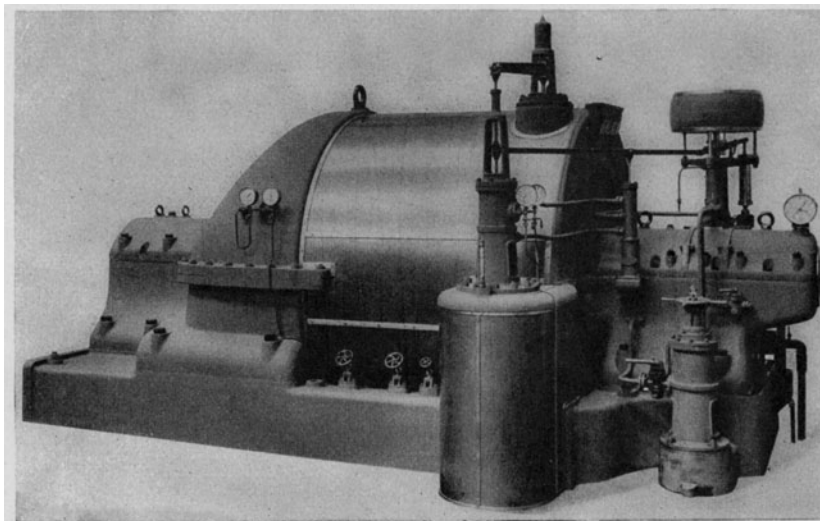


Abb. 678. Ansicht der Steuerungsanordnung.

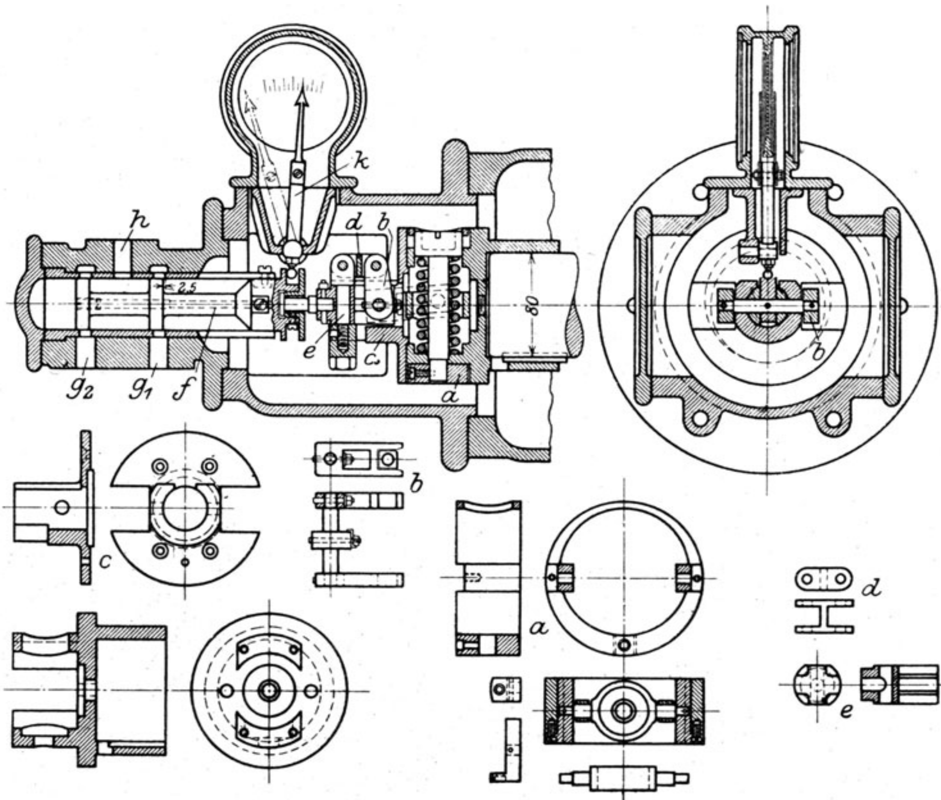


Abb. 679. Sicherheitsregler mit Abstellung bei eintretender axialer Wellenverschiebung.

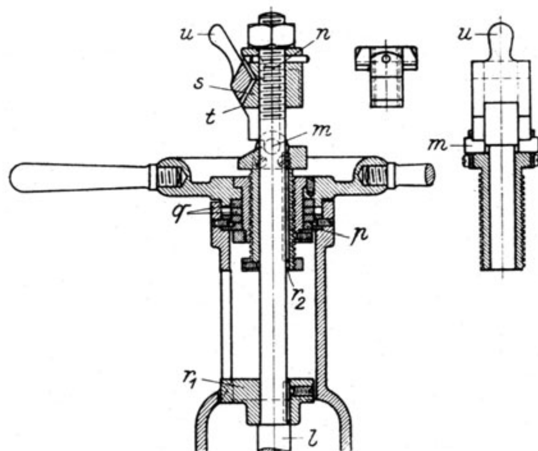


Abb. 680. Hand- und Öldruckbetätigung des Hauptventiles.

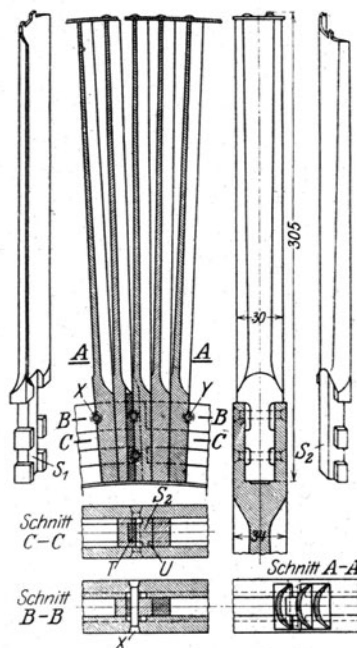


Abb. 681. Laufschaufeln der Örlikonturbine.

Turbine zum Verderben gereichen kann. Zunächst wird das Kammlager einfressen; im weiteren Verlaufe kommen die Laufräder zum Streifen, wodurch die ganze Turbine ernstlich beschädigt werden kann. Dies letztere ist durch die Verhütung einer axialen Verschiebung von mehr als 1,5 mm unmöglich gemacht.

Die Steuerung wird mit Öl von der Zahnradpumpe N, Abb. 677, bzw. der Turbinenkreiselpumpe P versorgt. Die Zuleitung der letzteren steht ständig unter Dampf. Sie

wird angelassen, sobald der Lagerdruck unter einen bestimmt großen Betrag gesunken ist. Die über dem Hauptsperrventil J, Abb. 677, angebrachte Feder ist übrigens so stark, daß sie, wenn der Öldruck eine bestimmte Grenze unterschreitet, das Ventil von sich aus schließt. In jener Abbildung bedeutet ferner Q die Ölsaugleitung, R die allgemeine Druckleitung, h die Druckleitung zum zweiten Sicherheitsregler, g_1, g_2 den Anschluß desselben an den Kraftzylinder des Hauptabsperrventiles. S ist ein Dreiweghahn, durch den beim Abstellen dem Öl unter Kolben K Abfluß ins Freie gewährt werden kann.

Damit die Handbetätigung des Hauptventiles das selbsttätige Schließen desselben nicht hindert, ist nach Abb. 680 die Ventilspindel l durch einen Knaggen u, der in m seinen Drehpunkt hat, bei n gestützt. Das Handrad wird durch den Ring p axial gehalten. Gleitringe q dienen zur Verringerung der Reibung. Durch Ansatz r_1 ist die Spindel, durch r_2 die Mutter am Drehen verhindert. In der gezeichneten Lage kann das Hauptventil mittels des Handrades um rund 10 mm geöffnet werden, was zum Vorwärmen und Anlaufen der Turbine hinreicht. Nach der Inbetriebsetzung wird die Spindel durch den wachsenden Öldruck mittels Kolben K von selbst gehoben, wobei die Klinke n durch die schiefe Ebene s seitlich ausgerückt wird. Sollte die Klinke klemmen, so wird sie beim Abwärtsgang des Ventiles durch den Druck der Fläche t auf die schiefe Ebene u vollends zur Seite geschoben; sie kann mithin den Schluß des Ventiles nicht behindern.

Kurze Schaufeln werden mit gleichbleibender Stärke ausgeführt und mittels des üblichen Hammerkopfes im Kranze festgehalten. Lange Schaufeln erhalten nach Abb. 681 abnehmende Stärke und werden mit dem Fuße aus einem Stück gefräst. Dieser Fuß ist sehr lang, um eine gute Führung zu gewähren. Die Schlußschaufeln S_1 S_2 sind in perspektivischer Ansicht abgebildet. Als letzte wird S_2 eingefügt und um die Dicke der Beilage T verschoben, so daß sie durch die Fläche U getragen wird. Die Beilage selbst wird durch Niete X gesichert, die übrigens, in regelmäßigen Abständen im oberen Teile des Kranzes eingefügt, dessen seitliche Ausfederung verhindern.

115. Die Skodaturbine.

Die früheren Skodawerke, jetzt „Vereinigte Maschinenfabriken A.-G., vormals Skoda Ruston, Bromovsky und Ringhoffer in Smichow“, bauen in ihrem Pilsener Werke die in Abb. 682 dargestellte Turbine, die aus einer allmählichen Umbildung der ursprünglichen

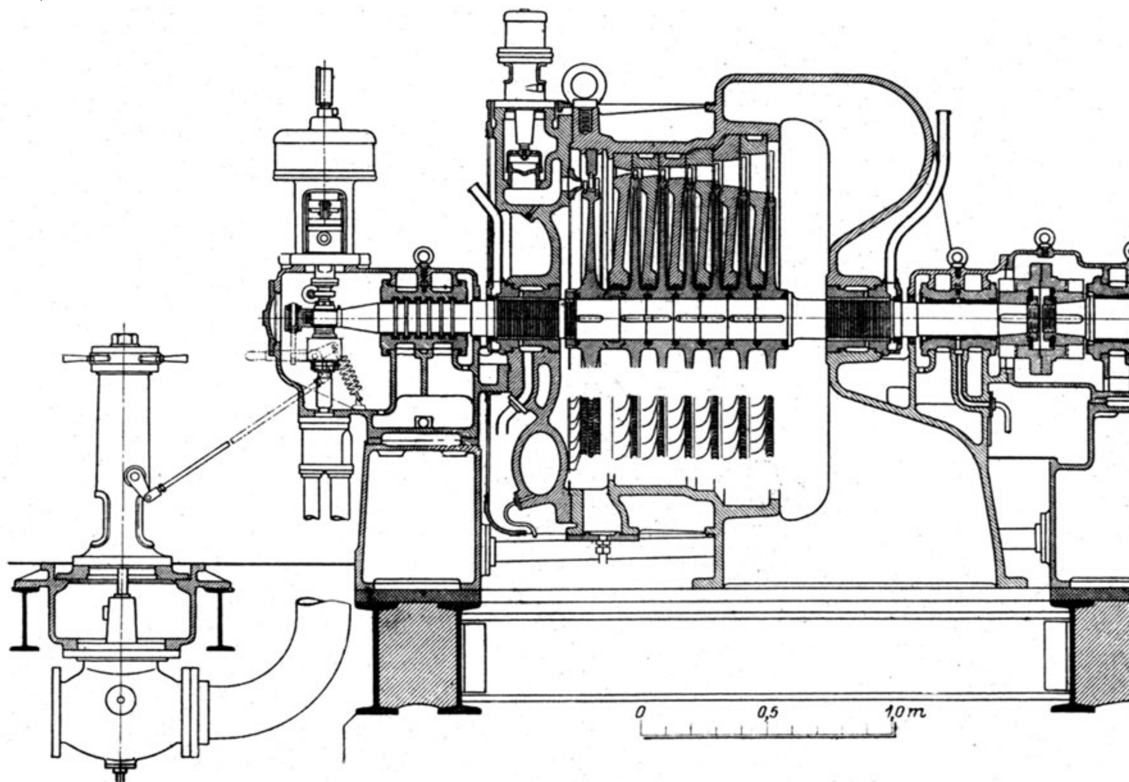


Abb. 682. Skodaturbine von 2000 kW-Leistung bei 3000 Umdr./min.

Abb. 683. Reglergetriebe der Skodaturbine.

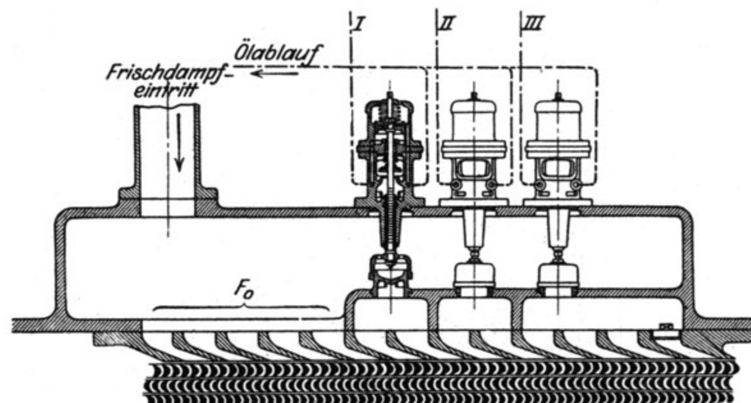


Abb. 683a. Schnitt durch die Düsen zu 683.

Rateaubauart hervorging. Die Leistung der dargestellten Einheit ist 2000 kW bei 3000 Umdr./min. Die Regelung gehört nach Abb. 683 zu der heute stark vorherrschenden Klasse der Drosselung bei kleinen Lasten und Düsengruppenabschließung bei größeren Leistungen. Regler *A* stellt durch Zwischenhebel *B* die übliche Verbindung mit dem Kraftkolben *C* und dem Steuerventil *H* her. Mittels Hebel *D* wird vom Kraftkolben zugleich das Gruppensteuerventil *E* bewegt, von dem die Zuleitungen I, II, III zu den gleichnamigen Düsenventilen führen, die in der Hauptabbildung in der richtigen Lage, in der Nebenabbildung in „abgewickelter" Lage sichtbar sind. Bis zu etwa halber Belastung wird die stets offene Düsengruppe F_0 abgedrosselt. Darüber hinaus kommen die übrigen Gruppen in Tätigkeit. Die Drehzahl wird durch Auf- und Abbewegen der den Steuerschieber umgebenden Hülse *H* verändert, deren jeweiliger Stellung sich die Mittellage des Reglers anpassen muß.

Die Skodaturbine wurde als eine der ersten mit aus dem Vollen gefrästen Schaufeln ausgestattet; man läßt am äußersten Ende ein Plättchen stehen, das den Deckring ersetzt. Bei langen Schaufeln fräst man in der Mitte einen Steg an, durch den sich die Schaufeln gegenseitig stützen und die Schwingungsfreiheit einschränken. Über die Zweidrucksteuerung der Firma berichten wir in Abschn. 143.

116. Amerikanische Gleichdruckturbinen.

a) Hamilton-Holzwarth.

Die im Jahre 1904 in St. Louis ausgestellt gewesene Hamilton-Holzwarth-Turbine von 1000 kW Leistung bei 1500 Uml./min war durch volle Beaufschlagung schon des ersten Rades gekennzeichnet[1]).

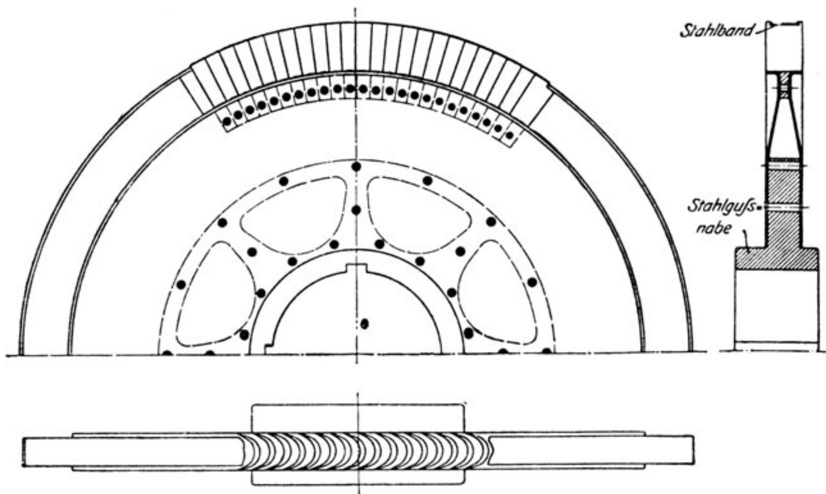


Abb. 684. Laufrad nach Hamilton-Holzwarth.

Die Leiträder bestanden aus einer ungeteilten Gußscheibe mit im Gesenk geschmiedeten eingesetzten Stahlschaufeln. Die Laufräder (Abb. 684) wurden durch Vernietung zweier kegelförmig eingezogenen Blechscheiben gebildet. Nach Moyer[2]) soll die Turbine keine Verbreitung gewonnen haben.

b) C. V. Kerr.

Kerr benutzt Laufschaufeln, die der Peltonschen Form nachgebildet sind (Abb. 685)[3]) und wie es scheint ohne jede Umhüllung in ihrer Radabteilung frei umlaufen. Hierdurch werden bedeutende Ventilationswiderstände wachgerufen. Außerdem macht diese Schaufelform die Rückgewinnung der Auslaßenergie unmöglich und ist daher für Dampfturbinen als ungeeignet zu bezeichnen, so gut sie sich bei hydraulischen Hochdruckturbinen auch bewährt hat.

---

[1]) S. Bantlin, Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1905, S. 115. — [2]) The Steam turbine 1908.
[3]) Nach Moyer S. 212.

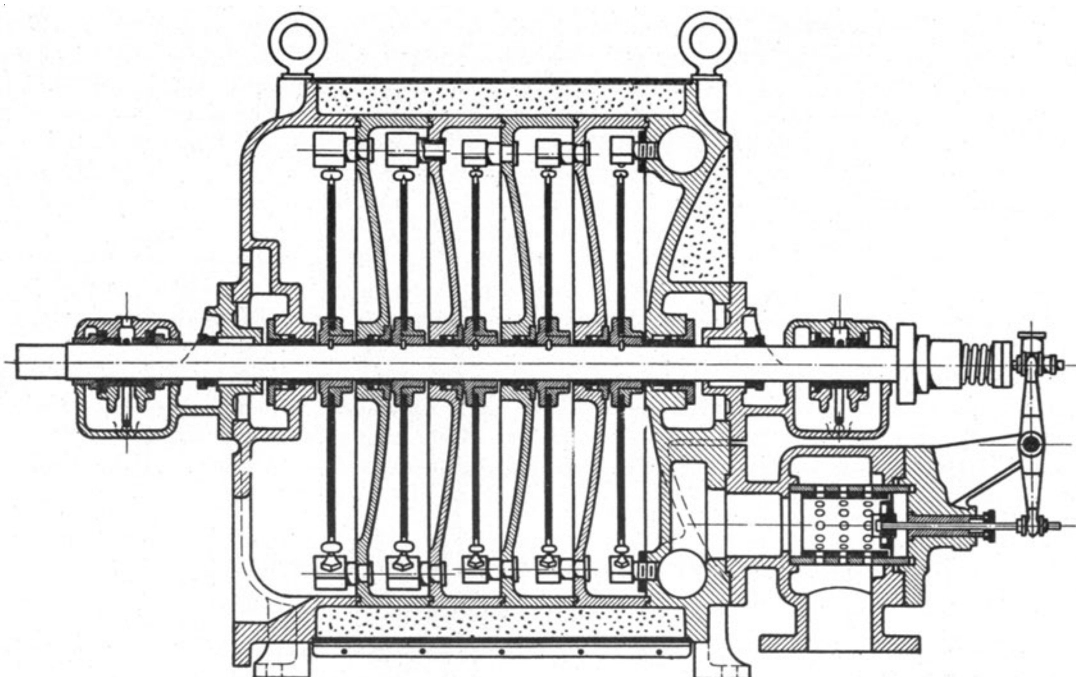


Abb. 685. Kerr-Turbine.

c) Dake American Steam Turbine Company.

Nach dem amerikanischen Patent Nr. 911 576 (Abb. 686) führt man den Dampf durch Kanal 5 der Düse 6 zu und beaufschlagt die erste Laufschaufel 8, aus der die Zwischenleitschaufel 9 den Dampf auf die zweite Leitschaufel 10 hinleitet. Die zweite Zwischenleitschaufel 11 kann einen zweiten Umlauf um den festen Leitring 18 veranlassen, so daß man mit 2-, 4-, 6- ... facher Geschwindigkeitsabstufung arbeiten kann. Über Versuchsergebnisse ist nichts bekannt geworden.

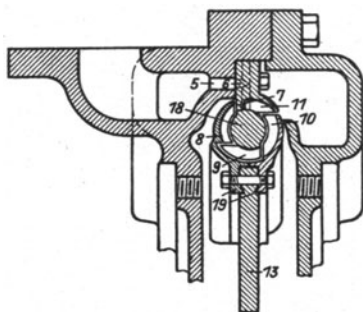


Abb. 686. Laufrad der Dake-Turbine.

117. Die Dampfturbine von Parsons.

Charles Algernon Parsons wurde im Jahre 1854 als erster Sohn des Earl of Rosse zu London geboren[1]), verlebte seine Jugend im elterlichen Heim zu Birr in Irland, wo ihm eine ausgezeichnete Ausbildung durch Privatunterricht hervorragender Männer zuteil wurde. Nach kurzem Besuch der Universität zu Dublin studierte Parsons von 1873 bis 1876 im St. Johns College in Cambridge, um dann in den Elswick Works von W. G. Armstrong & Co. in Newcastle on Tyne seine praktische Lehrzeit durchzumachen. Hier begann er sich mit Dampfmaschinen zu beschäftigen und erfand u. a. einen umlaufenden Motor, der kurze Zeit von Kitson in Leeds ausgeführt wurde. 1883 trat Parsons als Teilhaber in die Firma Clark, Chapman, Engineers zu Gateshead on Tyne ein, und hier begann er mit seiner Lebensarbeit — der Dampfturbine. 1889 begründete Parsons eine eigene Turbinen- und Dynamofabrik in Heaton on Tyne. Fünfzehn Jahre lang blieben seine mit zähester Energie fortgesetzten Bemühungen am Festland unbeachtet. Die erste Mitteilung über den Dampfverbrauch machte Parsons im Engineering, J. 1888, Bd. I, S. 35, wonach eine Auspuffturbine als bestes Ergebnis bei 6,3 at Überdr. 23,6 kg für die elektrische PS-st ausgewiesen habe, während die vollkommene Maschine nach seiner Berechnung 9,3 kg/PS-st verbrauchen

[1]) Die nachfolgende Schilderung seines Lebenslaufes ist Matschoß, Entwicklung der Dampfmaschine. Bd. II, S. 610 entnommen.

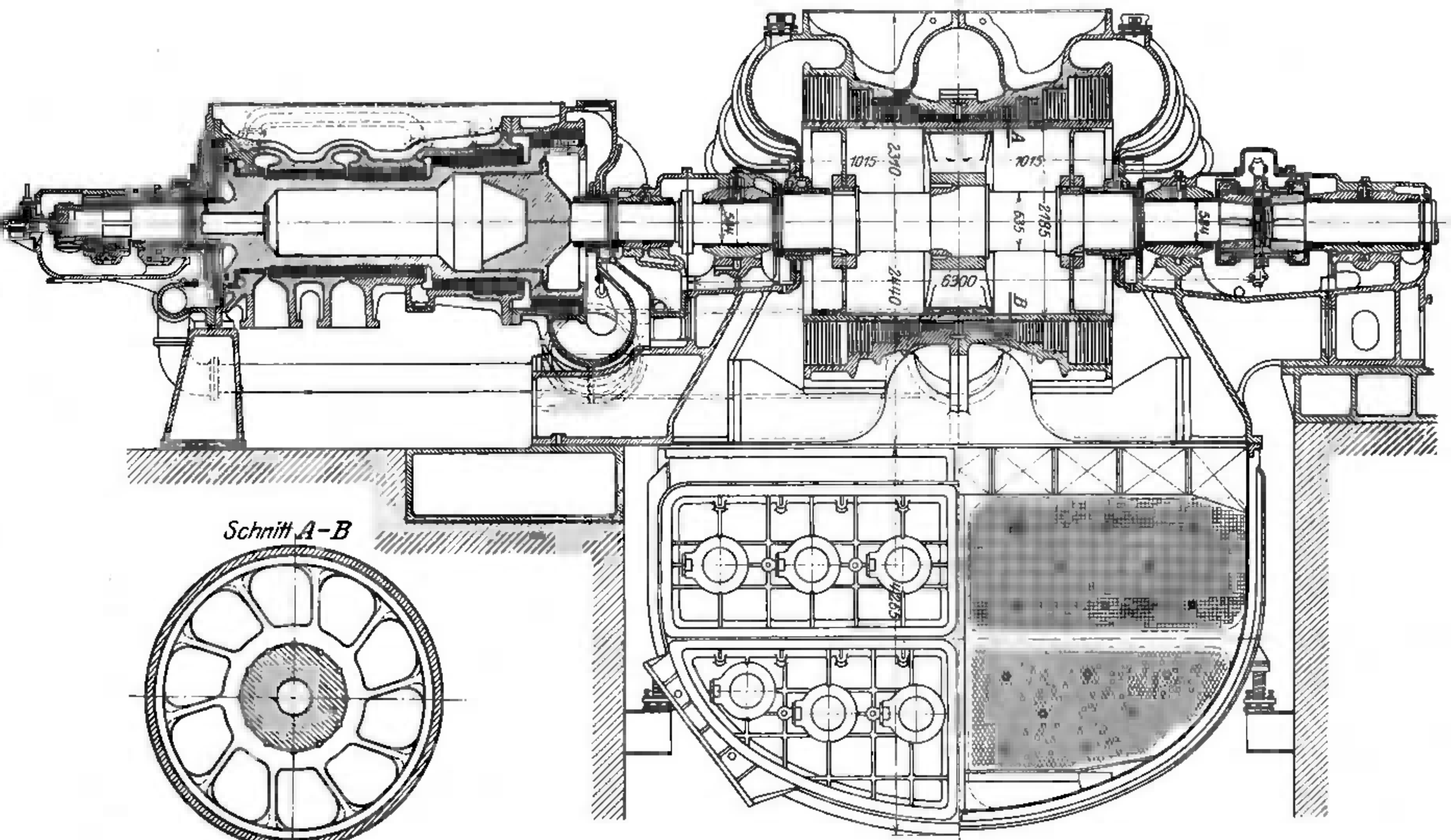


Abb. 687. Parsons-Turbine von 25000 kW-Leistung bei 750 Umdr./min.

sollte, also bereits ein thermodynamischer Wirkungsgrad von 40 v. H. erzielt worden war. Dabei war die Umlaufzahl der, wie es scheint, etwa 30pferdigen Einheit 9200 Uml./min, der mittlere Durchmesser etwa 94 mm, die Umfangsgeschwindigkeit 45 m/sek, die Stufenzahl 45. Im Jahre 1892 berichtet Ewing im Engineering gleichen Jahres Bd. II, S. 573 über die erste Kondensationsmaschine, die bei 7,17 at Überdr. 0,048 at abs. Vakuum, 204° C Dampftemperatur, 100 kW-Leistung und 4500 Uml./min, 12,9 kg für die kW-st verbraucht hat. Die Turbine bestand aus sechs Scheiben zu 380 mm und einer Scheibe zu 680 mm Durchmesser (also 160 m/sek größter Umfangsgeschwindigkeit) und 35 **nur radial beaufschlagten Stufen.** Diese Ergebnisse hätten den Dampfmaschinenkonstrukteuren zu denken geben sollen, um so mehr als der Engineering v. J. 1896, Bd. II, S. 495 bei einer 400 kW-Einheit schon 9,2 kg/kW-st als Verbrauch erwähnt. Allein das Festland blieb passiv, obwohl Parsons im Jahre 1896 bereits 60 Dampfturbinen mit einer Gesamtleistung von 40000 PS in Betrieb gesetzt hatte. Erst das Jahr 1900 brachte als große Überraschung die Kunde, daß die Stadt Elberfeld eine Parsons-Turbine von 1000 kW Leistung auf Anregung ihres technischen Beraters, W. H. Lindley, in Auftrag gegeben habe, die nach der Prüfung durch Prof. Schröter-München, Prof. Weber-Zürich und Lindley[1]) bei Normalbelastung und 1500 Uml./min einen Verbrauch von 9,14 kg/kW-st, und bei Überlastung 8,81 kg/kW-st aufwies. Kurz vorher hatten sich die Firmen „A.-G. für Dampfturbinen, System Brown-Boveri-Parsons" in Baden b. Zürich und die „Turbinia, Deutsche Parsons-Marine-A.-G." gebildet, die die Herstellung von Parsons-Turbinen energisch an Hand nahmen. Im Laufe der Zeit gesellten sich diesen eine ganze Anzahl hervorragender Firmen als Lizenznehmer hinzu, über die im nachfolgenden berichtet wird.

Als Ausführungsbeispiel wählen wir die große Turbine von 25000 kW Leistung bei 750 Umdr./min, die von der Firma Ch. A. Parsons & Co., Newcastle, für die Commonwealth-Edison Co. Chicago geliefert wurde. Die allgemeine Anordnung der zweigehäusigen Turbine ist durch Längsschnitt, Abb. 687, veranschaulicht. Weitere Angaben sind nach Engineering[2]) die folgenden.

Anfangsdruck	14 at Überdruck
Überhitzung	110° C
Gewährleisteter Dampfverbrauch, einschließlich Erregung mit Ausschluß des Antriebes der Kondensatorhilfsmaschinen und der Dynamoventilation	bei 25000 kW: 5,3 kg/kW-st „ 20000 kW: 5,1 „ „ „ 15000 kW: 5,3 „ „ „ 10000 kW: 5,65 „ „
Dampfverbrauch bei Normallast für die effektive PS-st	3,68 kg
Durchmesser der Hochdrucktrommel	0,971; 1,245; 1,65 m
Zahl der Abstufungen der Schaufellänge	6
Zahl der Stufen	64
Schaufellänge	70 bis 165 mm
Durchmesser des Überleitungsrohrs zum Niederdruck	760 mm
Zwischenpressung darin	1,75 at abs.
Durchmesser der Niederdrucktrommel	2180 mm
Ganze Länge der Niederdrucktrommel	2510 mm
Schaufellänge am Niederdruck	70 bis 480 mm
Zahl der Niederdruckstufen	2 × 24
Schaufellängeabstufung	6
Lagerdurchmesser des Niederdruckteiles	585 mm
Lagerlänge	820 mm
Gewicht des Turbinenrotors	50 t
Auspufföffnung zum Kondensator (Rechteck)	6,4 × 3,65 m

Schaufelbaustoff ist am Hochdruckteil Kupfer, das übrige Messing. Die Kupplung zwischen Hoch- und Niederdruck ist starr, zwischen Niederdruck und Dynamo beweglich. Die Hochdrucktrommel ist mit dem vordern Wellenteil in einem Stück geschmiedet, das Niederdruckwellenstück ist in üblicher Weise eingeschrumpft. Die Niederdrucktrommel erhält einen mittleren Stern, mit, gemäß Schnitt A—B exzentrisch angeordneten Armen, was

[1]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1900, S. 829.
[2]) Engineering, 17. Okt. 1913.

bei der verschieden großen Wärmedehnung eine größere Nachgiebigkeit bietet, als bei radialen Armen. Außerdem ist die axiale Verschiedenheit der Wärmedehnung zwischen Trommel und Welle dadurch berücksichtigt, daß die Trommel durch umgebördelte, dünnwandige Platten unterstütztwird, die einigermaßen federn können. Die Regelung beruht auf reiner Drosselung mittels des normalen Dampfkraftgetriebes von Parsons mit 320 Schwingungen in der Minute und einem Zusatzventil, das selbsttätig im geraden Verhältnis zum Anfangsdruck vor dem ersten Laufrad öffnet, sobald die Leistung von 20000 kW überschritten wird. Eine weitgehende Sicherung gegen Durchgehen ist durch zwei Sicherheitsregler erreicht, von denen einer auf der Antriebswelle der Ölpumpe, der andere auf der Turbinenwelle selbst angeordnet ist.

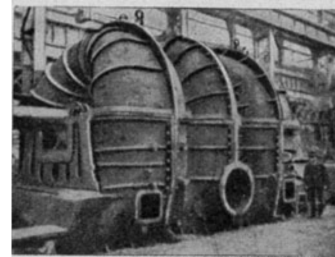


Abb. 687a. Niederdruckgehäuse der Parsonsturbine.

Der Kondensator besitzt 3650 qm Kühlfläche, besteht aus Messingrohren von 25,4 mm Außendurchmesser und 4,55 m Länge. Der Durchmesser des Zuflußrohres für Kühlwasser ist 1,22 m. Da die Verbindung zwischen Turbine und Kondensator eine starre ist, durfte der erstere nicht mit dem Fundament verbunden werden. Sein Gewicht wird vielmehr durch die in Abb. 687 sichtbaren Federn getragen.

Lichtbild 687a ist eine Ansicht des Niederdruckgehäuses, wobei einer der zweiseitig angeordneten Dampfzufuhr-Stutzen sichtbar wird.

Gewissermaßen als geschichtliches Dokument fügen wir schließlich nach Stoney (früherem leitenden Ingenieur bei Parsons) die bis zum Jahre 1901 erzielten Ergebnisse Parsonsscher Dampfturbinen bei.

Zahlentafel 1.

Ergebnisse von Versuchen an den frühesten Parsons-Turbinen bis zum Jahre 1901 nach Stoney.

	Ort der Aufstellung und Art des elektrischen Stromes	Dampfüberdruck kg/qcm	Kondensatordruck kg/qcm abs.	Überhitzung °C	Leistung KW	Uml. i. d. Min.	Wirklicher Dampfverbrauch G_e kg/kW-st	Theoretischer Dampfverbrauch G_0 kg/kW-st	Thermodynamischer Wirkungsgrad $\eta = \frac{G_0}{G_e}$
1	Newcastle	5,62	0,0414	—	24,7	4990	13,06	5,12	0,392
2		5,55	1,036[1]	—	19,7	4780	31,07	12,58	0,405
3	Blackpool (Gleichstrom)	8,58	0,0553	33,3	232	3010	9,93	4,78	0,481
4		8,37	0,107	—	204	3000	10,98	5,51	0,502
5		9,14	0,0691	—	Leerlauf	3010	(430,9)	—	—
6	Scarborough (Wechselstrom)	8,86	0,112	—	529	2400	10,30	5,50	0,534
7		9,00	0,0794	—	258	2400	11,98	5,17	0,432
8		11,53	0,0656	—	Leerlauf	2600	(670,0)	—	—
9	Elberfeld (Drehstrom)	9,11	0,063	10,2	1190,1	1487	8,81	4,91	0,558
10		9,47	0,053	11,1	994,8	1461	9,14	4,74	0,519
11		9,40	0,046	29,1	498,7	1473	11,42	4,58	0,401
12		9,49	0,037	13,5	Leerlauf	1488	(1183)	—	—

Aus dem Jahre 1907 stammen die in Zahlentafel 2 mitgeteilten, einen großen Fortschritt bekundenden Versuchsergebnisse[2]), in denen wahrscheinlich der Arbeitsverbrauch der Kondensation nicht abgezogen ist. Der thermodynamische Wirkungsgrad ist vermutlich infolge der hohen Luftleere, für die die Turbine nicht gebaut war, niedriger als bei den nachfolgend zu besprechenden Ausführungen anderer Firmen. Der absolute Verbrauch an Wärme für die eff. PS-st (Speisewasser von 0° C vorausgesetzt) nähert sich hingegen den besten heute bekannten Zahlen.

[1]) Mit freiem Auspuff.

[2]) Engineering 1907, I, S. 654.

Zahlentafel 2. 3500 kW-Parsons-Turbine, Carville Power-Station, New Castle on Tyne.

Versuchs-Nr.	1	2	3	4	5	6	7
Mittlere Belastung . . . . kW	leer unerregt	leer erregt	2192,9	4045,1	5901	6921,8	5164,1
Dampfüberdruck (vor d. Hauptventil) kg/qcm	12,66	14,84	14,24	13,88	13,77	13,96	14,06
Dampfüberhitzung . . . . ° C	44,45	33,9	57,2	60,0	65,0	65,82	66,95
Minutliche Umdrehungszahl	1200	1200	1200	1200	1200	1200	1200
Absol. Druck im Abdampfrohr . . . kg/qcm	0,0395	0,0367	0,0333	0,0329	0,0367	0,0419	0,0333
Stündlicher Dampfverbrauch . . . . kg/st	1664	2361	14440	25380	36020	42980	30850
Dampfverbrauch für die kW-st . . . kg	—	—	6,582	6,275	6,105	6,206	5,98
Anfangswärmeinhalt i_1 . . . . kcal/kg	—	—	704,5	705,9	708,2	708,6	709,4
Thermodynam. Wirkungsgrad, bezogen auf Zust. v. Turbine u. elektr. Leistung	—	—	0,590	0,618	0,641	0,642	0,643
Wirkungsgr. d. Dynamo (angenommen)	—	—	0,90	0,905	0,915	0,92	0,91
Wärmeverbrauch für die eff. PS-st . . kcal	—	—	3072	2947	2910	2978	2838

An Parsons schließt sich naturgemäß die Besprechung der Ausführungen der großen amerikanischen Firma, die von Anfang an mit Parsons Hand in Hand arbeitete.

117a. Die Großturbine der „Westinghouse Electric & Manufacturing Co.“.

Unter den Erzeugnissen der Amerikanischen Westinghouse-Gesellschaft verdienen die Großturbinen herausgegriffen und hervorgehoben zu werden; denn auf diesem Gebiete hat sie in verhältnismäßig kurzer Zeit ungewöhnliche Erfolge erzielt, die selbst im Lichte amerikanischer Entwicklungsmöglichkeiten betrachtet, Achtung abgewinnen.

Johnson[1]) gibt folgende Darlegung von der tatsächlichen Spitzen-Leistungsfähigkeit größerer amerikanischer Großkraftwerke, i. J. 1917, und vom erforderlichen Ausbau bis 1920, unter Voraussetzung von 8 v. H. jährlicher Zunahme, sowie 20 v. H. Bereitschaftsstellung (Reserve).

	Wirkliche Spitzenleistung 1917 kW	Erforderl. Ausbau bis 1920 kW
New York	800000	1190000
Chicago	400000	596000
Philadelphia	250000	373000
Buffalo und Niagarafalls . . .	300000	447000
Detroit	155000	231000
Boston	155000	231000

Würde man beispielsweise bei 600000 kW Leistung sicherheitshalber drei Werke mit 20000 kW-Einheiten aufstellen, so wären 30 Einheiten für den Betrieb, 6 für die Bereitschaftsstellung, insgesamt 36 Einheiten erforderlich, was offenbar zu viel Maschinensätze ergibt. Daher ist es begreiflich, daß Städte mit so hohem Kraftbedarf auf Einheiten von 40000 ja 60000 kW greifen, insbesondere, wenn diese, wie bei den nachfolgend beschriebenen

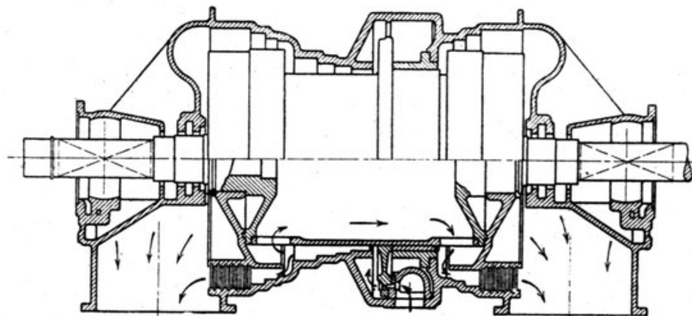


Abb. 688. Die „Single-Double-Flow“-Bauart.

[1]) Notes on Large Steam Turb. Design. The Electr. Journ., Jan. 1919, S. 33.

Verbundturbinen der Westinghouse-Gesellschaft unterteilungsfähig sind, so daß bei einem Betriebsunfall nicht die ganze Einheit ausfällt. Die großen Einheiten gewähren eine Ersparnis an Raumbedarf, Anlagekosten und Dampfverbrauch. Letzterer wird im Verhältnis zu einer 20000 kW-Einheit von Johnson wie folgt angesetzt:

Leistung				
5000	10000	20000	30000	40000 kW
Verhältnismäßiger Dampfverbrauch				
1,17	1,08	1,00	0,98	0,965

Die heute übliche Bauart entwickelte sich aus der sogenannten „Single-Double-Flow“-Turbine, die für eine 10000 kW-Einheit mit 750 Umdr./min aus dem Jahre 1909 in Abb. 688 dargestellt ist. Sie besteht aus einem zweikränzigen Curtisrad, einem darauffolgenden Mitteldruckteil und verdoppeltem Niederdruckende, wobei die eine Hälfte den Dampf durch die hohle Trommel hindurch zugeführt bekommt. Zwischen dem Mitteldruckteil und jener Niederdruckhälfte ist eine Labyrinthliderung eingefügt. Bei Erhöhung der Leistung über 20000 kW fand man es zweckmäßig, die Turbine in einen Hochdruck- und einen Niederdruckteil in Verbundanordnung zu trennen, indem dadurch die Temperaturunterschiede für jedes der Gehäuse verkleinert, die Ausführung erleichtert und weitere unten ausgeführte Vorteile gewonnen werden. Im Hochdruckteil wurde das Curtisrad wieder durch einfache Überdruckstufen ersetzt, da deren Schaufellängen hinlänglich groß waren; um den Einfluß des Schaufelspieles vernachlässigen zu können. Die Bauart des Niederdruckteils einer solchen Turbine aus dem Jahre 1914 wird durch Abb. 688a dargestellt. Die mittleren Schaufelreihen sind auf einem hohlen Zylinder befestigt; die Wellenzapfen tragen das Ganze durch kegelige angeschmiedete Scheiben und besondere Gegenscheiben. Die Niederdruckschaufeln sind in getrennt aufgezogene breitkränzige Scheibenränder eingebaut, ein Beweis, daß man zu höheren Umfangsgeschwindigkeiten überging. Die Verbund-Bauart wurde von da an beibehalten, doch kommen bis zu 30000 kW auch einachsige Anordnungen vor. Eine Turbine dieser Art und Leistung und 1200 Umdr./min für die Common-

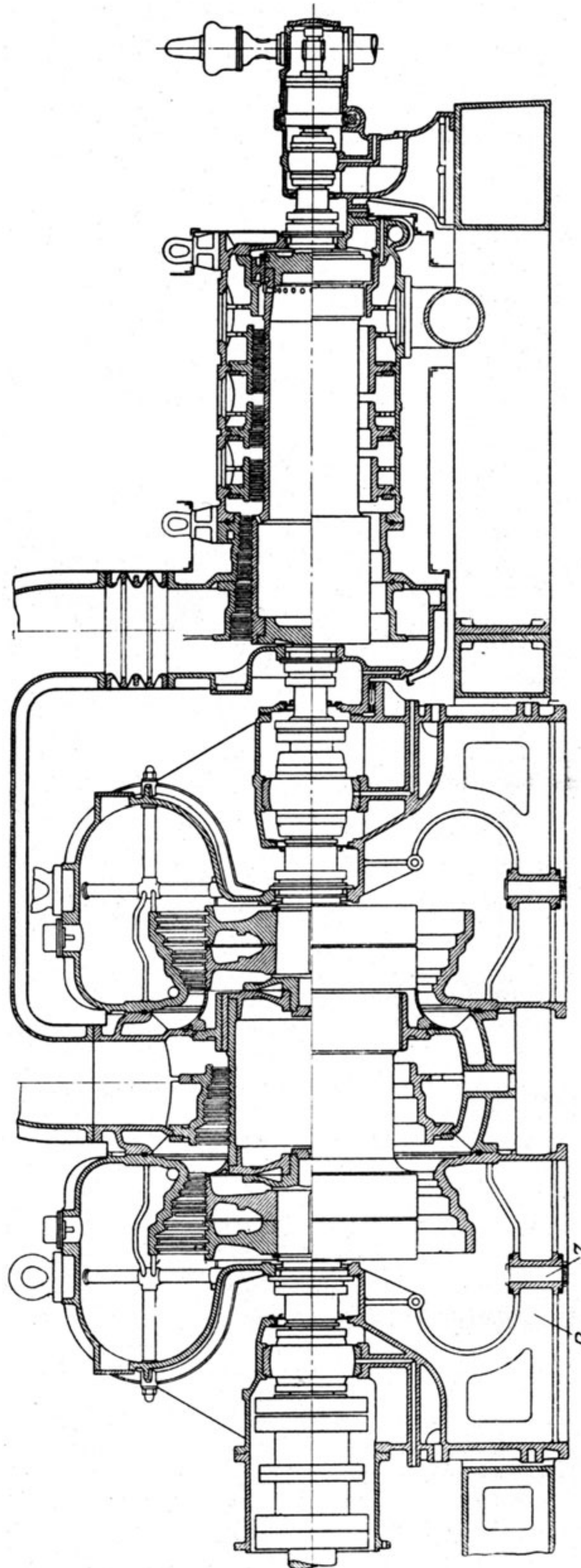


Abb. 689. Westinghouse-Turbine von 30000 kW-Leistung bei 1200 Umdr./min f. d. Commonwealth Edison Co. Chicago.

wealth Edison Co., Chicago ist in Abb. 689 veranschaulicht. Nähere Angaben enthält folgende Zahlentafel:

30000 kW-Turbine f. d. Commonwealth Edison Co. Chicago.

Dampfdruck vor der Turbine	at	15,5 Überdr.	Mittlere Schaufel-Umfangsgeschwindigkeit	m/sek	126
Überhitzung	°C	94	Größter mittlerer Durchmesser	mm	2490
Luftleere	at abs.	0,033	Größte Schaufellänge	„	457
Kühlwasser-Eintr.-Temperatur	°C	14,5	Lagerbelastung	at	7,4
Kondenser-Kühlfläche	qm	2 × 2600	Lagerdurchmesser	mm	462
Normalleistung	kW	30000	Lagergleitgeschwindigkeit	m/sek	28,9
Desgleichen	kVA	35300	Umlaufende Schmierölmenge	l/min	570
cos φ		0,85	Öldruck	at	0,35
Höchstleistung	kW	35000	Öldruck für die Regelung	at	4,2
Gesamte Stufenzahl		63	Ölkühlerfläche	qm	56
Verhältnis der i. Hoch- u. Niederdruck entwickelten Leistungen		42 : 58			

Bei 25000 kW-Leistung verläßt der Dampf den Hochdruckteil mit 2,11 at abs. und 126° C.

Die Welle ruht in drei Lagern und ist zwischen Hoch- und Niederdruck durch eine starre Kupplung verbunden. Um den Hochdruckteil nach einem Lösen der Kupplung zu stützen, wird unmittelbar neben

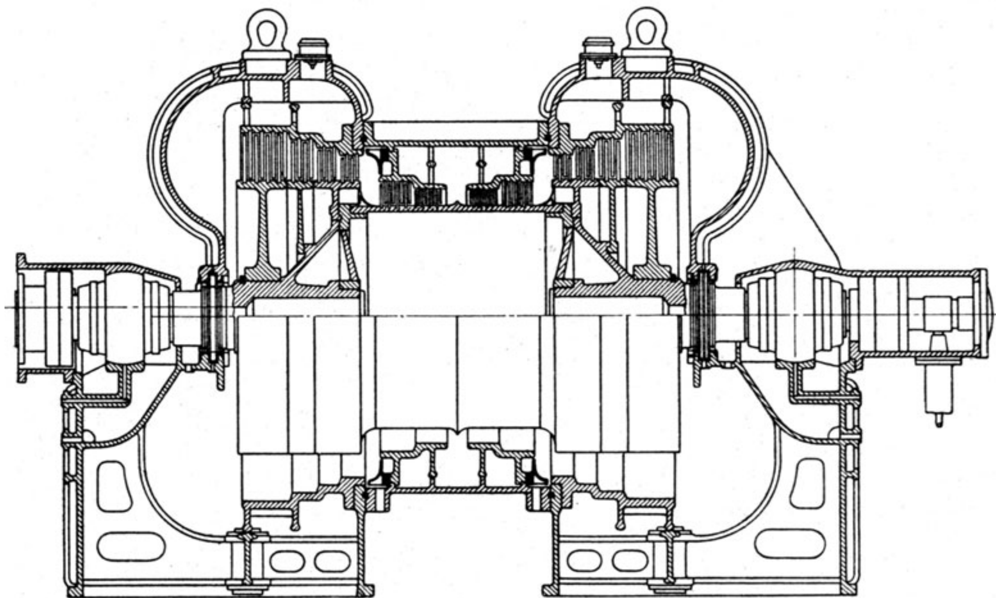


Abb. 688a. Bauart des Niederdruckteils bei Zwillingsanordnung.

der Kupplung an Stelle des Ölabstreifers ein Traglager eingebaut, das allseitige Nachstellung besitzt, um beim Zusammenbau die Kupplungsflanschen genau zum Übereinstimmen zu bringen. Um Unterschiede der Höhenlage infolge ungleicher Wärmedehnung auszuschließen, wird das hintere Ende des Hochdruckgehäuses durch das Niederdruckgehäuse abgestützt. Das Niederdruckgehäuse ist nur gegen den Stromerzeuger hin, am Ende gegen das Fundament fest und kann sich axial samt dem Hochdruckgehäuse frei ausdehnen. Die lineare Dehnung im Betriebe beträgt im ganzen 8 mm. Nach Abb. 689a besteht die Hochdruckstopfbüchse aus 13 in 3 Gruppen geteilten Labyrinthkämmen und einer sich hieran anschließenden Wasserstopfbüchse. Das Schleuderrad der letzteren ist an Abb. 455 besprochen worden. Der Dampf aus dem ersten Zwischenraum entweicht zu einer Niederdruckstufe. Dem äußeren Zwischenraum wird beim Anlassen Sperrdampf zugeführt, bis die Wasserstopfbüchse zur Wirkung kommt, deren Anwendung den Vorteil hat, daß auch am Niederdruck der Sperrdampf im Betriebe abgeschaltet werden kann. Ein noch verbleibender axialer Überdruck wird durch ein Kingsburyspurlager aufgenommen. Die Kupplung zwischen Turbine und Stromerzeuger besteht aus einer Anzahl von Bolzen, die in Bronzebüchsen spielen und denen genügend Elastizität nachgesagt wird, um schwere Kurzschlußstöße abzudämpfen. Die Niederdruckturbine entspricht bei dieser Ausführung dem Typus der Abb. 688. Be-

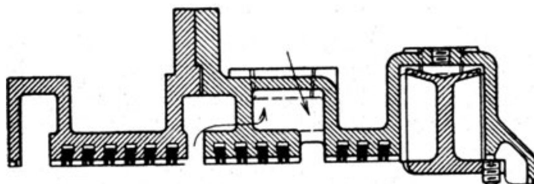


Abb. 689a. Hochdruckstopfbüchse.

merkenswert ist die Abweichung der Bauart des Laufzeuges gegenüber Abb. 688a. Insbesondere sind die Niederdruckscheiben erheblich kräftiger ausgeführt. Die Versteifungen des Niederdruckgehäuses im Oberteil stimmen mit der in Abb. 472 beschriebenen Ankerkonstruktion überein. Im untern Teil sind

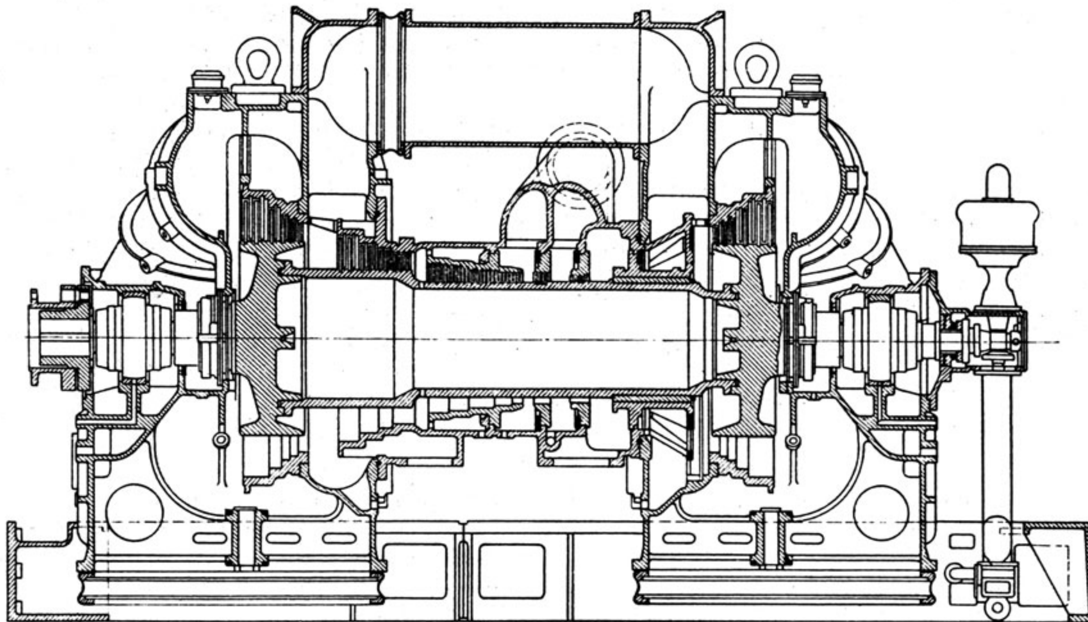


Abb. 690. Eingehäusige Westinghouseturbine von 30000 kW Leistung d. Edison El. & Illum. Co. Brooklyn.

die Versteifungsrippen *R* der ovalen Auspuffmündung im Guß unterbrochen; der Zwischenraum wird nachher zylindrisch ausgebohrt, Zapfen *Z* eingefügt und die Verbindung durch Schrumpfringe gesichert. Die Regelung beruht auf Drosselung mit zwei Zusatzventilen, wovon das erste bei 25000 kW Leistung, das zweite bei 30000 kW Leistung zu öffnen beginnt. Die Hochdrucktrommel und das Gehäuse bestehen aus Stahlguß.

Zwischendrein wurden auch eingehäusige Ausführungen von großer Leistung gebaut. So stellt Abb. 690 die 30000 kW-Einheit im Goldstreetwerk der Edison Electric Illuminating Co. Brooklyn dar. Sie entspricht der „Single-double-Flow“-Bauart, jedoch ohne Curtisrad, da die Überdruckschaufeln von Anbeginn an lang genug sind. Diese Turbine mußte abgeliefert werden, ohne auf dem Probefeld gelaufen zu haben. Die Erprobung an Ort und Stelle ergab, daß ein Nachwuchten nicht erforderlich war, wobei übrigens zugegeben wird, daß eine vollständig gleiche Einheit der Brooklyn Rapid Transit Co. unter gleichen Umständen sowohl an der Turbine wie am Stromerzeuger nachgewuchtet werden mußte. Bemerkenswert ist hier die Wellenbauart, bei der die schwer beanspruchten Niederdruckschaufeln von je einer, mit den Wellen aus einem Stück geschmiedeten Scheibe getragen werden. Für die Überführung des Dampfes in die zweite Niederdruckhälfte dient das mit Kupferdehnungseinlagen versehene obere Verbindungsrohr.

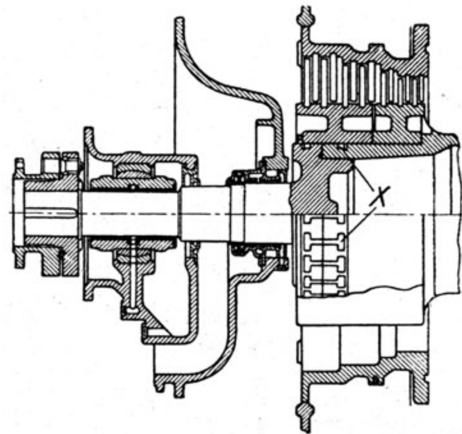


Abb. 690a. Schrumpfverbindung durch eingelegte Anker *X*.

Die neueren Ausführungen werden, wie erwähnt, meist als sogenannte „Cross-Compound“, d. h. Verbundturbinen ausgeführt, wobei der Hochdruck- und Niederdruckteil je besondere und je nach Umständen sogar auf verschiedene Netze geschaltete Stromerzeuger antreiben. Drei derartige Turbinen mit je 35000 kW Leistung sind an die Interborough Rapid Transit Co. in New York geliefert worden. Eine noch größere Einheit von 45000 kW Leistung ist im

Brunots Island-Werke der Duquesne-Light Co. Pittsburg aufgestellt. Die Hochdruckturbine macht 1800, die Niederdruckturbine 1200 Umdr./min. An ersterer ist bemerkenswert die Schrumpfungsart der Trommel, indem nach Abb. 690a bei *X* Doppel-**T**-förmige versenkt eingelegte Schrumpfanker an Stelle von Schraubenbolzen benützt werden. Die übergeschobenen Turbinenlaufringe verhüten etwaiges Herausschleudern der Schrumpfanker. Der Niederdruckteil ist konstruktiv mit dem in Abb. 689 gleich, nur daß die Mitteldruckbeschaufelung entfällt.

Ein besonderes Merkmal der Anlange ist, daß jedes Auspuffrohr der Doppelend-Niederdruckturbine in einen eigenen Kondensator einmündet. Da man durch ältere Erfahrungen gewarnt war, wurden **zum Ausgleich der Luftleere** weite, mit Kupferdehnungseinlagen versehene **Verbindungsrohre** zwischen den Kondensatoren angeordnet. Verschiedenheiten der Luftleere sollen sich sogar bei der Parsonsschen Anordnung, Abb. 687, nachteilig bemerkbar gemacht haben. Das Gewicht der Kondensatoren wird durch Federn so weit abgefangen, daß die Verbindungsflanschen der Turbine keinem Zuge ausgesetzt sind.

Die zur Zeit größte Ausführung dieser Art ist die **Zwillings-Verbundturbine der Interborough Rapid Transit. Co. New York** mit 60000 kW normaler und 70000 kW höchster Leistung. Die Turbine besteht aus einem Hochdruckteil, der in der Mitte zwischen zwei parallel geschalteten Niederdruckteilen aufgestellt ist. Die Hauptabmessungen sind[1]) die folgenden:

60000 kW-Turbine der Interborough Rapid Transit Co. New York.

Dampfdruck	at Überdr.	14,4	Durchm. der Hauptdampfleitung	mm	2×457
Überhitzung	°C	66	Durchm. des Hochdrucklagers	mm	254
Luftleere	at abs.	0,033	Umfangsgeschwindigkeit d. Hochdrucklagers	m/sek	19,95
Gemeinsame Drehzahl	i. d. Min.	1500	Durchm. des Niederdrucklagers	mm	305
Periodenzahl des Drehstromes		25	Umfangsgeschwindigkeit des Niederdrucklagers	m/sek	23,9
Bei 70000 kW Leistung sind:			Lichte Breite d. Abdampfstutzens	mm	2520
Anfangsdruck	at Überdr.	14,85	Lichte Länge d. Abdampfstutzens	mm	3820
Anfangstemperatur	°C	284			
Zwischendruck	at abs.	2,09			
Zwischentemperatur	°C	121			

Aus den Maßen des Abdampfstutzens leitet sich nach Abb. 691 der mittlere Schaufeldurchm. am Niederdruck = 2230 mm, desgleichen die Umfangsgeschwindigkeit = 175 m/sek ab. Die Stufenzahl im Hochdruck beträgt für die 1. Gruppe 6; für die 2. Gruppe 4; für

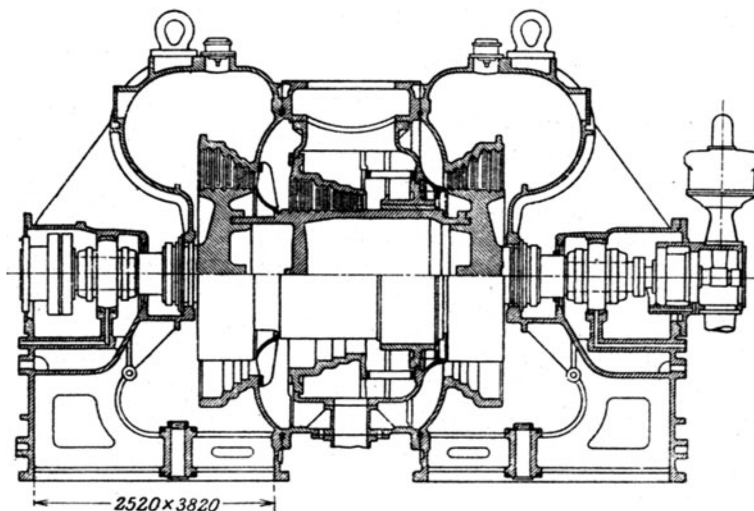


Abb. 691. Niederdruckteil der 60000 kW-Turbine der Interborough Rapid Transit Co. New York.

die 3. Gruppe 4; für die 4. Gruppe 11; im Mitteldruckteil 10, im Niederdruckteil 2 × 6, insgesamt 41. Die konstruktive Durchführung des Niederdruckteiles weist nach Abb. 691 die „Single-Double-Flow“-Dampfführung auf. Bemerkenswert ist der durchgehende Boden

[1]) Nach Finlay, The Electric Journal, Mai 1919, S. 177.

des mittleren Trommelteiles zur Verstärkung an der durch die schwersten Schaufeln beanspruchten Stelle. Die schweren Niederdruckscheiben sind wieder mit den Wellenenden aus einem Stück geschmiedet. Die Fundamantanlage wird durch die weiter unten besprochenen Abb. 934, 935 veranschaulicht. Die Gesamtkühlfläche der vier Kondenser ist rd. 9300 qm.

Bemerkenswert ist die zum Teil unabhängige Regelung der drei Turbinenteile. Die Hochdruckturbine erhält eine Drosselregelung mit zwei Zusatzventilen, wie oben bei der Common Wealth-Turbine beschrieben worden ist. Das zu den Niederdruckteilen führende Zweigrohr erhält je eine mittels Dampfkraftkolben bewegte Drosselklappe. Außerdem ist besonders geregelte Frischdampfzufuhr zu jeder der Niederdruckturbinen vorgesehen, die auch eigene Fliehkraftregler besitzen. Folgende Forderungen wurden aufgestellt:

1. Wenn einer der Niederdruckteile Kurzschluß am Stromerzeuger erleidet oder eine ähnliche Störung sich ereignen sollte, so muß die betreffende Turbine ab- und die Hochdruckturbine auf teilweise freien Auspuff umgeschaltet werden.

2. Wenn an der Hochdruckturbine Kurzschluß oder anderweitige Störungen auftreten, soll sie ausgeschaltet, hingegen Frischdampf den beiden Niederdruckturbinen zugeführt werden, die den Betrieb weiter aufrecht zu erhalten haben. Zu diesem Zwecke wird der Hochdruckregler mit 3 v. H. Ungleichförmigkelt zwischen Leerlauf und Vollast ausgeführt; die Niederdruckregler hingegen erhalten 12 v. H. Ungleichförmigkeit und arbeiten im normalen Betrieb in einem mittleren „neutralen“ Bereich. Das Ineinandergreifen gestaltet sich im einzelnen wie folgt:

a) Wenn infolge Kurzschlusses an einer der Niedertruckturbinen der Stromunterbrecher diese vom Netz abschaltet, wird sie infolge der Entlastung beschleunigt umzulaufen anfangen. Ist die Geschwindigkeit um 3 v. H. gestiegen, so zeigt ein Lichtsignal dem Wärter an, daß die Steuerung der Turbine im Begriffe ist, die Drosselklappe zu schließen. Bei 4 v. H. Geschwindigkeitszunahme soll die Klappe geschlossen sein. Da die Hochdruckturbine inzwischen weiterarbeitet und der Dampf nur nach einer Niederdruckhälfte abströmen kann, steigt der Dampfdruck in der Zwischenleitung und öffnet selbsttätig das Hochdruckauspuffventil, so daß **ein Teil des Dampfes ins Freie entweichen kann,** während der andere der unversehrten Niederdruckturbine zuströmt. Die andere Niederdruckseite läuft inzwischen, da sie keinen Dampfzufluß erhält, verzögert. Sinkt ihre Geschwindigkeit um 3 v. H. unter den normalen Wert, so öffnet ihr Regler die Frischdampfleitung und erhält sie auf dieser Geschwindigkeit, so daß sie je nach Umständen alsbald wieder auf das Netz geschaltet werden kann.

b) Bei einem Unfall an einer Niederdruckturbine kann die Drosselklappe von Hand durch die Wartung ausgelöst werden. Die sich schließende Drosselklappe schaltet den zugehörigen Stromerzeuger selbsttätig vom Netze ab, die Turbine kommt zum Stillstand.

c) Bei einem Kurzschluß am Hochdruckteil, wodurch dieser vom Netze selbsttätig abgeschaltet wird, schließt der Regler infolge Geschwindigkeitszunahme die Dampfzufuhr allmählich ab, bis der Leerlauf erreicht ist, wodurch mangels an Dampf die Leistung der Niederdruckturbinen nahezu auf Null herabgeht. Diese fehlende Leistung kann von den anderen Maschinen des Werkes nachgeliefert werden. Sind sie jedoch hierzu zu schwach, so wird die Geschwindigkeit des ganzen Werkes sinken (mit Ausnahme der ausgeschalteten Hochdruckturbine, die mit dem Werke nicht mehr elektrisch verbunden ist) Bei 3 v. H. unter dem Normalen erhalten jedoch die Niederdruckturbinen frischen Dampf und werden nunmehr die fehlende Leistung selbst aufzubringen vermögen. Es ist vom Schaltbrett aus möglich, die Zusatzfedern der Niederdruckregler zu spannen, so daß die Geschwindigkeit des Werkes wieder auf die Höhe gebracht werden kann.

d) Sollte irgendeiner der Hauptregler versagen, so kommt, sei es an einem Hochdruck-, sei es an einem Niederdruckteil, der Sicherheitsregler in Wirkung und löst entweder die Hauptabschließung oder die Frischdampfzufuhr zum Niederdruck oder die Drosselklappe in der Zwischenleitung, worauf die betreffende Turbine nicht nur abgeschaltet, sondern auch zum Stillstand gebracht wird.

Die selbsttätige Regelung, von der die Betriebssicherheit in der Doppelverbundturbine in so hohem, hervorragendem Maße abhängt, soll sich praktisch gut bewährt haben. Sie gewährt den schätzbaren Vorteil, daß bei irgendeiner Störung nicht die ganze Einheit, sondern bloß ein Drittel davon an Leistung ausfällt. Es ist daher grundsätzlich auch nur eine Ergänzung (Reservekraft) von einem Drittel der Gesamtleistung, d. h. von 20000 kW grundsätzlich erforderlich. Den seltenen Störungsfällen steht hingegen die dauernde Verbesserung des Gesamtwirkungsgrades, der der größeren Einheit eigen ist, gegenüber. Der Konstrukteur bemerkt übrigens selbst, daß man auf die Selbsttätigkeit (mit Ausnahme der Sicherheitsauslösung) verzichten und die Turbinen einzeln von Hand regulieren könne. Das Anlassen gestaltet sich besonders einfach. Die drei Stromerzeuger werden unter sich kurz geschlossen. Der erste Dampfstoß beim Öffnen des Hauptventiles bringt zunächst nur die Hochdruckturbine zum Anlaufen. Die erzeugten Kurzschlußströme wirken jedoch auf die stehenden Stromerzeuger der Niederdruckteile wie auf Drehstrommotoren ein, so daß sich diese, wie die Erfahrung gezeigt hat, sofort in synchrone Drehung begeben.

Über das Verhalten im Betriebe spricht sich der Konstrukteur der Turbinen, Johnson[1]), in einer wohltuend offenen Weise aus. Zur Zeit der Veröffentlichung waren 10 Einheiten in Betrieb und vier weitere in Ausführung begriffen.

Drei Einheiten zu je 30000 kW der Rapid Transit Co. arbeiteten seit drei Jahren je 16 bis 20 Stunden im Tag. Die erste und dritte lief einwandfrei, an der zweiten wurde die Labyrinthdichtung des Entlastungskolbens am Hochdruck dreimal eingerieben. Als Grund wurde etwas zu großes Spiel im Spurlager und Formänderung des Gehäuses durch die Rückwirkung der zu starren Dampfzuleitung erkannt. An der Reihenmaschine der Common Wealth Co. wurde einige Stunden nach der Inbetriebsetzung das Niederdrucklabyrinth eingerieben. Man vermutet infolge zu starrer Rohrleitungsanschlüsse an den Oberflächen-Kondensern, die verhindert waren, der Wärmedehnung der Turbine zu folgen. Der Schaden konnte an Ort und Stelle behoben werden und die Turbine lief schon 70 Tage ohne Unterbrechung. An der Turbine der Brooklyn Transit Co. lief das Spurlager heiß. Es zeigte sich, daß die Labyrinthdichtungsringe, die aus einer Aluminiumlegierung bestanden, durch Alkalien zerfressen waren, die man in jenem Werke zur Wasserreinigung benützte. Zwei Schaufelreihen im Hochdruck waren ebenfalls beschädigt. Die Turbine der Duquesne Light Co. hatte Heißlauf am Hochdrucklager, anscheinend wegen Versagens der Schmierung. Die Welle senkte sich infolge Einreibens, so daß an allen Schaufelreihen die Spitzen weggerieben wurden. Die Lager wurden frisch ausgegossen und die Maschine

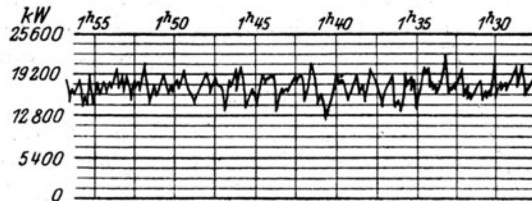


Abb. 692. Belastungsverlauf an der Turbine der Rapid Transit Co. New York.

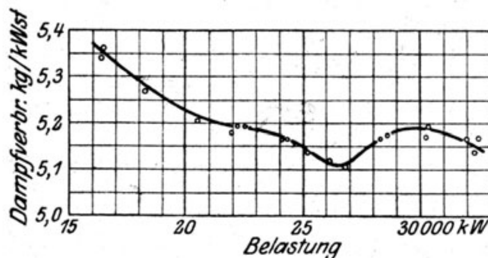


Abb. 692a.

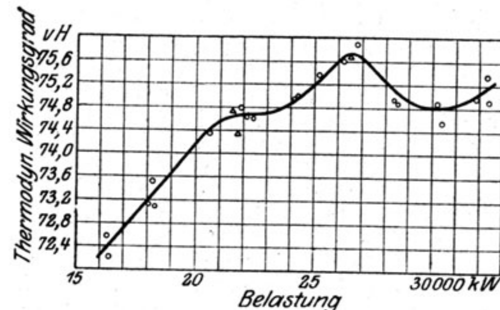


Abb. 692b.

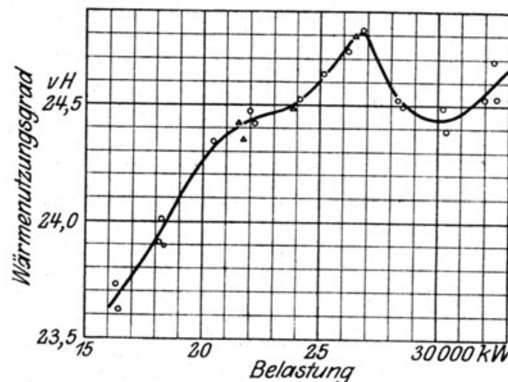


Abb. 692c.
Versuchsergebnisse der 35000-kW Turbine der Rapid Transit Co.

wieder in Betrieb genommen, ohne andere Nachhilfe, als daß man Gegengewichte für das fehlende Schaufelgewicht anbrachte. Später wurden die Schaufeln erneuert. Auch am Niederdruck waren etwa anderthalb Schaufelreihen am Ende gebrochen. Von den neuen Schaufeln im Hochdruck flogen verschiedene in der letzten Reihe bei der Prüfung auf Übergeschwindigkeit von 20 v. H. weg. Es zeigte sich, daß die Schaufelbefestigung infolge konstruktiver Fehler zu schwach gewesen war. An der achten Einheit von 45000 kW in der Narragansett Electric Light Co. wurde das Hochdrucklabyrinth beschädigt, was einen Stillstand von etwa einem Monat verursachte. Seither wurde die Kupplung verdreht infolge einer

[1]) The Electric Journal, Januar 1919, S. 33.

Reihe heftiger Kurzschlüsse und mangelhafter Werkstattausführung der Kupplungskeile. Die große 70000 kW-Maschine wurde in drei Absätzen aufgestellt und in Betrieb genommen. Hier traten Erschütterungen auf infolge zu kleinen Spiels an einem Niederdruckschaufelring. Außerdem gab es Brüche

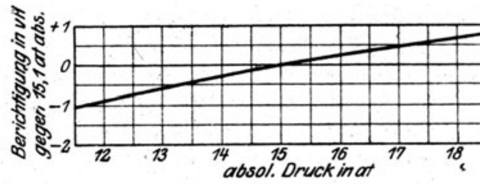


Abb. 692d.

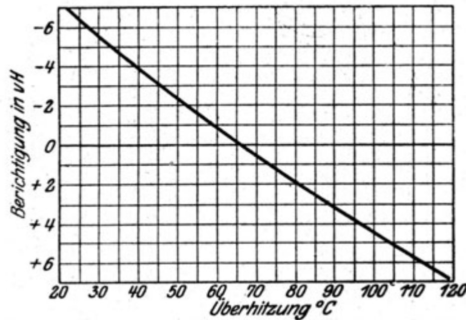


Abb. 692e.

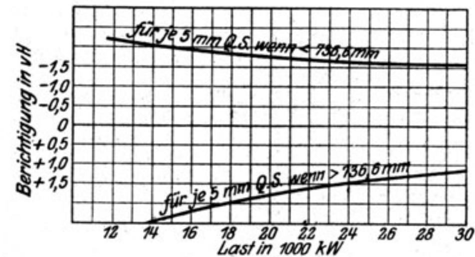


Abb. 692f.

Abb. 692d—f. Berichtigungsziffern.

einiger Leitschaufeln der Mitteldruckstufe. Wie Johnson sagt, sind diese Ergebnisse noch nicht „auf 100 Prozent befriedigend“, allein doch von solcher Art, daß man heute volles Vertrauen in den Betrieb dieser Großturbinen setzen kann.

Über den Dampfverbrauch dieser Großturbinen gibt eine ausführliche Versuchsreihe an den 35000 kW-Einheiten der Interborough Rapid Transit Co. New York Aufschluß, die unter Beobachtung größter Sorgfalt durchgeführt wurde. Beispielsweise wurde das für die Vakuummeter benützte Quecksilber gereinigt und sein spezifisches Gewicht bestimmt, neben selbstverständlicher Berichtigung für die Temperatur der Quecksilbersäule und dem Meniskus. Das für freien Auspuff bestimmte große Ventil wurde unter Wasserverschluß gehalten bei ständiger Beobachtung durch inwendige Glühlampenbeleuchtung.

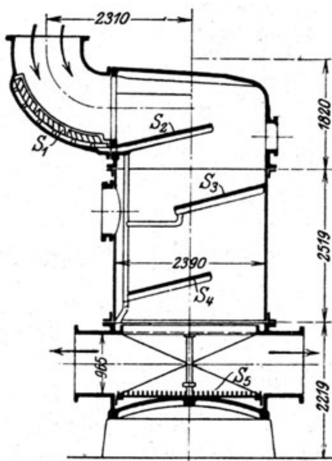


Abb. 693. Wasserabscheider zwischen *H*- und *N*-Turbine.

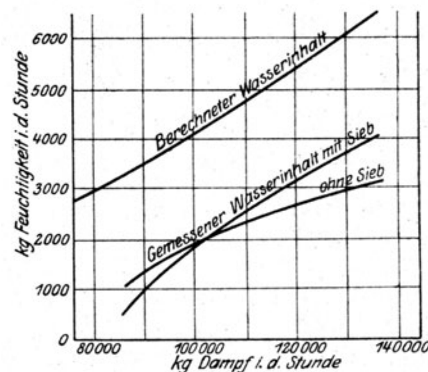


Abb. 693a. Verbesserung der Wasserabscheidung nach Entfernung der Siebe.

Jeder Versuch dauerte drei Stunden, mußte aber leider unter den gegebenen Betriebsverhältnissen, d. h. mit allen Belastungssprüngen, vorgenommen werden, die dem Bahnbetrieb eigen sind. Ein Stück des Belastungsschaubildes ist in Abb. 692 dargestellt, es mußten danach Belastungsänderungen bis zu 10000 kW in einer halben Minute geduldet werden.

Die Ergebnisse sind in Abb. 692a—c dargestellt. Die nachfolgende Tafel enthält die Zahlenwerte. Die benützten Berichtigungen auf den gewährleisteten Zustand von 15,1 at abs. Eintrittsdruck und 66,6° C. Überhitzung, 736,6 mm Vakuum bei 762 mm Barometerstand sind in Abb. 692d—f dargestellt. Eine eigentümliche Unstetigkeit des Dampfverbrauches zeigt sich in der Nähe von 26000 kW, der wiederholt festgestellt wurde, ohne daß eine einwandfreie Erklärung gegeben werden konnte. Ebenso ist auffällig die Verbesserung bei 32000 gegenüber 30000 kW.

Eine eigentümliche Erfahrung wurde mit dem zwischen Hoch- und Niederdruck eingebauten gewaltigen Wasserabscheider, Abb. 693, gemacht. Dieser besaß ursprünglich die mit $S_1 - S_5$ bezeichneten Siebe, nach deren nachträglicher Entfernung nicht nur der Druckabfall verringert, sondern sogar die Wasserabscheidung verbessert wurde, wie Abb. 693 veranschaulicht.

Zahlentafel.

Versuche an der 35000 kW-Verbundturbine der Interborough Rapid Transit Co. New York.

Versuch Nr.	Abs. Dampfdruck vor dem Drosselventil	Dampftemperatur vor dem Drosselventil	Überhitzung	Abs. Dampfdruck vor dem 1. Leitrad	Abs. Dampfdruck am Hochdruck Austr.	Abs. Dampfdruck Niederdr. Eintritt	Vakuum	Abs. Kond.-druck	Mittl. Leistung	Tatsächl. Dampfverbrauch in der Stunde	Dampfverbr. umgerech. auf 15,1 at abs. 66,6° C Überdr. 736,6 mm Vakuum	Reduz. Dampfverbrauch für die kW-Stunde	Thermodynamischer Wirkungsgrad	Wärmenutzungsgrad
	kg/qcm	°C	°C	kg/qcm	kg/qcm	kg/qcm	mm/Hg	mm Hg	kW	kg/st	kg/st	kW/st	v. H.	v. H.
1	15,78	256,2	56,5	10,41	0,745	0,717	721,63	40,4	16342	93716	87250	5,339	72,540	23,72
2	15,65	258,05	58,7	11,46	0,83	0,759	726,15	35,9	18317	101862	97059	5,299	73,086	23,90
3.	15,50	266,1	67,3	12,31	0,893	0,844	726,08	35,9	20472	110390	106564	5,206	74,400	24,33
4	15,6	270,5	71,1	13,01	0,949	0,9	731,3	30,7	22150	116148	114937	5,189	74,630	24,41
5	15,56	267,7	68,6	13,64	0,998	0,992	734,1	27,9	24137	125257	128727	5,167	74,947	24,52
6	15,49	258,2	59,4	13,85	1,027	0,992	734,0	28,0	25170	131695	129359	5,139	75,357	24,63
7	15,32	273,6	75,2	14,84	1,019	1,033	730,53	31,5	26153	135011	133981	5,123	75,597	24,72
8	15,76	260,0	60,3	15,12	—	1,055	733,1	28,9	27740	139127	136549	5,107	75,840	24,81
9	15,58	265,5	66,4	14,77	1,16	1,118	733,1	28,9	28378	148171	146673	5,169	74,928	24,51
10	15,28	270,0	71,8	14,48	1,216	1,208	731,55	30,4	30397	159218	157861	5,193	74,574	24,39
11	15,33	270,8	72,5	14,7	1,237	1,28	730,25	31,8	32348	168206	166277	5,140	75,343	24,68

An der Kondensationsanlage wurden folgende Versuchsergebnisse festgestellt:

Kühlfläche	qm	2×2320	Kondensattemperatur (nach Vorwärm. im Kond.)	°C	30,0
Dampfdruck v. d. Turbine	at abs.	15,47	Kühlertemperatur-Erhöhung	°C	5,7
Dampftemperatur	°C	252,8	Mittl. Temp.-Unterschied	°C	7,17
Leistung	kW	31234	Kondensatmenge	kg/st	161962
Unterdruck	mm Qs	726,7	Kühlwassermenge	kg/min	243980
Abs. Luftleere	mm Qs	35,3	Wärmedurchgang	k cal/qm/st °C	2390
Kühler, Eintr.-Temperatur	°C	21,5			
Austr.-Temperatur	°C	27,2			

117b. Die Baumann-Turbine der Metropolitan-Vickers Electrical Co. Ltd.

Diese aus der früheren „British Westinghouse Electr. & Manufact. Co.“ entstandene Gesellschaft stellte in ihren Werken in Manchester ursprünglich Überdruckturbinen ihres Stammhauses her; sie verließ dieses System zugunsten der Rateau-Turbine, im wesentlichen nach der im Abschn. 113 beschriebenen Bauart. Neuerdings tritt sie mit einer Turbine ihres leitenden Ingenieurs K. Baumann auf den Markt, über deren bemerkenswerte Konstruktionsgrundlagen man sich an Hand von englischen und sonstigen Patentschriften folgendes Bild machen kann: Abb. 694 stellt den Längenschnitt[1]) der neuartigen Turbine dar, die zunächst durch sieben gewöhnliche Druckstufen gebildet wird, an die sich die kennzeichnende geteilte vorletzte Stufe anschließt, bei der ein Teil des Dampfes unmittelbar in das Auspuffrohr entströmt, der andere jedoch durch Umlenkungskanäle auf die Laufschaufel des letzten Rades geleitet wird. In Abb. 695 wiederholt sich

[1]) Engl. Pat. Nr. 14053 v. J. 1915. Schweiz. Pat. Nr. 75268.

diese Teilung dreimal, so daß nicht weniger als vier Ausströmungsquerschnitte zur Verfügung stehen, was der Turbine die Bezeichnung „Multiple-Exhaust-Turbine“ eingetragen hat.

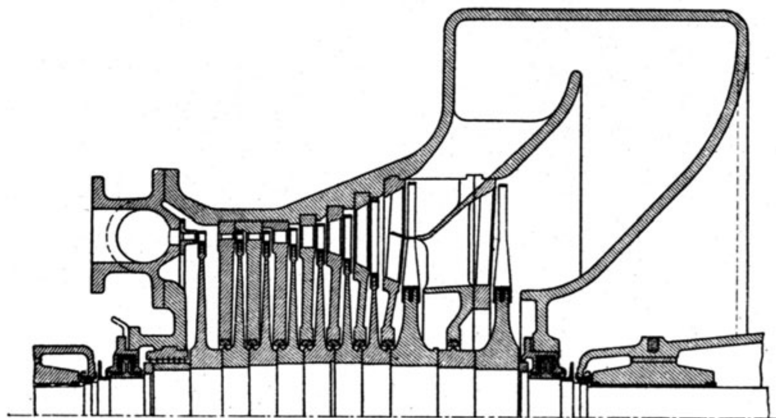


Abb. 694. Die Baumann-Turbine mit zweifacher Ausströmung

Der Sinn und Vorteil dieser Dampfführung wird in Abb. 696 klar. Darin sei A das vorletzte Rad, und die praktisch zulässige größte Schaufellänge l sei ungenügend, um in der letzten Stufe die gegebene Dampfmenge zu bewältigen. Dann wird der Dampfstrom

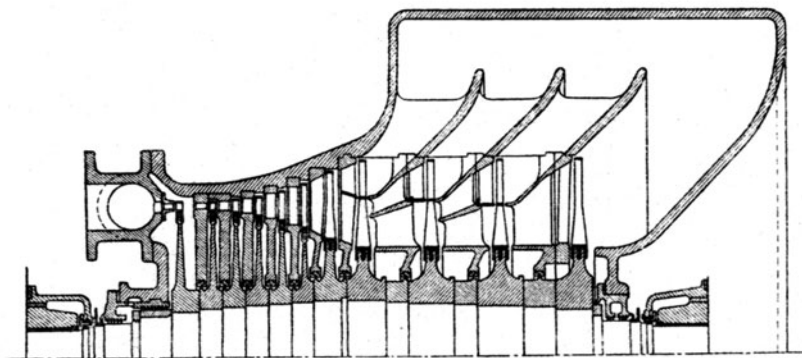


Abb. 695. Die Baumann-Turbine mit vierfacher Ausströmung.

geteilt; nahezu die Hälfte geht durch den Oberteil A_1 der Schaufel und dehnt sich gemäß Schaulinie a_1 auf Kondensatordruck aus. Die absolute Dampfgeschwindigkeit wächst im Leitrad gemäß Schaulinie e_1 auf c_1 und nimmt im Laufrad auf den Grenzwert c_2 ab. Der

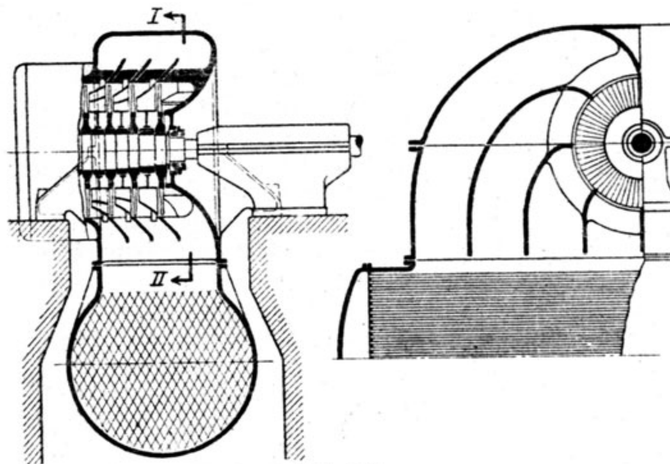


Abb. 695a.

Abb. 695a. Dampfführung im Auspuffrohr der Baumann-Turbine.

innere Strom dehnt sich, nach a_2 nur wenig, auf p_2 aus; die Geschwindigkeit wächst gemäß e_2 auf c_1' und sinkt im Rade A_2 nur wenig. Im nachfolgenden Leitrade wird der

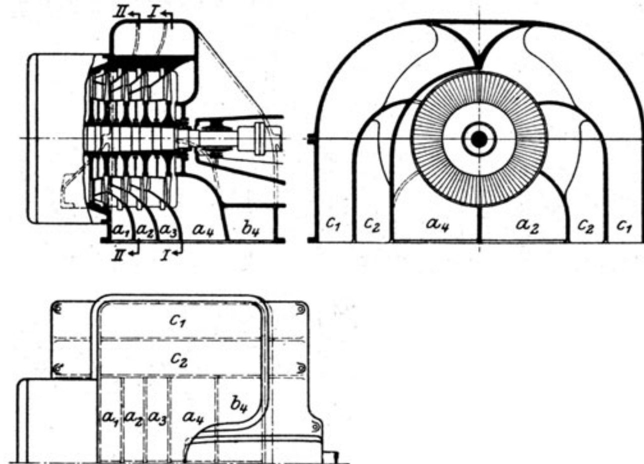


Abb. 695 b. Dampfführung im Auspuffgehäuse.

Dampf auf c_1'' beschleunigt, um das Rad B mit der normalen Geschwindigkeit c_2 zu verlassen. Es ist indessen auch die Gleichdruckwirkung in A_2 in Aussicht genommen und geschützt, wobei B die Rolle einer Geschwindigkeitsstufe spielt, und die Geschwindigkeit sich gemäß Schaulinie f ändert. Wohl mehr der Allgemeinheit halber ist in A_2 sogar Ausdehnung unter den Kondenserdruck mit Wiederverdichtung vor B zugelassen. Die Turbine leistet mithin dasselbe wie eine solche mit geteilten (hier ungleich großen) Niederdruckrädern, wobei statt des großen sonst üblichen Umleitungskanales nur die kleine Verlängerung des Zwischenleitrades zwischen A_2 und B in Betracht kommt. Allerdings muß der Dampf die enggestellten Laufschaufeln von A_2 durchströmen; trotzdem dürfte der Reibungsverlust geringer sein als beim erwähnten Umleitkanal mit seinen vielen Ecken und der Unsymmetrie der Strömung. Ebenso günstig schneidet die mehrfach unterteilte Turbine nach Abb. 695 ab, insbesondere mit Rücksicht auf die Dampfführung zum und im Abdampfrohr. Dieser wird, wie wir schon bei Besprechung der Baumannschen Gehäusebauarten Abb. 473, 474 ausgeführt haben, besondere Sorgfalt zugewendet. Zu Abb. 695 gehört die Anordnung Abb. 695a, gemäß der die Dampfströme durch evolventenförmige Scheidewände der Quere nach so ausgebreitet werden, daß die Einmündung der ganzen Länge nach in den quergestellten Kondenser stattfindet. Auf diese Weise wird die gesamte Kühlfläche zur Höchstleistung herangezogen. Eine andere Führung mit Ausmündung in eine minder flach rechteckige Mündung zeigt Abb. 695 b, wo der Radumfang in sechs Teile geteilt ist, und das untere Drittel durch Kanäle $a_1 - a_4$ unmittelbar nach unten strömt, das obere Drittel von den Außenabteilungen c_1 und b_4 aufgenommen wird, während dem Rest die Zwischenkanäle c_2 verbleiben.

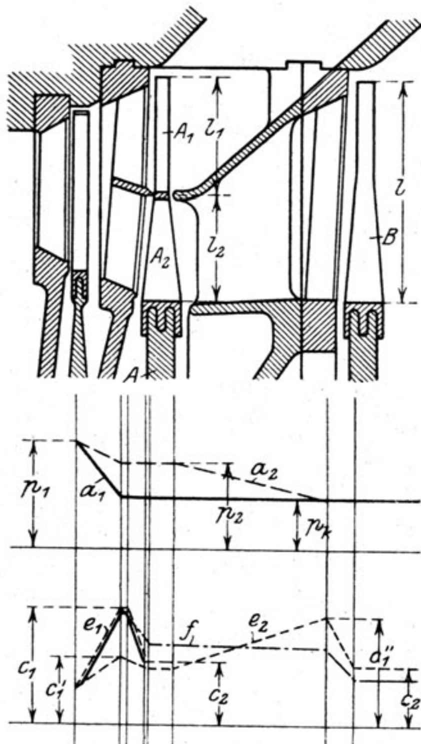


Abb. 696. Druck- und Geschwindigkeits-Abstufung der Baumann-Turbine.

Die Leistungsfähigkeit der Turbine mit vielfacher Auspufffläche ist selbstredend eine sehr hohe. Jedem der letzten Laufkränze kann eine annähernd gleich große Leistung zugesprochen werden, indem zwar gegen den Hochdruck hin der Querschnitt etwas abnimmt hingegen die Dampfgeschwindigkeit

wegen höheren Gefälles zunimmt. So könnte man denn bei etwa 2300 mm mittlerem Schaufeldurchmesser bei 1500 Uml./min auf eine Leistung von 35000—40000 kW rechnen, mit ungemein viel geringeren Anlagekosten als bei den zweigehäusigen und Verbund-Bauarten.

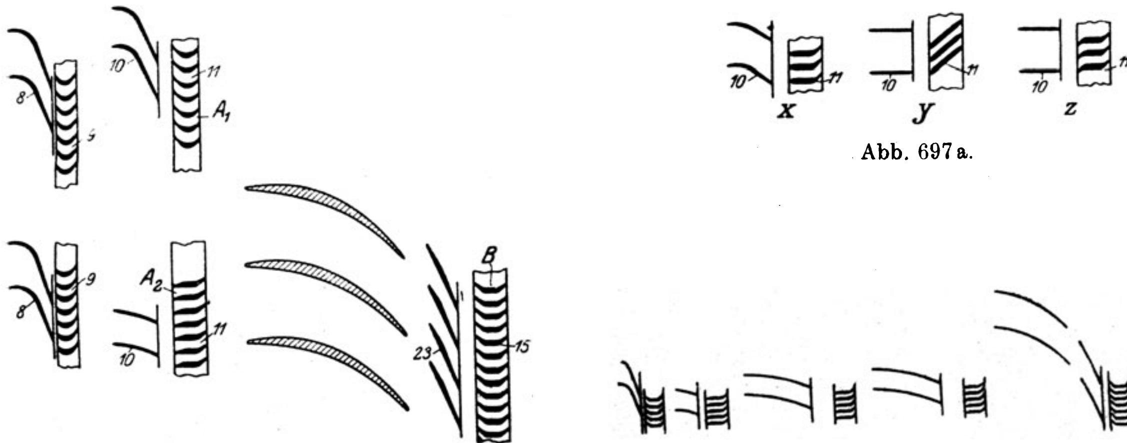


Abb. 697. Abb. 697b.
Beschaufelungsarten der Baumann-Turbine.

Wie die Aufteilung des Wärmegefälles die Schaufelform bedingt, wird in Abb. 697 dargestellt[1]). Darin bedeuten 8 und 9 die dem Rad A Abb. 696 vorausgehenden Leit- und Laufschaufeln; im Oberteil der Figur bedeuten 10 und 11 die zum Kranze A_1, im unteren Teil die zum Kranze A_2, endlich 23, 15 die zum Rade B gehörenden Leit- und Laufschaufelschnitte. Infolge der großen Winkel bei A_2 ist die Arbeitsabgabe nahezu Null. Die Laufschaufel 15 ist eine Gleichdruckschaufel, aber in ihrer Form durch die besonderen Anforderungen an die Festigkeit und Herstellung dieser sehr langen Schaufeln bedingt. Abb. 697a zeigt weitere Ausführungsformen der Zwischenschaufelung. Bei x wird Gleichdruckwirkung angestrebt, bei y ist der Leitradwinkel 90°, so daß die Schaufel wirkungslos durchströmt wird, und bei z wird dasselbe angestrebt, allein der Steg ist aus Herstellungsgründen in die Achsenrichtung gestellt. Abb. 697b stellt die Abwickelung der inneren Zwischenbeschaufelung für die vierfach geteilte Turbine Abb. 695 dar. Die Einzelheiten der von Baumann angewendeten normalen Laufschaufel, die die Forderungen richtiger Dampfführung, veränderlicher Winkel und großer Festigkeit bei den sehr langen Schaufeln seiner Niederdruckstufen erfüllt, wurden in Abschn. 70 besprochen. Hier erwähnen wir noch die Konstruktion der Zwischenschaufeln. Diese erhalten gemäß Abb. 698 große Breite am Wurzelende, die durch ein trapezförmiges Stück in eine Schaufel unveränderlicher Breite übergeht. Dabei sind die Schnitte in den Horizonten $a\,b\,c$ durch die gleichnamigen Bilder im Grundriß so dargestellt, daß darin zugleich die Schaufelteilung zum Ausdruck kommt. An der Schaufelwurzel ist, wie ersichtlich, ein großer Teil der Schaufelfläche eben, und die Schaufelstärke nimmt, um die Form gleicher Festigkeit zu wahren, wie im Seitenriß ersichtlich, von c bis b zu, von b bis a ab. Die Herstellung der in Abb. 697a bei z dargestellten Formen wird nicht näher beschrieben.

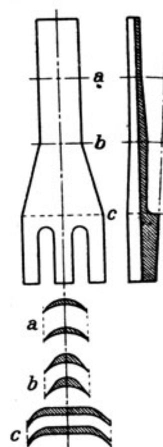


Abb. 698. Zwischenschaufeln.

In Bezug auf den Gehäusebau ist noch auf die Einführung hoch überhitzten Dampfes mit geringster Berührungsfläche gegen das Gehäuse nach Abb. 483 zu verweisen, welche Konstruktion auch bei den Turbinen nach Abb. 694 und 695 hinzuzudenken ist.

Eine bemerkenswerte Baumannsche Neuerung ist die Verbindung der Turbinenanlage mit einem **Speisewasservorwärmer,** der unmittelbar im Turbinengehäuse untergebracht wird, wie Abb. 699 darstellt. Darin bedeutet A den Vorwärmer, der durch Schlitze B den Dampf einer Zwischenstufe aufnimmt. Zweckmäßigerweise werden die Entwässerungen von der vorgehenden Stufe ebenfalls in den Vorwärmer geleitet. Die Abbildung zeigt ferner die bauliche Zusammensetzung des Gehäuses aus einem Mittelteil D_1, einem Oberteil D_2 und den beiden Seitenteilen E_1, E_2, die zugleich die Tragfüße bilden. Es wird in Aussicht genommen, dem Vorwärmer den Dampf einiger aufeinanderfolgender Stufen im Gegenstrome zuzuführen.

---

[1]) Engl. Pat. Nr. 14053 v. J. 1915; Schweiz. Pat. Nr. 75268.

Andere Verbesserungen, die von Baumann in der Patentliteratur niedergelegt worden sind, blieben oben unberücksichtigt. Überblicken wir das Gesagte, so kann zusammenfassend als einer der Kernpunkte die Teilung des Auspuffes, als der andere die Schaufelformung nach Abb. 698 hervorgehoben werden. Durch letztere kann bei gleicher Festigkeit die Dicke des Profiles an der Wurzel um so viel kleiner gemacht werden, als bei der üblichen Ausführung,

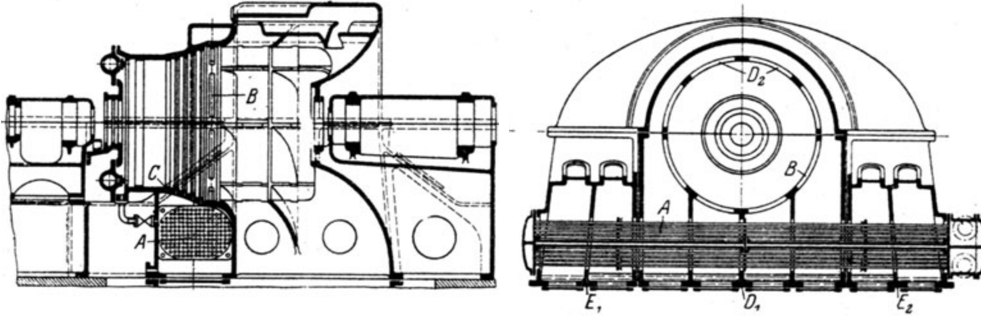


Abb. 699. In die Turbine eingebauter Speisewasservorwärmer.

daß ohne zu starke Verengung innen das Verhältnis von Schaufellänge zum mittleren Durchmesser auf 1 : 3,6 hinaufgesetzt werden konnte, was die Leistung der Niederdruckräder außerordentlich erhöht. Die eigentliche Laufrad-„Scheibe“ schrumpft hierdurch auf einen schmalen Ring zusammen, den man massig ausführen kann und so die Übelstände, die mit der Scheibenschwingung im Niederdruckteil zusammenhängen, beseitigt. — Nach alledem liegt in der Baumann-Turbine eine grundsätzlich und in allen Einzelheiten wohldurchdachte Schöpfung vor. Über die Betriebsergebnisse einer 18700 kW-Turbine für die Glasgow-Corporation (Dalmanrock) teilt mir der Konstrukteur folgendes mit:

Normale wirtschaftliche Leistung	kW	15 000	Anfangsspannung	at Üb.	17,6
Dauernde Höchstleistung . . .	„	18 750	Anfangstemperatur	°C	344
Vorübergehende Höchstleistung	„	21 000	Luftleere.	at abs.	0,031
Drehzahl	i. d. Min.	1 500	Wirkungsgrad d. Stromerzeugers	v. H.	96

Dampfverbrauchsversuche konnten wegen ständiger wechselnder Inanspruchnahme der Turbine noch nicht veranstaltet werden. Der durchschnittliche Kohlenverbrauch wurde bei zwischen 10000 bis 20000 kW wechselnder Belastung, mit einem Mittelwert von 14000 kW auf 24 Stunden bezogen, zu 0,702 kg/kW festgestellt bei einem oberen Heizwert der Kohle von 6120 kcal/kg, was einem Brennstoffnutzungsgrad von 20 v. H., oder nach Abzug von 4 v. H. für Hilfsmaschinen, 19 v. H. Gesamtwirkungsgrad entspricht.

Über die Einzelverluste in der Turbine macht Baumann folgende Mitteilungen[1]).

Verluste in einer Turbine von 28900 kW-Leistung an der Kupplung bei 1500 Umdr/min.

Nr.	Unveränderliche Verluste	v. H.	Nr.	Veränderliche Verluste	v. H.
1	Scheibenreibung	1,09	7	Eintrittsdrosselung	0,23
2	Undichtheit in den Zwischenböden .	0,60	8	Auslaßverlust am letzten Rad . . .	2,87
3	Hochdruckstopfbüchse	0,64	9	Verlust durch Druckabfall im Abdampfrohr	0,73
4	Sperrdampf und Wasserstopfbüchsen	0,12		Insgesamt bezogen auf adiab.[2]) Gefälle	4,13
5	Lagerreibung	0,38		Desgl. auf Leistung an der Kupplung	4,45
6	Regler und Ölpumpenantrieb	0,05		Gesamtverlust	7,34
	Insgesamt . .	2,89			

118. Die Turbine der A.-G. Brown, Boveri & Cie., Baden-Mannheim.

Der Firma A.-G. Brown, Boveri & Cie. verdanken wir den Hauptimpuls zur Entwicklung der Dampfturbine auf dem Festland, vor allem durch den von ihr in bemerkenswert kurzer Zeit erbrachten Nachweis, daß Dynamomaschinen großer Leistung mit den erforderlichen

[1]) Vortrag vor dem Inst. of Electr. Eng. 1921, erschien (während des Druckes) im Engineering, April 1921.
[2]) Es dürfte wohl das innere (indizierte) Gefälle gemeint sein.

Umlaufszahlen betriebssicher gebaut werden können. Die ursprüngliche Parsonssche Bauart mit reiner Überdruckwirkung ist heute aufgegeben; vielmehr wird bei kleinen und mittleren Leistungen ein das Hochdruckgefälle aufarbeitendes Curtisrad mit zwei Geschwindigkeits-

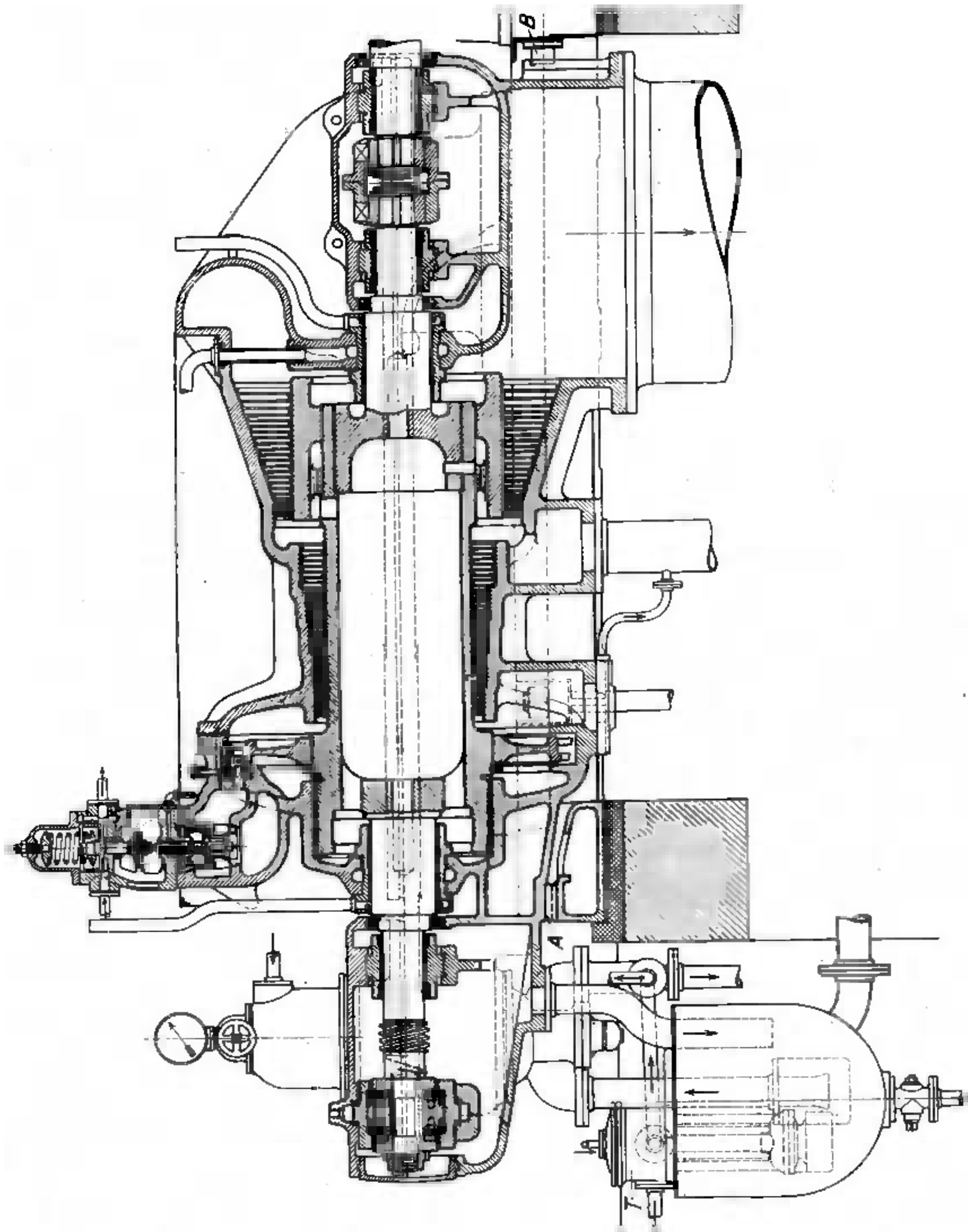


Abb. 700. Turbine von 1500—2000 kW-Leistung bei 3000 Umdr./min von Brown, Boveri & Cie.

stufen vorgeschaltet, wodurch, wie Abb. 700 und 701 an einer 1500 bis 2000 kW-Einheit für 3000 Uml./min veranschaulichen, der Überdruckteil erheblich gekürzt wird. Das Gehäuse ist mit den Lagerständern in einem Stück gegossen und wird durch Füße am Abdampfteil und am Hochdruckende so getragen, daß das Hochdrucklager schwebt. Der gleitbare vordere Lagerfuß wird durch den im Längsschnitt sichtbaren Rundkeil *A* in der Achsenrichtung geführt. Am Niederdruckende dient Bolzen *B* demselben Zweck. Die Entlastung des Über-

druckteiles erfolgt in der Hauptsache durch eine geringe Vergrößerung des Hochdrucklabyrinthkolbens. Der Rest wird durch das Spurlager aufgenommen. *T* ist die Dampfölpumpe.

Bei größeren Leistungen macht sich, wie die Abb. 702 einer 8000 bis 12500 kW-Turbine bei 3000 Uml./min zeigt[1]), das Bedürfnis geltend, größere Austrittsflächen für den Dampf zu beschaffen, was nur durch Vergrößerung des Durchmessers, also der Umfangsgeschwindigkeit,

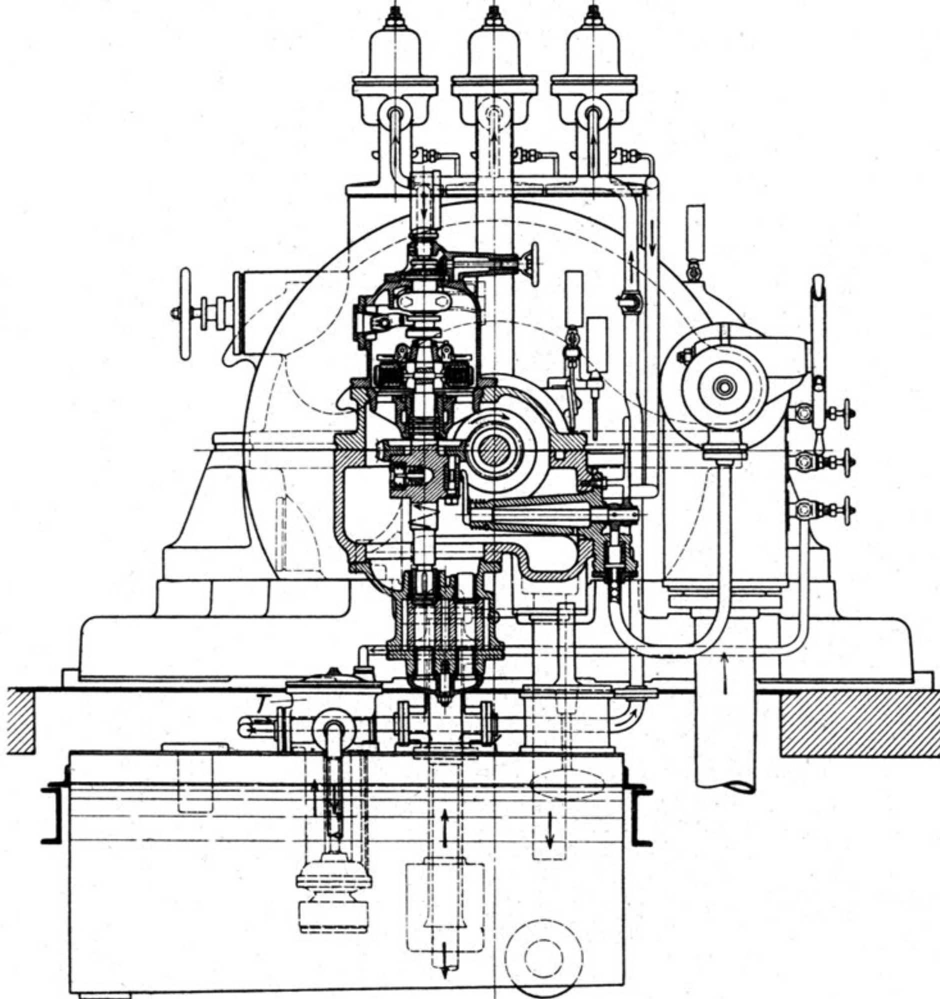


Abb. 701. Schnitt durch den Regler zu Abb. 700.

möglich ist. Dies zieht wegen der begrenzten Festigkeit der einfachen Trommel als Folge die Verwendung von Scheibenrädern nach sich. Wie die Abbildung lehrt, erhalten die Scheibenkränze Fortsätze, die wie bei einer Trommel eine nahezu geschlossene Dampfführung ergeben. Die frühere unstetige Abstufung der Schaufellänge ist zugunsten einer kegeligen stetigen Erweiterung verlassen. Da sich die Welle im Betrieb etwas stärker ausdehnt als das Gehäuse, ist die Gefahr einer Verminderung des Spieles, also des Streifens, ausgeschlossen. Der Nachteil jener noch viel angetroffenen schroffen Abstufung der Schaufellänge besteht, wie die Firma hervorhebt, in der Wirkung, die gemäß Abb. 703 in den Winkelräumen *b* entsteht und zu Anfressungen führen kann. Die kegelige Erweiterung ist hiervon nicht nur befreit, sondern kann gemäß Abb. 704 mit besonderm Vorteil dazu verwertet werden, um, wie sich die Firma ausdrückt, **den Spalt** durch geeignete Stromführung **zu überbrücken.** Zu diesem Behufe wird künstlich eine so starke Ablenkung herbeigeführt, daß der Strahl nach Verlassen der Schaufel wie ein Wasserfall herabfallend, die unmittelbar folgende Schaufel voll durchströmt und weniger Gelegenheit findet, durch das Spiel am Stirn-

[1]) Schweiz. Bauztg. 1915, Bd. LXV, Nr. 1. Bericht über die Schweiz. Landesausstellung Bern 1914.

ende nutzlos zu entweichen. In der Tat wird, wie man durch Versuche nachwies, der Undichtheitsverlust hierdurch herabgesetzt. Auch bei Verwendung eines Deckbandes wird dem Schaufelfuß bzw. dem Deckband die in Abb. 704 angegebene Abschrägung erteilt. Die

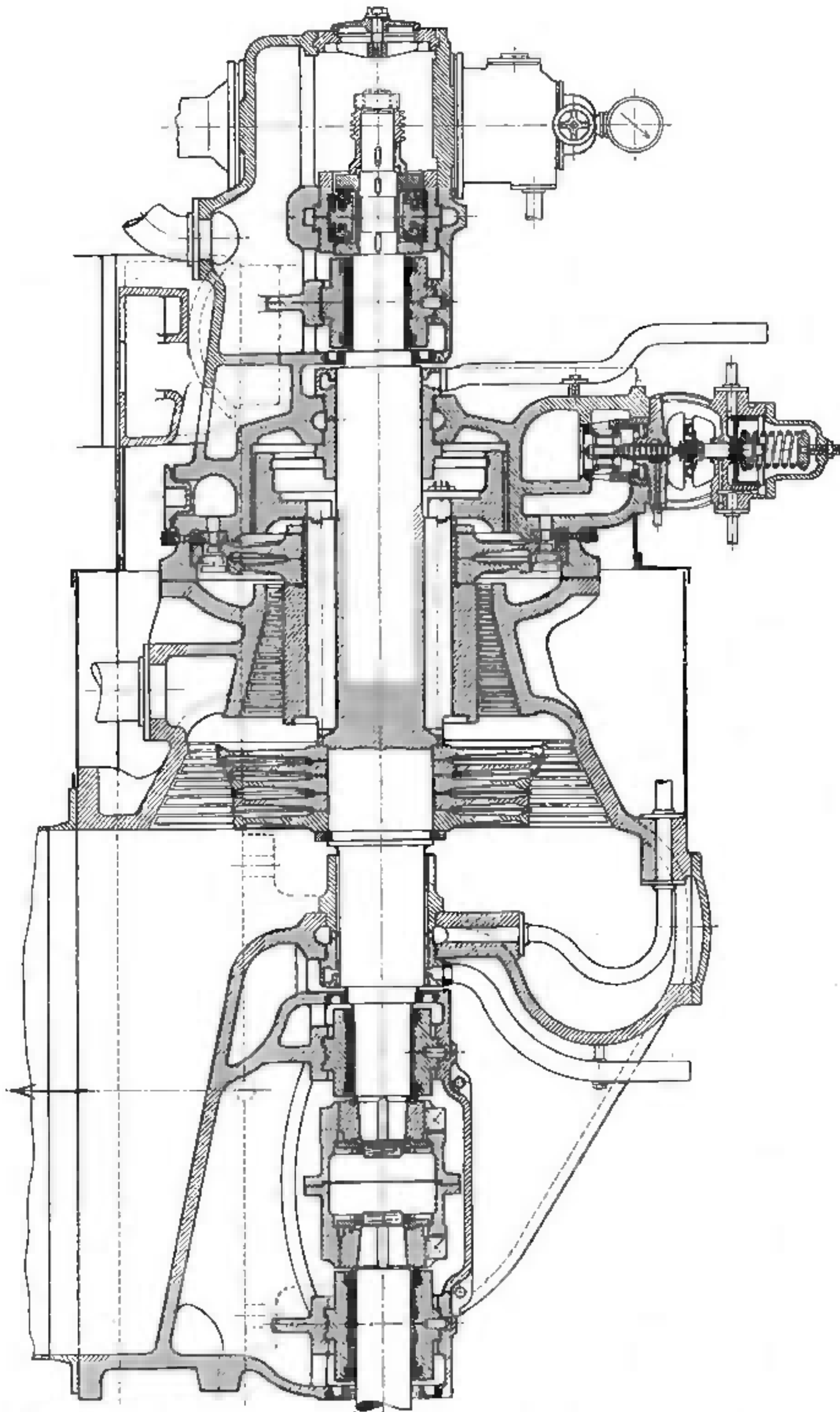


Abb. 702. B.B.C.-Turbine von 8000 bis 12500 kW-Leistung bei 3000 Uml./min.

hohe Umfangsgeschwindigkeit machte die Aufteilung des Curtisrades in zwei unabhängige Scheiben empfehlenswert. Zur Entlastung des Axialschubes dient ein vorgesetzter Labyrinthkolben und das in Abschn. 96 beschriebene Drucklager. Neuerdings benützen Brown. Boveri & Cie. die bekannte Saugwirkung des Dampfes im Spalt, um vermöge der Curtis-

scheibe selbst einen Teil des Axialschubes abzufangen. Im Gegensatz zum üblichen Ausgleich des allfälligen Druckunterschiedes durch Anbringen zahlreicher Löcher im Laufrade wird die Radscheibe voll ausgebildet und der Laufkranz gemäß Abb. 705 an den nicht

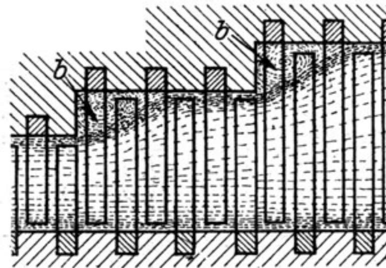


Abb. 703. Anfressungen durch Dampfwirbel.

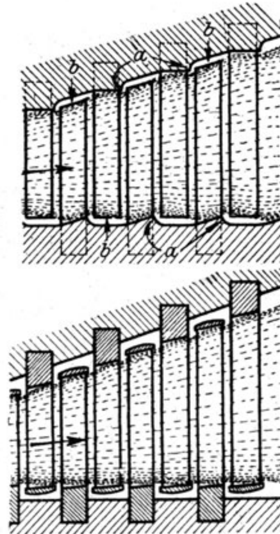
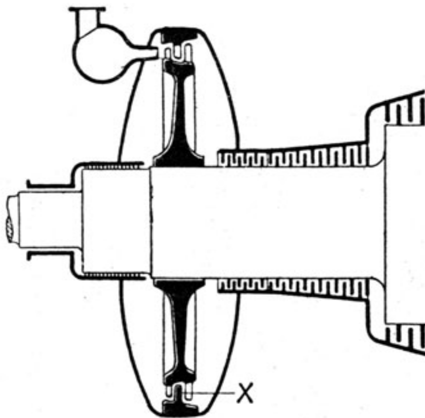


Abb. 704. „Überbrückung" des Spaltes.

beaufschlagten Stellen durch die Einlage *X*, sowie durch fein zugeschärfte Labyrinthstreifen *Y* (Abb. 705a) am Umfange der Schaufelbänder abgedichtet. Die Welle besteht, wie ersichtlich, aus einem einzigen Schmiedestücke ohne jede Schrumpfung, und die zur Überführung



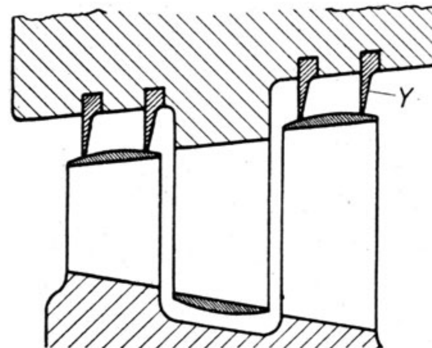


Abb. 705 und 705a. Entlastung des Überdruckteils durch die Saugwirkung auf die abgedichtete Scheibe des Curtisrades.

des Undichtheitsdampfes vom Labyrinth dienenden weiten Bohrungen sind gut geeignet, den massigen Mittelteil zu entlasten.

Für **große Einheiten** wird inskünftig ausschließlich die in Abb. 706 dargestellte Bauart ins Auge gefaßt, die sich auf eine 12000 bis 15000 kW-Einheit bei 3000 Umdr./min bezieht. Abb. 706a bis c stellen Vorder-, Seitenansicht und Grundriß dar. Die Turbine besteht im ganzen aus 7 Stufen, wovon die 3 ersten als Gleichdruckräder mit Spaltausdehnung nach den Patenten von Josse und Christlein, die 4 letzten als Überdruckstufen arbeiten sollen. Die Stirnansicht zeigt 2 Dampfzuleitungsrohre A_1 A_2 und 5 Teillastventile, von denen 2 unmittelbar über dem Hauptabsperrventil untergebracht sind und den Dampf durch die in der Seitenansicht sichtbare Leitung *B* dem entsprechenden Leitradabschnitt zuführen. Hier ist mithin ein einstufiges Gleichdruckrad zum erstenmal mit teilweiser Beaufschlagung versehen. Der allgemeine Aufbau ist ähnlich dem der vorhin beschriebenen Turbine.

Additional material from *Dampf- und Gasturbinen,*
ISBN 978-3-642-50544-7 (978-3-642-50544-7_OSFO6),
is available at http://extras.springer.com



In Abb 707 und 707a und b werden die Gesamtanordnungen durch Lichtbilder veranschaulicht. An 707a dienen die 4 langen senkrechten Bolzen als Führung des Oberteiles beim Abbauen. Durch den Rundkeil im Niederdruckfuß wird die axiale Stellung der Turbine festgelegt. Bei 707b wird der axiale Druck durch das Blockspurlager aufgenommen.

Abb. 708 stellt eine Schiffsbeleuchtungs Turbodynamo für 100 bis 250 kW Leistung bei 3000 Umdr./min; Abb. 708a und b eine Kesselspeisepumpe mit Turbinenantrieb dar. Das untere Lager der senkrecht aufgestellten Welle erhält Wasserschmierung; die

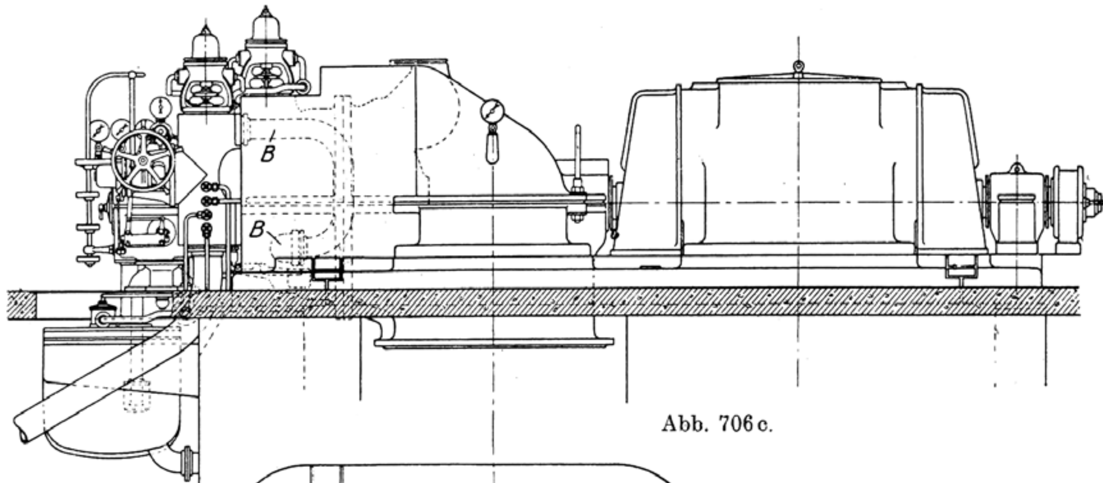


Abb. 706c.

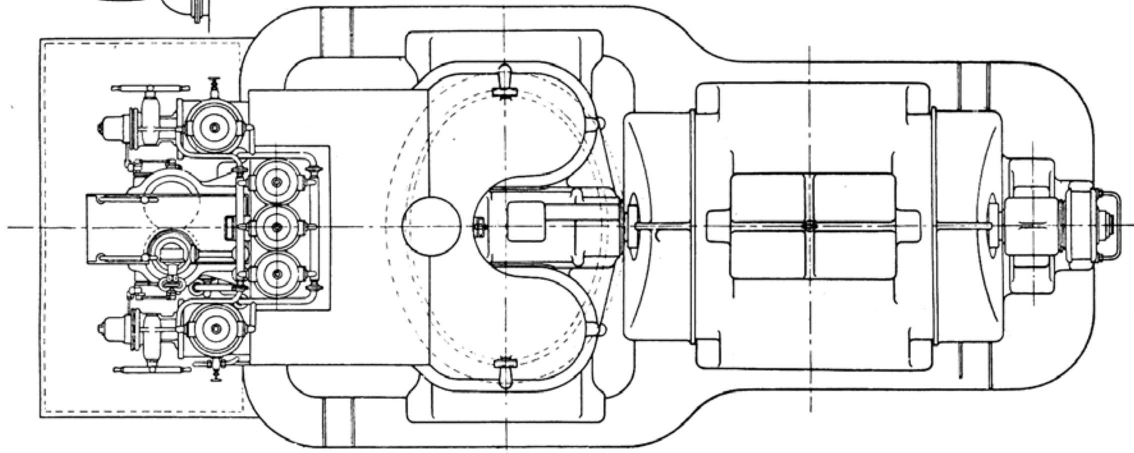


Abb. 706b.
Ansichten zu Abb. 706.

Spindel ist mit einem Nickelstahlfutter versehen, die Lagerschale mit Weißmetall ausgegossen. Die dazugehörende Regelung besteht aus der Membrane *A*, Abb. 708b, auf die von oben das Druckwasser einwirkt. Es ist ein Sicherheitsregulator gegen Durchgehen vorhanden, wie man in Abb. 708a im Schnitte des Spurlagers erkennt.

Die Regelung großer Turbinen erfolgt durch das von Brown, Boveri & Cie. zuerst angewendete und zu hoher Vollendung gebrachte Durchflußverfahren, über das in Abschn. 102 berichtet wurde. Der Beaufschlagungsbogen wird in Unterabteilungen eingeteilt, wovon jede ein Ventil mit Öldruckkolben und abgestimmter Feder erhält, so daß die Ventile der Reihe nach auf- und zugemacht werden.

Über die Anwendung der gleichen Regelung auf die Zweidruck- und Dampfentnahmeturbinen berichten wir in den betreffenden Abschnitten.

Konstruktion der Einzelteile.

Die Konstruktion der Schaufeln und Trommeln wurde in Abschn. 70 und 83 besprochen; die Wellen bestehen, wie oben erwähnt, bei großen Turbinen aus einem Stück ohne Schrumpfung.

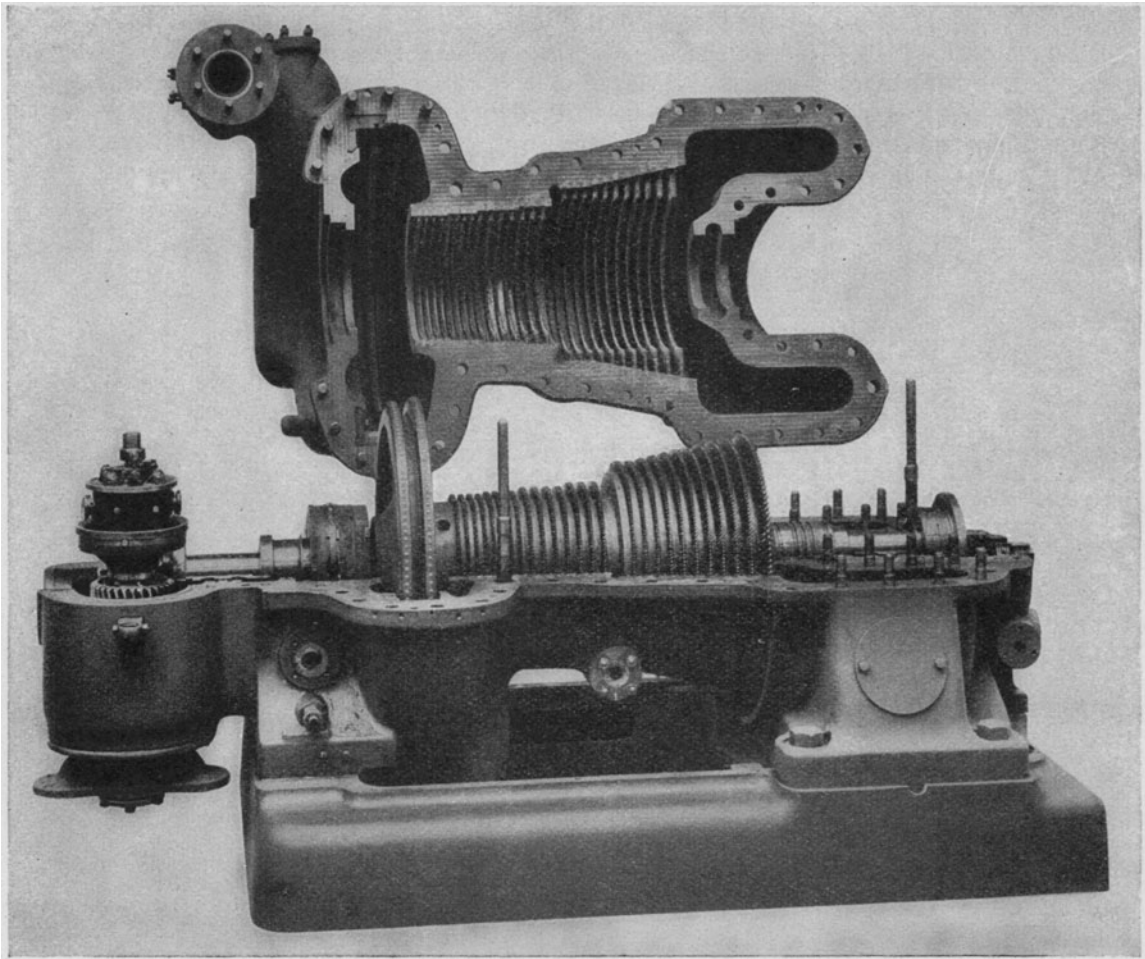


Abb. 707. Ansicht kleiner Einheiten.

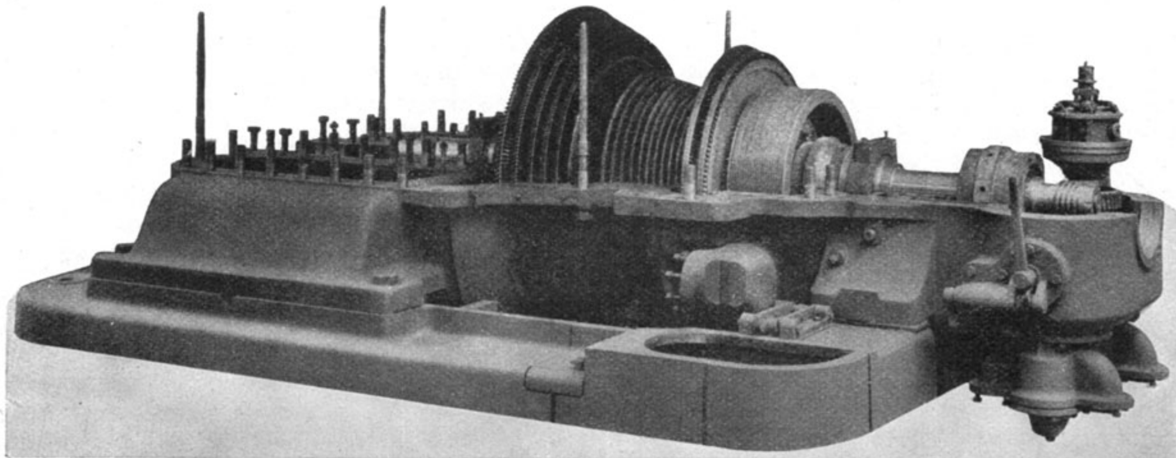


Abb. 707a. Ansicht mittelgroßer Einheiten.

Die Trag- und die mit Kugeldruckausgleich versehenen Spurlager Michellscher Art wurden in Abschn. 96 beschrieben.

Abb. 709, 709a veranschaulichen das Gehäuse einer Turbine nach Bauart der Abb. 702. Der in einem Stück gegossene Unterteil stellt bei rd. 4,5 m Länge eine ansehnliche Gießerei-

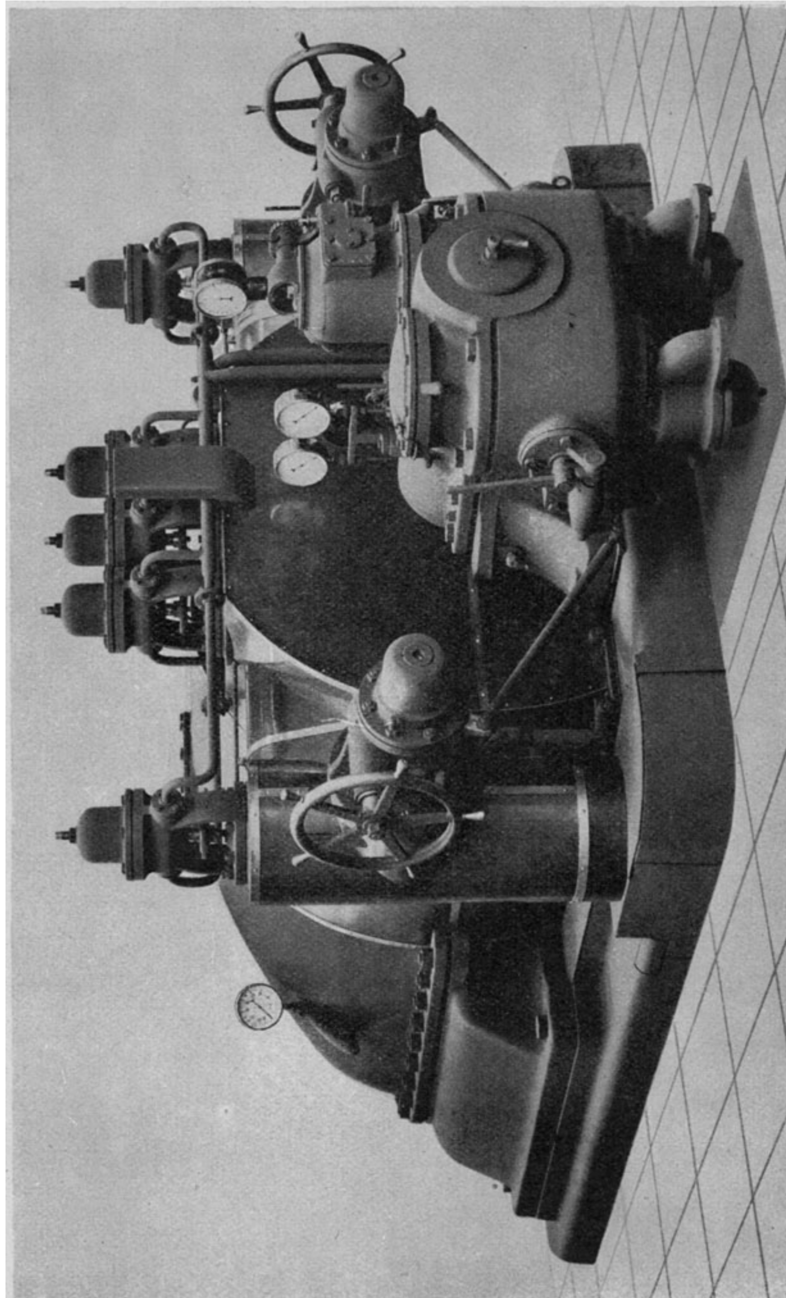


Abb. 707 b. Ansicht großer Einheiten.

leistung dar. Beachtenswert sind die symmetrisch angeordneten Rippen X (Abb. 709), die der Versteifung des Gehäuses dienen, durch die im Längsschnitt sichtbare Krümmung indessen auch zur besseren Führung des Abdampfstromes beitragen. Bei Y mündet das Auspuffrohr der Kondensationshilfsturbine ein[1]).

Die Kupplung, das Anlaßventil, die Hilfsölpumpe sind in den Abschn. 84a und 102 besprochen worden.

---

[1]) Die Wiedergabe der Werkzeichnung dieses Gehäuses möge dem Studierenden eine Vorstellung von der zu einer vollständigen Darstellung erforderlichen Zahl von Schnitten und Ansichten vermitteln.

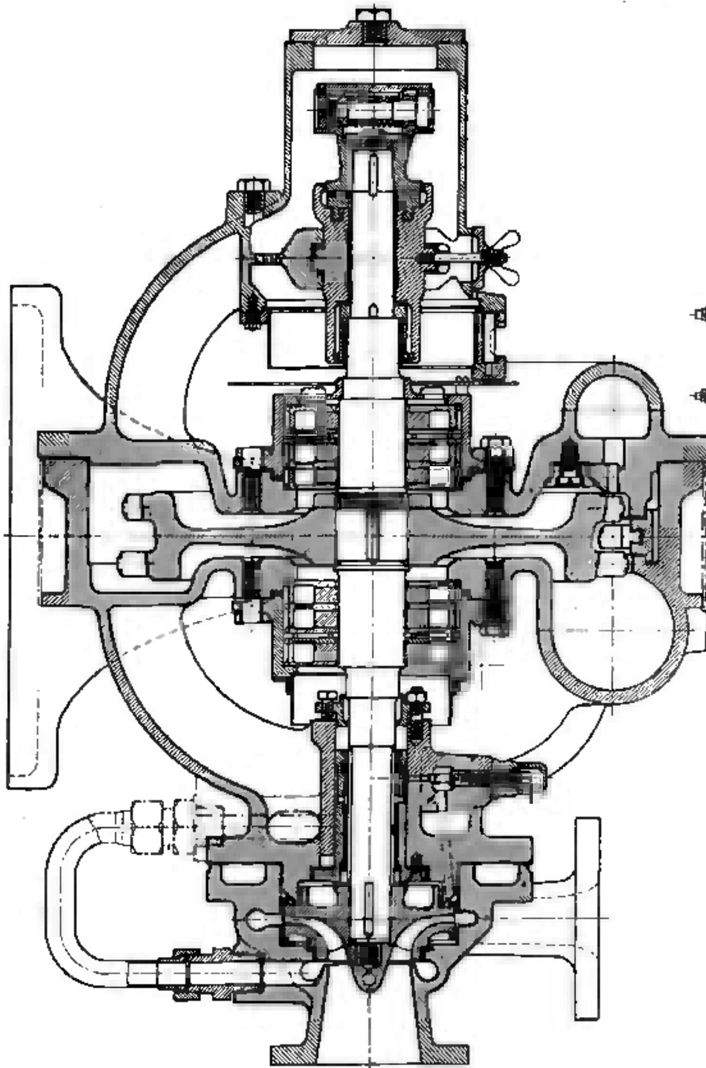


Abb. 708 a. Turbo-Speisepumpe.

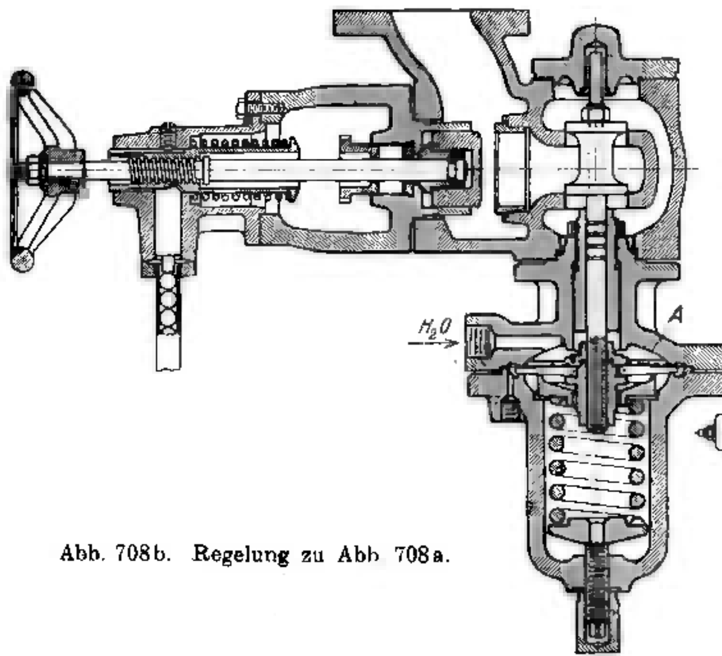
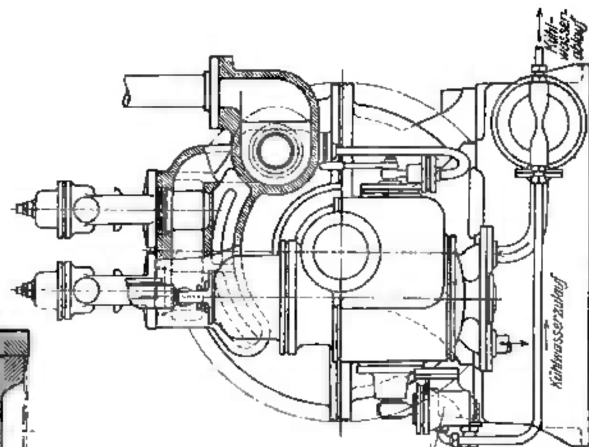


Abb. 708 b. Regelung zu Abb 708 a.



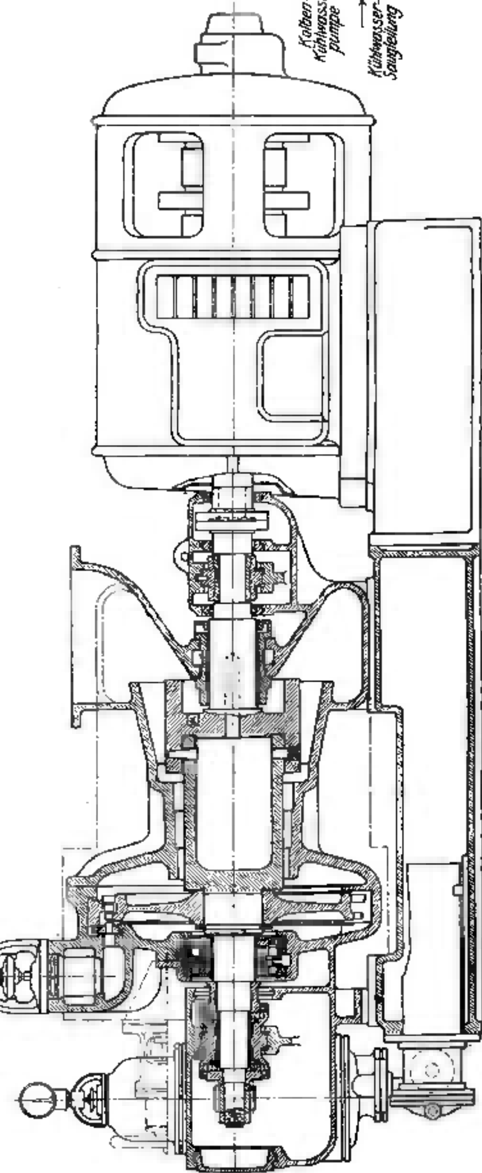


Abb. 708. Turbine von 100—250 kW-Leistung für Schiffsbeleuchtung.

Über den **Dampfverbrauch** der Brown, Boveri & Cie. Überdruckturbine mit Hochdruck-Geschwindigkeitsrad gehen mir von der Firma die in nachfolgender Zahlentafel zusammengestellten Angaben zu. Darin ist die Leistung in kW als effektive Leistung an der Kupplung zwischen Turbine und Dynamo ohne Abzug der Kondensationsarbeit verstanden. Auf diese Leistung bezieht sich auch der „effektive thermodynamische Wirkungsgrad". Daneben ist noch angeführt der thermodynamische Wirkungsgrad ohne Auslaßverlust, der zur Beurteilung des Verhaltens der Turbine bei einer von der normalen abweichenden Luftleere mit Vorteil benutzt wird.

Zahlentafel 1.

Ergebnisse von B. B. C.-Turbinen mit Hochdruck-Geschwindigkeitsrad.

Ort der Aufstellung		Versuchs-Turbine 1915	Schiehafen 1917	Napoli 1917	Sterkrade 1918	Heerlen 1919	Amsterdam 1919
Leist. in kW an d. Kupplung ohne Abzug der Kondensationsarbeit	kW	3000	5000	5000	6000	6560[1]	6230
Umlauf i. d. Min.		3000	3000	2520	3000	3000	3000
Dampfdruck vor der Turbine .	at abs.	12,0	11,69	13,0	12,0	11,0	14,0
Temperatur vor der Turbine .	°C	320	292	300	350	250	350
Druck im Abdampfrohr . . .	at abs.	0,05	0,056	0,07	0,085	0,08	0,04
Adiabatisches Gefälle	kcal	221	210	208,5	213	190	239
Dampfverbrauch bez. auf effekt. Leistung an der Kupplung .	kg/kW-st	5,1	5,54	5,63	5,18	6,05[1]	4,8
Thermodynam. Wirkungsgr. bez. auf d. Leistung an d. Kupplung	v. H.	76,3	74,0	73,4	77,8	74,8[1]	74,5
Auslaßverlust	kcal	2,5	4,0	4,0	2,5	4,3	9,0
Thermodynam. Wirkungsgrad ohne Auslaßverlust	v. H.	77,1	76,0	75,2	78,7	77,5	78,4

Die Ausmaße (Durchmesser, Schaufelwinkel, Stufenzahl usw.) der neueren Turbinen werden auf Grund ausführlicher Untersuchungen an einer Versuchsturbine vom Jahre 1915 festgesetzt. Über diese Versuche sind mir von der Firma wertvolle Mitteilungen gemacht worden, von denen Nachstehendes mit ihrer Genehmigung angeführt wird.

Die **Versuchsturbine** bestand aus einem zweikränzigen Curtisrad als Hochdruckstufe, aus 18 Überdruckstufen der Trommelbauart als Mittelteil und aus 6 Überdruckstufen mit Scheibenrädern im Niederdruck. Die normale Leistung war 3000 kW bei 3000 Uml./min. Das Arbeitsprogramm war:

a) Untersuchung des Mitteldruckteiles allein.
b) Untersuchung des Mitteldruckteiles mit dem Geschwindigkeitsrad.
c) Untersuchung der vollständigen Turbine.
d) Untersuchung der Turbine ohne letztes Rad.

Die Leistung am Stromerzeuger wurde mit Hilfe von zwei Wattmessern, und gleichzeitig an der Turbinenwelle mittels des Amslerschen Torsionsdynamometers bestimmt. Der Genauigkeitsgrad des letzteren betrug indes ± 1 v. H. der Leistung, was nicht befriedigte, so daß man es vorzog den Wirkungsgrad des Stromerzeugers auf möglichst genaue Weise zu ermitteln, was durch Bestimmung der Ventilations-Luftmenge und der mit ihr abgeführten Wärme wie auch der Lagerreibung befriedigend gelang und folgende Zahlen ergab.

Leistung an den Klemmen des Stromerzeugers kW	1500	2000	2500	3000	3500
Wirkungsgrad des Stromerzeugers . . . . . v. H.	92,9	94,1	94,9	95,15	95,35

Der **mechanische Wirkungsgrad** der Turbine wurde durch Auslaufversuche und durch Antrieb von außen im Leerlauf bestimmt. Eine wenn auch geringe Störung durch anfänglich eindringenden Undichtheitsdampf wurde beseitigt, indem man den Raum nach der Hauptabschließung unmittelbar mit dem Kondensator in Verbindung brachte. Alsdann ergaben sich folgende Zahlenwerte.

Reibungsarbeit in den Hauptlagern	14 kW	oder 68 v. H.
Steuerung	4 kW	„ 20 v. H.
Kammlager bei 1440 kg Druck	2,5 kW	„ 12 v. H.
Insgesamt	20,5 kW	oder 100 v. H.

Diesem Verluste entspricht der überaus hohe mechanische Wirkungsgrad von 99,4 v. H., der freilich im Betriebe noch durch die Reibungsarbeit des Curtisrades herabgesetzt wird. Als dessen Arbeitsbedarf bei normaler Leistung darf man etwa 60 kW ansetzen.

[1]) Mit Abzug des Kondensationsbedarfes.

Abb. 709. Turbinengehäuse.

Abb. 709a. Turbinengehäuse.

Die durch Versuche ermittelten thermodynamischen Wirkungsgrade sind **auf eine Turbine mit verschwindend kleinem Schaufelspiel umgerechnet worden,** indem man auf 1 v. H. Schaufelspiel 3,1 v. H. Wirkungsgradeinbuße ansetzte, was für den Mitteldruckteil eine Aufbesserung von 5 v. H. ergibt. Die so ermittelten Wirkungsgrade sind in Abb. 710 dargestellt. Die eingeschriebenen Zahlen bedeuten einerseits die Belastung ($1 = $ Voll; $\frac{1}{2} = $ halb usw.), ferner die Luftleere in v. H.-Teilen von 1,03 at (d. h. 760 mm QS.). Die Abszisse ist K_b/H_0, wobei $K_b = \Sigma u^2/1{,}77$ die von der Firma, aus ursprünglich in englischem Maße

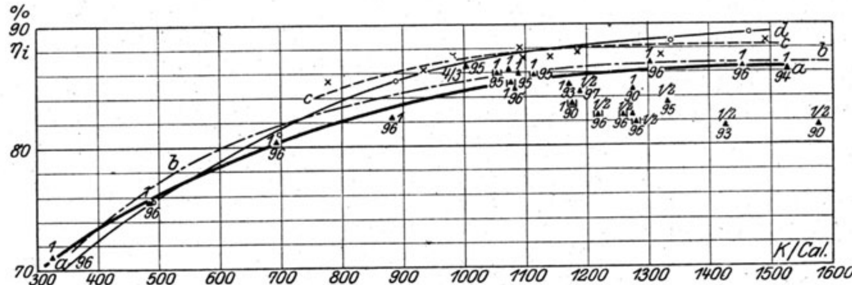


Abb. 710. Wirkungsgrade der Versuchsturbine.

gemachten Angaben umgerechnete Parsonssche Konstante bedeutet, die nicht mit der von uns benutzten Kennzahl $K = \Sigma u^2$ verwechselt werden darf. Es bedeutet Schaulinie *a* den Wirkungsgrad **des ganzen Überdruckteiles,** und zwar sind die Dreieckpunkte mit gewöhnlichen erweiterten Düsen, die Dreieckpunkte

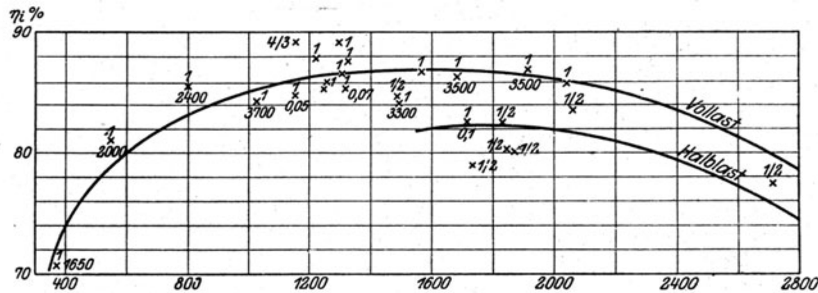


Abb. 710a. Wirkungsgrade der Versuchsturbine bei Voll- und Halblast.

von zwei Parallelstrichen eingerahmt mit parallelwandigen Düsen aufgenommen worden. Schaulinie *b* bezieht sich auf den **Niederdruckteil allein.** Der Dampf war am Anfange des Niederdruckteiles nahezu gesättigt. Es wurde angenommen, daß die Austrittsenergie aus dem Mitteldruckteil verloren geht und ein Druckabfall von 0,006 at zwischen Mittel- und Niederdruck vorhanden ist. Schaulinie *c* bezieht sich auf den **Mitteldruckteil allein** für 3,5 at abs. und 240 °C Anfangszustand, bei Normallast. Die Drehzahl wurde unveränderlich erhalten.

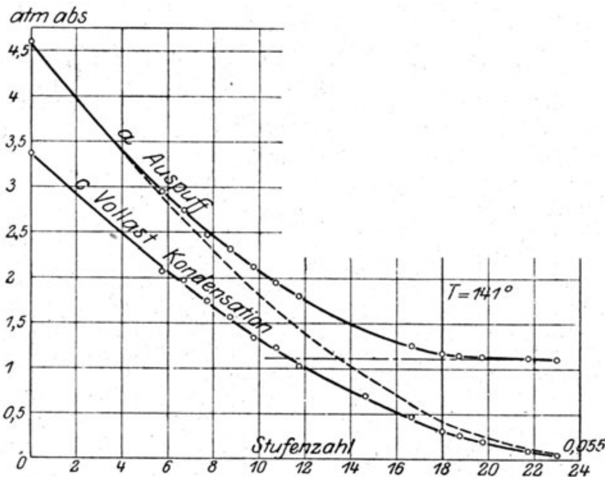


Abb. 710b.
Druckverlauf bei Auspuff und bei Kondensation.

Schaulinie *d* bezieht sich ebenfalls auf den Mitteldruckteil allein, jedoch blieb hier das Wärmegefälle nahezu gleich und die Drehzahl wurde verändert. In Abb. 710a sind die Wirkungsgrade des Niederdruckteiles nochmals für die Verhältnisse bei Voll- und Halblast (der ganzen Turbine) und einen weit größeren Wertbereich von K_b/H_0 dargestellt. Trägt man diese Wirkungsgrade mit sinngemäßer Umrechnung des K_b in unsere Schaulinie Abb. 263 ein, so zeigt sich, daß sie angenähert der aus dem Engineering übernommenen strichpunktierten Kurve ähnlich sind. Auch hier also ist die Verlustzahl ζ bei kleinen Werten von K_b/H_0, d. h. großer Belastung, größer als bei kleiner. Wir verweisen in betreff dieser Verhältnisse auf die Erörterung zu Abb. 263. Bemerkenswert ist ferner die **durchgängige Abnahme des Wirkungsgrades der Niederdruckseite gegenüber dem Mitteldruckteil.** Als Grund hierfür kommt entweder die Verschiedenheit

der Dampfbeschaffenheit in Betracht, indem der Dampf im Mitteldruckteil stets überhitzt, im Niederdruck regelmäßig naß war, also größere Reibung verursachte, oder man muß eine Unterkühlung voraussetzen.

Abb. 710b stellt schließlich eine wertvolle Beobachtung über den **Druckverlauf** bei Kondensation und Auspuffbetrieb dar. Auf der Grundlinie sind die Stufen in gleichen Abständen dargestellt. 1 bis 18 ist der Mitteldruck, 19 bis 23 der Niederdruckteil, wobei das letzte Rad entfernt worden ist. Mit Kondensationsbetrieb war die durchströmende Dampfmenge $G = 4{,}62$ kg/sek bei 94,5 v. H. Luftleere. Mit freiem Auspuff war $G = 5{,}775$ kg/sek. Die Temperatur zwischen Mittel- und Niederdruck war bei Auspuffbetrieb 141 °C, am Ende des Niederdruckteiles 155 °C, es fand also eine Erwärmung von 14 °C im Niederdruckteile statt.

Über die Ergebnisse der neuesten Bauart teilt mir die Firma folgendes mit. Die im Prüffeld untersuchte Turbine für 12000 bis 16000 kW-Leistung bei 3000 Uml./min besteht im Hochdruckteil aus zwei einfachen Gleichdruckstufen, im Niederdruck aus vier Überdruckstufen. Die Kesselanlage erlaubte nur eine Belastung mit rd. 6000 kW; auch war die Turbine wegen zahlreicher Meßanschlüsse nicht isoliert und arbeitete mit unzureichender Luftleere. Durch zwei gleichartige Versuchsreihen sollte festgestellt werden, ob auch bei einfachen Druckstufen das reihenweise Öffnen von Düsengruppen oder die reine Drosselung vorteilhafter sei. Die in Zahlentafel 2 zusammengefaßten Ergebnisse zeigen, daß auf den Zustand vor dem Hauptventil („Frischdampf") bezogen, die Gruppenregelung der Drosselung erheblich überlegen war.

Zahlentafel 2.

Viertel- und Halblastversuche an der 12000/16000 kW B. B. C.-Turbine mit 3 einfachen Gleichdruck- und 4 Überdruckstufen und 3000 Uml./min.

Regelungsart		Drosselung		Abschluß von Düsengruppen	
Versuch-Nr.:		1	2	3	4
Druck vor Hauptventil	at abs.	12,0	12,0	12,25	11,0
Temperatur vor Hauptventil	°C	303	296	328	320
Druck vor Düsen	at abs.	3,39	5,21	11,95	10,60
Temperatur vor Düsen	°C	287	285	320	316
Gegendruck am Abdampfflansch	at abs.	0,054	0,067	0,0475	0,061
Leistung an der Kupplung	kW	3330	5160	3355	5560
Dampfverbrauch	kg/kWst.	6,90	6,45	6,07	5,85
Adiab. Gefälle bezogen auf Frischdampf	kcal	213,7	206,4	225,1	211,2
Adiab. Gefälle bezogen auf Düsen	kcal	170,4	178,0	222,4	209,5
Thermodyn. Wirkungsgrad an der Kupplung, bezogen auf Zustand v. den Düsen	v. H.	73,1	75,0	63,8	70,2
Thermodyn. Wirkungsgrad an der Kupplung, bezogen auf Frischdampf	v. H.	58,3	64,5	62,9	69,6

119. Die Turbine von Melms & Pfenninger.

Die Firma Melms & Pfenninger, Kommand.-Ges. in München-Hirschau war eine der ersten Turbinenbaufirmen, die den ungünstig arbeitenden Hochdruckteil der gewöhnlichen Parsonsturbine durch ein Geschwindigkeitsrad ersetzt hatte. Ein kennzeichnendes Merkmal der Turbine bildet der Absatz zwischen dem Entlastungskolben und der ersten Niederdruckstufe, wie der Längenschnitt einer Turbine von 1500 PS Leistung bei 3000 Umdr./min Abb. 711 bis 711b veranschaulicht. Diese Einheit ist zwar eine sogenannte Dampfentnahmeturbine, deren Einrichtung wir in Abschn. 144 besprechen werden, die jedoch in den sonstigen Einzelheiten mit der normalen Turbine übereinstimmt. Lichtbild 712 zeigt die äußere Anordnung der Steuerung für diese Turbine. A in Abb. 711 bedeutet die Dampfzuleitung, die mittels schmiedeisernen Krümmers zum oben gelegenen Haupt- und Überlastventil des Curtisrades führt. Bei größeren Leistungen bevorzugen Melms & Pfenninger die Doppelendturbine Abb. 713, 713a. Das Geschwindigkeitsrad ist hier in die Mitte verlegt, der Dampf strömt zu beiden Seiten ab. Die Steuerung mit wagerechter Regulatorachse ist im Hochdruckständer untergebracht. Die Turbine leistet 7500 PS bei 3000 Umdr./min.

Konstruktion der Einzelteile.

Die Leitschaufeln werden aus gezogenen Stahlstangen auf Maß geschnitten und zwischen 2 stählerne gekrümmte Winkeleisen eingenietet. Das Geschwindigkeitsrad erhält eine Beschaufelung nach Abb. 714

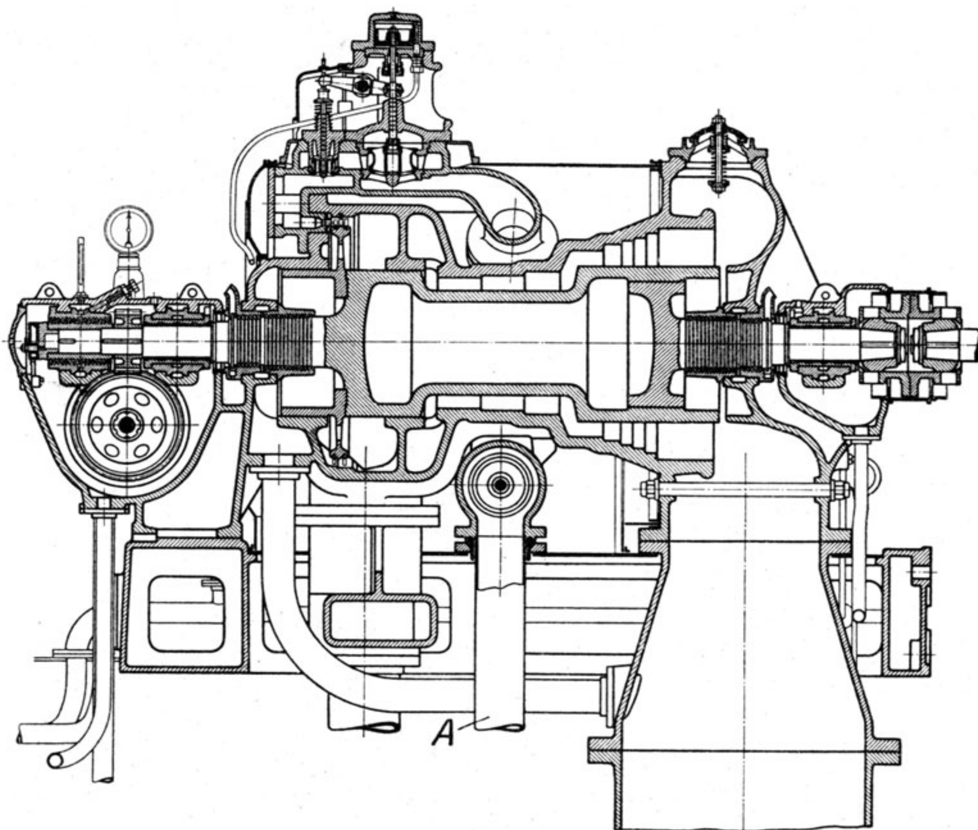


Abb. 711. Dampfentnahmeturbine von Melms & Pfenninger von 1500 PS-Leistung bei 3000 Umdr./min.

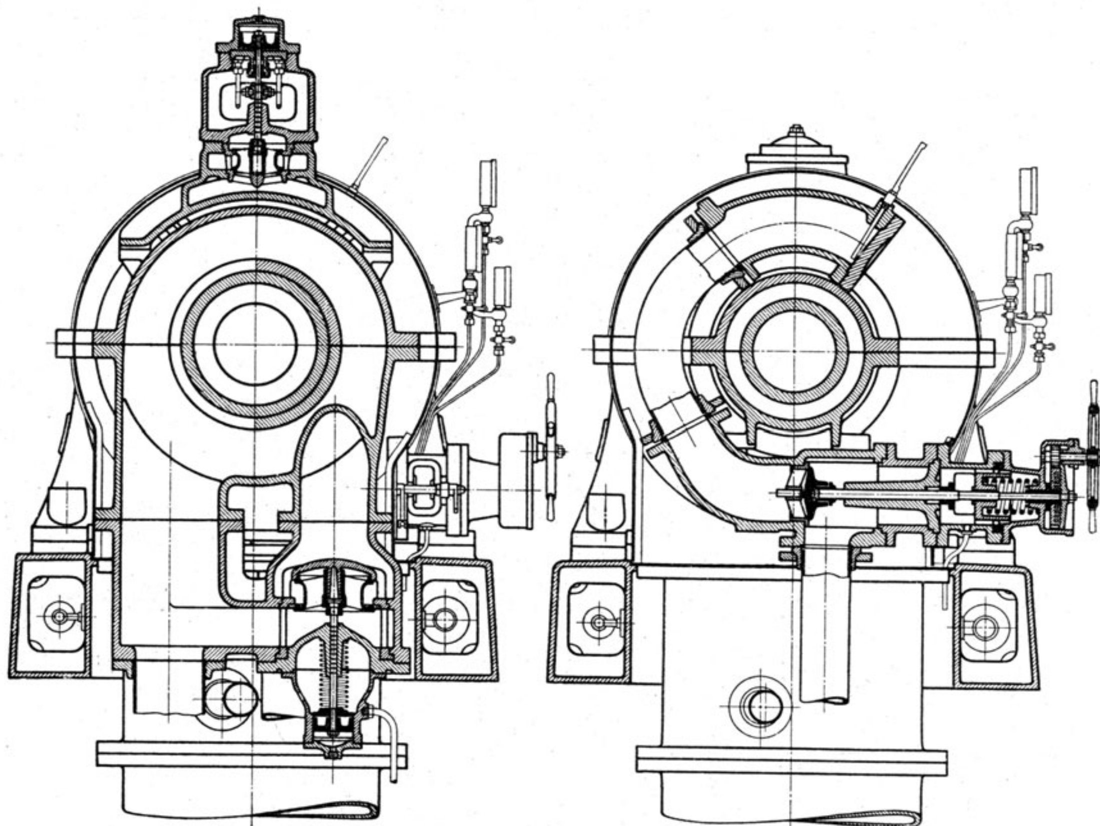


Abb. 711a. Schnitte zu Abb. 711. Abb. 711b.

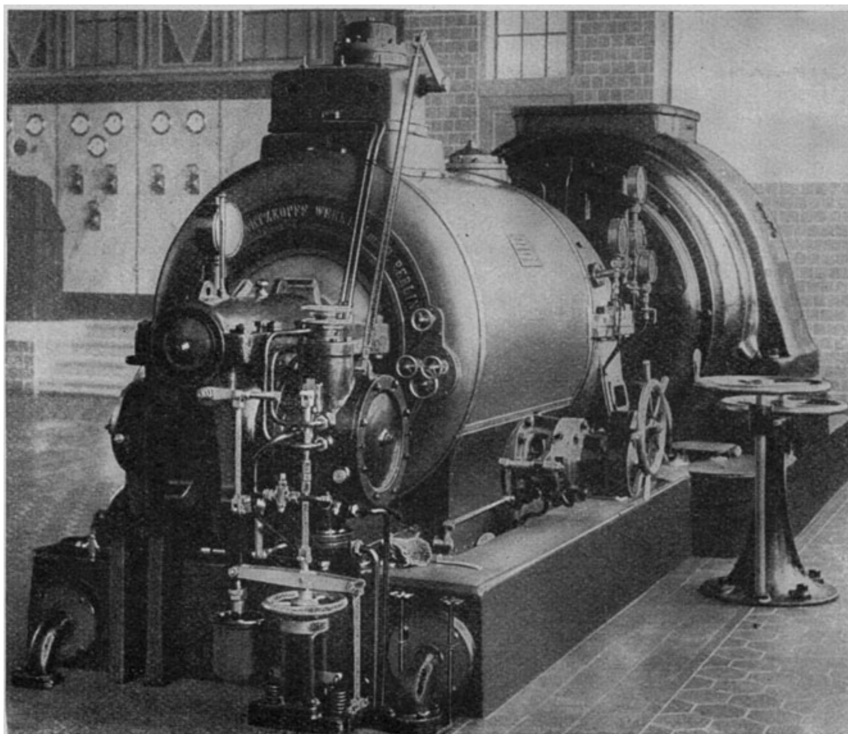


Abb. 712. Steuerungsansicht.

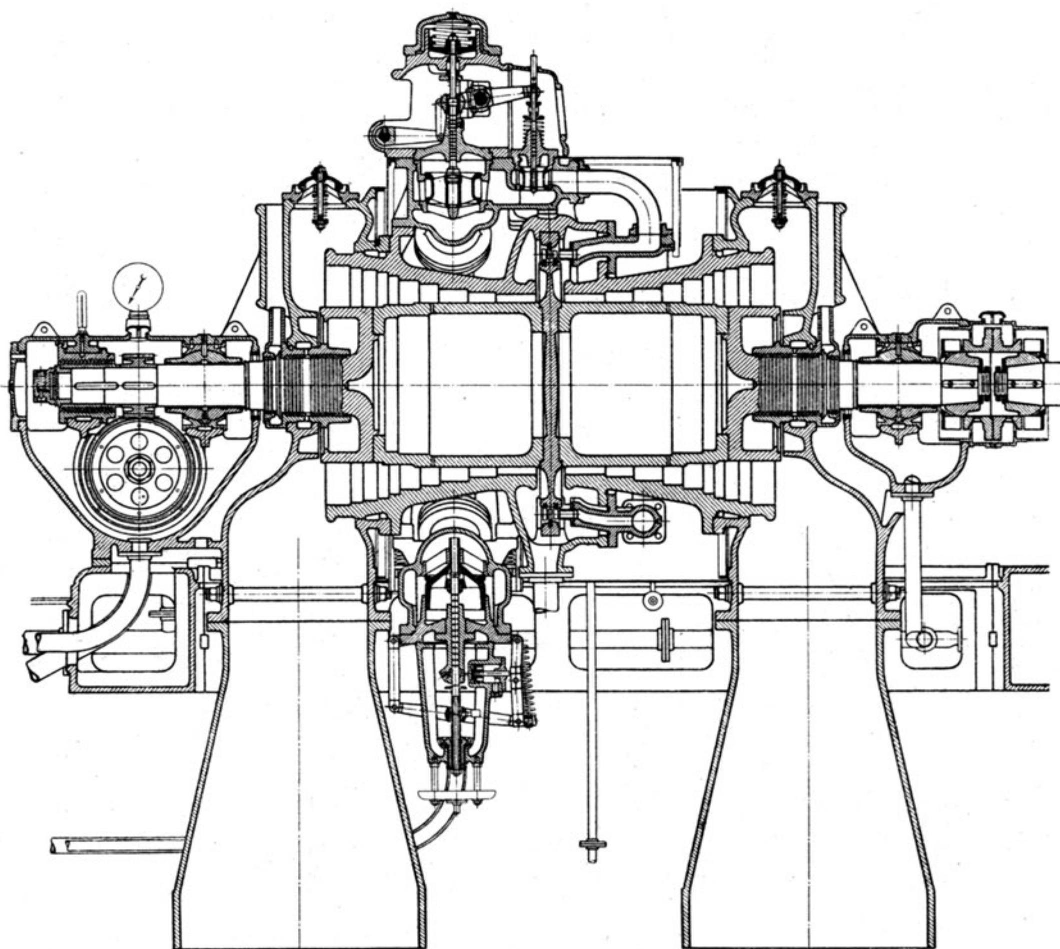


Abb. 713. „Doppelend"-Turbine von Melms & Pfenninger für 7500 PS-Leistung bei 3000 Umdr./min.

mit Stemmringen ähnlicher Art wie die in Abb. 715. Für die Niederdruckturbine werden die Schaufeln als fertige Bogenstücke eingesetzt. Zu diesem Behufe vernietet man sie zunächst mit dem Deckband Abb. 715, dessen dünne Umfangsrippen bei allfälligem Streifen schadlos abgenutzt werden. Daraufhin wird der zu einer geraden Flanke vorgepreßte Fuß in den Fußring *a* eingeschoben, mit diesem in die Schwalbenschwanznute eingesetzt, und samt der Beilage b, durch den zum Schluß eingetriebenen Keilring *c*, der mittels Umnietung der oberen Kante von *b* gesichert wird, festgehalten. **Die Regelung** beruht auf der Verbindung einer anfänglichen Drosselung mit schrittweisem Eröffnen von Zusatzventilen. In Abb. 716 und 716a bedeutet *A* den einfach wirkenden Kraftkolben, *B* das Hauptdrosselventil, $C_1 - C_4$ die Zusatzventile, die der Hebel *D* je nach Überwindung des bei *X* angegebenen abgestuften Spieles, antreibt; Hebel *E* dient der Rückführung. In Abb. 717 sind die Entropiekurven einer der ersten Melms & Pfenninger-Turbinen nach Schröter[1]) dargestellt. Die Turbine arbeitete mit reiner Drosselung, der die oberen schrägen Linien entsprechen, und zwar beziehen sich Linien I—IV auf die Belastung von 100, 81, 56, 29 v. H. der Vollast, 5, 6, auf Leerlauf mit und ohne Erregung. 7 Leerlauf der Turbine allein.

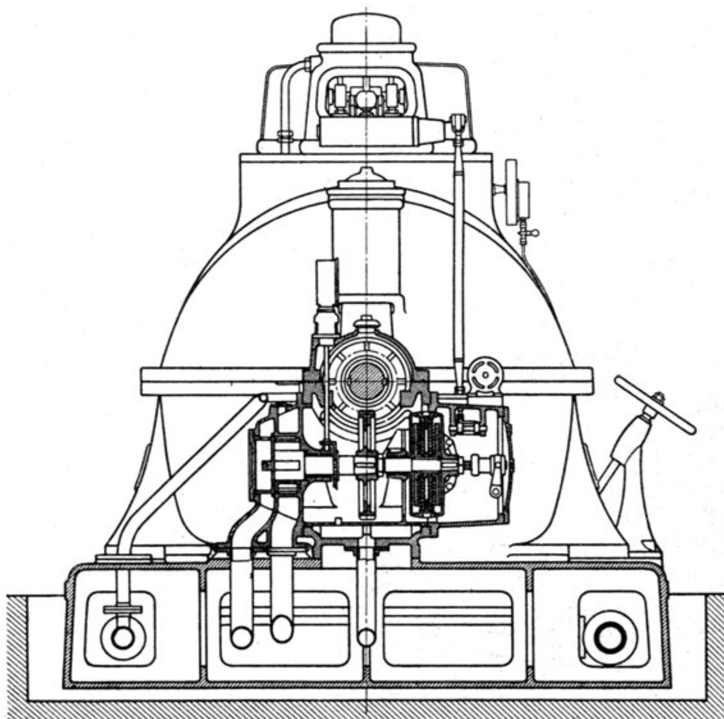


Abb. 713a. Ansicht und Schnitt zu 713.



Abb. 714. Schaufelung des Curtisrades.

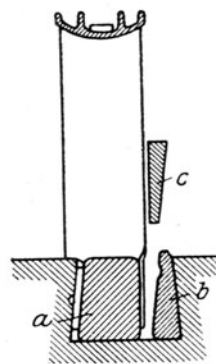


Abb. 715. Niederdruckschaufelbefestigung.

Über den Dampfverbrauch ihrer Turbinen teilt mir die Firma nachfolgende Versuchsergebnisse mit, die vom Dampfkessel-Überwachungsverein, bzw. der Marine-Werftleitung in Kiel vorgenommen wurden.

1600 kW-Turbine, Dürener Metallwerke.

Belastung	Vollast	3/4 Last	1/2 Last
Dauer in Minuten und Sekunden	92 12	30 40	30 17
Dampfdruck vor dem Eintrittsventil . . . at.	12,1	12,4	12,4
Dampftemperatur . . . °C.	303	296	285
Unterdruck . . . mm Hg	706	709	714
Barometerstand . . . mmHg	758,5	758,5	758,5
Unterdruck . . . v. H.	93,1	93,5	94,1
Umdrehungen i. d. Minute	3011	3012	3018
Kondensat. i. d. Stunde . . . kg	10 249	8315	5943
Hiervon sind für die Luftpumpe in Abzug zu bringen . . kg	515	515	515
Demnach berichtigtes Kondensat i. d. Stunde . . . kg	9743	7800	5428
Leistung der Turbine . . . kW	1619,5	1211,9	821
Dampfverbrauch mit Ausschluß des Kond.-Antriebes kg/kW/st, kg	6,01	6,43	6,61
Dampfverbrauch kg/kW/st. bezogen auf Dampf von 300° C. . kg	6,04	6,39	6,44

[1]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1906.

Abb. 716, 716a.
Regelung der Melms & Pfenninger-Turbine.

Abb. 717. Zustandskurven im T-S-Schaubild.

1600 kW-Turbine, Dürener Metallwerke.

Kondensation		Vollast	$^3/_4$ Last	$^1/_2$ Last
Kühlwassereintrittstemperatur	°C	25,5	26,5	25,4
Kühlwasseraustrittstemperatur	°C	33	32,6	30,1
Temperaturerhöhung	°C	7,5	6,1	4,7
Kühlwassermenge	cbm/st	740	728	658
Vielfaches des Kondensates		76	93,4	121,2
Kraftverbrauch der Kondensation	kW	52,3	50,7	50,2
Bezogen auf abgegebene Leistung	v. H.	3,22	4,18	6,11

Dampfturbine von 4450 kW-Leistung, Kiel.

Last	1/4	1/2	3/4	4/4	5/4
Zeitdauer in Sekunden	2558	2505	2445	2951	1217
Wasser i. d. Stunde . . . kg	9070	14 830	19 500	26 950	30 500
Mittlere Belastung . . . kW	1202	2341	3289	4644	5424
Dampfverbrauch für die kW/st . . . kg	7,55	6,33	5,93	5,80	5,62
Mittlerer Überdruck . . . at	14,7	13,8	13,8	13,9	13,5
Mittlere Dampftemperatur . . . °C.	270	293	294	288	305
Unterdruck . . . mm Q. S.	746	738	735	728	723
Barometerstand . . . mm Q. S.			762		
Unterdruck in v. H.	97,9	96,8	96,45	95,53	95,00
Mittlere Kühlwassertemperatur . . . °C.	19	18	17,5	19	18
$\cos \varphi$	0,89	0,98	0,87	0,94	0,94
Umrechnungsfaktor:					
Für Dampftemperatur	0,950	0,990	0,990	0,980	1,010
Für Überdruck	1,010	0,995	0,995	0,997	0,992
Für Kühlwasser	0,975	0,985	0,985	0,975	0,985
Im Mittel	0,935	0,972	0,972	0,952	0,982
Umgerechneter Dampfverbrauch kg/kW/st	7,06	6,15	5,75	5,52	5,52

120. Die Dampfturbine Thyssen-Röder.

Die Maschinenfabrik Thyssen & Co. A.-G. in Mülheim/Ruhr baut Dampfturbinen, die, wie Abb. 718 zeigt, aus der Verbindung eines zweistufigen Geschwindigkeitsrades und einer Überdruckturbine bestehen. Ein Hauptmerkmal dieser Röderschen Bauart ist, daß, um den im Niederdruck erforderlichen Auslaßquerschnitt zu beschaffen, die Trommel durch Scheiben ersetzt wird, die zur Bewältigung größter Umlaufsgeschwindigkeiten als Form

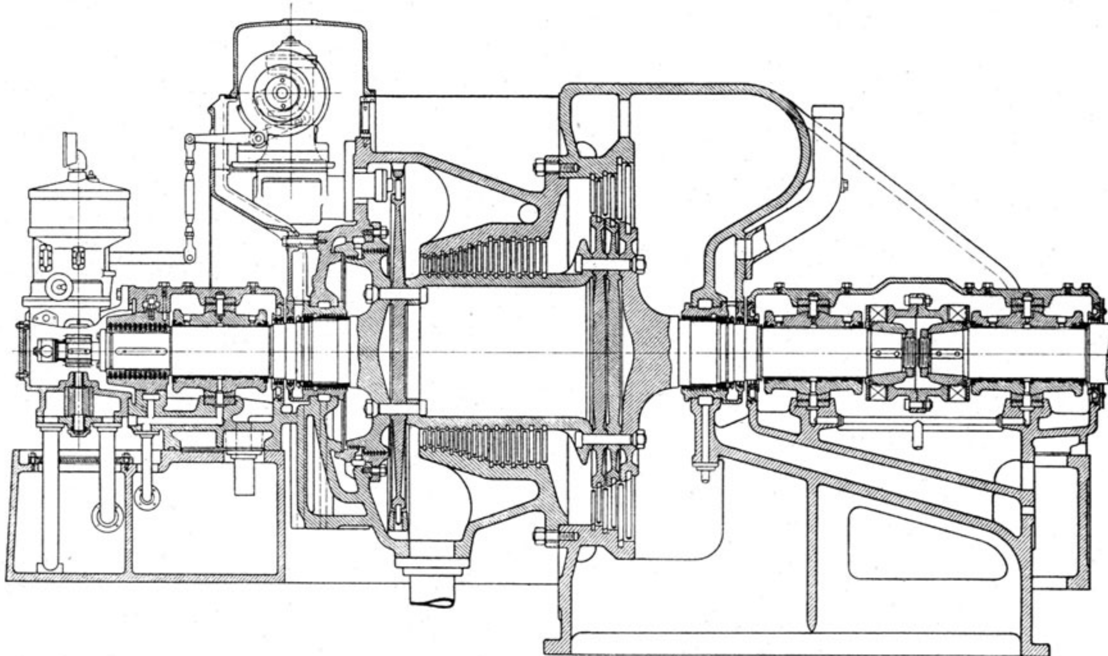


Abb. 718. Thyssen-Röder-Turbine von 6000 kW-Leistung bei 3000 Umdr.

gleicher Festigkeit ohne Mittelbohrung ausgeführt sind. Die Mengenregelung für die dargestellte Turbine von 6000 kW normaler Leistung bei 3000 Umdr./min umfaßt 4 Düsengruppen, die nach Lichtbild 719 in zwei Gehäusen mit zwei Dampfzuleitungen untergebracht sind. Lichtbild 719a veranschaulicht den zugehörigen Ausschnitt und Anschlußflansch am Gehäuse. In neuerer Zeit wird die Steuerung nach Abb. 720 durch einen in der Mitte zwischen den Ventilgehäusen untergebrachten Kraftzylinder mittels eines

Drehkolbens betätigt. Von den Einzelheiten ist in Abb. 721 die Verbindung der Niederdruckscheiben mit der Trommel und dem hinteren Wellenstumpf dargestellt. Die Sicherung gegen Lösung der Verbindungsschrauben besteht in der kegelförmigen Ausbildung der

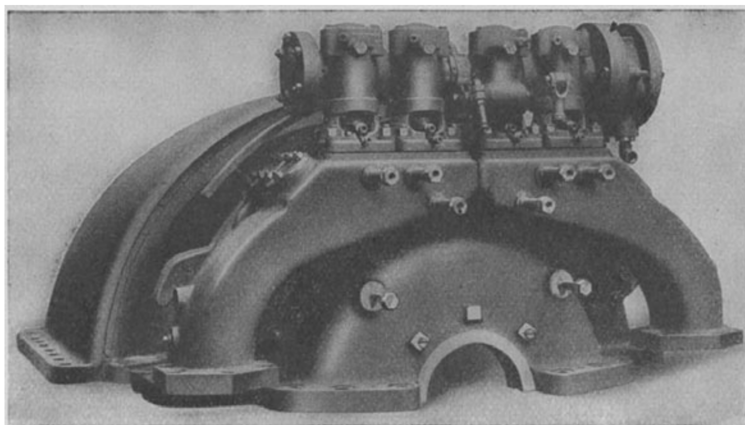


Abb. 719. Ansicht der Düsenkästen.

Schraubenmutterauflagen und im Vernieten des Bolzenendes. Vor dem Zusammenschrauben werden die Paßflächen sorgfältig geprüft, ob sie genau eben und zur Achse senkrecht sind. Nach dem Verschrauben wird die Welle zum Zwecke des Spannungsausgleiches auf 250° C erwärmt. Abb. 722 stellt den Kraftzylinder mit Drehkolben, Abb. 722a den Antrieb der Gruppenventile mittels unrunder Scheiben dar. Der doppelt wirkende Kraftkolben vermag bei dieser Anordnung das Ventil durch Rolle und Gegenrolle zwangsweise zu schließen, auch wenn die Feder versagen sollte.

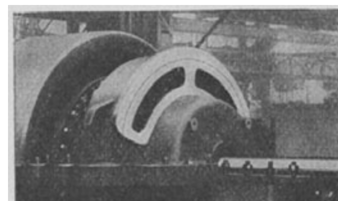


Abb. 719a. Flanschausschnitt zur Aufnahme der Düsen-Einsätze.

Als Baustoffe für die im Ziehprozeß hergestellten Mitteldruckschaufeln wird schwedisches Holzkohleneisen, für die letzten Niederdruckschaufeln 2 v. H. haltiger Chromstahl verwendet. Diese Baustoffe erwiesen sich gegen Abnützung als widerstandsfähig und es wurde nach $2^1/_2$ jähriger Betriebszeit festgestellt, daß lediglich die Eintrittskanten der Niederdruckschaufeln etwas blank anpoliert

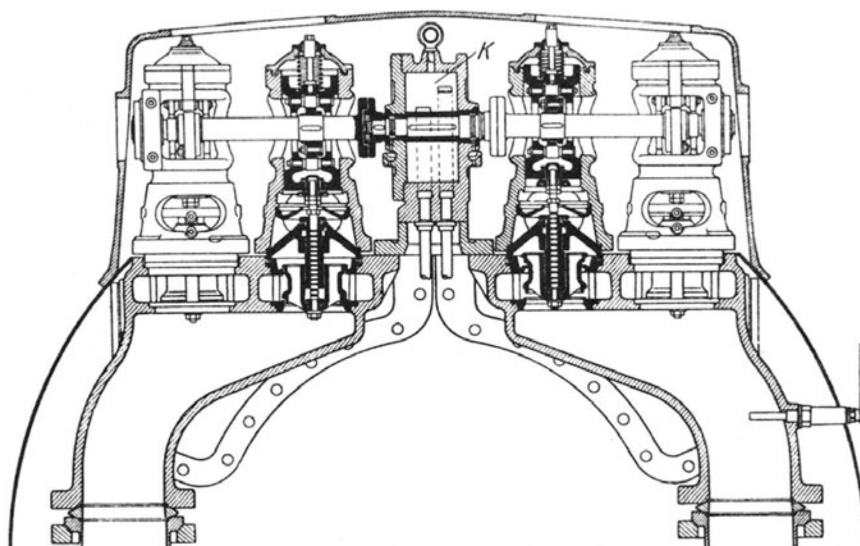


Abb. 720. Steuerungs-Kraftgetriebe.

waren. Die Schaufelbefestigung im Mitteldruckteil erfolgt nach Abb. 723 durch Eintreiben eines Stemmstreifens in die Kranznute, der so abgebogen ist, daß für den Widerstand

gegen die Fliehkraft nicht bloß die Reibung, sondern die Scherfestigkeit in Frage kommt. Im übrigen sind die Füße der in Segmenten eingebrachten Schaufeln auf der Eintrittseite mit einer Verzahnung versehen. Die hochbeanspruchten Schaufeln der letzten Niederdruckstufen werden nach auswärts verjüngt gefräst und nach Abb. 723a durch beiderseitige Einkerbungen im Kranz festgehalten. Infolge der flachen Schaufelneigung ist zum Zwecke des Einbringens kein Ausschnitt im Kranz erforderlich. Die letzte Beilage wird gemäß Abb. 723b in 3 Teilen eingefügt und der keilförmige Mittelteil durch Umnieten der Seitenbeilagen festgehalten.

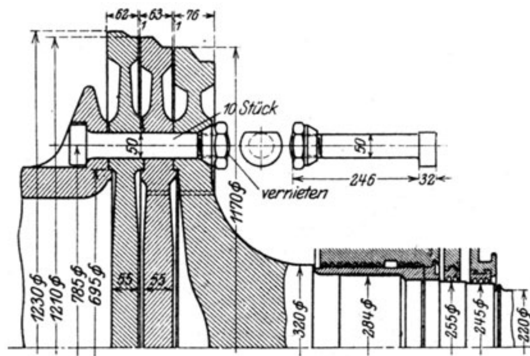


Abb. 721. Verbindung der Niederdruckräder durch Verschraubung.

Eine wichtige Beigabe zur Regelung ist das Wechselventil, Abb. 724, durch das der Dampf, der von der Kondensationsantriebturbine herkommt, entweder zur Hauptturbine oder zum Kondensator

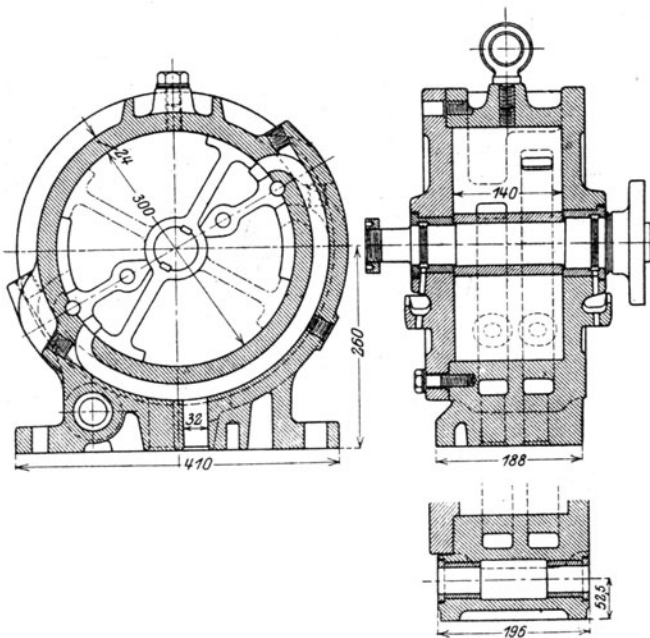


Abb. 722. Kraftgetriebe mit Drehkolben.

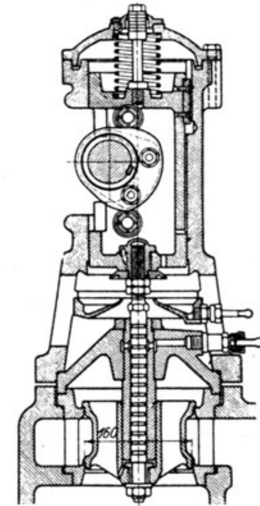


Abb. 722a. Herzscheibe zur Gruppenventilsteuerung.

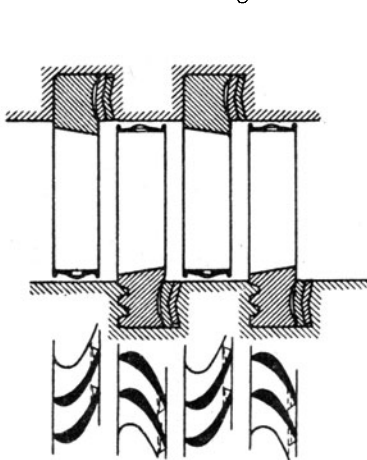


Abb. 723. Mitteldruckschaufeln.

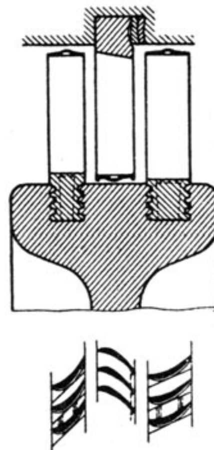


Abb. 723a. Niederdruckschaufeln für hohe Umfangsgeschwindigkeit.

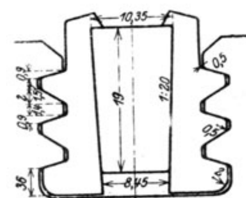


Abb. 723b. Schaufelschloß.

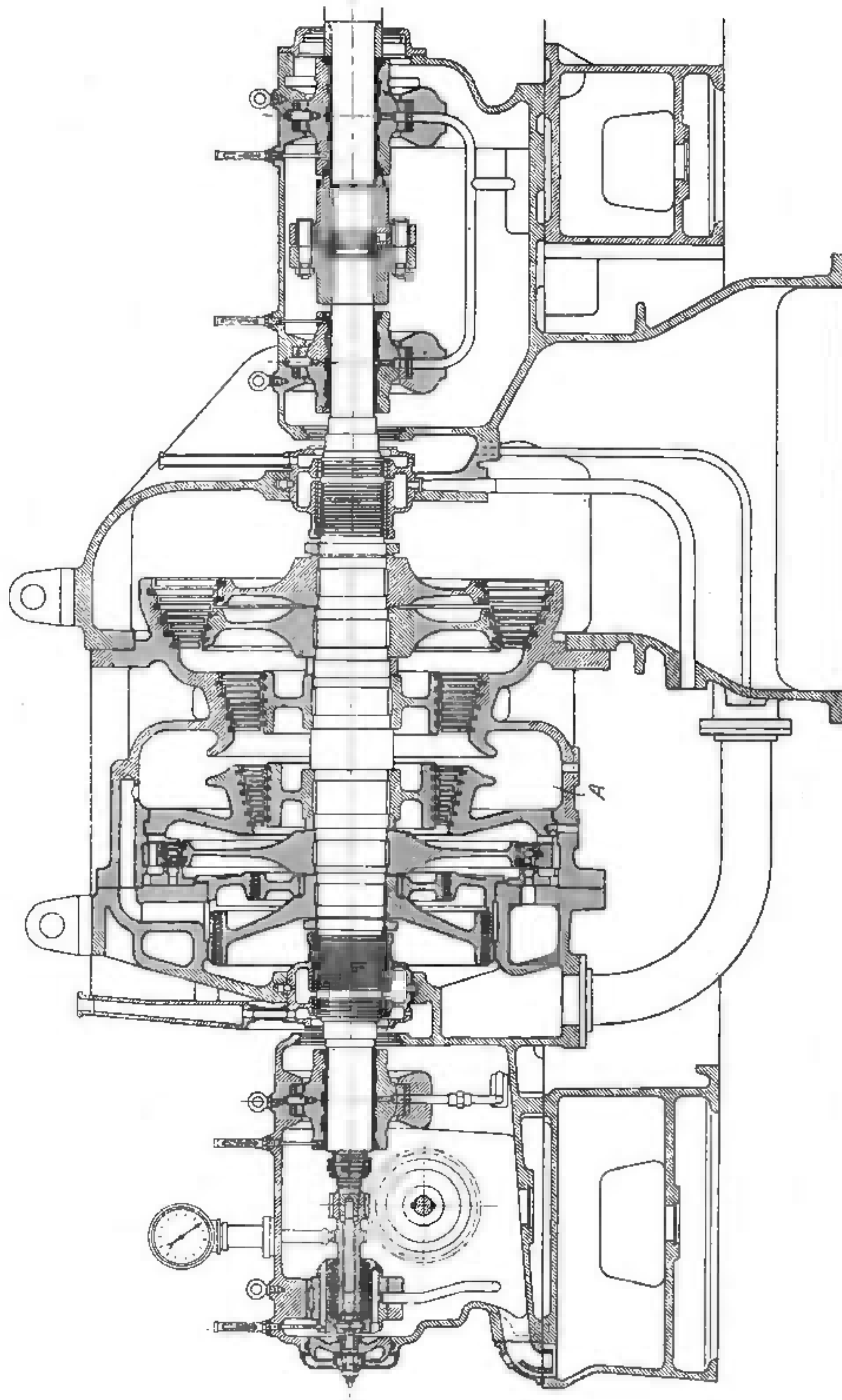


Abb. 725. Zweidruck-Turbine der Gute-Hoffnungshütte.

geleitet werden kann. Bei plötzlicher Entlastung und etwas undichten Abschlußorganen könnte die Hauptturbine, falls der Abdampf der kleinen Turbine nicht abgestellt wird, durchgehen. Um dies zu verhüten, wird die Unterseite des federbelasteten Kolbens *B* durch Kanal *A* mit dem Raum zwischen den Düsen der ersten Gruppe und dem dazu gehörigen Regelventil in Verbindung gebracht. Steigt jener Druck, so wird der Kolben gehoben und die Verbindung zur Hauptturbine frei gemacht; sinkt er unter ein bestimmtes Maß, so drückt die Feder den Kolben herab und die Verbindung zum Kondensator wird frei.

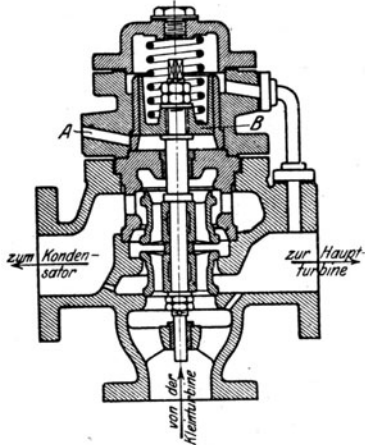


Abb. 724. Umstellventil für die Hilfsturbine zu Abb. 718.

121. Dampfturbine der Gute-Hoffnungshütte.

Die Turbine der Gute-Hoffnungshütte, Aktienverein für Bergbau und Hüttenbetrieb, Oberhausen (Rheinland), ist die Verbindung eines zweikränzigen Geschwindigkeitsrades mit einer Überdruckturbine. Gemäß Abb. 725 ist das kennzeichnende Merkmal die Verwendung einer durchgehenden Welle, und Radscheiben, deren Kränze je nach der Umfangsgeschwindigkeit so verbreitert werden, daß eine ganze Anzahl von Stufen darin nebeneinander Platz findet. Die Abbildung bezieht sich auf eine Zweidruckturbine, unterscheidet sich jedoch, abgesehen vom Ringkanal *A* der Abdampfzuleitung, nicht von der normalen Bauart. Über die Düsengruppenregelung werden wir bei Besprechung der bemerkenswerten Zweidrucksteuerung der Firma näher berichten. Die Steuerorgane werden mit Vorliebe so angeordnet, daß der obere Teil der Turbine abgehoben werden kann, ohne daß von der Steuerung etwas abgebaut zu werden braucht. Die Kupplung wurde in Abschn. 84a beschrieben.

122. „Erste Brünner Parsons"-Turbine.

Die „Österreichische Dampfturbinengesellschaft" baute ursprünglich reine Parsons-Turbinen, verband später einen Parsons-Niederdruckteil mit einem Curtis-Hochdruckteil, und ist neuerdings nach Entwürfen von Krischker und Lösel zu einer Bauart übergegangen, die im Hochdruck aus 3 oder 4 einstufigen vollbeaufschlagten Gleichdruckrädern und aus einem Parsonsschen Niederdruckteil besteht. Da die Gesellschaft bereits im März 1916 über Versuchsergebnisse an einer 1000 kW-Anlage der Öffentlichkeit berichtet hat, dürfte ihr die Priorität für die genannte Bauart zukommen. Der in Abb. 726 dargestellte Längsschnitt läßt erkennen, daß die Niederdrucktrommel auf ihrer aus einem Stück geschmiedeten vorderen Wellenfortsetzung die Hochdruckräder trägt und daß der Druckausgleich des Parsons-Teiles durch den sogenannten Fullagarkolben am Niederdruckende bewerkstelligt wird. Der einer ältern Ausführung angehörende Längsschnitt Abb. 727 zeigt im Hintergrund das Hauptregulier- und im Scheitel der Turbine das Überlastungsventil. Abb. 727a ist ein Schnitt durch die Steuerung, Abb. 727b der Grundriß der gleichen Turbine.

Die Lagerständer sind mit dem zugehörigen Gehäuseteil in einem Stück gegossen.

Über die Vorteile der neuen Bauart führt die Erstellerin folgendes an. Im Hochdruckteil wird infolge Vollbeaufschlagung die Auslaßenergie nutzbar verwendet, und es kann bei einem Geschwindigkeitsverhältnis $u/c_1 = 0{,}5$ und dem günstigsten Schaufelwinkel von 10^0 ein theoretischer Wirkungsgrad von etwa 78 v. H. gewonnen werden, was die durch Curtis-Räder erreichbaren Werte wesentlich überschreitet. Im Niederdruckteil aber wird bei einem Verhältnis $u/c_1 = 0{,}8$ der Wirkungsgrad 81 v. H. Da die Leistungen des Hoch- und Niederdruckteiles gleich sind, würde man auf einen Gesamtwirkungsgrad von 79,5 v. H. rechnen können. Praktisch erreicht man wegen Radreibung und Spaltverlusten usw. bei 1000 kW Leistung 70,3 v. H., bei 5000 kW 75 v. H. und mehr. Da der „Fullagar"-Ausgleichkolben am kalten Ende der Turbine sitzt und die Labyrinthliderung desselben mit einem radialen Spiel von vollen 2 mm ausgeführt wird, ist die Gefahr des bei Hochdruckkolben leicht drohenden Einreibens so gut wie ausgeschlossen. Die Trommelbauart ermöglicht, die kritische Drehzahl bis zu 70 v. H. über die normale hinaufzusetzen. Über die Schaufelbefestigung im Niederdruckteil, wo der Vollquerschnitt für das Tragen nutzbar

gemacht wird, haben wir in Abschn. 70 berichtet. Die Flansche des Niederdruckwellenteiles ist mit der Trommel verschraubt, da man Schrumpfungen zu vermeiden wünschte. Die Niederdruckschaufeln erhalten einen radialen Spielraum von 1 bis 3 mm bei 50 bis 350 mm

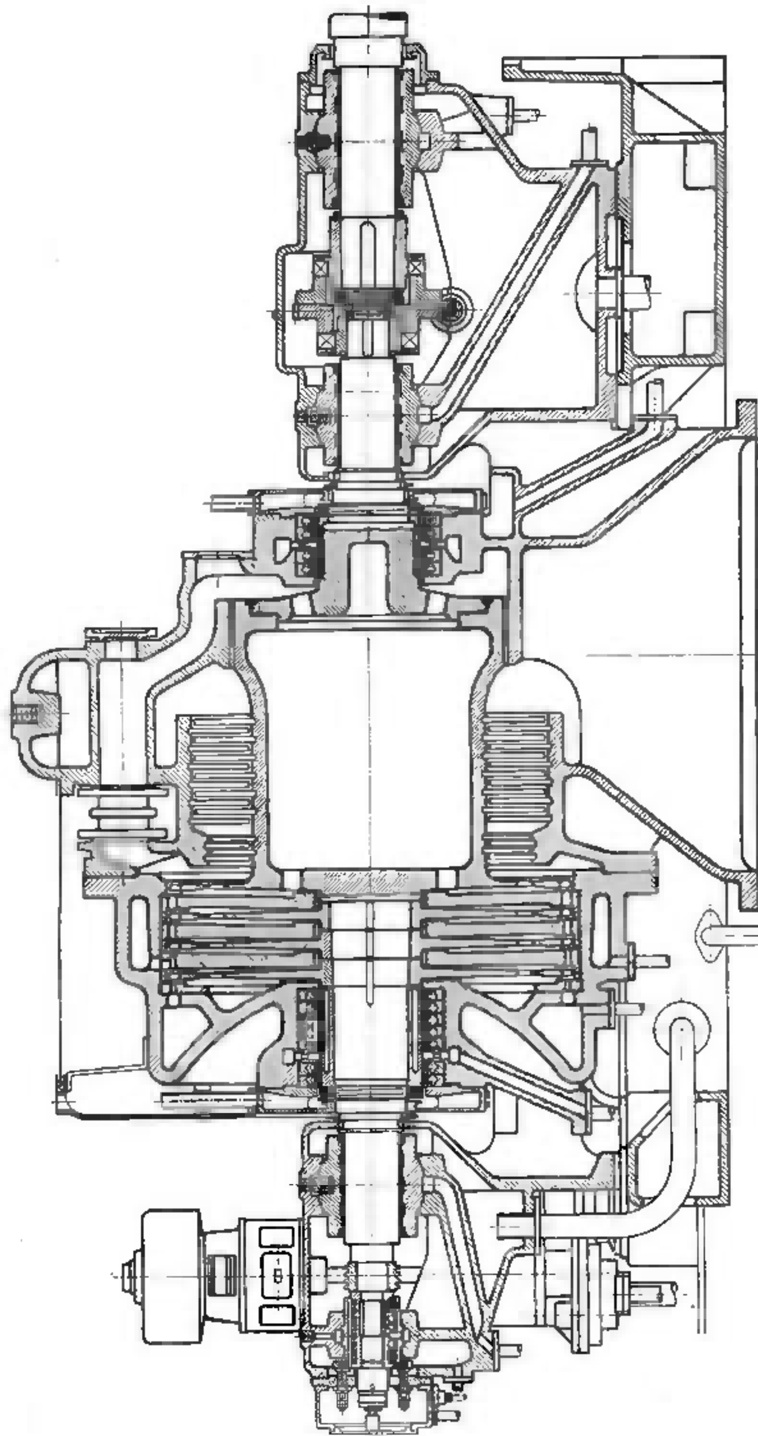


Abb. 726. Erste Brünner Parsons“-Turbine.

Schaufellänge. Die Labyrinthliderung der Zwischenwände erhält 0,6 bis 1 mm radiales Spiel bei 250 bzw. 450 mm Weite der Bohrung.

Über die Versuchsergebnisse an einer 12000 PS-Dampfturbine im Elektrizitätswerk der Gemeinde Wien-Simmering vom Sept. 1917 gibt die Erstellerin die in der Zahlentafel enthaltene Zusammenstellung.

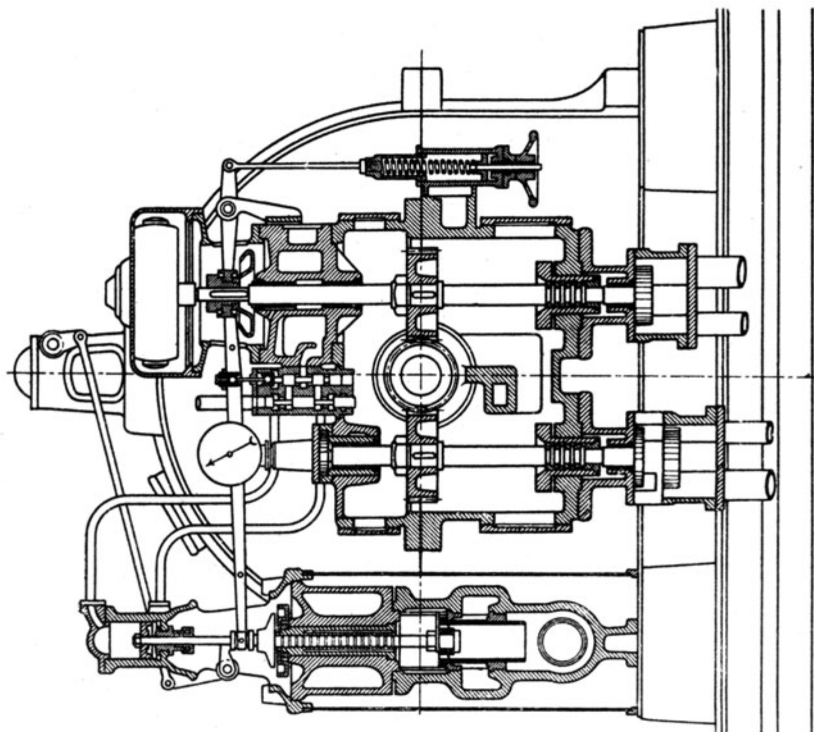


Abb. 727a. Schnitt durch das Reglergetriebe.

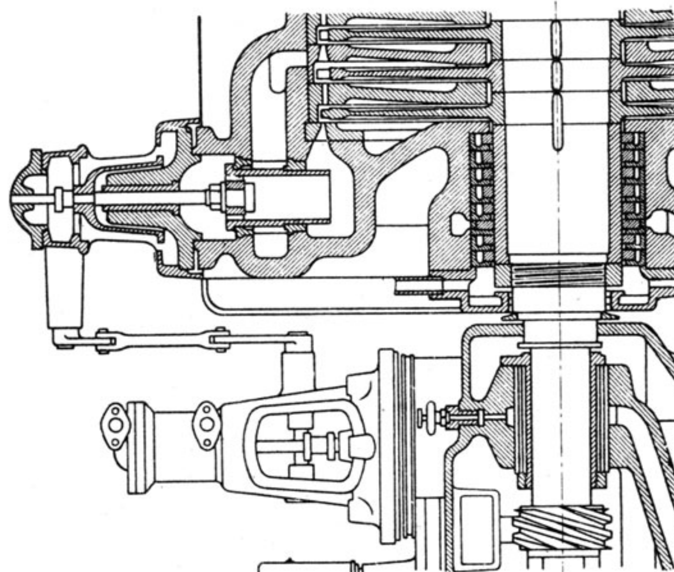


Abb. 727. Regelung mit Überlastventil.

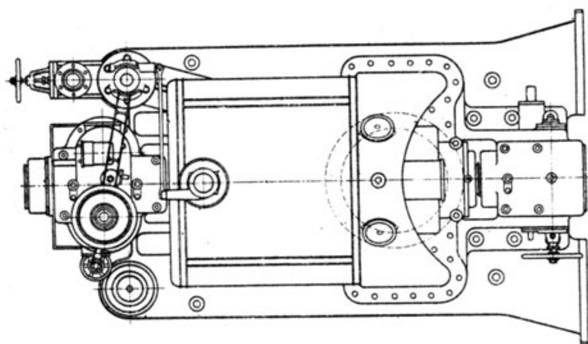


Abb. 727b. Grundriß zu Abb. 726.

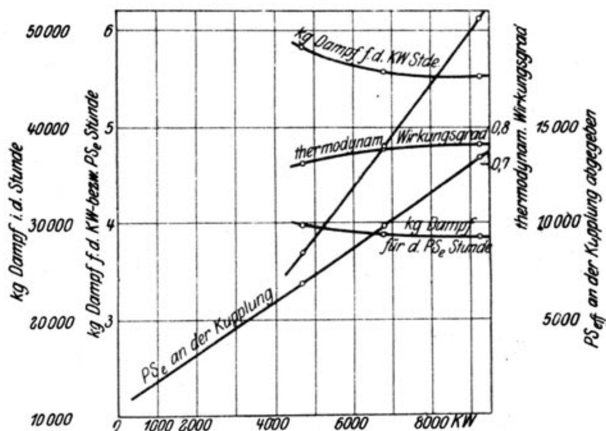


Abb. 728. Versuchsergebnisse der „Erste-Brünner-Parsons"-Turbine.

	Versuch-Nr.	1	2	3
Drehzahl	i. d. Min.	1442	1440	1440
Anfangsdruck am Absperrventil	at abs.	14,05	14,02	13,8
Dampftemperatur daselbst	°C	302	300	298
Luftleere am Auspuffstutzen der Turbine	at abs.	0,044	0,051	0,058
Gesamtdampfmenge	kg/st	27000	37812	51250
Leistung an den Klemmen	kW	4660	6800	9250
Wirkungsgrad des Drehstromerzeugers		0,931	0,95	0,958
Von der Kupplung abgegebene Leistung	PS_e	6800	9720	13160
Dampfverbrauch für 1 kW-st	kg/kW-st	5,8	5,56	5,52
Dampfverbrauch für 1 eff. PS-st an der Kupplung	kg/PS_e-st	3,98	3,89	3,88
Wärmeinhalt des Dampfes am Eintritt in die Turbine (nach der Tafel von Mollier)	i_0	729,5	728,5	728
Desgl. am Auspuffstutzen bei adiab. Ausdehnung .	i_k'	505	509,0	513
Theoret. Dampfverbrauch für 1 PS_e-st $\frac{75 \times 3600}{428\,(i_0 - i_k')}$	kg/PS_e-st	2,81	2,88	2,935
Thermodynamischer Wirkungsgrad der Turbine, $\eta_{th} = \frac{\text{theoretischer Verbrauch f. PS-st}}{\text{tatsächlicher Verbrauch f. PS}_e\text{-st}}$		0,703	0,756	0,756

Der spezifische Dampfverbrauch bei Halblast ist nur um $7^1/_2$ v. H. größer als bei Vollast. In Abb. 728 sind diese Ergebnisse graphisch dargestellt. Die im Versuchsbericht angeführte Bemerkung, daß dies nur durch entsprechend ausgebildete Düsenregelung im Hochdruckteil erreichbar ist, läßt darauf schließen, daß an jener Turbine Mengenregelung vorhanden war.

123. Die Dampfturbine von F. Tosi in Legnano.

Die Firma Franco Tosi in Legnano führte ursprünglich reine Parsonsturbinen aus. Bemerkenswert war an diesen die Freiheit des Gehäuses von allen überflüssigen Angüssen, die Ungleichheiten der Wärmedehnung hervorrufen könnten; daher wurden Hauptabschließung und Drosselventil vollständig abgesondert und durch einen weiten Krümmer mit der Turbine verbunden. Vor dem endgültigen Ausbohren werden die Gehäuse ausgeglüht, um die Reste allfälliger Gußspannungen zu beseitigen.

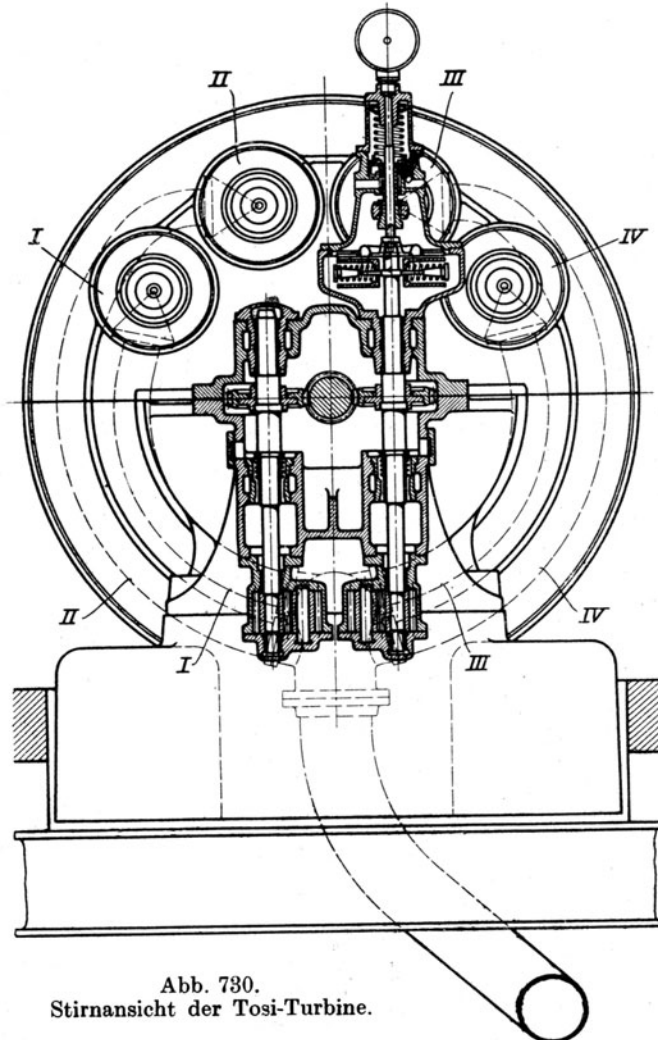


Abb. 730. Stirnansicht der Tosi-Turbine.

Vor längerer Zeit ist Tosi zu einer aus Curtisstufen und dem Parsonsschen Niederdruckteil bestehenden Verbundturbine übergegangen, deren Einrichtung für große Einheiten durch Abb. 729 und 730 veranschaulicht wird. Der durch ein Ferranti-Ventil eintretende Dampf wird durch die unabhängigen Zweigrohre I bis IV zu den gleichnamigen ebenfalls unabhängigen Düsengruppen geführt, die mittels des in

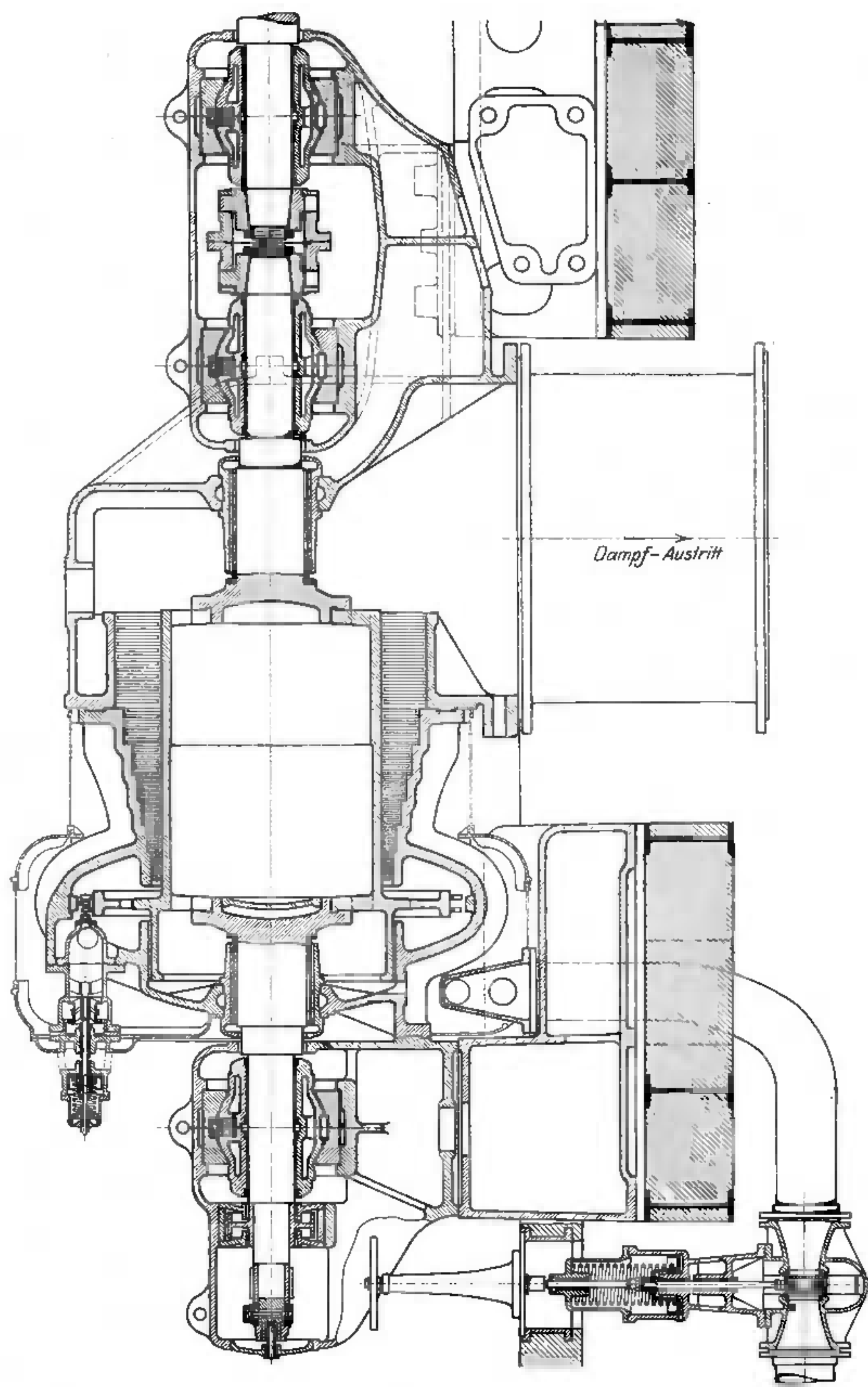


Abb. 729. Tosi-Turbine.

Abschn. 102 beschriebenen Öldruckreglergetriebes der Reihe nach geöffnet und geschlossen werden. Die Abschließung erfolgt durch je ein entlastetes Doppelsitzventil, wie im Langenschnitt erkennbar ist. An das vordere Hauptlager schließt sich das in Abschn. 96 besprochene Öldruck-Kammlager und ein Sicherheitsregler an. Das Schwunggewicht des letzteren betätigt nach Abb. 731 den Kegel eines Abschlußventils, durch dessen Öffnen das Regler-Drucköl ins Freie abfließt und alle Düsen abstellt. Bemerkenswert ist der Stift *M*, der, mittels Mikrometerschraube der Welle bis zum Streifen genähert, deren jeweilige Lage nachzuprüfen gestattet. Am Stirnende des Hochdruckzapfens ist durch einen Boden ein Hohlraum geschaffen, der mit dem Dampf der 1. Stufe in Verbindung steht, so daß die Zapfenverbindung schon beim Anlassen geheizt wird, um Ungleichheiten der Wärmedehnung zu verhüten.

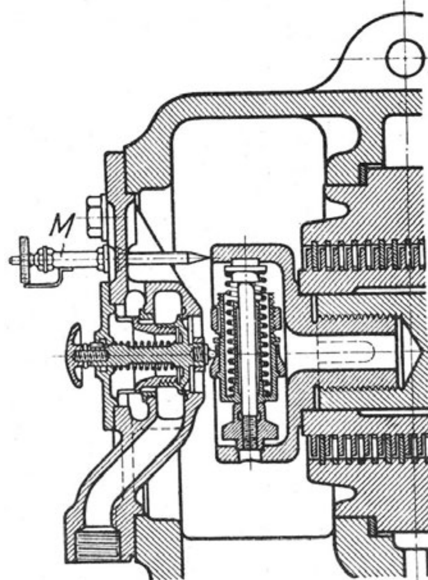
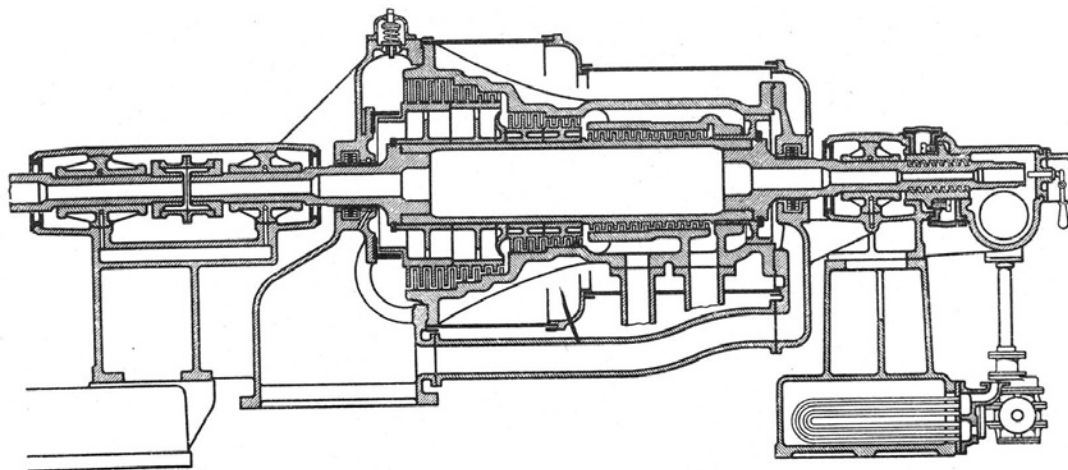


Abb. 731. Sicherheitsregler und Meßstift.

124. Turbine der Allis-Chalmers Co. in Milwaukee.

Die Turbine der Allis-Chalmers Co. ist eine Parsons-Turbine mit Druckausgleich nach Fullagar, die, obwohl Mitteilungen über die seitherige Entwickelung nicht erhältlich waren, als Beispiel amerikanischer Bauart vor dem Kriege, Erwähnung verdient. Die Gesamtanordnung wird durch Abb. 732 veranschaulicht. Bei großen Einheiten wird das Gehäuse nochmals in der Mitte geteilt, um tunlichst spannungsfrei Gußstücke zu erhalten. Abb. 733 stellt die Spindel einer 5500 kW-Einheit mit 750 Umdr./min dar. Bei dieser


Abb. 732. Allis-Chalmers-Turbine.

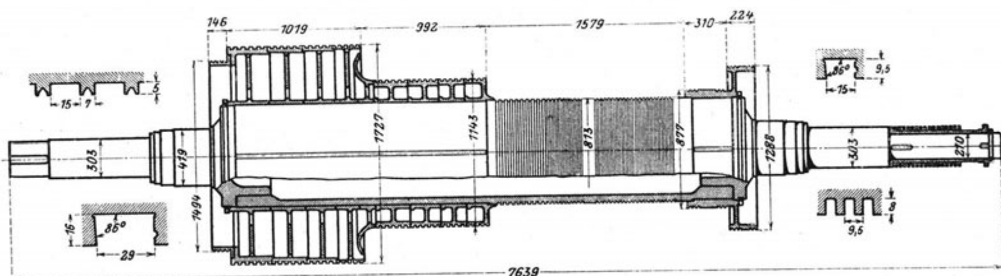


Abb. 733. Trommelbauart.

Abb. 734.

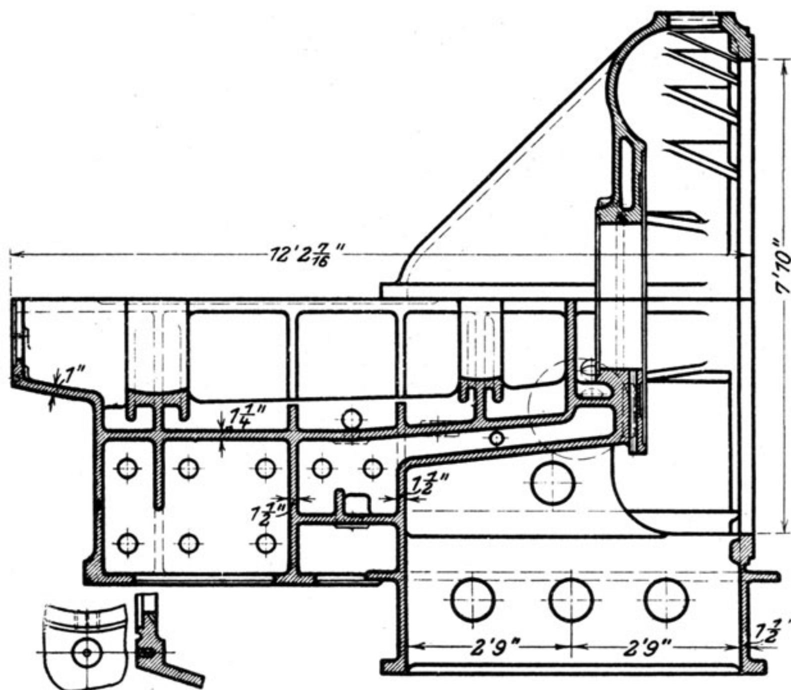


Abb. 734 a.

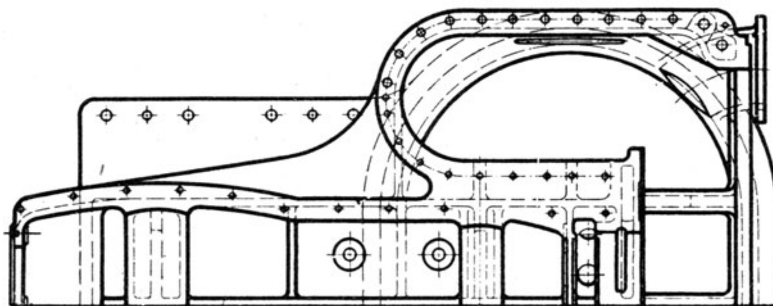


Abb. 735.

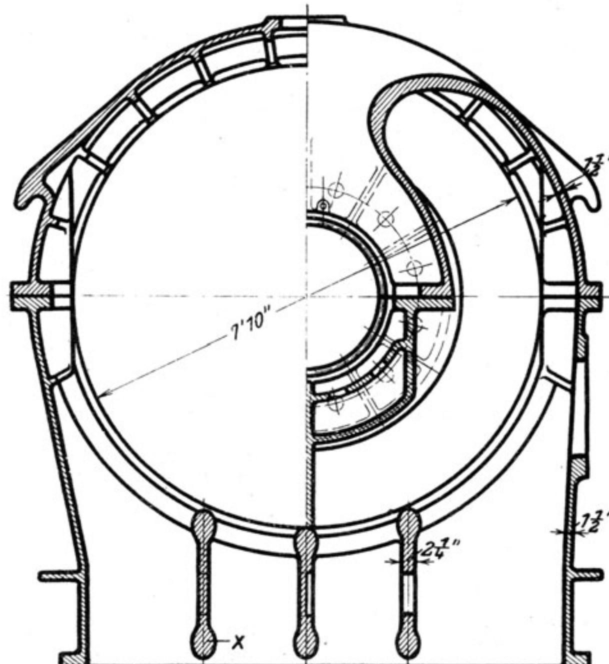


Abb. 734—735 a. Niederdruckgehäuse.

Leistungsangabe ist zu beachten, daß **nach amerikanischer Übung jede Turbine 50 v. H. Überlastung während einer Dauer von zwei Stunden vertragen muß.** In Abb. 733 sind auch Einzelheiten der Hoch- und Niederdruck-Schaufelnuten und des (radial wirkenden)

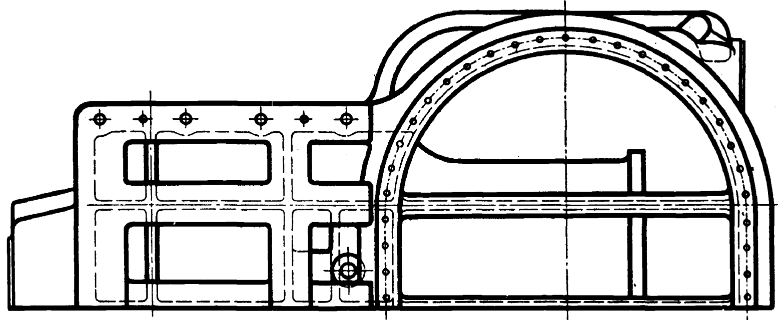


Abb. 735a.

Labyrinthes am Fullagar-Kolben dargestellt. Abb. 734—735 sind Werkzeichnungen des Niederdruck-Gehäuseendes. Die flache Wand des ovalen Abdampfstutzens wird durch Rippen X versteift, deren schienenkopfartige Verstärkung Beachtung verdient. Nach heutigen Erfahrungen würden wir allerdings Auftreten von Gußspannungen vermuten.

125. Turbine der A.-G. Gebr. Sulzer.

Die Turbine der A.-G. Gebrüder Sulzer in Winterthur und Ludwigshafen a. Rh. besteht aus einem mehrkränzigen Gleichdruckrad als Hochdruckstufe und einer Anzahl Überdruckstufen als Niederdruckteil.

Schon die erste im Jahre 1904 ausgeführte Turbine stellte diese Verbindung des Parsons- mit dem Curtis-Arbeitsverfahren dar, somit gebührt der Firma Gebr. Sulzer das

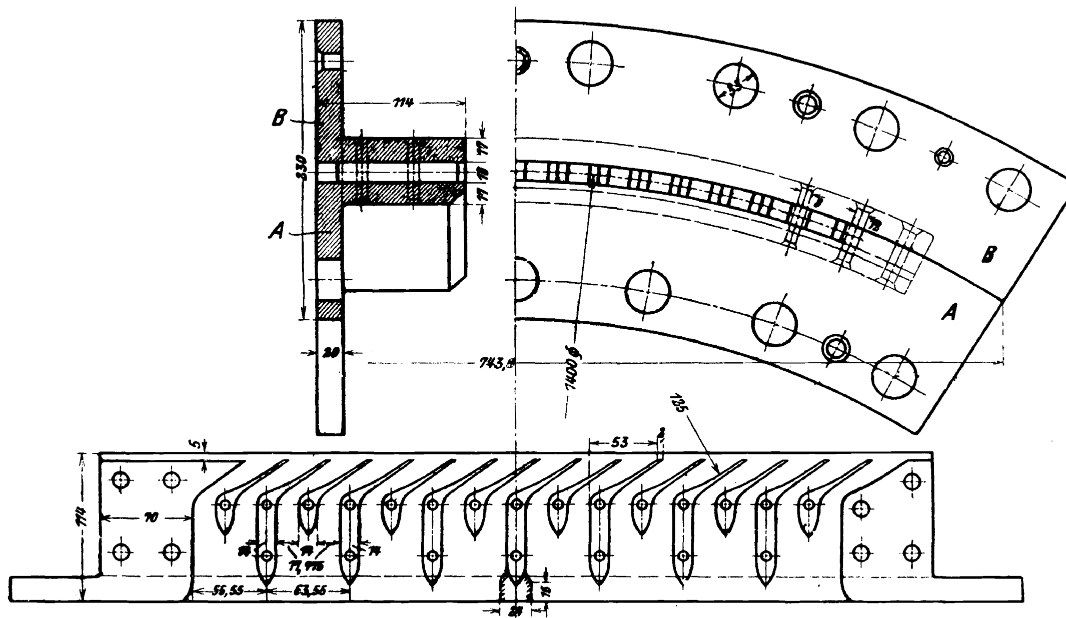


Abb. 737. Düsengruppe.

Verdienst, die Vorteile dieser Vereinigung, die seither von den hauptsächlichen Vertretern der Parsons-Turbine übernommen worden ist, am frühesten erkannt zu haben.

In der ersten Ausführung strebte man noch selbsttätige Entlastung durch Anordnung einer Zwischenstopfbüchse und Umkehr der Strömungsrichtung des Dampfes an. Später ging man zu der in Abb. 736 dargestellten Ausführung über, deren besonderes Merk-

mal der mit dem Kammlager verbundene Öldruckspurzapfen A als Entlastungsvorrichtung ist. Nachdem die Erfahrung gezeigt hatte, daß ein etwas schlechteres Ergebnis der ersten Stufe durch beste Ausbildung des Niederdruckteiles wett gemacht werden kann, wurde das

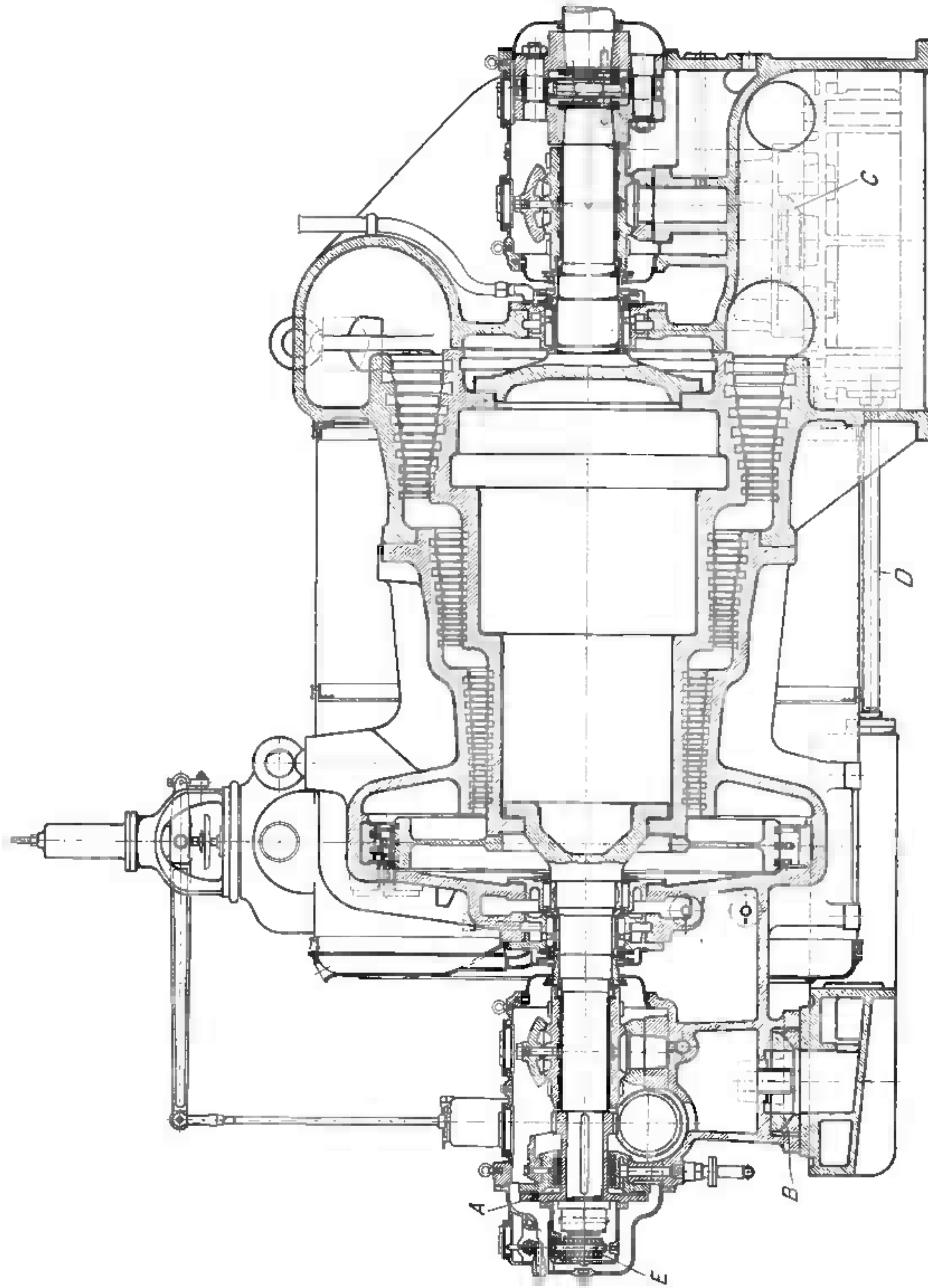


Abb. 736. Die Sulzer-Turbine.

Curtisrad mit drei Geschwindigkeitsstufen versehen, so daß vor dem Niederdruckteil nur mehr ein Druck von etwa 1,5 kg/qcm abs. herrscht. Hierdurch werden Gehäuse und Stopfbüchse wesentlich entlastet, aber der Wirkungsgrad wurde doch etwas gedrückt.

Bemerkenswert ist die schon in Abb. 486 dargestellte Stützung des Gehäuses in drei Punkten, wovon zwei am Niederdruckende *C* fest, einer am Hochdruckende *A* gleitbar sind, daher eine Verspannung des Gehäuses um so weniger vorkommen kann, als die Stützpunkte mit Kugelflächen versehen sind. Die Grundplatten sind mittels Distanzbolzen *D* starr verbunden, also wird das Gleiten keine Kräfte auf das Fundament übertragen. Die hydraulische Regelung mit ihren wohldurchdachten Einzelheiten ist in Abschn. 102 besprochen worden[1]).

Konstruktion der Einzelteile.

Die Düsen werden in ein Stahlsegment *A* (Abb. 737) radial von außen gefräst und durch das angenietete Segment *B* abgeschlossen. Die leichte Divergenz gestattet die Scheidewand am Austritt dünn zu machen, so daß ein nahezu zusammenhängender Dampfstrahl das Laufrad trifft.

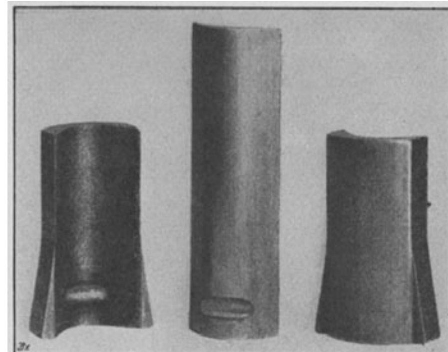


Abb. 738. Schaufelbefestigung.

Die bemerkenswerten Versuche von Ingenieur Rob. Sulzer über Schaufelabnutzung sind in Abschn. 72a besprochen worden.

Die Befestigung der Schaufeln erfolgt nach Abb. 738 so, daß man die Schaufel mit einer Kerbe, und die am Hochdruck herausragenden Beilagen mit einer Bohrung versieht, worauf ein in die Kerbe passender Stift eingeführt wird.

In Abb. 739 bis 739c ist der Fundament- und Rohrplan der 2000 kW-Turbinen im Basler Elektrizitätswerk wiedergegeben, an deren Anlage der Verfasser ausführliche Versuche vorzunehmen Gelegenheit hatte. Die Erstellerin war freisinnig genug, mir die vollständigen Werkzeichnungen der Turbine zur Verfügung zu stellen und Schaufelabdrücke zu gestatten. So konnte die Zustandsänderung des Dampfes verfolgt und in Abb. 740 die vollständige Entropiedarstellung gegeben werden.

Die Hauptabmessungen der Turbine sind:

	Mittlerer Durchmesser mm	Stufenzahl	Schaufellänge mm	Schaufelwinkel β_1	Schaufelwinkel β_2
Gleichdruckrad	1400	3	18 bis 51		
Erste Überdrucktrommel	756	12	46 „ 66	65	25/30
Zweite „	956,5	9	63 „ 90	65	25/30
Dritte „	1200	8	90 „ 180	55	21/30

Das radiale Schaufelspiel wurde an der kalten Turbine wie folgt gemessen:

Erste Überdrucktrommel	1,00 bis 1,05 mm
Zweite „	1,10 „ 1,25 „
Dritte „	1,05 „ 1,90 „

Um zu prüfen, wie sich dieses Spiel im Betrieb ändert, wurden an drei Stellen des Gehäuses abgedichtete Mikrometerschrauben radial angebracht, die man während des Betriebes vorsichtig andrückte, bis sie merklich am Schaufelende leicht zu streifen anfingen; das Spiel im warmen Zustand erwies sich um 0,1 mm größer als im kalten Zustande. Für die vorliegende Turbine ist hiernach die Ausdehnung des Gehäuses größer als die Ausdehnung der Trommel, wenn auch sehr unwesentlich.

Die tatsächlich durch die Schaufeln strömende Dampfmenge wurde bestimmt, indem man den zum Abdichten der H.-D.- und der N.-D.-Stopfbüchse erforderlichen Dampf mit Hilfe geeichter Mündungen durch Beobachtung des Druckunterschiedes ermittelte; ebenso diejenige Dampfmenge, die von der H.-D.-Stopfbüchse abströmt und zur dritten Überdrucktrommel geleitet wird, indes mit Ausnahme der Versuche V bis IX, für die diese Menge nur geschätzt worden ist.

[1]) Man vergleiche des Verfassers Bericht in Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1911, S. 1709.

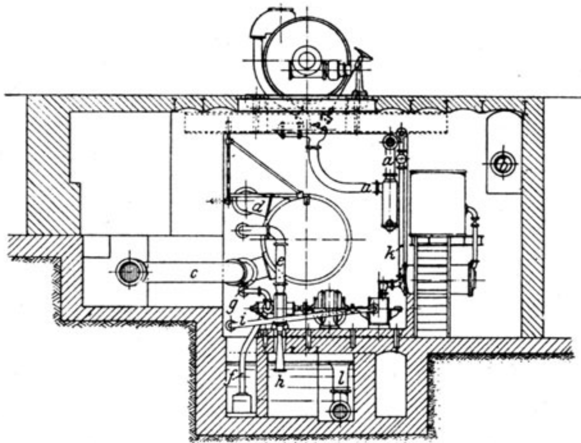


Abb. 739.

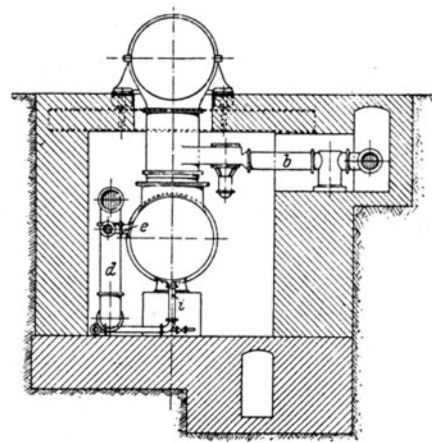


Abb. 739a.

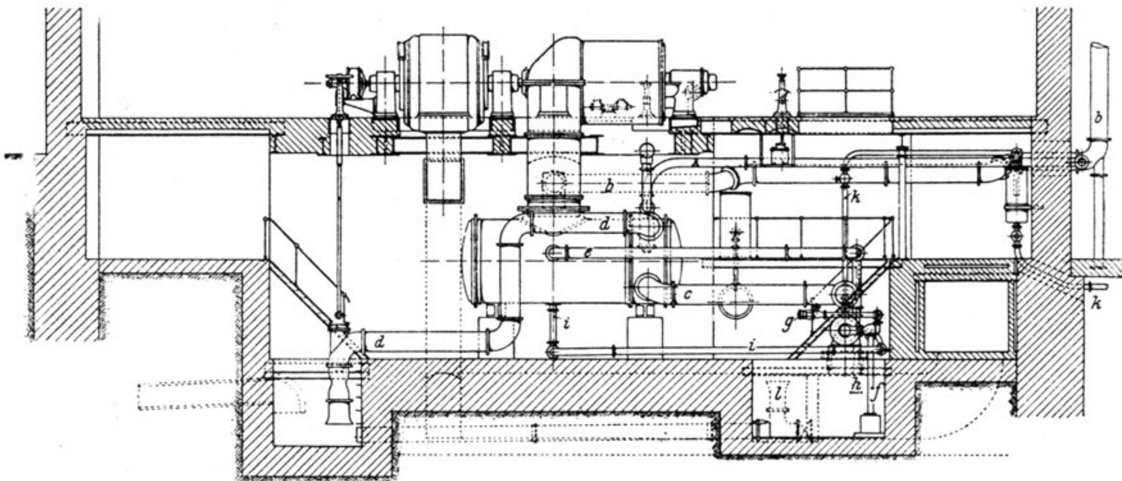


Abb. 739b.

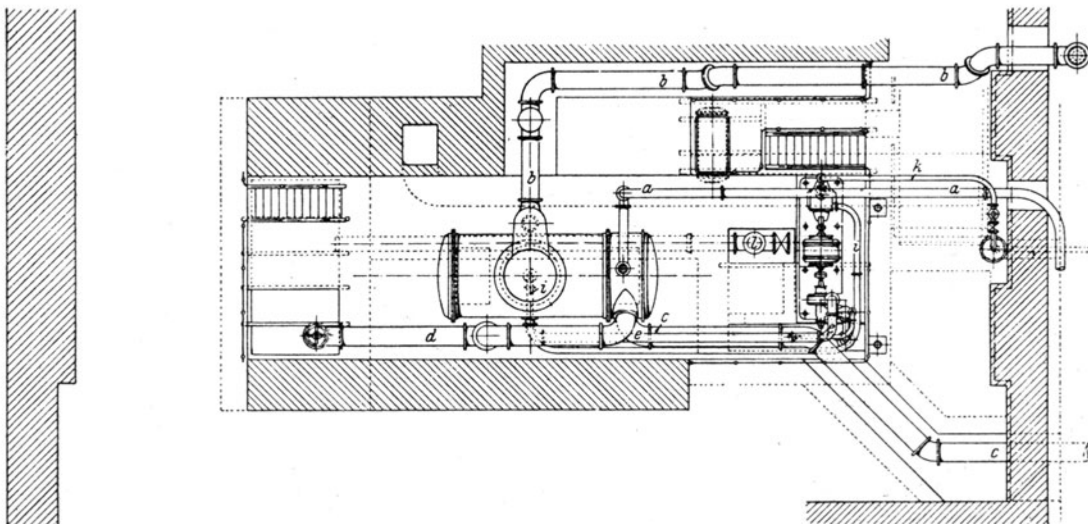


Abb. 739c.

Abb. 739—739c. Aufstellungsplan der 2000 kW-Sulzerturbine im Basler Elektrizitätswerk.

Als Arbeitsverbrauch der Lager, des Regulator- und Ölpumpenantriebes wurden 2,5 v. H. der Volleistung angesetzt. Der Verbrauch des Kondensatorantriebes und des Dynamoventilators wurde gemessen.

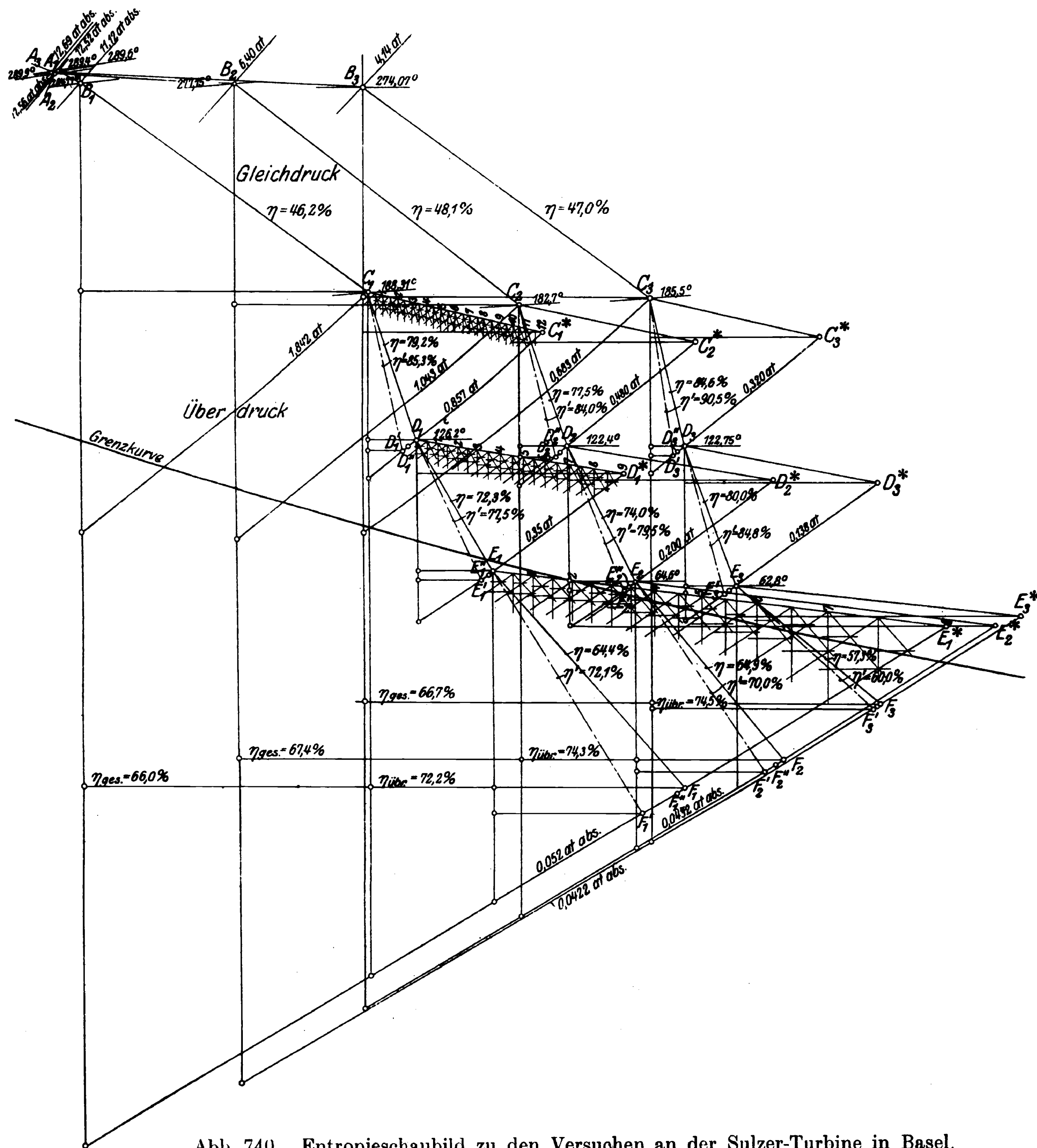


Abb. 740. Entropieschaubild zu den Versuchen an der Sulzer-Turbine in Basel.

Der thermodynamische Wirkungsgrad berechnet sich für die Hauptversuche wie folgt:

Versuch	V	III	II
Belastung	1/1	1/2	1/4
Wirkungsgrad der Dynamo	0,947	0,918	0,868
Thermodynam. Wirkungsgrad bezogen auf die innere Leitung.			
für das Gleichdruckrad	0,462	0,481	0,470
„ „ Überdruckteil	0,722	0,743	0,745
Für die ganze Turbine, bezogen auf Zust. vor den Düsen und im Abdampfrohr	0,660	0,660	0,667

In der Entropiedarstellung beziehen sich die Buchstaben

A auf den Zust. vor der Turbine
B „ „ „ „ den Düsen
C „ „ „ „ der 1. Überdrucktrommel
D auf den Zust. vor der 2. Überdrucktrommel
E „ „ „ „ „ 3. „
F „ „ „ im Abdampfrohr.

Versuchs-Ergebnisse an der 2000 kW-Sulzer-Dampfturbine im Elektrizitätswerke Basel.

Versuch Nr.	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
Art des Versuches	Leerlauf mit Erregung	1/4 Belastung	1/2 Belastung	3/4 Belastung	Normallast	Überlast	Vermind. Kühlw.-Menge	Vermind. Überhitzung	Mit Luftzufuhr	Leerlauf ohne Dynamo
Kesseldruck hinter dem Überhitzer . . at abs.	13,45	12,75	12,60	12,19 (?)	12,47	12,06	12,23	10,72	11,95	4,30
Dampftemperatur (Mittelwert der 3 Kessel) . °C	316,7	280,3	270,8	282,2	292,4	288,0	273,8	225,2	282,6	197,5
Druck v. d. Regelvent. at abs.	13,31	12,69	12,56	12,35	12,52	11,58	11,95	10,29	11,75	4,5
Temp. v. d. Regelventil °C	286,4	289,4	288,9	283,33	289,6	287,2	275,04	225,1	283,7	170,3
Druck vor d. Düsen at abs.	—	4,14	6,40	9,05	11,12	10,15	10,35	9,32	10,40	0,50
Temperatur vor d. Düsen °C	256,8	274,07	275,15	275,5	284,77	282,06	269,8	220,6	278,6	149,7
Druck vor d. Düsen beim erst. Überl.-Vent at abs.	—	—	—	1,42	1,87	8,14	1,78	8,12	3,55	—
Temp. vor d. Düsen beim erst. Überl.-Vent. . . °C	—	—	—	229,7	262,8	278,3	237,17	217,3	267,5	—
Druck vor d. Düsen beim zweit. Überl.-Vent. at abs.	—	—	—	1,43	1,82	2,40	1,63	2,40	2,00	—
Temp. vor d. Düsen beim zweit. Überl.-Vent. . °C	—	—	—	239,13	261,75	270,2	240,95	211,74	263,8	—
Minutliche Umlaufzahl	1502	1502	1502	1502	1501,3	1502,7	1501,8	1500,4	1506,4	1502,2
Druck i. Abdampfr. at abs.	0,0408	0,0422	0,0432	0,0498	0,052	0,0601	0,0734	0,0593	0,178	0,0398
Temp. im Abdampfrohr °C	27,34	29,2	29,2	32,10	32,00	34,47	33,69	34,3	57	89,5
Barometerstand . mm Hg	736	736	736	736	736	736	736	736	736	736
Druck im Luftabsaugstutz. at abs.	0,0435	0,0428	0,0424	0,0498	0,0460	0,0453	0,0581	0,0464	0,177	0,0414
Temperatur im Luftabsaugstutzen . . . . . . °C	18,17	19,02	19,83	20,40	21,00	24,34	34,8	27,33	18,55	21,5
Temp. d. Kondensates . °C	17,21	21,35	24,58	26,38	29,97	30,70	36,0	29,0	25,0	17,0
Temp. d. Kühlwassers vor dem Kondens. . . . °C	15,94	15,99	16,0	16,29	16,45	16,49	13,3	16,1	16,4	16,4
Temp. d. Kühlw. hinter d. Kondens. . . . . °C	17,14	20,44	23,09	24,44	26,36	28,70	35,7	28,03	28,3	19,6
Druckverlust d. Kühlw. im Kondens. . . . mm Hg	110	108	103,9	142,2	150,4	152,9	257	154,4	137,2	84
Zugeführte Luftmenge kg/st	—	—	—	—	—	—	—	—	42,65	—
Öldruck in d. Druckleitg. at	1,27	1,41	1,44	1,46	1,44	1,46	1,52	1,51	1,48	1,31
Öldruck unter d. Entlastscheibe . . . . . . at	1,51	4,64	6,81	9,32	10,72	12,95	10,10	13,00	11,22	1,5
Öltemperatur am Hochdr.-Turbinenlager . . . °C	44,1	45,2	45,8	46,6	48,5	51,2	47,1	48,7	46,4	42,7
Öltemperatur am Niederdr.-Turbinenlager . . °C	43,4	45,9	46,0	46,5	47,4	48,4	46,4	47,2	46,7	42,4
Öltemp. vor d. Kühler °C	38,5	40,2	41,1	42,2	44,0	45,5	42,5	44,0	43,3	34,6
Öltemp. hint. d. „ °C	16,7	34,3	36,3	37,0	38,9	40,2	36,5	38,5	38	30,9
Dampfverbrauch der Hochdruck-Stopfbüchse kg/st	84,8	98,5	102,6	109,8	—	—	—	—	—	75,25
Dampfverbrauch d. Niederdruck-Stopfbüchse kg/st	76,4	78,7	101,2	75,6	78,7	77,3	77,3	76	75,2	59,20
Zur Turbine zurückfließende Dampfmenge . . . kg/st	—	—	106,3	155,7	—	—	—	—	137,2	—
Stopfbüchsenverlust (geschätzt) . . . . . kg/st						etwa 20				
Dampfverbr. insges. „	1417,4	5198,4	7985,5	11361,6	14199,3	17640,0	12927,5	17987,5	15357,7	788,7
Leistung des Stromerzeug. an den Klemmen . kW	—	594	1049	1560	2058	2521	1780	2299	1819	—
Kraftaufwand für Kondensation u. Ventilator kW	33,5	33,8	33,7	34,34	34,84	35,06	34,34	34,55	33,2	—
Nutzleistung des Stromerzeugers . . . . . kW	—	560,2	1015,3	1525,66	2023,16	2485,94	1745,66	2264,45	1785,8	—
Brutto-Dampfverbrauch kg kW-st	—	8,751	7,612	7,283	6,900	6,997	7,263	7,824	8,443	—
Dampfverbr. nach Abzug des Kondens.- u. Ventil.-Kraftverbr. . kg/kW-st.	—	9,280	7,865	7,447	7,018	7,096	7,406	7,943	8,600	—

Die Fußzeichen 1, 2, 3 bedeuten $^1/_1$, $^1/_2$, $^1/_4$ Last. Für die im Überhitzungsgebiet liegenden Punkte sind die Temperaturen um 3^0 C erniedrigt eingetragen, da nachträgliche Beobachtungen mit vom Gehäuse (durch Asbest) isolierten Thermometerröhrchen auf diesen Unterschied gegenüber nicht isolierten Röhrchen geführt haben.

Die Durchrechnung der Zustandsänderung in der Turbine mittels des V^2-Verfahrens führte zur Kenntnis der „Verengungszahl" τ über die an Hand der genauen Schaufelquerschnitte bei Abb. 257b berichtet worden ist.

Die an C_1 D_1 E_1 sich anschließenden Zickzacklinien sind ein Versuch, die Zustandsänderung des Undichtheitsdampfes an den Schaufelstirnflächen zu verfolgen. Es ist D_1' der Zustand des eigentlichen Arbeitsdampfes am Ende der 1. Trommel: D_1'' derselbe nach Vernichtung der Auslaßenergie; D_1 das Ergebnis der Mischung mit dem Undichtheitsdampf, der mit

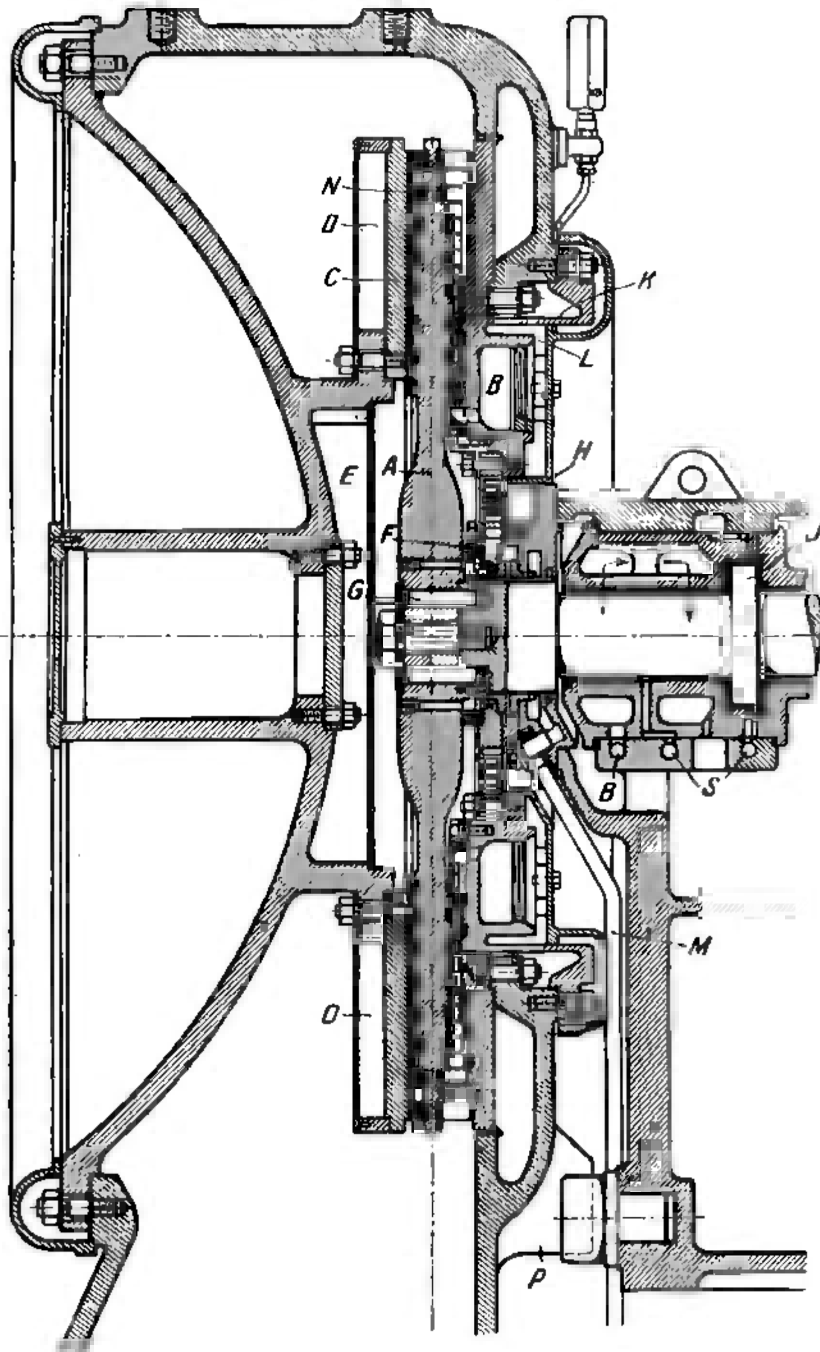


Abb. 741. Die Eyermannturbine.

dem Zustand C_1^* ankommt. Der Einfluß ist geringfügig; die Entropietafel erweist sich als zu feinfühlig gegenüber der Unsicherheit in der Messung der Temperatur und der wahren Querschnitte.

126. Die Turbine von Eyermann.

Die früher von der Maschinenbau-Akt.-Ges. Ph. Swiderski in Leipzig-Plagwitz gebaute Dampfturbine System Eyermann ist seit Parsons der erste Versuch, die Schwierigkeiten der radialen Beaufschlagung bei vielstufigen Turbinen zu überwinden. Diese Schwierigkeiten sind: zu geringe Schaufellänge bei kleinen Einheiten; bedeutender einseitiger Dampfdruck auf das Laufrad bei großen Einheiten, und die Notwendigkeit sehr genauer axialer Einstellung, um die schädlichen Schaufelspiele klein halten zu können.

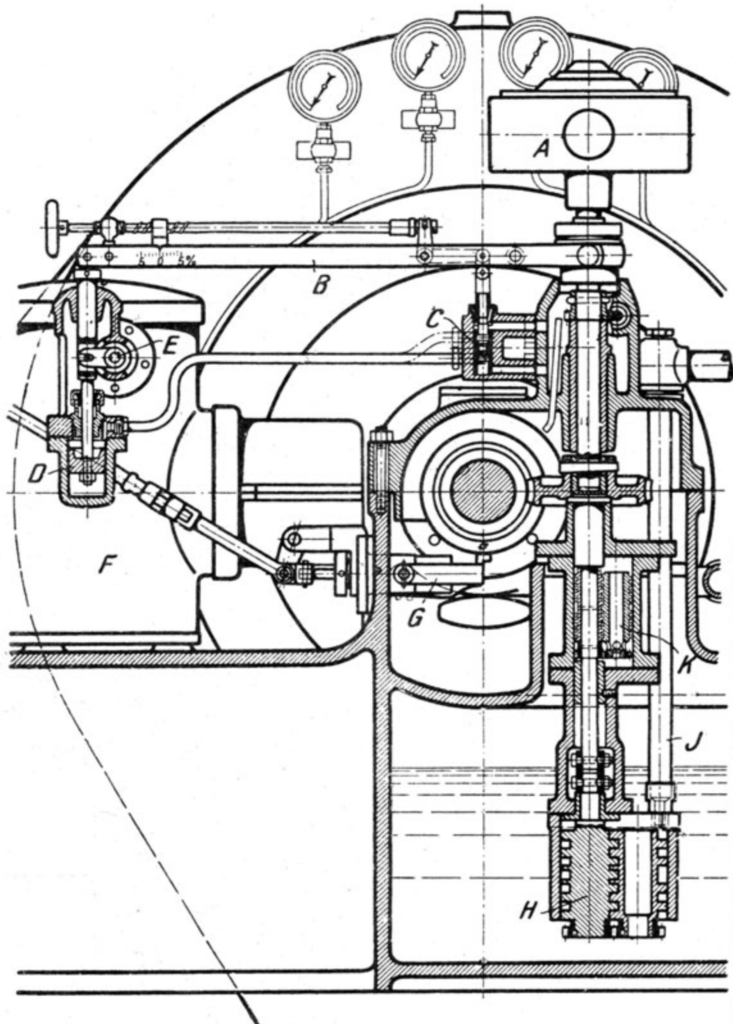


Abb. 742. Schnitt zu Abb. 741.

Die von Ingenieur Eyermann in Berlin ausgebildete Bauart Abb. 741 gleicht den einseitigen Dampfdruck dadurch aus, daß die Rückseite des Laufrades als Labyrinth ausgebildet wird, dem der Dampf von der Hochdruckstufe zufließt. Ist die Pressung auf der arbeitenden Seite des Rades zu groß, so wird dieses um einen kleinen Betrag nach links geschoben, wodurch das Labyrinth verengt, ein auf der rechten Seite befindlicher durch einen Spalt zwischen Scheibe und dem Bronzering F gebildeter „Drosselquerschnitt" hingegen erweitert wird, so daß dem Labyrinth mehr Dampf zufließt und durch Steigerung der Gegenkraft ein Ausgleich geschaffen wird. Das Umgekehrte findet statt, falls der Drosselquerschnitt zu weit geöffnet war. Auf diese originelle Weise wird das Laufrad

selbsttätig entlastet. Die Befürchtung, daß der Ausgleich unter Schwingungen des Rades sich vollzieht, wurde durch die Erfahrungen, die Josse[1] in zweijährigem Betrieb an einer 250pferdigen Einheit gewann, entkräftet. Nur bei gewissen Umlaufzahlen sollen sich, wahrscheinlich als Resonanzerscheinung, dauernde Schwingungen eingestellt haben, die den Konstrukteur zur Anordnung eines Kammes im Hauptlager, der als „Ölpuffer" dient, veranlaßten.

Die vorragenden Ansätze *N* auf der Rückseite der Scheibe bilden das Gegengewicht der Schaufelfliehkräfte, damit die Scheibe von Biegungsspannungen und daraus folgenden Formänderungen frei bleibt.

Die dargestellte Turbine soll 500 PS bei 3000 Umdr./min leisten. Die drei ersten Stufen arbeiten mit kleinem Radgefälle gewissermaßen als Geschwindigkeitsstufen. Darauf folgen 5 Überdruckstufen mit etwa 160 m/sek größter Umfangsgeschwindigkeit. Die Verbindungswand *H* ist mittels tiefer Eindrehungen elastisch nachgiebig gemacht. *P* bildet eine Stütze zur Sicherung der senkrechten Lage. *J* ist der axiale Führungskamm, dem von *S* her Drucköl zufließt.

Abb. 742 stellt einen Schnitt durch die Regelung dar, wobei *A* den Regler, *B* den Rückführungshebel, *C* das Steuerventil, *D* den Kraftkolben, *E* die Achse des Verstellhebels am Drosselventil darstellen. *G* ist der Sicherheitsregler.

Über eine von Josse untersuchte 250 PS-Turbine liegt ein ausführlicher, wertvolle Beobachtungen enthaltender Bericht in der Zeitschr. f. d. ges. Turbinenwesen 1908, S. 69, vor, auf den wir hiermit besonders verweisen. Es wurden bei 9,04 at abs. Druck, 261° C Temperatur vor dem Regelventil 0,094 at abs. Luftleere 235 PS_e bei 3030 Umdr./min entwickelt und ein Dampfverbrauch von 7,23 kg/PS_e-st erzielt.

127. Die Ljungströmturbine.

Die Svenska Turbinfabriks Aktiebolaget Ljungström („STAL") in Finspong bei Stockholm stellt die von den Brüdern B. und F. Ljungström erfundene und ausgebildete Turbine her, deren Wesen radiale Beaufschlagung, Überdruckwirkung und entgegengesetzter Umlaufsinn der gegenüberstehenden, die „Leit"- und „Lauf"schaufeln tragenden Scheiben ist. Nach Abb. 743, die eine Turbine von 1000 kW Normal- und 1400 kW Höchstleistung bei 3000 Umdr./min darstellt, werden die Schaufelkränze durch in sich tragfähige Ringe gehalten, so daß nur eine schwache Verbindung mit den Scheiben erforderlich ist,

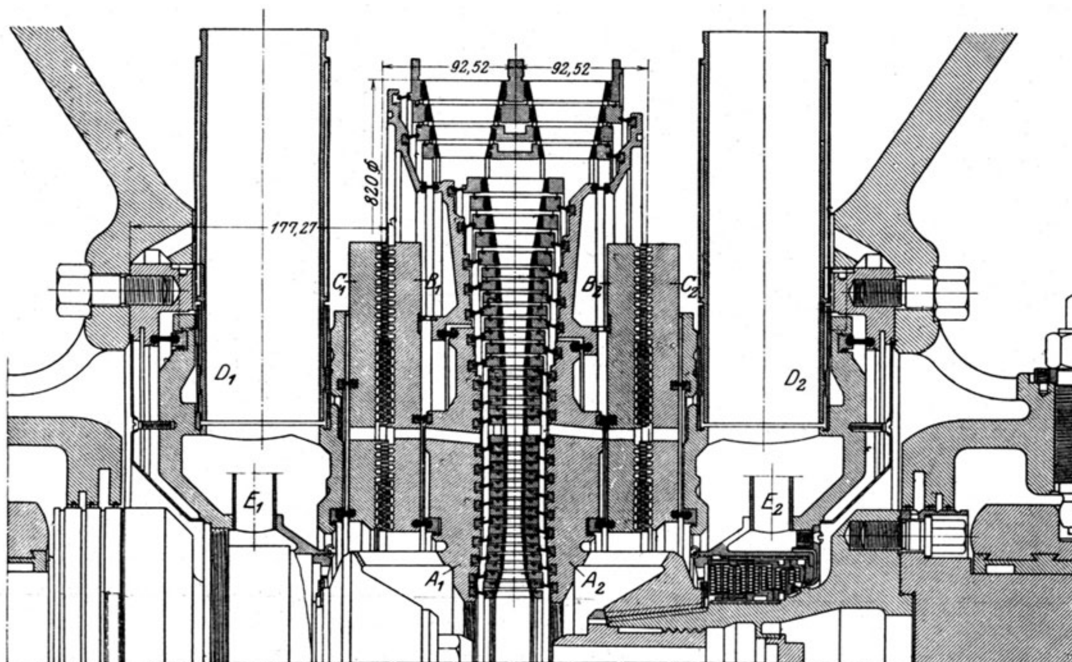


Abb. 743. Ljungströmturbine von 1000 kW-Leistung bei 3000 Umdr./min.

[1]) Zeitschr. f. d. ges. Turbinenwesen 1908, S. 69ff

die durch eingewalzte Gelenkringe ausdehnungsfähig wird. Der Ausgleich des axialen Gesamtdruckes erfolgt durch die mit den Laufscheiben A_1 A_2 verbundenen Labyrinthscheiben B_1 B_2, die gegen die feststehenden Scheiben C_1 C_2 abdichten, den erforderlichen Gegendruck erzeugen und, wie unten beschrieben, zugleich die axiale Einstellung der Scheiben verbürgen. D_1 D_2 sind die den Auspuffraum durchdringenden, durch übergestülpte Blechrohre isolierten Dampfzuleitungen. E_1 E_2 bilden die in eine andere Schnittfläche zu verlegenden Abzugsrohre des Stopfbüchsenundichtheitsdampfes. Bei kleineren Leistungen werden die äußersten Stufen nicht geteilt. Bei größeren Leistungen, oder wenn bei hoher Drehzahl der Halbmesser beschränkt ist, würde jedoch die äußerste Schaufel, wie Abb. 744 schematisch zeigt, eine unausführbare Länge erhalten, daher dann nach Abb. 744a die Niederdruckgruppen in weitgehendem Maße unterteilt werden. So ist in Abb. 745 bei 5000 kW Leistung und 3000 Umdr./min eine Teilung der Außenkränze in sechs Unterabschnitte erforderlich geworden. Das gleiche Verfahren erlaubt eine wesentliche Herabsetzung der Abmessungen, wenn man die Drehzahl erhöhen darf, wie Abb. 746 an einer Turbine von 400 kW-Leistung bei 5400 Umdr./min zeigt. Bei rd. 480 mm Durchm. beträgt die Umfangsgeschwindigkeit 136 m/sek und die Austrittsbreite rd. 87 mm. Die Schaufelkäfige werden durch die nach außen wirkende Fliehkraft selbsttätig in Kreisform gespannt, doch ist deren Achsenlänge selbstverständlich durch praktische Rücksichten begrenzt. Bei größeren Einheiten geht daher Ljungström zu der aus radialen Überdruck-

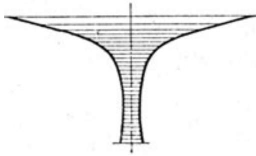


Abb. 744.

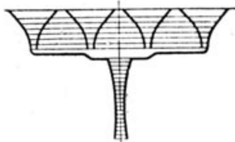


Abb. 744a.

Abb. 744 u. 744a. Notwendigkeit der Unterteilung der äußersten Schaufelkanäle.

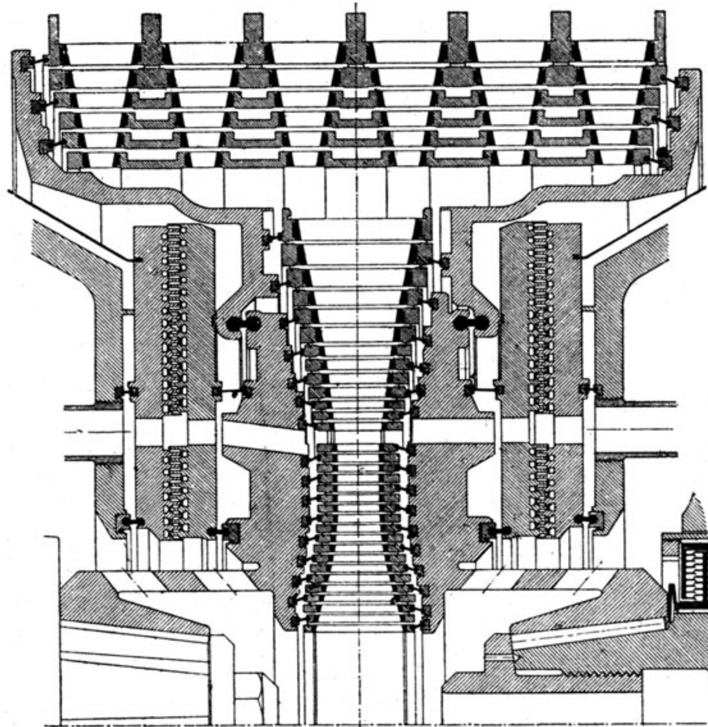


Abb. 745. 5000 kW-Turbine mit 3000 Umdr./min.

und aus axialen Gleichdruckstufen bestehenden Verbundturbine, Abb. 747, über, die eine Einheit von 10000 kW Normal- und 14000 kW Höchstleistung bei 3000 Umdr./min darstellt. A bedeutet den in sechs Rohre aufgeteilten Dampfzutritt, B das Überlastungsventil, das durch die in den Labyrinth- und Laufscheiben angebrachten Löcher C den Dampf zur 18. Stufe führt. Die Schaufeln sind von Anfang an dreifach, und von der 31. Stufe an fünffach unterteilt Die Umfangsgeschwindigkeit am Außenrand der äußersten

Additional material from *Dampf- und Gasturbinen,*
ISBN 978-3-642-50544-7 (978-3-642-50544-7_OSFO7),
is available at http://extras.springer.com



Radialschaufel kann auf 140 m/sek veranschlagt werden. Nun teilt sich der Dampfstrom zu den axialen Leiträdern, die etwa 225 mm Schaufelaustrittslänge haben und je ein Gleichdruckrad mit etwa 215 m/sek Umfangsgeschwindigkeit im Teilkreis beaufschlagen.

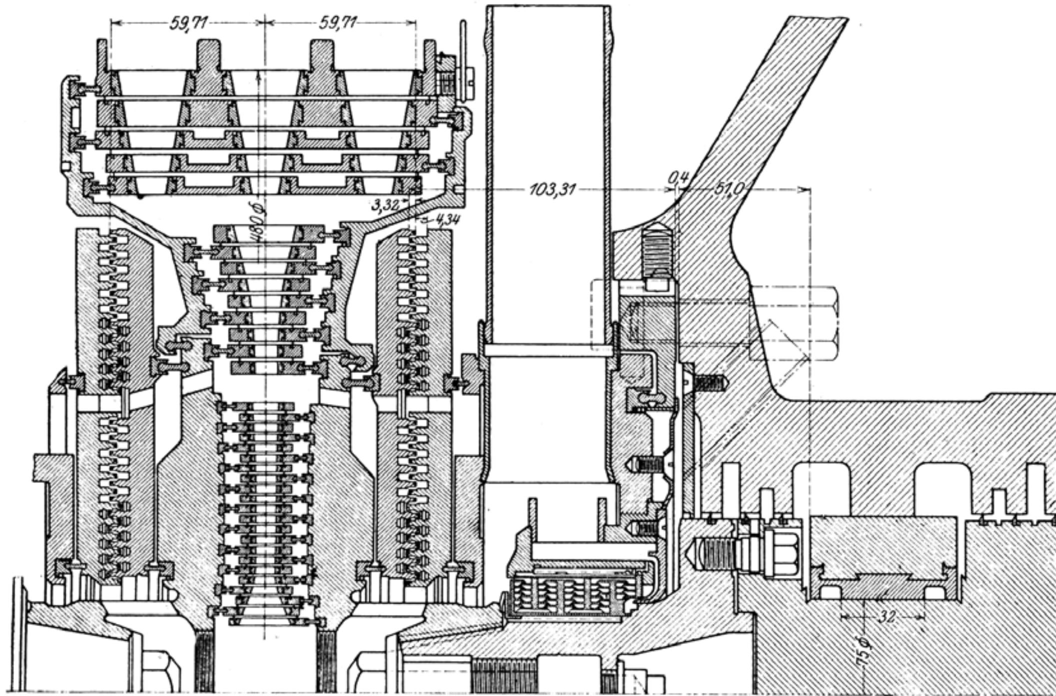


Abb. 746. Turbine von 400 kW-Leistung bei 5400 Umdr./min.

Die Leiträder sind mit den Leitschaufeln verschweißt, die Rückenwand D wird durch vier radiale, ein Gleiten ermöglichende Bolzen E gegen das Gehäuse so abgestützt, daß dessen Wärmedehnung von der Dehnung der Rückwand unabhängig ist. Schrauben F dienen zur Versteifung der sonst leicht einer Federung ausgesetzten Leitradwände. Die Laufscheiben S_1 sind durch die mit Schrumpfung übereinandergeschobenen Ringe S_2, S_3 versteift; im übrigen gewissermaßen fliegend, nur durch die schwachen Stege Z mit den Mittelscheiben verbunden. Diese selbst sind mit Rücksicht auf die Verschiedenheit der Temperatur beim Eintritt und Austritt nochmals geteilt.

Eine neuartige Nabenversteifung der Axialräder wird nach Abb. 747a für eine ähnlich große Turbine durch die sägezahnförmig eingreifenden Seitenringe erzielt. Die Ringe werden warm so aufgeschrumpft, daß im Betriebe eine tunlichst große Kraft abgefangen wird, wobei sich wohl eine ähnliche Spannungsverteilung ergeben wird, wie bei einem Schraubenbolzen, wo die Kraft vom Mantel durch die Gewindezähne auf den vollen Bolzen übergeht. Das Rad ist für eine Drehzahl von 3600 Umdr./min bestimmt, was ungemein hohe Beanspruchungen im Gefolge haben wird.

Beachtenswert ist das in Abb. 747 an jedem Ende auf je 1,5 mm im kalten Zustande angesetzte Spiel zwischen der Gehäusewand G_1 G_2 und dem Flansch der inneren Dampfzuführung. Der Zwischenraum ist so berechnet, daß die Fuge im warmen Zustand geschlossen wird. Vorhergehend wird durch das Stauffergefäß Mennigekitt hineingepreßt und dann die Schrauben fest angezogen. Die Zwischenräume H werden mit Wärmeschutzmasse ausgefüllt. Die radial verlaufenden Entlastungslabyrinthe finden bei K eine axiale Fortsetzung. Abb. 748 stellt den Grundriß der Turbine bei teilweise weggeschnittenem Gehäuseoberteile mit den rechts und links angekoppelten Dynamomaschinen dar. Bei L_1 L_2 ist die Welle durch ihre Lagerschalen bedeckt. Abb. 749 ist eine Außenansicht mit der Meßgeräteausrüstung. A ist das Hauptabsperrventil, B_1, B_2 sind die Überlastventile, C die Ableitung des Stopfbüchsendampfes zum Speisewasservorwärmer, P_1 bis P_4 Ölüberläufe von den Hauptlagern her, E die Drahtseilübertragung vom Sicherheitsregler zum Absperrventil.

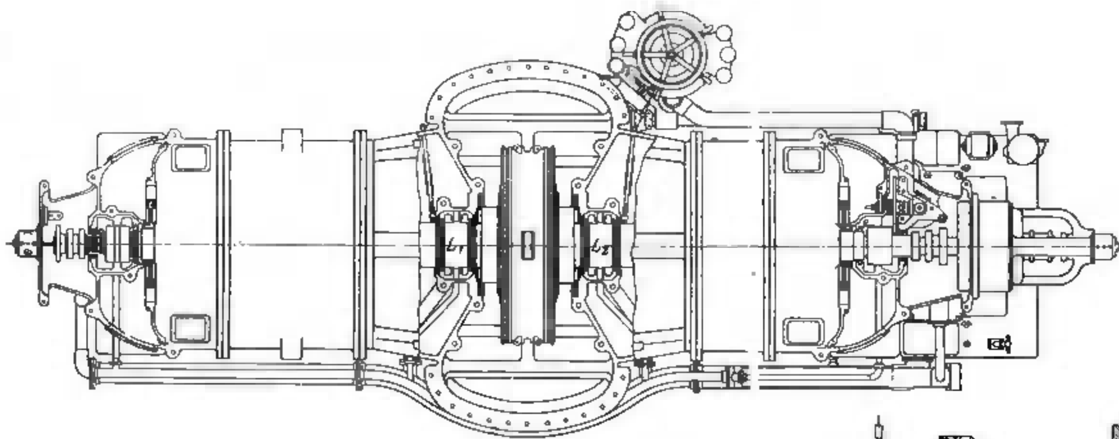


Abb. 748. Grundriß zu Abb. 747.

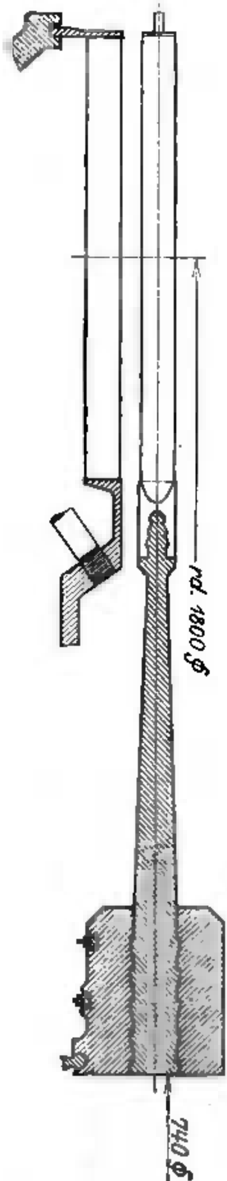


Abb. 747a. Nabenversteifung mit Sägenzahneingriff.

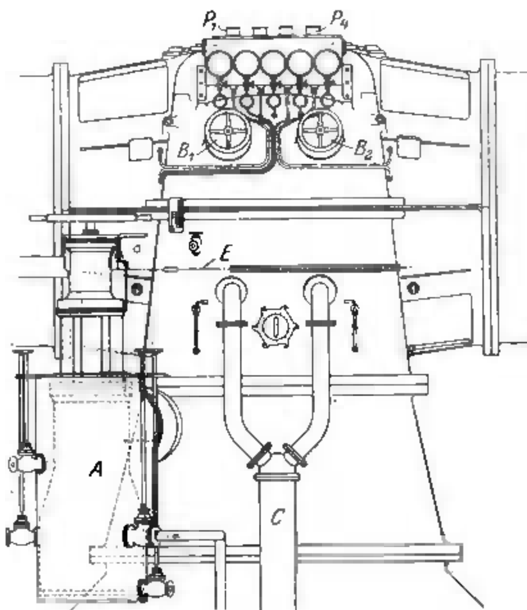


Abb. 749. Ansicht und Meßgerätausrüstung.

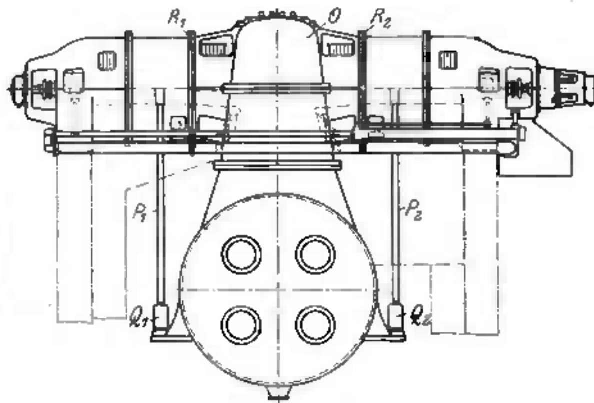


Abb. 749a. Abfangen des Gewichtes durch Stützen und Federn.

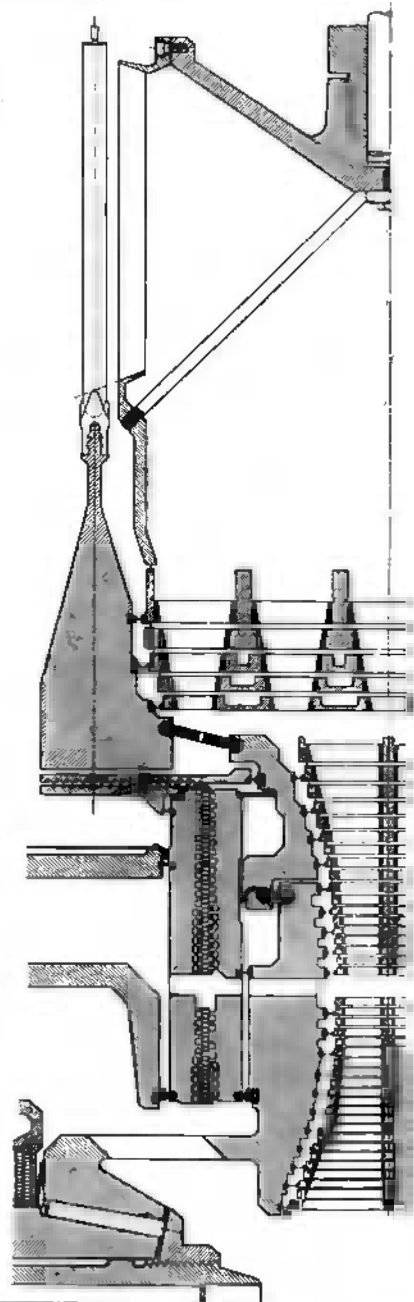


Abb. 750. Entwurf für 19 bis 25000 kW Leistung bei 1500 Umdr./min.

Abb. 749a zeigt den Zusammenbau einer unwesentlich größeren Einheit mit dem Kondenser, wobei dieser das Gewicht der Turbine unmittelbar aufnimmt. Das Gewicht

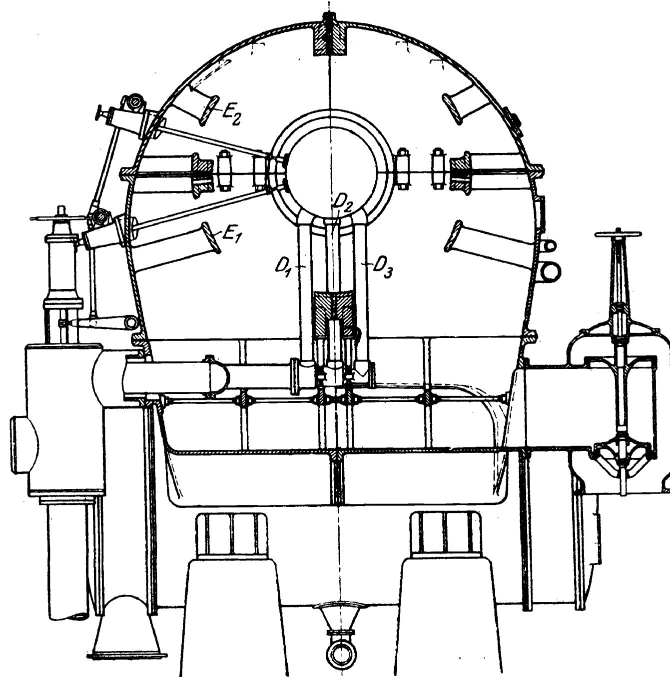


Abb. 751. Querschnitt.

der Stromerzeuger wird im wesentlichen durch die Stützen P_1, P_2 abgefangen, deren untere Enden auf Federpuffern Q_1, Q_2 aufruhen. Auf diese Weise ist es möglich, den Gehäuseoberteil O abzuheben, ohne daß in den Verbindungsflanschen R_1 R_2 ein Klaffen oder ein Zwängen von Bedeutung entsteht.

Daß die Bauart mit axialen Stufen auch ganz große Leistungen zu bewältigen imstande ist, wird durch Abb. 750 erwiesen, die die Studienzeichnung einer Turbine mit 29000 kW Normal- und 35000 kW Höchstleistung bei 1500 Umdr./min wiedergibt. Die Durchmesser dieses Entwurfes sind fast genau das Doppelte derjenigen von Turbine Abb. 747, so daß die Umfangsgeschwindigkeiten der äußersten radialen und axialen Stufen übereinstimmen. Da jedoch 45 gegenüber 34 radialen Stufen vorgesehen sind, wird das Verhältnis von Dampf zu Umfangsgeschwindigkeit ein günstigeres. Abb. 751 ist ein Querschnitt durch das Gehäuse; die dreifach geteilten Dampfrohre D_1 D_2 D_3 bilden die Hälfte der Zuleitung, die ähnlich auch bei Turbine Abb. 747 angeführt ist. E_1, E_2 sind Versteifungs- und Führungsrippen. Wie Abb. 751a zeigt, macht die große Weite des Auspuffrohres die Anordnung von zwei Kondensatoren erforderlich

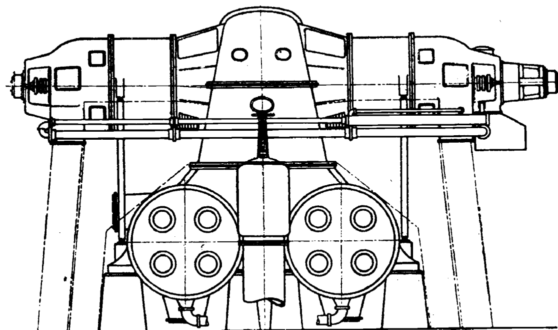


Abb. 751a. Zweikondensatoranordnung.

Lichtbild 752 veranschaulicht die äußere Erscheinung einer 5- bis 7000 kW-Turbine. Lichtbild 752a läßt erkennen, wie nach der Entfernung des Gehäuseoberteiles der Turbinenläufer herausgehoben werden kann. Zu diesem Behufe wird die dargestellte Einspannvorrichtung mit dem freien Flansche des Dampfzuführungsgehäuses fest verschraubt. Dann werden die Kupplungsschrauben gelöst und die beiden Läufer in unveränderter relativen Lage herausgehoben. Durch besondere Vorrichtungen werden die Läufer gegen die Gehäuse abgestützt, um die Labyrinthabdichtungsbleche, deren Tragkraft nicht genügend groß wäre, vor Beschädigung zu schützen. Daraufhin wird ein zentraler Dorn eingesetzt und der Kupplungs-

flansch selbst in geeigneter Weise durch Rahmen gefaßt. Abb. 752b zeigt die entsprechende Spannvorrichtung für ein mit axialen Stufen versehenes Getriebe für eine Turbine von 7000 kW Leistung.

Die Regelung beruht auf reiner Drosselung und Dampfzuschaltung bei Überlastung mittels besondern Ventils.

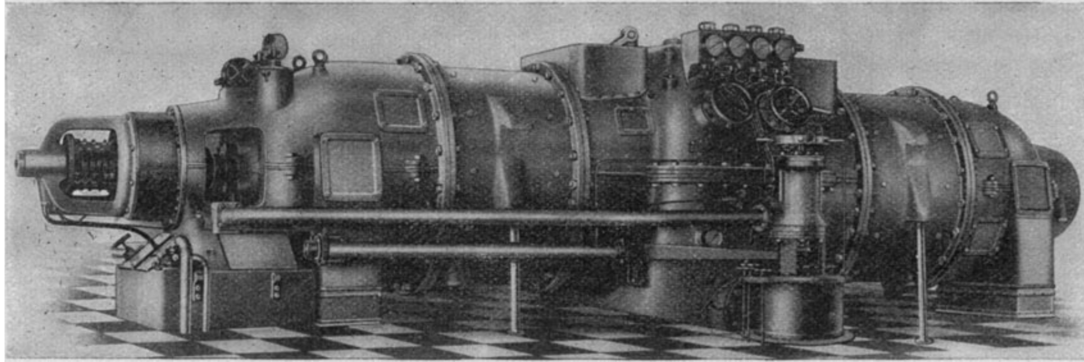


Abb. 752. Ansicht einer 5000 bis 7000 kW-Turbine.

Konstruktion der Einzelteile.

Die Schaufelkonstruktion und Herstellung wurde ausführlich in Abschnitt 70 besprochen.

Die Laufscheiben werden wie die Zusammenstellungszeichnungen zeigen, bei großen Einheiten aus mehreren Stücken hergestellt und mittels Ljungströmscher Ausdehnungsringe verbunden, so daß

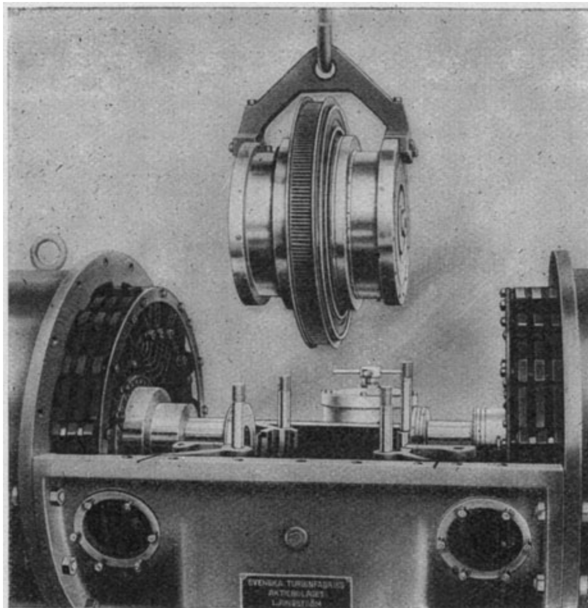


Abb. 752a. Spannvorrichtung für Ein- und Ausbau.

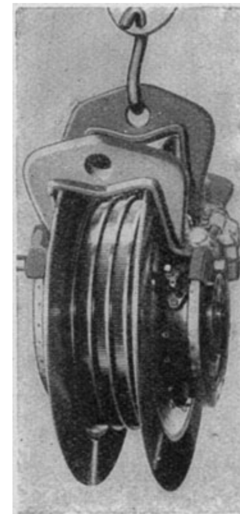


Abb. 752b. Spannvorrichtung bei axialen Stufen.

sich ihre Wärmedehnung ohne gegenseitige Behinderung vollziehen kann. Die Welle ist mit Rücksicht auf Ein- und Ausbau knapp hinter dem Traglager durch einen Kupplungsflansch unterbrochen. Auf diesem Wellenstumpf sitzen die Scheiben fliegend mit konischem Sitz und werden durch Schraubenmuttern festgehalten.

Die für **Selbsteinstellung der Scheiben** bestimmten **Labyrinthe** bestehen nach Abb. 753 aus zwei Gruppen. In der äußeren Gruppe wird bei einem axialen Auseinanderziehen der Labyrinthscheiben infolge Heraustretens der Kante 1 über die Kante 2 der Querschnitt vergrößert. Beim axialen Zusammenschieben bleibt der Querschnitt, wie ersichtlich, unverändert. Am inneren Teile wird demgegenüber der Querschnitt durch die Kante 3 infolge Vorbeigleitens an der Zahnkante 4 beim Ineinanderschieben vergrößert, beim Auseinanderschieben nicht verändert. Dies gilt in gleicher Weise für Kante 5 und 6 und sinngemäß abgeändert für Kante 7 und 8. Von den gegeneinander arbeitenden Kanten wird

die eine durch einen in U-Form gebogenen Blechstreifen gebildet, den man im zugehörigen Zahn durch einen eingestemmten Draht festhält. Es kann also beim Streifen wohl ein Verschleiß, aber kein Heißlauf auftreten. Die **Selbsteinstellung** kommt hiernach folgendermaßen zustande. Es sei *A* die bewegte, *B* die ruhende Scheibe. Ist infolge stärkerer Belastung der Druck auf der rechten Seite der bewegten Scheibe gestiegen, so wird sie nach links verschoben und der Querschnitt im unteren Teile nimmt zu. Im oberen Teile bleibt er unverändert. Somit strömt im unteren Teile mehr Dampf zu, der Gegendruck steigt bis sich Gleichgewicht eingestellt hat. Das Gegenteil findet statt bei einer Entlastung der Maschine. Da indessen bei stoßweiser Belastung die Scheibe durch den erhaltenen Impuls in Schwingung geraten könnte, ist als **Sicherheitsvorrichtung** je eine **Ölbremse,** Abb. 754, am Ende der beiden Dynamowellen angeordnet. Es bedeutet *A* das Wellenende, *B* den sich mitdrehenden Mittelteil des Kugellagers *C*, dessen Gegenplatten im Kolben *D* untergebracht sind. Dieser ist anscheinend gegen Drehung nicht gesichert, könnte also infolge der Kugel- und Ölreibung in eine langsame, für die Einstellung günstige Umlaufbewegung geraten. Sobald die Welle axial verschoben wird, muß der Ölinhalt des Bremszylinders auf der sich verkleinernden Seite unter einem der schwachen Kolbenringe *G*, durch die im Kolben angebrachten Bohrungen *H* hindurchgezwängt werden, worauf er durch die hohle Kolbenstange *L* in den Ablauf *K* gelangen kann. Die andere Kolbenseite wird inzwischen durch das entsprechende Kugelventil *F*

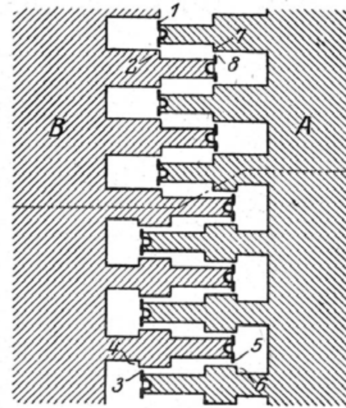


Abb. 753. Labyrinth mit Selbsteinstellung.

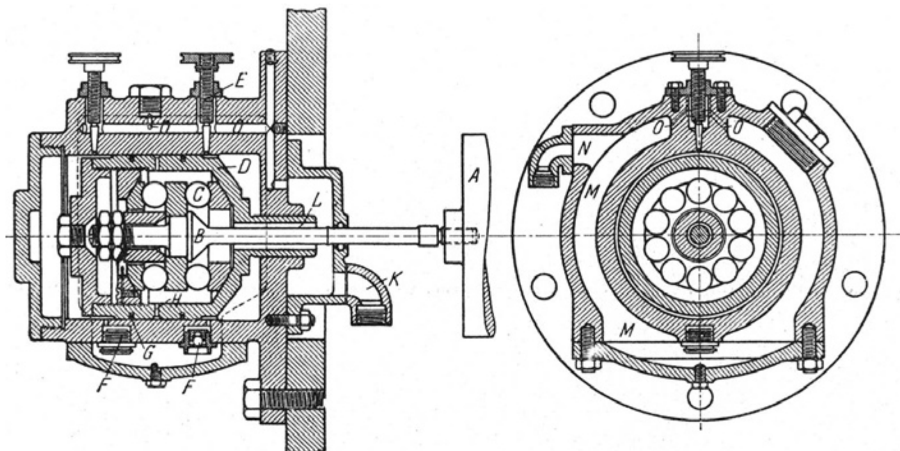
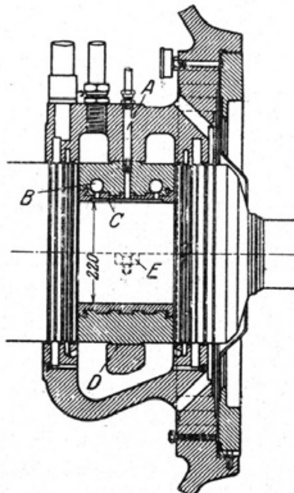


Abb. 754. Sicherheitsölbremse am Wellenende.

sich mit Öl anfüllen. Dieses fließt ihm mittels Leitung *N* aus dem Raume *M* zu, in dem eine genügende Ölmenge enthalten ist, um den allenfalls vorhandenen Luftbläschen den Aufstieg und



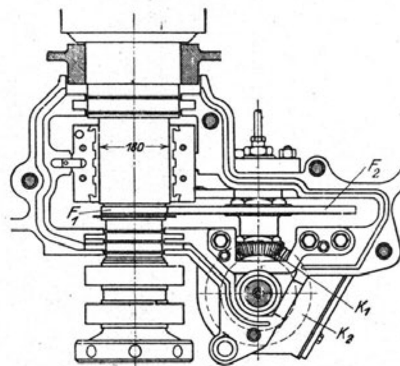


Abb. 755. Lager-Auf- und Grundriß. Abb. 755 a.

Ablauf durch Bohrung O zu gestatten. Die Kegelstifte E dienen zum Entlüften des Bremszylinders bei Inbetriebsetzung.

Die Wellenstopfbüchsen sind in Abschn. 97 besprochen worden. Die Wellenlager Abb. 755 besitzen massige mit Weißmetall ausgefütterte Gußeisenschalen, die auf schmalen Stützflächen D aufruhen. Das Öl wird durch Bohrungen B und wagerecht in der Trennungsfuge verlaufende Nuten, wie auch im höchsten Punkte zugeführt. E sind in die Unterschale eingelegte Keile, um die Drehung zu verhindern. Die Schalen werden durch (nicht dargestellte) Schraubenbolzen zusammengehalten. Abb. 755a stellt den Grundriß des Lagers samt Reglerantrieb durch Stirnräderpaar F_1, F_2 und Kegelräder K_1, K_2 dar. Das Lagerspiel beträgt rd. 1,2 v. T. Leitung A (Abb. 755) stellt den Ölüberlauf zum Sicherheitsbehälter (Abb. 756) dar. Darin bedeutet B ein Schauglas, D den Überlauf, der in Funktion kommt, wenn Behälter C aufgefüllt ist. Sollte die Schmierölzufuhr aus irgendeinem Grunde versagen, so entleert sich Behälter C durch die kleinen Bohrungen E gegen das Lager hin, und vermag die Turbine während der Ablaufszeit (da auch das Einlaßventil inzwischen selbsttätig geschlossen wurde) mit Öl zu versehen. Jedes der Hauptlager hat seinen eigenen Sicherheitsbehälter.

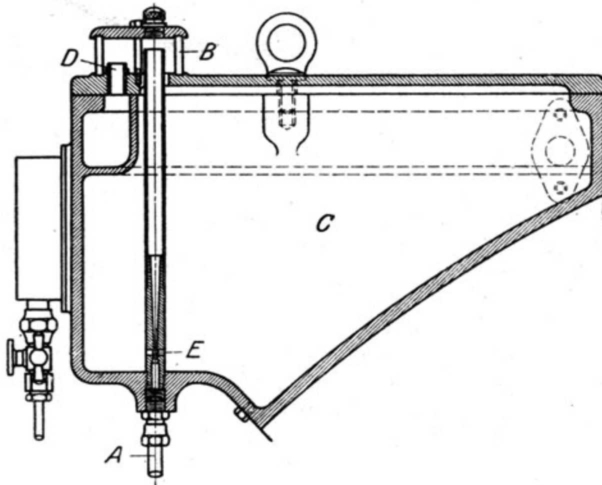


Abb. 756. Sicherheits-Ölbehälter.

Als Regler wird nach Abb. 757 der bei der de Lavalturbine beschriebene Evolventregler benutzt. Seine Drehzahl ist 500 i. d. Min. Mit der Reglerwelle ist, wie üblich, die Zahnradpumpe E verbunden, die dazu benutzt wird, das Reglergewicht aufzunehmen, zu welchem Zwecke der obere Wellenhals F_2 einen größeren Durchmesser als F_1 erhält und so den gewollten Auftrieb nach oben erzeugt. Der Steuerschieber B des Kraftgetriebes läuft mit der Reglerspindel ständig um, wodurch die

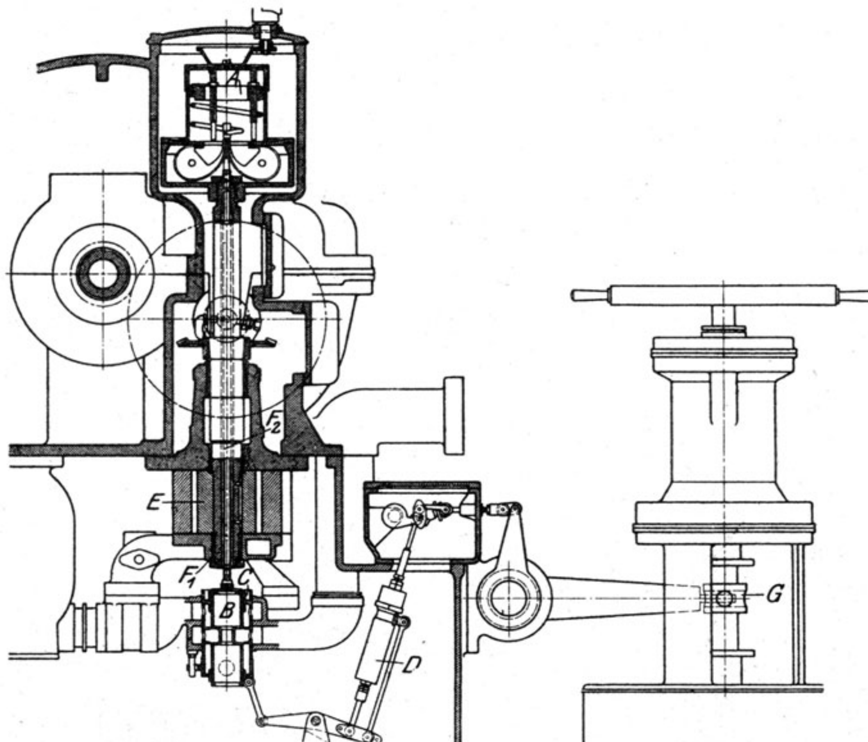


Abb. 757. Reglergetriebe.

axiale Reibung bei einer Verstellung so gut wie auf Null herabgesetzt wird. C ist eine der Rückführung dienende bewegliche Hülse, die unter Zwischenschaltung der Isodromvorrichtung D mit dem bei G angreifendem Hauptdrosselventil verbunden ist. Nach Abb. 758 ist das letztere (K) mit der Haupt

abschließung H vereinigt. L ist der Kraftzylinder, M eine Rolle, über die ein zum Sicherheitsregler führendes Drahtseilchen gespannt wird; N die Dampfzuleitung, P der Wasserabscheider, Q ein Sieb, R die Leitung zur Turbine.

Das **Isodromgetriebe** besteht nach Abb. 757a aus Zylinder D, der mit dem Antriebszapfen der Stange A gemäß Schnitt I II starr verbunden ist. Darin gleitet Kolben B und in diesem der innerste Kolben C, wobei die dünne mittlere, mit D starr verbundene Kolbenstange mittels kleiner Nuten (bei H) eine

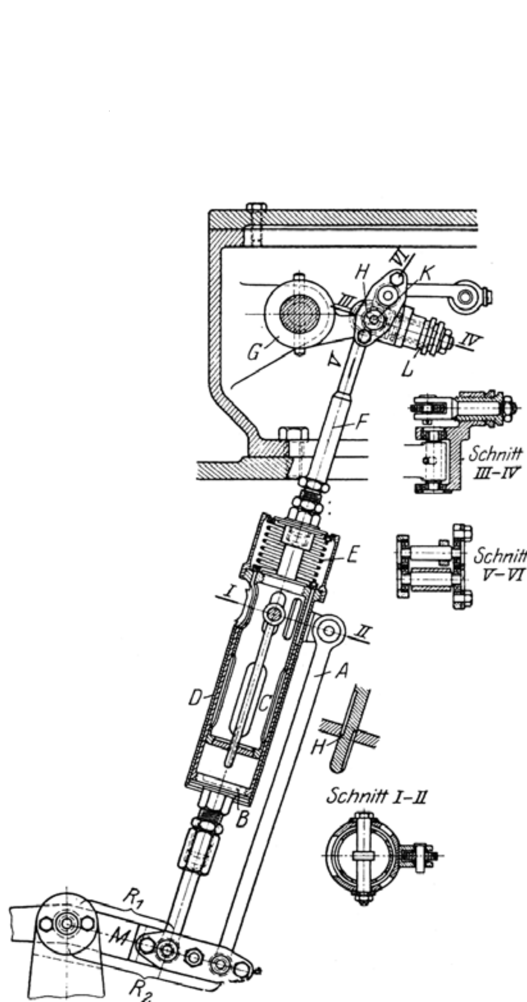


Abb. 757a. Isodromgetriebe.

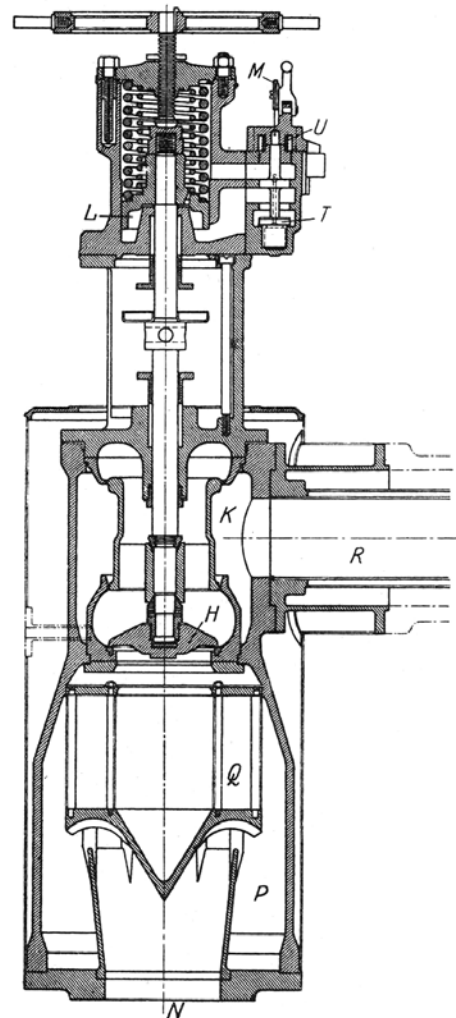


Abb. 758. Drosselventil und Hauptabschließung.

Verbindung der Hohlräume von B und C vermittelt. E ist eine Spannfeder, Stange F ist mit C starr verbunden. Bei langsamer Verstellung bewegt sich A als wäre sein Zapfen mit F starr verbunden. Bei rascher Verstellung ist der Bremswiderstand so groß, daß C und B, als wenn sie starr verbunden wären, den Hebel M am kleinen Halbmesser R_1 angreifend stark verstellen, wodurch der Rückführschieber Abb. 757 den Steuerschieber bald einholt und der Kraftkolben stehen bleibt. Hierdurch wird der Angriffspunkt von A vermöge des größeren Halbmessers R_2 zu einer stärkeren Auslenkung als F gezwungen; Feder E wird zusammengedrückt und ist bestrebt, A zu heben, wobei C als feste Auflage dient. Dieses Heben kann wegen der Bremswirkung nur mit kleiner Geschwindigkeit erfolgen; der Rückführungsschieber wird etwas gesenkt, was auf dasselbe hinausläuft, als ob der Steuerschieber gehoben worden wäre, so daß der Kraftkolben von neuem in Bewegung gerät und Stange F weiter sinkt. Dieses Überregulieren bedeutet weitern Kraftzufluß und Steigen der Geschwindigkeit, bis endlich Feder E ihre ursprüngliche Länge angenommen und dadurch die Geschwindigkeit den Betrag erlangt hat, der der vorgesehenen Ungleichförmigkeit des Reglers zukommt. Wäre diese $= 0$, so hätten wir Zurückregelung auf unveränderliche Geschwindigkeit. Es liegt hier eine sehr anziehende Lösung der Isodromregelung vor. Die Verstellung der Drehzahl geschieht durch Verdrehung des Hebels G, wodurch die mittlere Reglerstellung verändert wird. Diese Verdrehung kann von Hand oder durch einen kleinen Dynamo vom Schaltbrett aus bewerkstelligt werden. Durch Schraube L kann die Länge des Hebelarmes $\overline{HK}$ verändert werden, was den ausgenutzten Regulatorhub, also die **Ungleichförmigkeit** beeinflußt.

Der Sicherheitsregler besteht nach Abb. 759 aus dem in Spindelform ausgeführten Schwunggewicht *B* und den Biegungsfedern *A*, die durch die Schneiden *C* eine radial nach einwärts wirkende Kraft auf das Schwunggewicht ausüben. Das Ganze ist in einer Bohrung des Wellenflansches untergebracht. Der Regler ist, wie ersichtlich, labil. Die Auslösedrehzahl wird durch Schraube *E* beeinflußt. Verstellt man das Schwunggewicht nach auswärts, so wird die Auslösung früher erfolgen und umgekehrt.

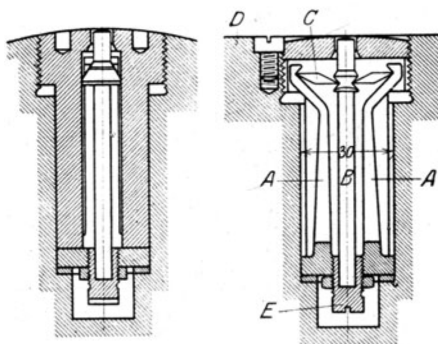


Abb. 759. Sicherheitsregler.

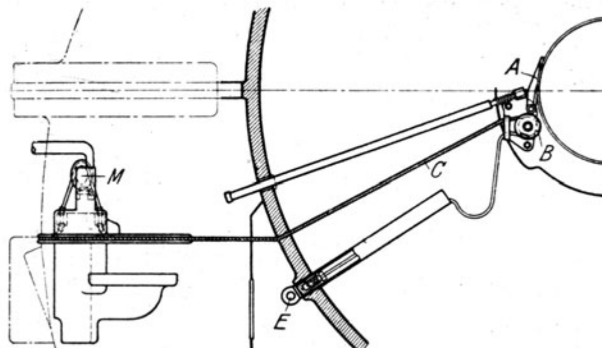


Abb. 759a. Auslösung des Hauptventiles durch den Sicherheitsregler.

Die Übertragung auf das Hauptventil erfolgt gemäß Abb. 759a, indem eine mit Hebel *A* verbundene Sperrklinke die Rolle *B* frei läßt, an deren Umfang das Drahtseilchen *C* befestigt ist. Dadurch wird die vom Seile umschlungene Rolle *M* ebenfalls frei und erlaubt dem Ventil *T*, Abb. 758, unter der Wirkung der Feder *U* hinaufzuschnellen und so dem Hauptabschlußventil sich zu senken. Handgriff *E* dient zum Wiederanspannen des Seiles *C* und Einschnappen der Sperrklinke *A*.

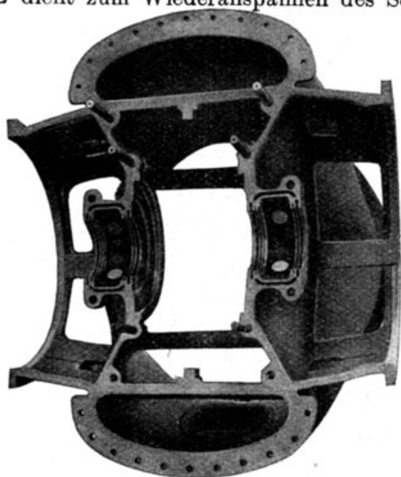


Abb. 760. Gehäuse Unterteil.

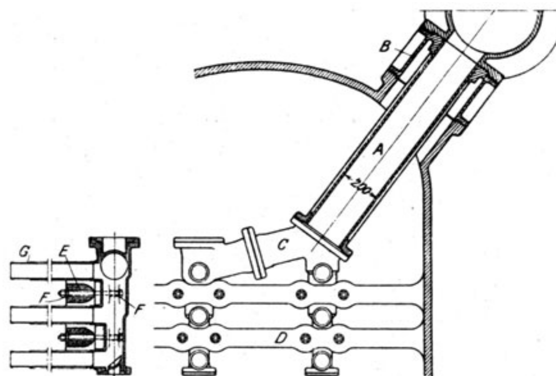


Abb. 761. Verzweigung der Dampfleitung.

Das Überlastventil ist in Abb. 747 bei *B* dargestellt; es wird vom gleichen Kraftkolben angehoben wie das Hauptventil, wenn dessen Hub ein gewisses Maß überschritten hat. Das eingeschaltete Kugelgelenk soll Klemmungen infolge der Wärmeunterschiede der einzelnen Teile unmöglich machen.

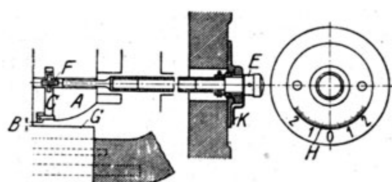


Abb. 762. Messen der axialen Wellenlage.

Der Unterteil eines größeren Gehäuses wird nach Lichtbild 760 mittels vier durchgehender Längsrippen versteift. Man erkennt wagerechte Schlitze in der Verbindung zum Dynamoflansch zum Zwecke einer Erhöhung der Elastizität. In Abb. 761 ist die Dampfzuleitung der 10000/14000 kW-Turbine dargestellt. Die Hauptleitung *A* mit 200 mm lichter Weite gabelt sich zunächst in zwei, jede davon in drei weitere Stränge zu je 80 mm Durchm. Beachtenswert ist, daß diese Leitungen sämtlich inwendig bearbeitet sind um sicher zu sein, daß keine Spuren von Formsand zurückbleiben, der in der Turbine (in den Labyrinthen) Schaden stiften könnte. Die Befestigung an den Längsrippen *D* erfolgt mit Rücksicht auf Wärmedehnung durch Schrauben mit Kugelkopf und kugeliger Unterlagscheibe. Die Enden *G* der Zuleitungsrohre werden in das Zuleitungsgehäuse ohne Dichtung eingepreßt und sind mit einer kugeligen Verstärkung versehen. Ins Gehäuse ist ein kurzes Rohrstück an beiden Enden so eingewalzt, daß in der Mitte eine nachgiebige Stelle übrigbleibt, die den Druck von G aufnimmt.

Zahlentafel 1.

Versuchsergebnisse Ljungströmscher Dampfturbinen.

Normalleitung:	kW	750		1000			2000			5000	
Besteller:		Randers Elektr.-Werk		Donets			Luton			Kuschwinsky	
Konstruiert für einen Überdruck von	kg/qcm	10	10	10,5	10,5	10,5	7	7	7	12	12
Abs. Druck vor dem Drosselventil	kg/qcm	13,74	15,10	12,79	13,53	13,22	15,77	14,87	16,8	10,10	12,7
„ „ nach dem Drosselventil	kg/qcm	7,0	11,38	10,68	10,6	10,99	9,2	6,08	1,75	3,69	3,1
„ „ im Überlastungsventil	kg/qcm	2,5	4,45	3,775	3,76	3,9	4,09	2,52	0,7	1,0	0,9
„ „ im Auslaß	kg/qcm	0,0276	0,0285	0,059	0,0577	0,0632	0,0859	0,0585	0,02325	0,0387	0,0217
Temperatur vor dem Drosselventil	°C	306,5	326,7	—	—	—	—	—	—	—	—
„ nach „ „	°C	298,5	324,9	340,5	298	322,7	353,4	349,5	304,5	339	326,3
„ im Auslaß	°C	23,2	23,75	—	—	36,7	—	—	—	—	—
„ „ Kondensator	°C	23,1	23,6	—	—	—	—	—	—	—	—
„ des Kühlwassers am Eintritt	°C	0,1	0,1	—	—	0,3	—	—	—	0,333	—
„ „ „ „ Austritt	°C	4,70	7,8	—	—	30,4	—	—	—	4,54	—
„ „ Kondensates	°C	4,30	9,2	—	—	36,1	—	—	—	2,32	—
Umdrehungen i. d. Min.		3000	3000	3000	3000	3000	3000	3000	3000	3000	3000
Kondensat	kg/st	3028,2	5474,2	5035,1	5124,6	5308	13996,5	8608,7	2496,2	6874	5999
Leistung der Stromerzeuger	kW	545,9	1065,7	972,6	928,35	992,8	2700,7	1587,6	291,3	1130,47	1011,9
„ v. H. der Vollast	v. H.	54,5	106,5	97	93	99	90	53	10	23	20
Dynamowirkungsgrad	v. H.	92,4	94,7	94,6	95,47	94,67	94,5	91,9	69,0	0,907	89,7
Adiabatisches Wärmegefälle, bez. auf Zustand nach Drosselvent.	kcal	217	237	218	208	212	207	201	179,0	196	204,3
Dampfverbrauch	kg/kW-st	5,55	5,13	5,17	5,52	5,42	5,18	5,46	8,56	6,08	5,92
Thermodynamischer „Brutto“-Wirkungsgrad nach Ljungström (ohne Auslaßverlust)	v. H.	73,73	77,45	80,9	79,55	80,35	88,65	85,05	81,25	80,38	80,6
Thermodynamischer Wirkungsgrad, bez. auf Zustand nach Drosselvent. und elektrischer Leistung (ohne Abzug der Kondensatorarbeit)	v. H.	71,3	70,6	76,2	75,7	76,0	81,0	78,3	56,1	72,1	71,8

Abb. 762 stellt die beachtenswerte Vorrichtung zum Nachprüfen des axialen Lagerspielraumes dar, *A* ist die Lagerschale, *G* der Wellenflansch, *B* das nachzumessende Spiel. Man prüft durch Heranschieben des mit Zahnstangensegment *C* versehenen Tasters mittels Zahntriebes *F* und Spindel *E*, deren Zeiger *K* an Skala *H* das Spiel abzulesen gestattet.

Über den Dampfverbrauch der Ljungström-Turbine gehen mir die in Zahlentafeln 1 und 2 angeführten Mitteilungen zu. Die thermodynamischen Wirkungsgrade sind mit der Entropietafel der 4. Aufl. ermittelt worden.

Zahlentafel 2.

Versuchsergebnisse Ljungströmscher Dampfturbinen.

Aufstellungsort u. norm. Leistung:		Helsingfors, 5000 kW						Västeras, 5000 kW			
Abs. Druck vor Drosselventil	at abs.	12,73	13,03	13,35	13,97	13,58	13,7	14,76	14,98	14,82	15,62
„ „ nach „	at abs.	10,24	10,45	10,48	11,15	7,53	4,09	2,135	7,60	13,35	13,28
„ „ im Abdampfrohr	at abs.	0,043	0,036	0,027	0,05	0,021	0,018	0,00	0,018	0,029	0,036
Temperatur vor Drosselventil	°C	312,8	301,0	297,4	287,9	264,2	269,4	346,0	—	366,6	384,0
„ nach „	°C	311,3	300,2	295,8	286,3	256,3	255,8	298,0	266,0	334,0	356,0
Leistung des Stromerzeugers	kW	6259	5205	3922	3862	2612	1231	510	2539	5039	6286
Dampfverbrauch	kg/kW-st	5,55	5,47	5,07	5,45	5,55	6,07	6,95	5,42	4,66	4,84
„Brutto"-Wirkungsgrad nach Ljungström (ohne Auslaßverlust)	v. H.	77,4	77,1	79,9	79,1	78,0	78,2	—	79,8	83,7	80,6
Adiab. Gefälle, bez. auf Zustand nach Drosselventil .	kcal	219,0	222,0	229,0	211,0	215,5	202,0	—	223,0	242,5	243,0
Thermodyn. Wirkungsgrad, bez. auf Zustand nach Drosselventil	v. H.	70,7	71,1	73,9	74,7	71,85	70,1	—	71,1	76,0	73,0
Adiab. Gefälle, bez. auf Zustand vor Drosselventil .	kcal	226,0	228,5	236,0	216,0	234,0	240,0	—	—	255,0	255,0
Thermodyn. Wirkungsgrad, bez. auf Zust. vor Drosselventil	v. H.	68,5	68,8	71,8	73,0	66,2	59,0	—	—	72,3	69,6

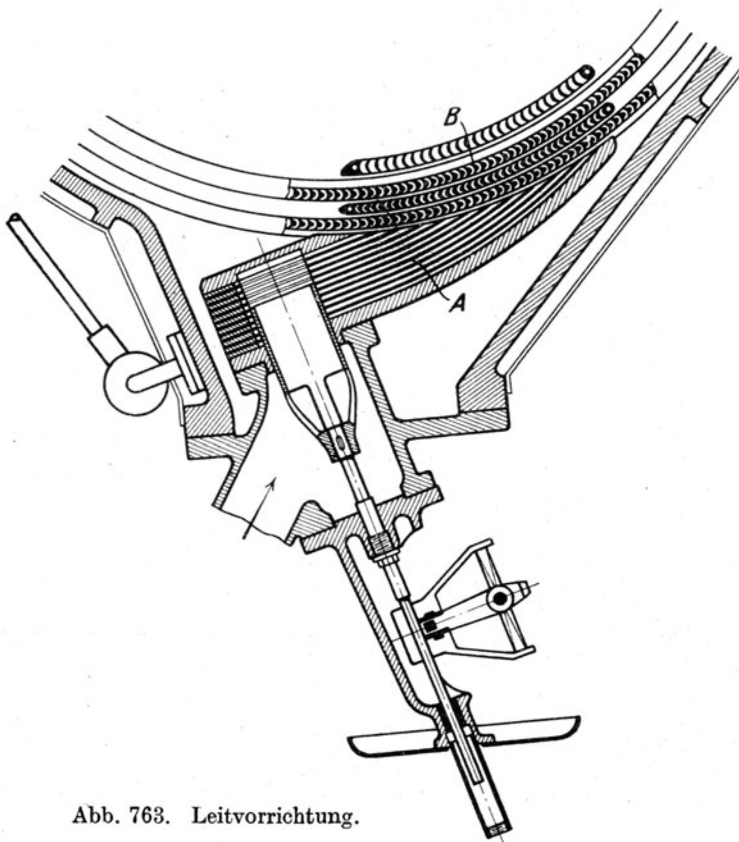


Abb. 763. Leitvorrichtung.

128. Die Turbine von Zvoniček.

Die früher von der Böhmisch-Mährischen Maschinenfabrik, Prag, gebaute Zvoničekturbine arbeitete ebenfalls mit bloß radialer Beaufschlagung und bestand aus einem zweikränzigen Gleichdruckrad als Hochdruckstufe und einem mehrstufigen Überdruckrad als Niederdruckstufe.

Besonderes Augenmerk wurde den Folgen der Wärmedehnung gewidmet. Der Dampfeintritt erfolgt von unten in das aus Blechen bestehende Düsensystem *A* (Abb. 763), innerhalb dessen ein entlasteter, in steter Schwingung um seine Achse erhaltener Kolbenschieber die Zuflußmenge regelt. Das fliegende Gleichdruckrad *B* ist mit der Niederdruckscheibe B_1 verschraubt (Abb. 764). Letztere dichtet gegen die feststehende Scheidewand *C* mittels Labyrinthnuten an einem so gewählten Zwischendurchmesser ab, daß sich die axialen Dampfdrücke nahezu aufheben.

Ein allfälliger Druckrest wird durch das Kammlager aufgenommen. Die Zwischenwand wird auf der einen Seite durch den Arbeitsdampf, auf der anderen durch den Undichtheitsdampf, der eine nur

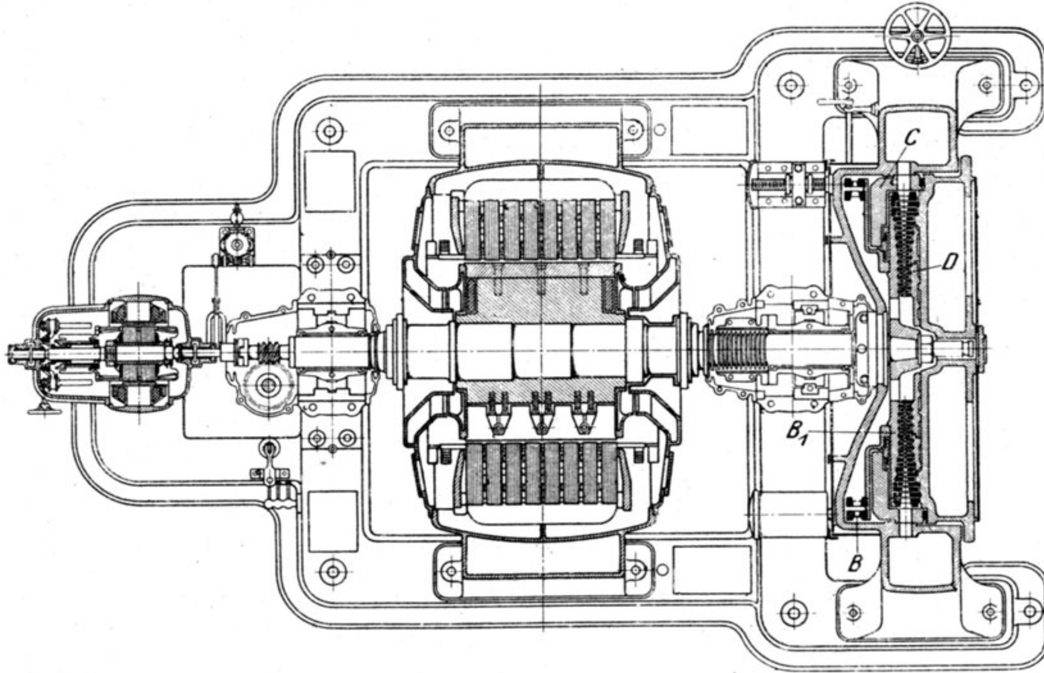


Abb. 764. Zvoniček-Turbine.

wenig verschiedene Temperatur hat, geheizt, daher rechnet man auf geringes Verziehen und auf gute Einstellbarkeit des Labyrinthspieles im Betrieb. Die Leitschaufelräder D werden desgleichen in eigens vorgesehenen Aussparungen auf der Rückseite von Dampf bespült und so befestigt, daß der eventuellen Krümmung des Deckels entgegengearbeitet wird. Endlich wird das ganze Turbinengehäuse mit dem festen Lagerständer durch **hohle, heizbare Bolzen** gleitbar verbunden. Die Höhlung der letzteren ist mit dem Dampfraume hinter der ersten Stufe verbunden, der Befestigungspunkt, d. h. die Länge der Bolzen einstellbar gemacht, so daß bei richtiger Wahl das Gehäuse der Wärmeausdehnung der Welle genau zu folgen vermag. Die Schaufeln sind beidseitig in Ringen gehalten, die die ganze Fliehkraft aufzunehmen bestimmt sind. Die Zeichnungen beziehen sich auf eine Turbine von 750 kW bei 1500 Uml./min, an der die äußerste Umfangsgeschwindigkeit etwa 110 m/sek betragen würde.

128a. Turbine von Lindmark.

Die Turbine von Lindmark[1]) war ein eigenartiger Versuch, die kinetische Energie des aus dem Laufrad tretenden Dampfes bei vielstufigen Turbinen in Druckenergie zurück zu verwandeln, um die Stufenzahl bei sonst gleichen Verhältnissen (gleicher Umfangsgeschwindigkeit) verkleinern zu können. Je größer c_1 ist, um so mehr Gefälle wird in der Tat mit einem bestimmten u umgesetzt, um so größer ist aber auch der Anlaßverlust. Gelingt es diesen durch einen „Diffusor" zu beseitigen, so hat man an der Stufenzahl gewonnen.

Der Arbeitsvorgang kann im Entropie-Schaubild für eine Gleichdruckturbine wie folgt dargestellt werden (Abb. 765).

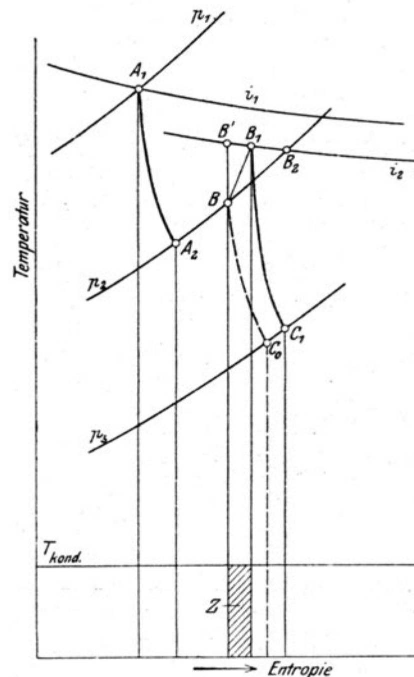


Abb. 765. Diffusorwirkung nach Lindmark.

[1]) Früher leitender Konstrukteur bei de Laval.

Die Entspannung im ersten Leitrad führt vom Anfangszustand A_1 mit kleinen Verlusten zu A_2 auf dem Zwischendrucke $p_2 =$ konst. B sei der Zustand beim Austritt aus dem Laufrad. Die adiabatische Verdichtung mittels der kinetischen Energie des Auslasses würde beispielsweise nach B' führen, die

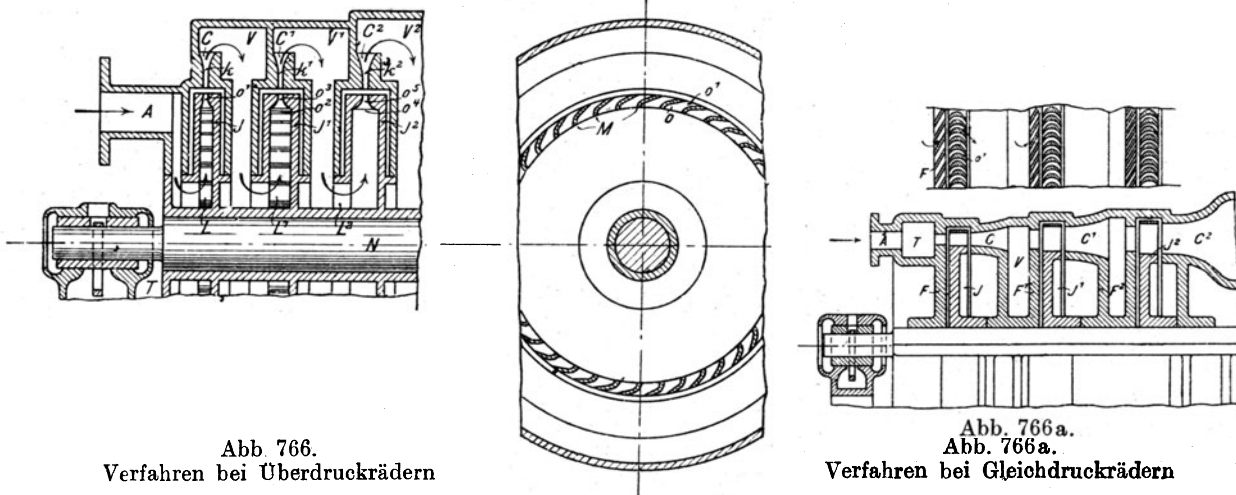


Abb. 766. Verfahren bei Überdruckrädern

Abb. 766a.
Abb. 766a.
Verfahren bei Gleichdruckrädern

wirkliche, mit Verlusten verbundene nach B_1. Die Fläche Z zwischen den Adiabaten durch B und B_1, der Temperatur des Kondensators und der Nullinie bildet den eigentlichen Verlust des Lindmark-Prozesses. B_1 bildet den Ausgangspunkt für die Ausdehnung in der nächsten Stufe, wo C_1 den Zustand am Düsenende bedeutet. Hätten wir in B den Dampf unmittelbar gefaßt und auf den Druck p_2 unter

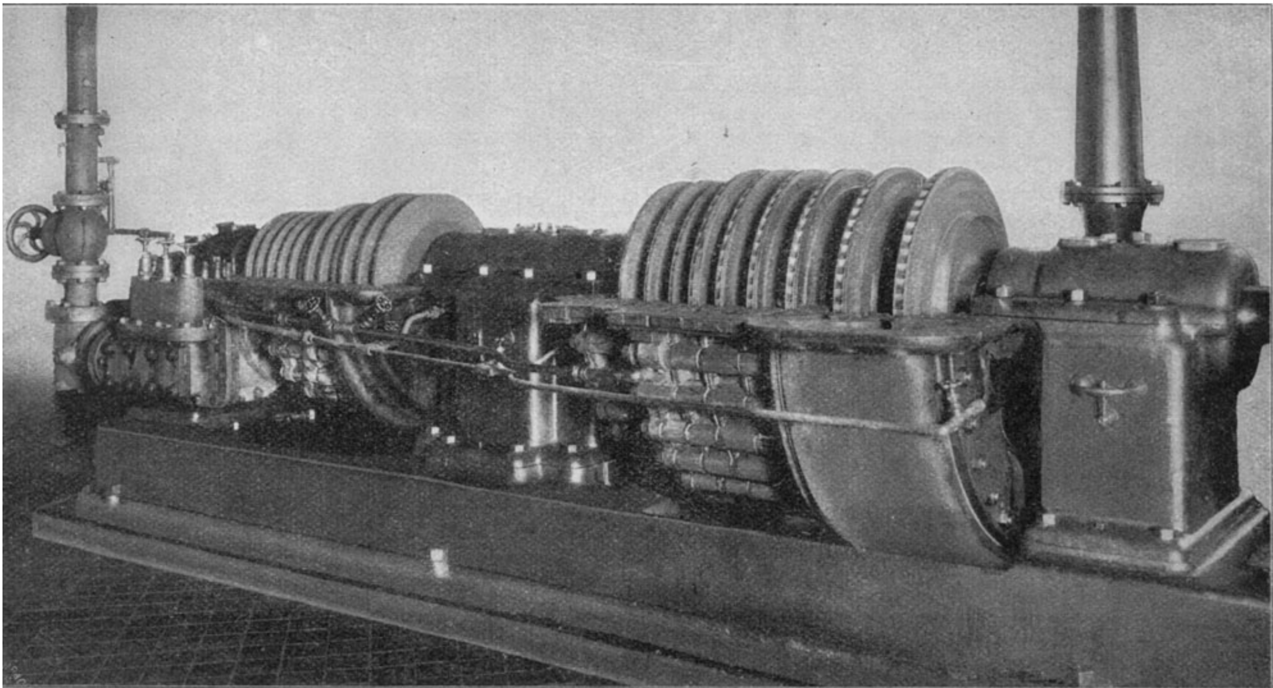


Abb. 766 b. Versuchsturbine von Lindmark.

Verwertung seiner Geschwindigkeit entspannen lassen, so würde wahrscheinlich der neue Zustandspunkt C_0 nicht ungünstiger gelegen sein als bei Lindmark, so daß sein Verfahren die gewöhnliche Methode nicht zu überflügeln vermag.

Abb. 766 und 766a stellen nach der deutschen Patentzeichnung Nr. 142964 vom Jahre 1902 dar, wie sich Lindmark die Verwirklichung des Verfahrens bei Überdruck- und Gleichdruckturbinen gedacht hat. Beachtenswert sind die in der Patentschrift enthaltenen Untersuchungen über die Verdichtung in Düsen. Eine Versuchsausführung Abb. 766b bestand aus 21 Rädern mit 500 bis 800 mm Durchmesser, 3000 Uml./min, und sollte nach dem Schema der Abb. 766 arbeiten.

VII. Die Schiffsturbine.

Einleitung.

Die Einführung der Dampfturbine als Antriebsmaschine für Seefahrzeuge verdanken wir Parsons, der schon im Jahre 1897 ein kleines Dampfboot mit einer Turbine ausstattete und seither unablässig tätig war, die Schwierigkeiten, die sich der Verwendung der Turbine als Antriebsmaschine in den Weg stellten, zu überwinden.

Die Vorteile des Turbinenantriebes: gleichmäßiges Drehmoment, Abwesenheit von hin und her gehenden Massen und der davon herrührenden Erschütterungen, einfache Wartung, Raum- und in gewissem Maße Gewichtsersparnis, geringere Reparaturbedürftigkeit u. a. sind so einleuchtend, daß die Kolbenmaschine von Anfang an verdrängt worden wäre, wenn man vermocht hätte, den Hauptmangel der Turbine, nämlich die Notwendigkeit hoher Umlaufzahlen, denen die Schiffsschraube nur mit Einbuße an Wirkungsgrad folgen konnte, zu beseitigen. Steigert man die Umlaufzahl einer Schiffsschraube über eine gewisse Grenze hinaus, so werden hinter den Schraubenflügeln Hohlräume gebildet, und diese sogenannte „Kavitation" kann so weit gehen, daß das Wasser gewissermaßen zu Schaum geschlagen, wodurch die Wirkung der Schraube bis auf Null herabgesetzt wird.

Die höchsten noch zulässigen Umlaufzahlen, wie sie in den praktischen Ausführungen zur Verwendung gelangt sind, werden durch das Schaubild Abb. 767[1]) veranschaulicht.

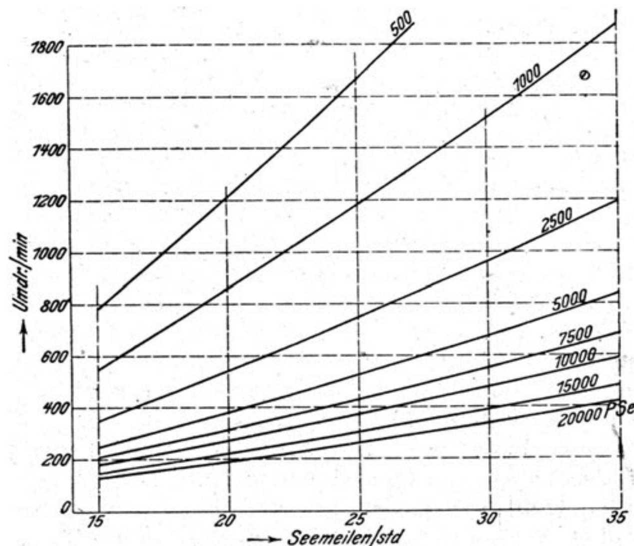


Abb. 767.
Höchstzulässige Schraubendrehzahlen.

Der Propellerwirkungsgrad pflegt praktisch Werte von 60 v. H., manchmal auch darüber, im allgemeinen indes noch niedrigere Beträge zu erreichen. Nach den häufigen Mißerfolgen zu schließen, ist eine sichere Vorausberechnung desselben heute noch schwierig und Sache der persönlichen Erfahrung des Konstrukteurs, da die Literatur nur sehr dürftige Angaben über wirkliche Ausführungen enthält, und weil die Anordnung des Propellers, die Schiffsform u. a. eine wichtige Rolle spielen. Der große Abstand der Schraubendrehzahlen von den günstigsten Drehzahlen der ortsfesten Turbine wird beispielsweise klar, wenn wir erwägen, daß man die letztere bei 5000 PS mit 3000 Uml./min ausführen sollte, während für die Schraube nach dem Schaubild bei 25 Seemeilen/st nur etwa 500 zulässig sind. Daß trotz so wesentlicher Herabsetzung die Umfangsgeschwindigkeit der Schiffsschraube an der Grenze des Zulässigen angelangt ist, folgt auch aus der mancherorts beobachteten starken Anfressung durch Wirbelbildung. So sollen nach Silberstein[2]) die ursprünglichen Schrauben der Mauretania nach dreimonatigem Betrieb auf einer Ausdehnung von 3 bis 4 Quadratfuß und eine Tiefe von $^1/_4$ bis $2\,^1/_2$ (!) engl. Zoll angegriffen worden sein, und zwar etwa 2′ von der Flügelwurzel entfernt gegen die hintere Kante zu. Eine von Parsons eingeführte neue Legierung soll freilich eine um so viel höhere Zähigkeit besitzen, daß die neuen Schrauben nach sechsmonatigem Betrieb noch keine Abnützung aufgewiesen haben.

Eine weitere Schwierigkeit der Schiffsturbine ist ihre **Unfähigkeit, umgesteuert zu werden.** Unzählige Anläufe sind bis jetzt gemacht worden, durch geeignete Hilfskränze und Schaltungen,

[1]) Nach Föttinger, Eine neue Lösung des Schiffsturbinenproblems. Jahrb. d. Schiffbautechn. Gesellsch. 1910.

[2]) Engineering, 14. Jan. 1910.

wohl auch durch Verdrehen der Schraubenflügel, eine Bewegungsumkehr zu erzielen, allein ohne leiseste Aussicht auf Erfolg, wo nur einigermaßen größere Kräfte zu überwinden sind. So blieb nichts übrig, als eigene Umsteuerungsturbinen aufzustellen, die beim Vorwärtsgang leer mitlaufen, aber unter Vakuum gestellt verhältnismäßig wenig Kraft aufzehren. Die Rücksicht auf das Gewicht verbietet es, diese Turbineu gleichgroß zu machen wie die Hauptturbinen; die Verringerung der Stufenzahl setzt aber den Wirkungsgrad herab, und man muß sich mit einer geringeren Höchstleistung zufriedengeben.

Ausgesprochene Erfolge erzielte der unmittelbare Antrieb bei Personendampfern für Schnellfahrt, die heute durchweg Geschwindigkeiten von über 20 Seemeilen in der Stunde aufzuweisen pflegen, und zu zweckmäßigen Turbinenabmessungen führen. Freilich hat sich die Hoffnung, daß ein Turbinenschiff infolge Abwesenheit hin und her schwingender Massen vollkommen erschütterungsfrei sein müsse, nicht erfüllt. Die Schraubenflügel befinden sich in der Nähe des Schiffsrumpfes unter anderen Strömungsverhältnissen als in der von ihm abgewendeten Lage, und dies wie auch andere noch nicht aufgeklärte Gründe bringen eine Erschütterung insbesondere des Hinterschiffes hervor, die sich in verschiedenen Fällen als störend erwies.

In einer Untersuchung von Henderson (Engineering 1909, I, S. 452) wird neben den Flügelschlägen der einzelnen Schraube auch das zeitweilige Zusammentreffen der von verschiedenen Schrauben ausgeübten Schläge als Erschütterungsgrund angeführt, indem „Schwebungen" entstehen. Die durch Turbinen veranlaßten Schwingungen besitzen meist eine hohe und daher physiologisch unangenehm empfundene Frequenz. So wurde nach der gleichen Quelle bei der Mauretania eine Hauptschwingung mit 582 Perioden in der Minute festgestellt, die mit der Zahl der Flügelschläge übereinstimmt. Außerdem zeitweilig eine Schwingung von 84 Perioden in der Minute und zwar in der wagerechten Ebene, die einer natürlichen Schwingungszahl des Schiffes entspricht. Da die Schwebungen der Flügelschläge bloß 4,5 mal in der Minute vorkommen, vermutet Henderson als Grund das Zusammenfallen einer höheren „Harmonischen" der natürlichen Schwingungszahl (und zwar der siebenten) mit der Zahl der Flügelschläge.

Die größte Verbreitung hat der unmittelbare Antrieb in der Kriegsmarine gewonnen. Die Umlaufzahl und die Beanspruchung der Kriegsschiffsmaschinen, insbesondere bei Torpedobooten, wurden so gesteigert, daß der sichere Betrieb der Kolbenmaschinen, die bei forcierten Fahrten nach Bauer[1]) „in eine Wolke von Öl, Wasser und Dampf gehüllt" sind, in Frage gestellt war. Hier mußte die unvergleichliche Einfachheit der Turbine durchdringen, obwohl noch eine letzte bedeutende Schwierigkeit zu überwinden war: die Wirtschaftlichkeit bei kleiner Fahrgeschwindigkeit.

Das „Kreuzen" der Kriegsfahrzeuge muß mit verringerter Geschwindigkeit, d. h. tunlichster Sparsamkeit im Kohlenverbrauch vor sich gehen, damit ein weiter Umkreis beherrscht werden kann, ein großer „Aktionsradius" gesichert ist. Die Antriebsleistung ist ungefähr der dritten Potenz der Geschwindigkeit proportional, sinkt also bei halber Geschwindigkeit auf etwa $^1/_8$ des normalen Wertes, bei gleichzeitiger erheblicher Abnahme der Umlaufzahl, und der Dampfverbrauch wird in zwiefacher Beziehung geschädigt.

Man hat diesem Übelstande durch Vorschaltung von sogenannten Marschturbinen abgeholfen, die für gewöhnlich im Vakuum leer mitlaufen oder auch ganz abgekuppelt werden. Später kamen sinnreiche Schaltungen von teilweise beaufschlagten Gleichdruckstufen in Gebrauch, die die Aufgabe noch vollkommener lösen.

Eine ganz neue Sachlage wurde in neuester Zeit durch die Benutzung geeigneter Übersetzungen geschaffen, durch die die Drehzahlen der Schiffsschraube und der Turbine voneinander so gut wie unabhängig gemacht, also die erstere tief, die letztere entsprechend hoch gesetzt werden konnte. Solche Mittel sind

α) die elektrische Übertragung,
β) der Umformer von Föttinger,
γ) das Zahnradvorgelege.

Insbesondere das letztere entwickelt sich in so überaus günstiger Weise, daß nach vorherrschender Ansicht in Bälde keine Schiffsschraube mehr mit unmittelbarem Antrieb versehen sein wird.

Um der historischen Entwickelung gerecht zu werden, widmen wir jedoch auch dem unmittelbaren Antrieb, für den noch heute Verwendungsmöglichkeiten bestehen, einen besondern Abschnitt.

---

[1]) Jahrb. d. Schiffbautechn. Gesellsch. 1909, S. 301.

A. Schiffsturbine mit unmittelbarem Antrieb.

129. Teilung der Leistung; Schaltungen.

Allgemein gilt der Grundsatz, daß die Leistung auf mehr Schrauben verteilt werden muß als bei Kolbenmaschinenantrieb. Denn je kleiner die auf eine Schraube entfallende Leistung ist, desto höher darf bei gleichem Propellerwirkungsgrade die Umlaufzahl werden, desto günstiger arbeitet die Turbine. So stellt sich denn heraus, daß eine Vermehrung bis auf vier Wellen wirtschaftlich sehr günstig ist und daher häufig verwendet wird[1]). Im einzelnen wechseln aber die Gesichtspunkte, die für den weiteren Ausbau maßgebend sind, mit der Bauart der Turbine und sollen in der Reihenfolge der historischen Entwicklung erörtert werden. Den Vorrang darf beanspruchen:

a) Die Überdruckturbine mit Reihenschaltung.

Der beste Weg, den die Überdruckturbine einzuschlagen hat, wurde von Parsons selbst vorgezeichnet, und beispielsweise in den D.R.P. Nr. 99108 vom Jahre 1896 und 103559 vom Jahre 1898 geschützt. Das erste betrifft die **Reihenschaltung** der die einzelnen Schraubenwellen des Fahrzeuges antreibenden Turbinen, die als „Hochdruck“-, „Mitteldruck“-, „Niederdruck“- usw. Turbinen **der Reihe nach** vom Dampf durchströmt werden. Das zweite erweitert die Schaltungsmöglichkeiten, indem bei höchster Leistung zur Verminderung der Zahl der Ausdehnungsstufen durch zusätzliche Verbindungsleitungen ein Teil der Turbinen parallel geschaltet wird.

Die Vorteile dieser Anordnungen sind in die Augen springend und bestehen vor allem in einer außerordentlichen Ersparnis der erforderlichen Stufenzahl, also der Turbinenbaulänge und des Gewichtes. Lassen wir den Dampf sich der Reihe nach in den einzelnen Turbinen ausdehnen, so benötigen unter sonst gleichen Umständen alle Turbinen zusammengenommen nur eben so viele Stufen, als beim Einzelantrieb jede einzelne Turbine für sich. Die Reihenschaltung erreicht aber den bedeutenden zusätzlichen Vorteil, daß die Dampfmenge nicht gespalten wird, daher für jede Turbine ein Vielfaches derjenigen ist, die sie beim Einzelantrieb zu verarbeiten hätte; es werden also die Schaufeln in gleichem Verhältnisse länger, oder man kann größere Durchmesser und größere Umfangsgeschwindigkeiten annehmen, was den Dampfverbrauch verbessert. Ferner kann man reichliche Spiele gewähren, wodurch die Betriebssicherheit gehoben wird.

Schließlich ermöglicht die Reihenschaltung die Verwendung der „Marsch“turbinen, die die wesentlich kleinere Dampfmenge der reduzierten Fahrt mit vollem Kesseldruck zu verarbeiten haben. Die erforderliche weitgehende Verkleinerung der Strömungsquerschnitte wird durch Herabsetzen der Schaufellänge und des Durchmessers zugleich erreicht. Das Vorschalten der Marschturbine vergrößert zugleich die gesamte Stufenzahl, was bei der verkleinerten Umlaufzahl in wesentlichem Maße zur besseren Dampfausnutzung beiträgt.

Selbstverständlich sind beim Parsonsschen System neben Vorteilen auch Schattenseiten vorhanden, in die wir den besten Einblick bei der Behandlung des gegnerischen Systems, der Gleichdruckturbine, erhalten.

b) Die Gleichdruckturbine mit Einzelwellenantrieb.

Die Vorkämpfer des Gleichdrucksystems mit Einzelwellenantrieb sind in Amerika die General Electric Co., Schenectady, in Europa die Allgemeine Elektrizitäts-Gesellschaft in Berlin und das Zoelly-Syndikat. Die Gleichdruckturbine ist durch die Möglichkeit teilweiser Beaufschlagung in die günstige Lage versetzt, von Anfang an mit der höchsten, durch die Schraube und die Raumverhältnisse gestatteten Umfangsgeschwindigkeiten zu arbeiten. Sie kann nach dem Vorgange von Curtis im Hochdruckteil vielfache Geschwindigkeitsabstufung verwenden und ist hierdurch zur Verarbeitung hoch überhitzten Dampfes besser geeignet als die Parsonsturbine bei ungenügendem Schaufelspiel. Wie bei der ortfesten Turbine gezeigt wurde, kann die Einbuße an Wirkungsgrad in den ersten Stufen durch entsprechend bessere Ausnützung im Niederdruckteil zum großen Teile wett gemacht werden. Auf diese Weise ist es möglich, die Zahl der Stufen und die Baulänge der Turbine so zu

---

[1]) S. Engineering 1909, II, S. 403.

beschränken, daß bei ansehnlichen Leistungen noch eingehäusige Bauart möglich war, und dies leitet von selbst auf den „Einzelwellenantrieb“, bei dem, wie die Benennung ausdrückt, jede Welle ihre unabhängige eigene Turbine besitzt. Die Niederdruckteile erhalten auch bei Gleichdruckschaufelung Trommelbauart, um durch den Dampfdruck auf die Trommelstirnseite den Propellerschub auszugleichen, und weil bei genügenden Schaufellängen, also großem zulässigen radialen Spiel und voller Beaufschlagung, diese Bauart billiger und raumsparender ist.

Ein weiterer bedeutender Vorteil des Gleichdrucksystems besteht im Fortfall der Marschturbinen, die die Anlage verwickelter gestalten und andere Übelstände mitführen. Daß die Marschturbine unter Dampf im Vakuum mitlaufen muß und die durch Undichtheit eindringende Luft eine erhöhte Leistung der Luftpumpe bedingt, ist einer der kleineren Nachteile; wichtiger ist die Mitteilung von Bauer und Lasche auf S. 173 ihres Werkes über Schiffsturbinen, daß die meisten Havarien, die bei Parsonsturbinenanlagen bisher eingetreten sind, Schaufelbrüche der Marschturbinen gewesen seien, da die Schaufelspiele bei diesen Turbinen klein sein müssen. Die „Turbinia“, Deutsche Parsons-Marine-Akt.-Ges., Berlin, bemerkte in einer Entgegnung auf den Vortrag von Dr. Bauer in der Schiffbautechn. Gesellschaft v. 19. Nov. 1908, daß allerdings an den Marschturbinen der „Lübeck“ und „S 125“ Schaufelhavarien aus diesem Grunde vorgekommen sind, daß man aber seither die Gehäuse der Turbinen kräftiger macht und so Verziehen derselben verhindert; außerdem seien die Spielräume so vergrößert, daß Havarien als ausgeschlossen bezeichnet werden müssen. Doch haben auch die Lizenznehmer Parsons' begonnen, die Marschturbine wegzulassen.

Beim Gleichdrucksystem hat es keine Schwierigkeit, am ersten Rad für verlangsamte Fahrt kleinere Düsenquerschnitte vorzusehen, damit auch bei kleiner Leistung das volle Wärmegefälle ausgenutzt wird. Bei geeigneter konstruktiver Durchbildung wird der Ausdehnung dieser „Mengen“regelung nach dem Vorgang von Schulz auf mehrere aufeinanderfolgende Stufen nichts im Wege stehen. Vorläufig werden von der Allgemeinen Elektrizitäts-Gesellschaft bei voller Fahrt nach der Umstellung auf großen Düsenquerschnitt einige der vorderen Zwischenstufen überbrückt; sie verursachen freilich durch das Mitdrehen im Dampf von hoher Spannung Ventilationsverluste.

Ein weiterer Vorteil des Gleichdrucksystems ist die Vereinfachung des Betriebes und die Unabhängigkeit der einzelnen Schrauben voneinander. Die hierdurch bewirkte Erhöhung der „Schlagfertigkeit“ der Anlage wird von marinetechnischer Seite hoch eingeschätzt[1]).

Es verschwindet die ungleichmäßige Kraftabgabe an die einzelnen Schrauben, die sich bei der Parsonsschen Reihenschaltung insbesondere bei kleineren Belastungen in hohem Maße einstellt. Es kann vorkommen, daß beim Betrieb mit Marschturbinen die Niederdruckhauptturbinen nur noch als „erweitertes Auspuffrohr“ wirken und wenig Arbeit übertragen. Aber auch bei angestrengter Fahrt kann eine Ungleichheit auftreten, was beim Einzelwellenantrieb ausgeschlossen ist.

Die **Berechnung der Gleichdruckturbine** erfolgt nach den für die ortsfeste Turbine aufgestellten Grundsätzen. Ist die Zahl der auf der Trommel untergebrachten Stufen groß, so kann man die bei der vielstufigen Überdruckturbine entwickelten abgekürzten Verfahren sinngemäß anwenden.

Im allgemeinen sind die Stufenzahlen nicht hoch und man wird Stufe für Stufe durchzurechnen haben.

c) Gemischte Systeme und Schaltungen.

Die Vorteile des Gleichdrucksystems für die Hochdruckstufen haben dazu geführt, auch Parsonsturbinen mit Curtishochdruckrädern zu versehen, vorzugsweise zu dem Zwecke, um die Marschturbine zu beseitigen. Dabei kann selbstverständlich auch die Parsonssche Reihenschaltung angewendet werden, und es ergibt sich eine Mannigfaltigkeit der möglichen Verbindungen und Schaltungen, die wesentlich reicher ist als die bei ortsfesten Anlagen. Von bestimmendem Einfluß wird dabei die Zahl der Schraubenwellen sein, eine Frage, über die sich die Ansichten noch nicht abgeklärt haben. Im Engineering 1909, II, S. 403 wird die Meinung vertreten, daß die tunlichste Vermehrung der Schraubenwellen das wirtschaftlich Günstigste sei, daß insbesondere vier Wellen einen besseren Wirkungsgrad ergeben als zwei Wellen. Seit die Einführung von zwei Steuerrudern überhand nimmt, sei das

---

[1]) Vgl. die Äußerungen des Admirals a. D. v. Eickstedt, die sich an den früher zitierten Vortrag von Dr. Bauer, Jahrb. d. Schiffbautechn. Gesellsch. 1909, S. 343, anschlossen.

Zweiwellensystem auch deshalb im Nachteil gegen die Drei- oder Vierwellenanlage, weil das Steuer durch die Strömung von der Schraube her nicht so günstig beeinflußt werde. Man weist auf die „Mauretania" hin, die infolge Flügelbruches mehrere Fahrten mit drei Wellen allein ausführen mußte und dabei vortreffliche Leistungen zustande gebracht hat. Ein gleiches wäre unmöglich gewesen mit zwei oder auch drei Wellen, und das Schiff hätte während der besten Verkehrszeit in Reparatur brach liegen müssen.

Von dem Entscheid über die Wellenzahl wird abhängen, ob Einzelwellenantrieb oder Reihenschaltung den Vorzug verdient. Es scheint, daß erstere bei drei Wellen die Grenze ihrer Anwendungsfähigkeit findet und bei vier Wellen einerseits zu große Gewichte ergibt, anderseits bei kleinen Leistungen in Nachteil gerät, indem die Dampfmenge für jede Turbine gar klein ausfällt. Um diese Zersplitterung auszuschalten, wurde schon bei drei Wellen für die kleine Fahrt das gänzliche Ausschalten des mittleren Propellers als das verhältnismäßig Bessere vorgeschlagen. Die Reihenschaltung darf also keinesfalls als überflüssig oder überwunden hingestellt werden.

Die Schaltung von Föttinger, D. R. P. 219642, strebt eine Vereinigung der Vorteile an, die dem Reihensystem der reinen Parsonsturbine und dem Einzelwellenantrieb der Gleichdruckturbine je für sich zukommen. Die erstere leidet vor allem an der ungleichen Verteilung der Leistungen bei wechselnder Beanspruchung. An der letzteren arbeiten die Hochdruckstufen mit sehr kleiner Beaufschlagung, daher

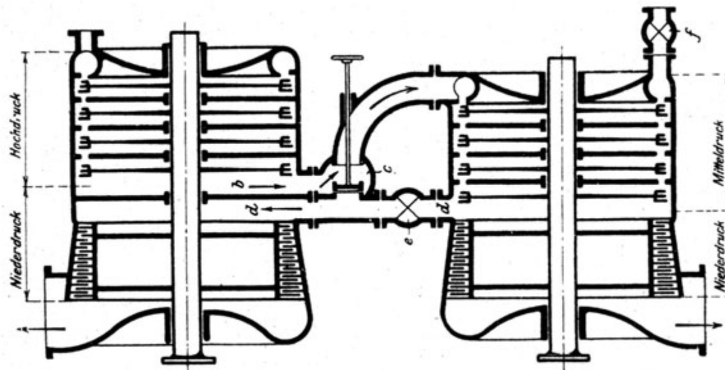


Abb. 767 a. Schaltung von Föttinger.

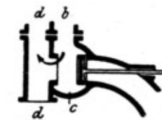


Abb. 767 b zu 767 a.

großen Ventilationsverlusten, und könnten bei gleichem Gewicht wesentlich größere Leistungen abgeben. Diesen doppelten Übelstand vermeidet Föttinger, indem er nach Abb. 767a bei Zweiwellenanlagen den Hochdruckteil auf der einen, den Mitteldruckteil auf der anderen Welle in Reihe geschaltet arbeiten läßt, während die mit jeder Welle verbundenen Niederdruckteile parallel durchströmt werden; die Zahl der Räder ist auf die Hälfte reduziert worden, zugleich ist die Ungleichheit der Leistung beseitigt, oder auf kleine Beanspruchungen beschränkt worden, indem der Hoch- und der Mitteldruckteil bei Dampfdrosselung in gleichem Maße weniger Arbeit leisten. Beim Manövrieren wird das Wechselorgan *C* umgestellt, so daß zwei unabhängige Einheiten mit dem Vorzug entstehen, für Aufnahme höher gespannten Dampfes geeignet zu sein.

Die Röllig-Schaltung

besteht in einem geeigneten Hintereinanderschalten der sonst selbständigen Turbinen für Einzelwellenantrieb, während der Marschfahrt. Zu diesem Zwecke teilt man jede einzelne Turbine in zwei oder mehrere Schaufelgruppen, die dem Dampfe, der fortschreitenden Ausdehnung entsprechend, sich ständig vergrößernde Schaufelquerschnitte darbieten. Beispielsweise möge bei einer Zweiwellenanlage jede Turbine aus einem Hochdruck- und einem Niederdruckteile bestehen. Bei kleiner Fahrt wird Frischdampf unmittelbar, sagen wir, in die St. B. Hochdr.-Turb. eingeführt, während das Hauptmanövrier- und das Einlaßventil der B. B. Hochdr.-Turb. geschlossen bleiben. Aus der St. B. Hochdr.-Turb. führt man den Dampf durch eine Überströmleitung in die vorletzte Schaufelgruppe der B. B. Hochdr.-Turb., wobei Zwischenschaltung eines federbelasteten Rückschlagventils erforderlich ist, damit bei voller Fahrt kein Dampf aus der Zwischenstufe der B. B. Hochdr.-Turb. in den Auslaß der St. B. Hochdr.-Turb. eintreten kann. Aus der B. B. Hochdr.-Turb. gelangt der Dampf in die B. B. Niederdr.-Turb. und aus dieser in den B. B. Hauptkondensator. Die St. B. Niederdr.-Turb. wird bei dieser Schaltung durch ein Wechselventil abgesperrt, muß jedoch unter Vakuum angewärmt gehalten werden, damit sie jederzeit für die Hauptschaltung dienstbereit ist. Noch mannigfaltiger sind die Schaltungsmöglichkeiten bei drei- und vier Wellenanlagen, doch sind die Überströmleitungen und die Umschaltventile ziemlich raumsperrende Zutaten.

d) Verbindung von Turbine mit Kolbenmaschine.

Die Nachteile der kleinen Schraubendurchmesser hoffte man bei Frachtdampfern durch Anwendung von zwei Hochdruck-Kolbenmaschineu auszugleichen, deren Abdampf in einer gemeinsamen Niederdruckturbine ausgenützt wird. Die Hochdruckmaschinen werden so stark gebaut, daß sie genügende Kraft zum Rücklauf entwickeln und die Rückwärtsturbinen entbehrlich werden. Die Niederdruckturbine aber kann, da sie die Gesamtdampfmenge aufnimmt, einen großen Durchmesser, also hinlänglich kleine Umlaufzahl erhalten, damit der Wirkungsgrad der Schraube hoch liegt. Die Meinungen über die Aussichten dieser Anordnung sind geteilt.

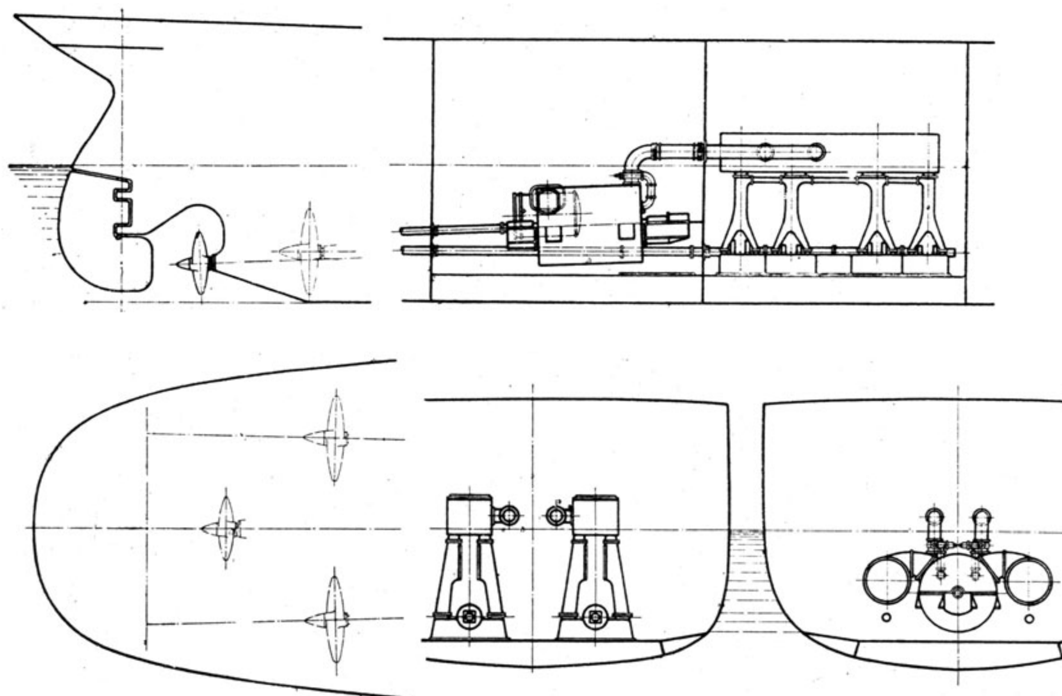


Abb. 768. Hochdruckkolbenmaschinen mit Niederdruckturbine.

Von der A.-G. Brown, Boveri & Cie. stammt der hierher gehörende Entwurf (Abb. 768) für einen Dampfer von 22000 PS Leistung. Die Turbine erhielte einen Außendurchmesser von rund 5 m. Um raschen Rücklauf zu erzielen, ist die Turbinenwelle mit einer Dampfbremse versehen, die im Moment der Umsteuerung ausgelöst wird, wodurch die mittlere Schraube, die vermöge ihres Schwunges weiter nach vorwärts treiben würde, rasch zum Stillstand kommt.

130 Der Ausgleich des axialen Schraubenschubes.

Ist w die Schiffsgeschwindigkeit in m/sek,
N_e die effektive Turbinenleistung (an der Welle) in PS,
η_s der Wirkungsgrad der Schraube (etwa $\gtrless 0{,}6$),
P der Schraubenschub,

so gilt die Beziehung, daß das Produkt aus der effektiven Turbinenleistung und dem Wirkungsgrad der Schraube der Treibarbeit Pw gleich sein muß. Wir erhalten also $Pw = 75 N_e \eta$, woraus

$$P = \frac{75 N_e \eta}{w}.$$

[Die Schiffsgeschwindigkeit wird in Seemeilen oder Knoten zu 1852 m in der Stunde gerechnet ($= w_k$), daher ist in der Sekunde $w = w_k$ 0,5144.]

Die Turbine wird selbstverständlich so aufgestellt, daß der nicht ausgeglichene Dampfdruck dem Propellerschub entgegenwirkt. Bei Parsonsturbinen kann man durch den vorderen Ausgleichskolben den Propellerschub in beliebigem Betrage ausgleichen. Bei Gleichdruckturbinen, die im Niederdruck eine Trommel anwenden, ist der Dampfdruck im allgemeinen wesentlich größer, so daß noch eine ansehnliche Belastung in negativer Richtung übrig bleibt. Ein Drucklager ist trotzdem unentbehrlich, und man muß insbesondere auf die Kraft, die beim Rückwärtslauf entwickelt wird, Bedacht nehmen.

130a. Die Rückwärtsturbine.

Sollen die Turbinenschiffe in bezug auf ihre Manövrierfähigkeit gegenüber den Kolbenmaschinenschiffen nicht zurückstehen, so muß man fordern, daß sie von der vollen Fahrt vorwärts auf der gleichen Weglänge zum Stillstand gebracht werden können, wie die Schwesterfahrzeuge. Es wird wohl auch verlangt, daß das Stillsetzen in der gleichen Zeit zu erfolgen habe.

Es hat sich nun herausgestellt, daß zu diesem Behufe die Leistung der Rückwärtsturbine nicht den gleichen Betrag zu erreichen braucht wie die der Kolbenmaschine, da man bei dieser im Durchschnitte mit der Umschaltung etwas mehr Zeit verliert und nicht sofort die volle Kraft ansetzt. Dies ist für die Turbine ein besonderer Glücksfall, denn wenn für den Rückwärtstrieb die volle Leistung der Vorwärtsfahrt erforderlich wäre, müßte einfach der Turbinensatz verdoppelt werden. Nach Bauer und Lasche pflegt es praktisch zu genügen, wenn die Leistung für den Rückwärtsgang unter Voraussetzung des gleichen Gesamtdampfverbrauches wie für den Vorwärtsgang den nachfolgend bezeichneten Teil der Vorwärtsleistung ausmacht:

für	Linienschiffe	40 bis 45 v. H.,
„	kleine Kreuzer	35 „ 40 „
„	Torpedoboote	25 „ 30 „

Rechnet man für die volle Vorwärtsfahrt 50 v. H. Wirkungsgrad, so bedeuten diese Zahlen, daß die Rückwärtsturbinen in der obigen Reihenfolge mit 20 bis 22,5; 17,5 bis 20;

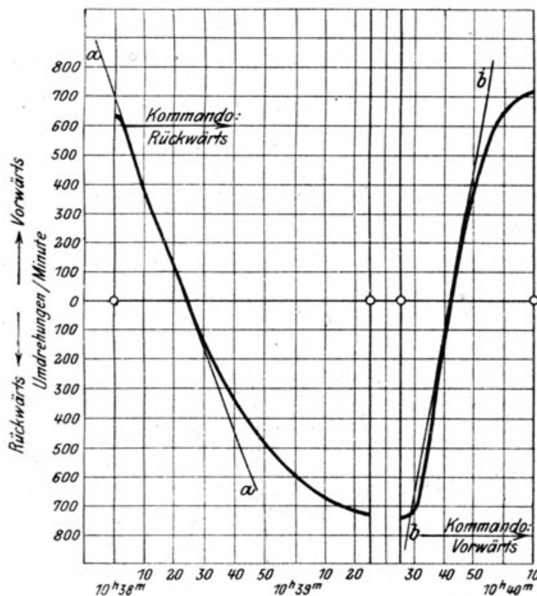


Abb. 769. Umsteuerungszeiten auf dem Versuchstand.

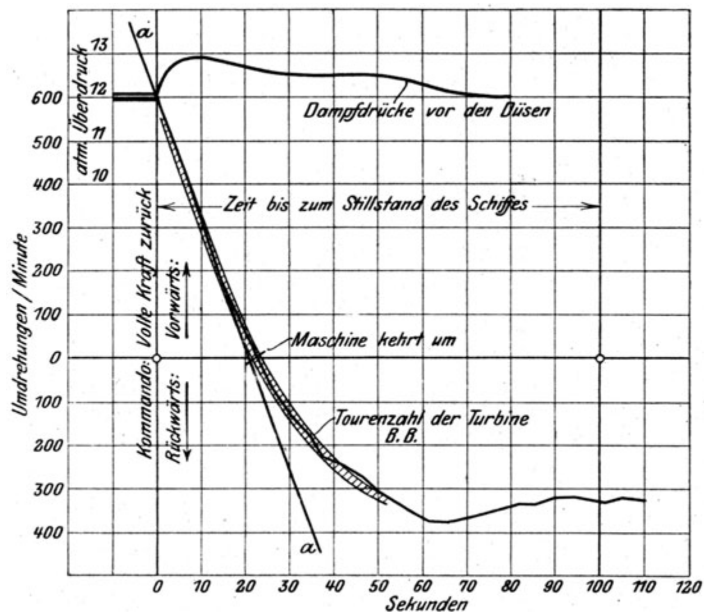


Abb. 769a. Umsteuerungszeiten des Schiffes.

12,5 bis 15 v. H. Wirkungsgrad entworfen werden dürfen. Man wird für dieselben selbstredend die gleiche Umfangsgeschwindigkeit wählen, wie für die Vorwärtsturbinen, darf aber die Stufenzahlen so weit herabsetzen und den Auslaßverlust so steigern, bis der Wirkungsgrad auf die angegebenen Werte gesunken ist.

Einen guten Vergleich bieten die nachfolgend beschriebenen Versuche der Allgemeinen Elektrizitäts-Gesellschaft in Berlin über Umsteuerungsfähigkeit der für den Dampfer „Kaiser“ gelieferten Schiffsturbinen.

Es wurde zunächst im Prüffelde die Zeit, die zur vollen Umkehr benötigt ist (mit angehängter unbelasteter Wasserbremse), beobachtet. Abb. 769 stellt die augenblickliche Umlaufzahl als Funktion der Zeit dar. Die Tangenten *a* bzw. *b* liefern ein Maß der Beschleunigung, d. h. des ausgeübten Drehmomentes, das bei der vielstufigen Vorwärtsturbine (beim „Vorwärtskommando") fast doppelt so groß ist als bei der Rüskwärtsturbine.

Später wurde im praktischen Schiffsbetriebe die Zeit zum Stillstand bei voller Fahrt festgestellt und ergab sich beim „Kaiser" zu 1 Min. 28 bis 30 Sek., beim Schwesterschiff „Silvana", das mit Kolbenmaschinen ausgerüstet ist, zu 1 Min. 19 Sek., woraus hervorgeht, daß das Drehmoment der Rückwärtsturbine richtig bemessen war. Den zeitlichen Verlauf der Umlaufzahlen bei diesen Versuchen stellt Abb. 769a dar.

Erhitzung der Rückwärtsturbinen.

Die Ventilationsarbeit der leer umlaufenden Rückwärtsturbine bringt eine nicht unerhebliche Erwärmung des umgewirbelten Dampfes hervor, die nur durch die Wärmeleitfähigkeit des Gehäuses und der Trommel begrenzt ist. Sie kann eine gefährliche Höhe erreichen, wenn durch Undichtheit während der Vorwärtsfahrt Dampf in die Rückwärtsturbine dringt, die dann als minderwertiger axialer Ventilator wirkt. Die im Laufrad erzeugte große Auslaßenergie wird infolge stoßweisen Eintrittes ins nachfolgende Leitrad größtenteils vernichtet, d. h. in Wärme verwandelt.

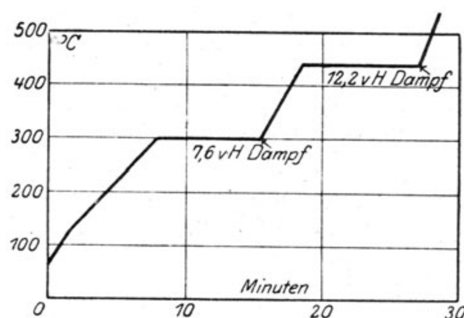


Abb. 769b.
Erhitzung der Rückwärtsturbine.

Die General Electric Co.[1]) hat an einer 5stufigen Schiffsturbine von 2500 PS die Temperatur im Spalt der letzten Stufe gemessen und die in Abb. 769b dargestellten Werte gefunden. Die Temperatur der im verkehrten Drehsinne in einer Luftleere von rd. 96 v. H. umlaufenden Turbine stieg innerhalb der ersten 8 Minuten auf rd. 300° C und blieb dann unverändert. Hierauf wurden durch Öffnen des Hauptventiles 7,2 v. H. der normalen Dampfmenge zugeführt. Die **Temperatur stieg innerhalb $2^1/_2$ Min. auf rd. 440° C.** Bei 12,2 v. H. Dampfzufuhr stieg sie rasch auf über 500° C. Ähnliche Verhältnisse wiederholen sich sozusagen bei jeder Umsteuerung, wenn man der Rückwärtsturbine wie üblich Dampf zuführt, während die Welle sich noch nach vorwärts dreht. Die Zeitdauer dieses Zustandes ist zwar meist klein, dafür die Dampfmenge groß.

Je kleiner die Luftleere, desto größer wird (bei sonst dichten Ventilen) die Erwärmung. So berichtet Emmet a. a. O., daß bei 66 v. H. Luftleere die Räder der Rückwärtsturbine blau anliefen.

131. Zahlenbeispiel einer Vierwellenanlage mit Reihenschaltung.

Als Zahlenbeispiel für die Berechnung einer Schiffsturbine mit unmittelbarem Antrieb wählen wir die Anlage der Dampfer „Lusitania" und „Mauretania" als die einzigen, über die in der Literatur[2]) genauere Angaben gemacht wurden.

a) Beschreibung der Turbinenanlage.

Der Bau der „Lusitania" wurde an John Brown & Co., Clydebank, die „Mauretania" an Swan Hunter & Co., Wallsend on Tyne (die Turbinen an die Wallsend Slipway and Eng. Co.) vergeben. Die Schiffe erhielten folgende Hauptabmessungen:

Länge über alles	(790′) 241 m	Wasserverdrängung	38000 t
Länge zwischen den Perpendikeln	(760′) 232 m	Verhältnis Länge zur Breite	1 : 8,65
Größte Breite	(88′) 26,8 m	Indizierte Pferdekraft	68000 PS
Tiefgang	(33′6″) 10,2 m	Geschwindigkeit i. d. Stunde	25 Seemeilen

Über die ungemein ausführlichen und gewissenhaften Modellschleppversuche zur Feststellung bester Schiffs- und Schraubenform, wie des Kraftbedarfes, muß auf die angegebene Quelle verwiesen werden. Man entschied sich für vier Schrauben, wovon die außenliegenden durch je eine Hochdruck-, die innenliegenden durch je eine Niederdruckturbine Parsonsscher Art angetrieben werden sollten. Die Rückwärtsturbinen sind auf den inneren Wellen angeordnet. Die Hochdruckturbinen werden durch Längs-Schottwände abgeschlossen.

[1]) General Electric Review 1920, Januar.
[2]) Engineering 1907, Sonderabdruck.

Die Umlaufzahl ist nach mannigfachen Erwägungen auf 180 bis 190 Umdr. i. d. Min. festgesetzt worden.

Die Dampfkessel sind nach der Zylinderbauart für 13,7 at Überdruck konstruiert und haben im ganzen 14800 qm Heiz-, 377 qm Rostfläche und 192 Feuerungen:

Die Dampfturbinen erhielten folgende Abmessungen.

Hochdrucktrommel	Durchmesser	2440 mm	Wandstärke der Trommeln	47 bis 52 mm
	Länge rd.	7500 „	„ des Gußgehäuses	66 „
	Schaufellänge am Anfang	63,5 „	„ „ Gehäusbodens	45 bis 66 „
	„ „ Ende	305 „	Hochdruckwelle in der Nabe	915 „
Niederdrucktrommel	Durchmesser	3560 „	Niederdruckwelle in der Nabe	1320 „
	Länge rd.	5600 „	Welle im Tunnel außen	508 „
	Schaufellänge am Anfang	203 „	„ „ „ Bohrung	254 „
	„ „ Ende	560 „		

Die Trommeln sind aus gepreßtem Siemens-Whitworthstahl in je drei Längen geschmiedet. Der Hochdruck-Läufer (samt Welle) wiegt 72 t, der Niederdruck-Läufer 126 t. Zu einem Trommelschuß des letzteren wurde ein Ingot von 40 t Gewicht und 1,8 m Durchmesser verwendet, der zur Verdichtung in flüssigem Zustand einem hydraulischen Druck von 250 at (?) unterworfen wurde. Nach dem Ausbohren wurde er auf etwa den doppelten Durchmesser erweitert, wobei auch die Flanschen und Versteifungsrippen mit ausgeschmiedet wurden. Das Ausglühen erfolgte erst nachdem die Trommeln vorgeschroppt waren. Die Wellenzapfen sind in geschmiedete Bodenstücke eingezogen und diese mit den Trommeln mittels kräftigen Flanschen verschraubt.

Die Fertigbearbeitung erwies sich als so genau, daß der Lauf im Betrieb ohne jede Auswuchtung vollkommen befriedigte. Das größte Gehäusestück wiegt 35 t. Die Gehäuse wurden 24 Stunden bei 400 bis 500° C geglüht und im Ofen gelassen, bis dieser kalt war. Die Schaufeln sind an der Wurzel nach der Methode von Willans und Robinson befestigt, oben werden sie mittels durchgezogener, mit Silber gelöteter Drähte zusammengehalten. Probeausführungen wurden künstlichen Erschütterungen ausgesetzt, um sich von der Haltbarkeit der Verbindung zu überzeugen.

Die Lager besitzen Sicherheits-Tragringe aus Bronze, deren Oberfläche indessen um 0,75 mm unter der Weißmetalloberfläche liegt, damit sie nur im Falle des Anschmelzens des Weißmetalles in Wirksamkeit treten und die Welle so stützen, daß die Schaufeln nicht streifen können.

Bei den Probefahrten im November 1907 wurden folgende Beobachtungen gemacht:

Absolute Pressungen in der Hochdruckturbine (Kesseldruck 13,7 at abs.):		Absolute Pressungen in der Niederdruckturbine:	
Vor der 1. Schaufelgruppe	11,6 kg/qcm	Vor der 1. Schaufelgruppe	1,35 kg/qcm
„ „ 2. „	9,0 „	„ „ 2. „	1,04 „
„ „ 3. „	7,2 „	„ „ 3. „	0,901 „
„ „ 4. „	5,5 „	„ „ 4. „	0,703 „
„ „ 5. „	4,0 „	„ „ 5. „	0,471 „
„ „ 6. „	3,2 „	„ „ 6. „	0,298 „
„ „ 7. „	2,5 „	„ „ 7. „	0,211 „
„ „ 8. „	1,92 „	„ „ 8. „	0,143 „

Der Kondensatordruck war 0,0735 at abs., Barometerstand 1,04 at. Die Schaufelgruppen hatten je gleiche Länge. Die mittlere Umdrehungszahl betrug 190 i. d. Min. und es wurde eine Schiffsgeschwindigkeit von 26,04 Seemeilen in der Stunde erreicht.

Eigentümlich war eine Überfahrt mit 3 Schrauben (da die vierte gebrochen war), wobei eine Niederdruckturbine mit gedrosseltem Frischdampf arbeitete, und die Schiffsgeschwindigkeit dieselbe blieb wie mit 4 Schrauben, immerhin mit größter Anstrengung der Kessel.

b) Thermodynamische Berechnung.

Die Grundlage für die thermodynamische Berechnung bildet die Angabe von Stoney[1]), daß die „Mauretania" bei 10,53 at Kesselüberdruck 0,059 at Kondensatordruck 5,8 kg Dampf für die eff. PS-st verbraucht habe. Dies entspricht einem thermodynamischen inneren Wirkungsgrad von 0,64 bei 2 v. H. Dampfnässe vor der Turbine. Wir behalten diese Werte bei, runden die effektive Leistung eines aus der Hoch- und Niederdruckturbine bestehenden Satzes auf 35000 PS ab und erhalten bei 0,96 angenommenem mechanischen Wirkungsgrad 36500 PS als innere Leistung. Im übrigen gehen wir aus von 11,6 kg/qcm abs. Druck vor dem ersten Leitrad und nehmen 0,0735 kg/qcm als Kondensatordruck an. Das adiabatische Gefälle ergibt sich zu 177,3 kcal, das innere Gefälle $= 177{,}3 \cdot 0{,}64 = 113{,}4$ kcal. Der Dampfverbrauch für die innere PS-st $= 5{,}55$ kg, also der gesamte Dampfverbrauch in der Sekunde $36500 \cdot 5{,}55/3600 = 56{,}3$ kg.

[1]) Engineering 1908, II, S. 325.

Von der Zustandskurve sind hiernach der Anfangspunkt A_0 (Abb. 770) und der Endpunkt E_k festgelegt, so daß $H_0 = 661{,}3 - 484 = 177{,}3$ k cal und der Unterschied zwischen E_k und E_k' den Verlust $(1 - 0{,}64)\,177{,}3 = 63{,}9$ k cal ausmacht, also der Wärmeinhalt in

$$E_k = 484 + 63{,}9 \cong 548 \text{ k cal}$$

beträgt. Da indessen im Auspuffrohr die arbeitende und die durch Undichtheit der Labyrinthe abströmende Dampfmenge zusammenkommen, ist der Zustand am Ende des Niederdruckes von E_k verschieden und wird später als Punkt E_{kn} ermittelt werden.

Was die Verteilung der Arbeit auf die Hoch- und Niederdruckturbine anbelangt, so halten wir uns an das Versuchsergebnis, aus dem unzweifelhaft eine größere Belastung der Niederdruckwelle bei forcierter Fahrt folgt. Wir nehmen daher als Eintrittsdruck Spannung in der NT. den Wert $p = 1{,}39$ at abs. an und bestimmen den Eintrittspunkt D so, daß der Wirkungsgrad der NT. etwas günstiger wird als derjenige der HT. Für die erstere ist das innere Gefälle $= 661{,}3 - 609 = 52{,}3$ k cal; das adiabatische Gefälle $= 661{,}3 - 573{,}8 = 87{,}5$, also der innere Wirkungsgrad $\eta_H \cong 0{,}60$. Für die NT. haben wir das innere Gefälle $= 609 - 547{,}1 = 61{,}9$ k cal, das adiabatische, zwischen den Punkten D und D_k' gerechnet, $609 - 512{,}4 = 96{,}6$ k cal, der innere Wirkungsgrad $\eta_N = 0{,}64$. Der Endzustand in der HT. ist aber von D verschieden, indem zunächst etwa 0,13 kg/qcm Drosselungsverlust im Überleitungsrohr anzunehmen ist, was auf der Linie $i = \text{konst.} = 609$ k cal zum Punkt C führt, und weiterhin die Mischung mit dem durch das Hochdruck-Labyrinth entweichenden Dampf berücksichtigt werden muß.

Abb. 770. Zustandslinie im Entropieschaubild.

c) Festlegung der Hauptabmessungen und Ermittelung der Undichtheitsverluste.

Die Umlaufzahl sei 194 i. d. Min. Die Durchmesser sind durch die Größe des Schiffsraumes und die Rücksicht auf die Schaufellängen und radialen Spiele beeinflußt. Wir wählen in tunlichster Übereinstimmung mit der wirklichen Ausführung als

Durchmesser der Hochdruckturbine (auf die Schaufelmitten gerechnet) .	$D_H = 2600$ mm
Zugehörige Umfangsgeschwindigkeit	$u_H = 26{,}6$ m/sek
Durchmesser der Niederdruckturbine (auf die Schaufelmitten gerechnet)	$D_n = 3940$ mm
Zugehörige Umfangsgeschwindigkeit	$u_n = 40$ m/sek
Durchmesser des Hochdruck-Labyrinthes	$D_1 = 2400$ mm
Zahl der Nuten des Hochdruck-Labyrinthes	$z_1 = 30$
Spaltweite des Hochdruck-Labyrinthes	$\delta_1 = 0{,}6$ mm
Durchmesser der Hochdruck-Stopfbüchsen	$D_1' = 600$ mm
Nutenzahl „ „ „	$z_1' = 30$
Spaltweite „ „ „	$\delta_1' = 0{,}5$ mm

Abmessungen der ND-Stopfbüchsen wie die am HD.

Durchmesser des Niederdruck-Labyrinthes	$D_2 = 3500$ mm
Nutenzahl „ „ „	$z_2 = 30$
Spaltweite „ „ „	$\delta_2 = 1$ mm

Nun benutzen wir die hier hinlänglich genaue einfache Labyrinthformel

$$G_{sek} = f\sqrt{\frac{g}{z}\,\frac{p}{v}}$$

und erhalten als Dampfverluste:

Im Hochdruck-Labyrinth mit 11,6 kg/qcm Anfangsdruck	$G_1' = 2{,}05$ kg/sek
In den Hochdruck-Stopfbüchsen mit 1,53 kg/qcm Anfangsdruck	$G_1'' = 0{,}13$ „
Im Niederdruck-Labyrinth mit 1,35 kg/qcm Anfangsdruck	$G_2' = 0{,}68$ „
In den Niederdruck-Stopfbüchsen (frischen Kesseldampf auf at Druck und feuchten Zustand abgedrosselt, gegen Vakuum dichtend vorausgesetzt)	$G_2'' = 0{,}09$ „
Wird die gesamte sekundliche Menge $= 56{,}3$ kg mit G_0 bezeichnet, so strömt durch die Hochdruckturbine $G_H = G_0 - G_1' - G_2''$	$= 54{,}16$ „
Durch die NT. die Menge $G_N = G_0 - G_2' - G_2'' - G_1''$	$= 55{,}40$ „

Nun kann der Zustand nach der Mischung am Hochdruckaustritt berechnet werden, indem hier das Gewicht G_H mit dem Wärmeinhalt i_B und das Gewicht G_1', dessen Wärmeinhalt durch die Drosselung unverändert bleibt, also von Strahlung abgesehen $= 661{,}3 = i_0$ zu setzen ist, zusammentreten. Der Wärmeinhalt nach der Mischung i_C ist aber vorhin schon zu 609 k cal festgesetzt worden. Man findet also den Zustand vor der Mischung mittels Gleichung

$$G_H i_B + G_1' i_0 = (G_H + G_1') i_C,$$

wodurch der Wert $i_B = 605{,}3$ k cal und Punkt B bestimmt erscheint. Für die in der HT. tatsächlich erscheinende Dampfmenge G_H ist hiernach das innere Gefälle $i_0 - i_B = 56{,}0$ k cal, das adiabatische Gefälle zwischen A_0 und B': 84,1 k cal, der innere Wirkungsgrad $\eta_H = 0{,}665$ also wohl etwas zu günstig, doch soll der Wert mit Rücksicht auf die kleineren Winkel und kleineren Dampfgeschwindigkeiten der HT. beibehalten werden. Am Ende der NT. strömen im Auspuffrohr die Dampfmengen G_N, G_2', G_2'' zusammen und man erhält, wie leicht nachzurechnen, den Mischungspunkt E_{kn}.

d) Zustandskurve; Stufenzahlen.

Die Verbindung der Anfangs- und Endpunkte im Entropieschaubild durch sanft gekrümmte Linien ergibt die Zustandskurven für die Hoch- und Niederdruckturbine, und ermöglicht, Druck und Volumen als Abhängige des Wärmeinhaltes in Abb. 771 aufzutragen. Nun wählen wir als Schaufelwinkel für den Hochdruck und den Anfang des Niederdruckes $\alpha_1 = 26^0 = \beta_2$. Wir teilen das Hochdruckgefälle in

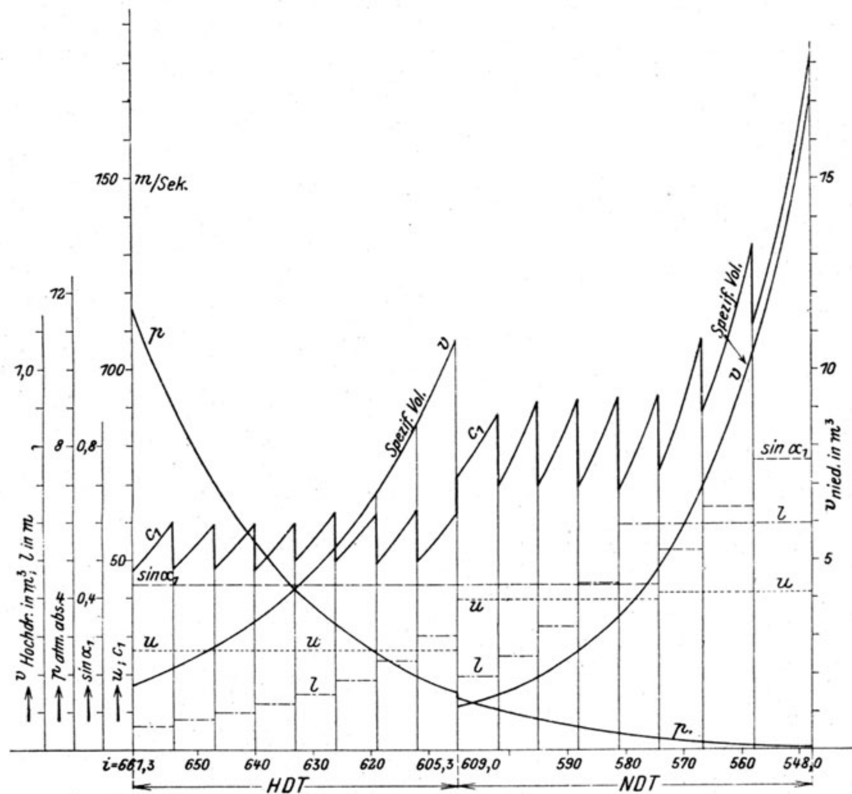


Abb. 771. Druck und Rauminhalt als Abhängige des Wärmeinhaltes.

8 Gruppen von gleichem Teilgefälle (7 k cal) und nehmen das gleiche Teilgefälle für die 5 ersten Gruppen des Niederdruckes an. Für die Hochdruckstufen rechnen wir der Einfachheit halber mit der konstanten Umfangsgeschwindigkeit $u = 26{,}6$ m/sek; für die 5 ersten Stufen der NT. ebenso mit $u = 40$ m/sek. Das Verhältnis u/c_1 wird dann für die ersten 4 Gruppen der HT. $= 0{,}5$ im Mittel, für die 4 letzten $= 0{,}478$, für die 5 ersten Gruppen der NT. $= 0{,}5$ angenommen, daher die mittleren Geschwindigkeiten c_1 der Reihe nach zu 53,3; 55,7; 80 m/sek (je als geometrische Mittel einer Gruppe) bestimmt erscheinen. Die hohen Werte des Verhältnisses u/c_1 sind durch die beabsichtigte Dampfökonomie bedingt und entsprechen sehr nahe der wirklichen Ausführung. Bilden wir den Ausdruck des mittleren Gefälles der Einzelstufe

$$h = A\,(2\,c_1 \cos \alpha_1 - u)\,u/g,$$

so erhalten wir für die erste Hälfte der HT.: $\bar{h} = 0{,}437$; für die 2. Hälfte $\bar{h} = 0{,}467$; für den Anfang der NT. $\bar{h} = 1$ k cal und daraus die Stufenzahlen

für die 1.—4. Gruppe der HT. je $z = 16$
„ „ 5.—8. „ „ „ $= 15$
„ „ 1.—5. „ „ NT. „ $= 7$

e) Schaufellängen; Berechnung der letzten Gruppen der Niederdruckturbine.

Die Stetigkeitsgleichung ergibt mit den aus der Abbildung zu entnehmenden spezifischen Rauminhalten den jeweiligen axialen Reinquerschnitt und die theoretische Schaufellänge. Die tatsächliche Länge muß der Verengung durch die Schaufeldicke und der Wirkung des Dampfverlustes im Spiel zwischen Schaufel und Gehäuse Rechnung tragen. Wir nehmen an, daß beiden Forderungen durch die „Verengungszahl" $\tau = 0{,}87$ Genüge getan wird, durch die wir die theoretische Schaufellänge teilen müssen. So erhalten wir im Hochdruck für Gruppe

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
die Schaufellänge	$l = 63$	79,5	99,3	124,5	149	187	238	305 mm

im Niederdruck für Gruppe	1	2	3	4	5
die Schaufellänge	$l = 195$	248	329	441	599 mm

Die letztangeführte Schaufellänge beträgt bereits rd. 15 v. H. des Durchmessers, und wenn wir in gleichem Verhältnisse fortfahren wollten, würden die nächsten Gruppen unzulässig lange Schaufeln erhalten. Wir machen daher die Annahme, daß für den Rest der NT. die Länge $l \simeq 600$ mm bleiben soll, und wissen dann im voraus, daß die Winkel und die Dampfgeschwindigkeiten vergrößert werden müssen, um den Durchfluß der vergrößerten Dampfinhalte zu ermöglichen. Wir teilen das verbleibende Gefälle in drei wachsend große Teile und wählen

für die Gruppe		VI	VII	VIII
den Schaufelwinkel	$\alpha_1 =$	32°	40°	50°
Um den vergrößerten mittleren Schaufeldurchmesser zu berücksichtigen, setzen wir $D = 4130$ mm; $u = 42{,}0$ m/sek und erhalten mit $l = 600$ und $\tau = 0{,}87$ mm den axialen Reinquerschnitt	$f_a =$		6,78 qm	
Die Stetigkeitsbedingung liefert mit dem geometrischen Mittel des Volumens für jede Gruppe die mittlere axiale Dampfgeschwindigkeit	$\bar{c}_{1a} =$	47,3	70,2	110,9 m/sek
woraus die mittlere Geschwindigkeit $\bar{c}_1 = \bar{c}_{1a}/\sin\alpha_1$		89,2	109	144,6 „
und das mittlere Einzelgefälle $\bar{h} = A\,(2\bar{c}_1 \cos\alpha_1 - u)\,u/g$		1,09	1,24	1,44 k cal
Nun ist nach angenommener Einteilung in Abb. 771 das ganze Gefälle der Gruppe	$H_1 =$	7,63	8,60	10,12 „
also ist die Stufenzahl	$z = H_1/\bar{h} =$	7	7	7

Die Geschwindigkeiten c_1 für die einzelnen Stufen werden erhalten, indem man den Mittelwert $\bar{c}_1$ im Verhältnis der spezifischen Volumina vergrößert bezw. verkleinert. Dies führte auf die mit c_1 bezeichnete Zackenlinie, die mit den übrigen maßgebenden Größen in die Abbildung eingetragen ist. Die Zustandspunkte am Ende jeder einzelnen Gruppe wurden hierauf in das Entropieschaubild zurück übertragen.

An den Lichtbildern der angezogenen Veröffentlichung über die „Mauretania" kann die Stufenzahl der einzelnen Gruppen gut abgelesen werden. Vergleichen wir dieselben, wie auch die Angaben über die Schaufellängen mit den Ergebnissen unserer Rechnung, so zeigt sich fast vollkommene Übereinstimmung.

131a. Berechnung der Marschturbinen.

Um an Rechnungsarbeit zu sparen, wollen wir annehmen, daß die vorhin beschriebenen Turbinen als Hauptturbinen eines Kreuzers aufzufassen sind.

Die Anlage soll demgemäß zwei parallelgeschaltete Hochdruckhauptturbinen (HHT.), zwei ebensolche Niederdruckhauptturbinen (NHT.), eine Hochdruckmarschturbine (HMT.) und eine Niederdruckmarschturbine (NMT.) umfassen, die den Hauptturbinen vorgeschaltet sind. Wir nehmen an, daß bei (etwas beschleunigter) Marschfahrt und vollem Kesseldruck die Marschturbinen rd. $^1/_4$ der gesamten Dampfmenge, d. h. $2 \cdot 56{,}3/4 \simeq 28{,}2$ kg/sek zu verarbeiten haben werden. Die Umlaufzahl wird der verringerten Schiffsgeschwindigkeit folgend auf etwa 110 i. d. Min. sinken.

Die Marschturbinen können hierauf nach der oben erläuterten Methode berechnet werden, vorausgesetzt, daß wir wissen, auf welchen Druck wir bis zum Eintritt in die HHT. expandieren. Dieser Druck, auf den wir weiter unten kommen, ergibt sich zu 2,36 kg/qcm, und wir erhalten daher im Entropieschaubild (Abb. 772) mit dem Anfangspunkt A_0 bei $p_1 = 11{,}64$ kg/qcm, $x = 0{,}984$ den Endpunkt der adiabatischen Ausdehnung C' und das adiabatische Gefälle $661{,}3 - 592{,}9 = 68{,}4$ k cal. Wir nehmen 0,45 als

Gesamtwirkungsgrad, demnach $68{,}4 \cdot 0{,}45 = 37{,}6$ k cal als Verlust an und erhalten $592{,}9 + 37{,}6 = 603{,}5$ k cal als Wärmeinhalt des Endzustandes, der durch den Punkt C dargestellt wird. Die Berechnung ist im einzelnen mit $D = 2000$ mm, $u = 12$ m/sek, $u/c_1 = 0{,}25$, $\alpha_1 = 22^0$ und entsprechenden Labyrinthverlusten durchgeführt worden. Abb. 773 enthält die gewonnenen Ergebnisse graphisch aufgetragen. Infolge der durch Absätze der Zustandskurve angedeuteten Drosselungsverluste zwischen den Turbinen und der Mischung mit den Undichtheitsdampfmengen ist der eigentliche innere Wirkungsgrad (auf die arbeitende Dampfmenge allein und den Zustand unmittelbar vor dem Eintritt und nach dem Austritt bezogen) etwas günstiger als der gesamte und erreicht rd. 48 v. H.

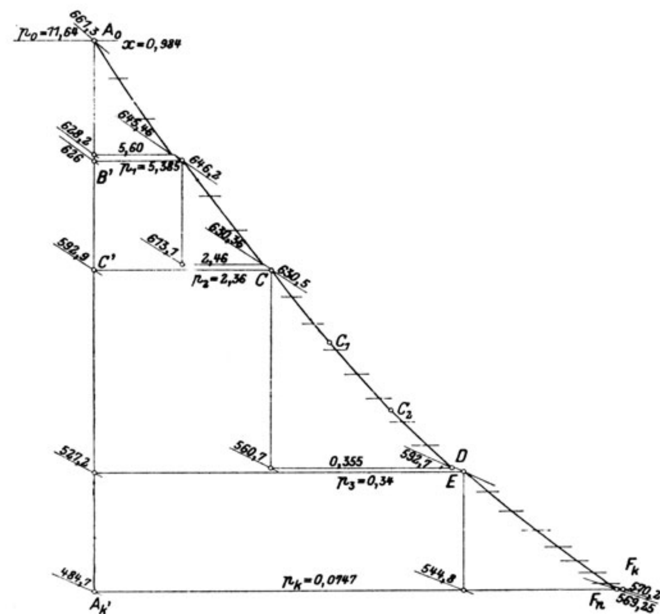


Abb. 772. Zustände während der Marschfahrt.

131b. Das Verhalten der Hauptturbinen während der Marschfahrt.

Wir haben für die ortsfeste Turbine festgestellt, daß bei tiefer Luftleere und unveränderter Umlaufzahl die sekundliche Dampfmenge und alle Pressungen in der Turbine mit dem Anfangsdrucke angenähert verhältnisgleich abnehmen. Bei abnehmender Umlaufzahl nahm das sekundliche Dampfgewicht um 10 bis 15 v. H. zu. Das bezog sich auf die Drosselung des Dampfes von immer gleichem Anfangszustand aus. Hier tritt indes der Dampf mit einer durch Arbeitsabgabe in den Marschturbinen veränderten Beschaffenheit insbesondere mit erheblicher Dampfnässe in die Haupt-

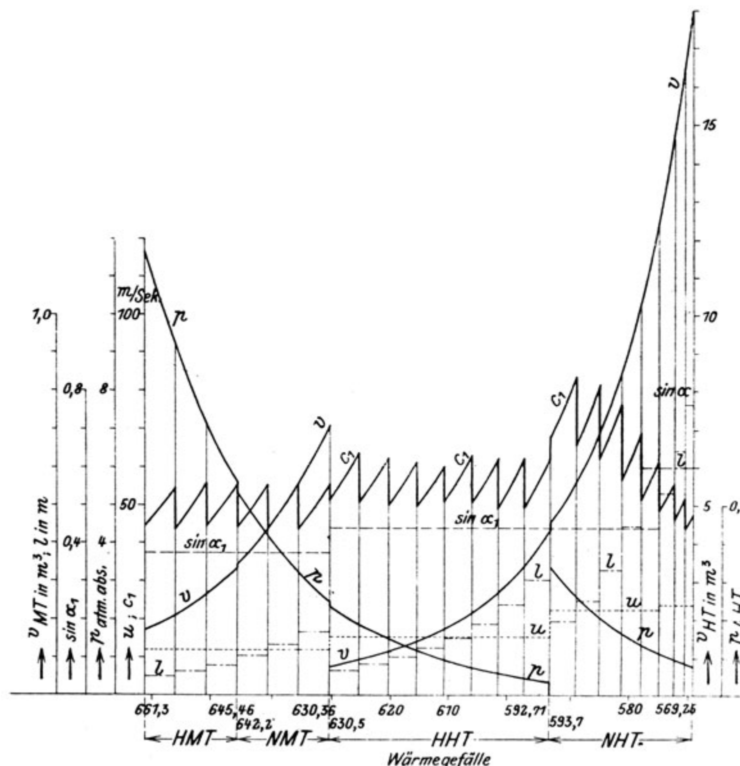


Abb. 773. Druck und Rauminhalt als Abhängige des Wärmegefälles.

turbine ein und die Umlaufzahl ist herabgesetzt. Die Wirkung dieser beiden Einflüsse äußert sich bei der Verfolgung der Zustandsänderung des Dampfes im einzelnen darin, daß einerseits die einfache Verhältnisgleichheit für die Pressungen nicht besteht, und daß anderseits der verminderten Umlaufzahl ein im Verhältnis viel höheres Steigen der Dampfmenge, nämlich ein Zuwachs von rd. 20 v. H. entspricht.

Wir haben im vorliegenden Beispiel die Dampfmenge gleich $^1/_4$ der maximalen angenommen. Bei rein verhältnisgleicher Änderung sollte der Anfangsdruck 11,64 : 4 = 2,92 kg/qcm betragen, es zeigt sich aber, daß derselbe nur dem rd. 0,8 fachen hiervon = 2,36 kg/qcm, angenommen werden darf, wenn die HHT. auf einen der veränderten Umlaufzahl entsprechenden indizierten Wirkungsgrad kommen soll; oder umgekehrt, wenn der Anfangsdruck 2,36 als gegeben angesehen wird, ist das sekundliche Gewicht nicht 56,3·2,36/11,64 = 11,4 kg/sek, sondern es muß das um rd. 20 v. H. größere Gewicht von 13,5 kg/sek gewählt werden. Der Unterschied gegen die auf eine HT.-Gruppe entfallende Menge von 14,1 kg/sek = 0,6 kg sind die Labyrinth- und Stopfbüchsenverluste, die in gleicher Art berechnet wurden wie oben.

Aus dem spezifischen Gewicht im Anfangspunkt C (Abb. 772) und dem sekundlichen Gewicht können wir die Geschwindigkeit c_1 in Abb. 773 für die allererste Stufe der HHT. berechnen, und den Mittelwert $\bar{c}_1$ für die erste Gruppe zu etwa $1{,}1\, c_1 = 57$ m/sek einschätzen, sonach müssen wir auf einen Wert $u : \bar{c}_1 = 15{,}1 : 57 \simeq 0{,}26$ gefaßt sein. Für die Vollbelastung hatten wir $\eta = 0{,}64$ bei $u/c_1 = 0{,}5$ und dies entspricht laut unseren früher erläuterten Kurven der Schaufelwirkungsgrade (Abb. 262) einem $\zeta \simeq 0{,}37$. Mit diesem Werte ergibt sich jetzt für $u/c_1 = 0{,}26$ ein Wirkungsgrad von rd. 0,54, mit Hilfe dessen wir einige Punkte C_1, C_2 der Zustandskurve (Abb. 772) festlegen können; der Endpunkt aber ist noch unbekannt

Hierauf tragen wir das spezifische Volumen v als Abhängige des Wärmegefälles in Abb. 773 auf und müssen nun durch Proberechnungen ermitteln, wie sich das Gefälle auf die einzelnen Gruppen verteilt und ob unsere Annahmen stichhaltig sind. Die v^2-Methode wäre bei der großen Zahl der Stufen zu zeitraubend, es genügt, wenn man für die zunächst zu untersuchende Gruppe das Gefälle H_1 probeweise annimmt, mit Hilfe der vorgeschriebenen Querschnitte die Geschwindigkeitskurve c_1 aufzeichnet, aus dem Anfangs- und Endwert das geometrische Mittel $\bar{c}_1$, das mittlere Gefälle $\bar{h}_1 = (2\bar{c}_1 \cos \alpha_1 - u)\, u/g$ berechnet und mit der vorgeschriebenen Stufenzahl z_1 vermehrt, um nachzusehen, ob in der Tat $z_1 \bar{h}_1 = H_1$ ist. Da die Gruppengefälle sich als nahezu gleich erweisen, geht diese Proberechnung ohne viel Wiederholung vonstatten. Auch das mittlere Verhältnis u/c_1, zeigt sich ziemlich unveränderlich, und die Kurve führt auf den Endpunkt D (Abb. 772), wo die Mischung mit dem Undichtheitsdampf vor sich geht und die angenommene kleine Drosselung den Anfangspunkt der Niederdruckhauptturbine E ergibt. Als Verlust im ND.-Labyrinth berechnet sich 0,17 kg/sek und mit Einrechnung des Stopfbüchsenverlustes bleibt als eigentlich arbeitendes Dampfgewicht 13,8 kg/sek. Der erhaltene Anfangsdruck ist, verglichen mit dem Werte bei Vollbelastung, ziemlich im Verhältnisse der Dampfmengen kleiner, was den praktischen Beobachtungen an Schiffsturbinen entspricht.

Die Strömungsverhältnisse in der NHT. sind weit verwickelter als in der HHT., da die Luftleere auch nicht angenähert verhältnisgleich verkleinert zu sein pflegt, daher die letzten Stufen mit sehr kleinen Gefällen arbeiten und der Dampf dieselben sozusagen passiv durchfließt. Der Wirkungsgrad ist also sicher schlechter als in der HHT. und darf auf etwa 50 v. H. veranschlagt werden, so daß man wieder den Verlauf der Zustandskurve (Abb. 772) und die v-Kurve in Abb. 773 angeben kann. Nun beginnt die gleiche gruppenweise Proberechnung wie bei der HHT., die indessen infolge steten Wechsels der Verhältnisse auch auf stetig veränderliche (abnehmende) Geschwindigkeiten und Gefäße führt, wie in Abb. 773 graphisch verzeichnet ist. Der Endwert des Druckes $p_k = 0{,}0747$ ist hoch gegenüber der Vollbelastung, und die Annahmen müßten eigentlich etwas abgeändert werden, was aber unterlassen wird, da sich an den Verhältnissen nichts Wesentliches mehr ändern kann. F_k bedeutet den Zustand im Abdampfrohr nach vollzogener Mischung mit dem Dampf aus den Labyrinthen.

Die erzielte innere Leistung berechnet sich endlich aus den reinen arbeitenden Dampfmengen und dem inneren Gefälle:

für die HMT.:	$G_{sek} = 26{,}9$ kg;	$H_i = 15{,}84$ k cal;	$N_i = G H_i\, 3600/632 =$	2430 PS
„ „ NMT.:	$G_{sek} = 27{,}4$ kg;	$H_i = 15{,}84$ k cal;	$N_i = G H_i\, 3600/632 =$	2470 PS
„ „ 2 HHT.:	$G_{sek} = 26{,}5$ kg;	$H_i = 37{,}80$ k cal;	$N_i = G H_i\, 3600/632 =$	5700 PS
„ „ 2 NHT.:	$G_{sek} = 27{,}6$ kg;	$H_i = 24{,}50$ k cal;	$N_i = G H_i\, 3600/632 =$	3850 PS
			Insgesamt	$N_i = 14450$ PS

Dieser Wert stimmt mit dem aus Anfangs- und Endwärmeeinheit berechneten angenähert überein.

Im Zusammenhang mit obigen Zahlenbeispielen fügen wir einige besondere konstruktive Angaben über die Parsons-Schiffsturbine bei, die einem Vortrage von Reed, Proc. of the Instit. of Civil Eng. Vol. CLXXVII 1909 entnommen sind und auch heute Beachtung verdienen.

Als bester Austrittswinkel für die Leit- und Laufschaufeln wird der verhältnismäßig kleine Wert $\alpha_1 = 20^0$, bei Überhitzung 18^0 empfohlen; als Eintrittswinkel 65^0, so daß bei einem Mittelwerte $u : c_1 = 0{,}35$ ein leichter Stoß entsteht. Die Verluste werden wie folgt angesetzt:

Schaufelreibung einschließlich Verlust im Umfangsspalt, Stoß und Wirbelung beim Eintritt, kinetischer Verlust zwischen Hoch- und Niederdruckturbine, für die Hochdruckturbine 35 bis 45 v. H. Für die Niederdruckturbine, aber ausschließlich des Auslaßverlustes 25 bis 35 v. H.

Die Dampfundichtheit durch das Hochdrucklabyrinth wird gleich eingeschätzt wie die durch das Niederdrucklabyrinth = 5 v. H.

Der kinetische Auslaßverlust im Niederdruck, Leitung und Strahlung, Lagerreibung = 3 bis 7 v. H.

Als maximale Schaufellänge werden 15 v. H. der Trommeldurchmesser zugelassen, wobei noch Rücksicht zu nehmen sei, daß die absolute Auslaßgeschwindigkeit etwa 300 m/sek nicht überschreite (daher in der Grenze ein Auslaßverlust von $(300 : 91{,}5)^2$ = rd. 11 k cal zugelassen wird).

Die Leistung der mittleren Welle bei der Vierwellenanordnung dürfe um 15 v. H. größer sein als die der Außenwellen wegen des größeren Rückstromes, in dem diese Schrauben arbeiten.

Die Verengung durch die Schaufeldicke sei im Mittel 10 bis 15%, da aber die Dampffäden sich im Zwischenraum vor der nächsten Schaufel wieder schließen können, wird etwa bloß mit der Hälfte, etwa 7 v. H., gerechnet, d. h. der Strömungsquerschnitt ist gleich der Ringfläche zwischen Trommel und Gehäuse, vermehrt mit dem Sinus des Austrittswinkels und dem Verengungsfaktor 0,93.

Die Schaufellänge nimmt in geometrischem Verhältnis zu; die drei letzten Niederdruckgruppen erhalten gleiche Schaufellänge, und die Winkel werden in den zwei letzten Gruppen auf 30 bzw. 40° vergrößert.

Der unausgeglichene Dampfdruck in axialer Richtung übertreffe den Propellerschub um etwa 10 v. H.

Für die Traglager sei der Flächendruck $p = 5{,}0$ bis 5,6 kg/qcm; das Produkt aus Druck in kg/qcm und Gleitgeschwindigkeit in m/sek sei $pw = 32$ bis 34. Für das Drucklager sei $p = 1{,}1$ bis 1,4 kg/qcm und $pw = 8{,}5$ bis 12.

B. Schiffsturbinen mit mittelbarem Schraubenantrieb.

132. Die elektrische Kraftübertragung.

Die elektrische Übertragung der Turbinenleistung auf die Schraubenwelle ermöglicht neben beliebiger Übersetzung der Drehzahlen vor allem eine bequeme Umsteuerung durch bloße Umschaltung der Stromrichtung am Schraubenmotor und die Entwickelung gleichgroßer Rückwärtsleistungen wie für den Vorwärtsgang. Begreiflicherweise ist das Interesse für diese Übertragung früh erwacht, anfänglich ohne Erfolg, da das große Gewicht des elektrischen Stromerzeugers und Motors und die hohen Anlagekosten das Verfahren unwirtschaftlich machten.

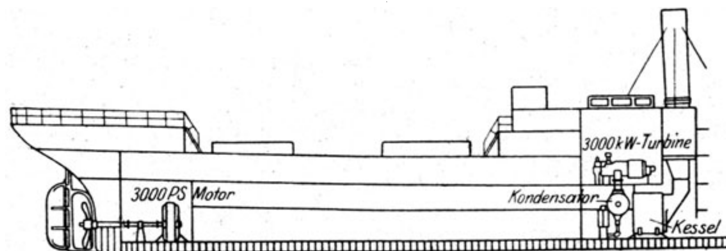


Abb. 774. Elektrische Kraftübertragung der General Electric Co.

In neuester Zeit hat sich die **General Electric Co.** der elektrischen Übertragung mit Energie angenommen und in der Ausrüstung des Schlachtschiffes New Mexico einen bedeutenden Erfolg errungen. Veranlassung hierzu waren:

1. Mängel des Zahnradantriebes (Zerstörungen), s. Abschn. 134;
2. gefährliche, übermäßige Erhitzung der Rückwärtsturbinen bei undichten Ventilen, s. Abschn. 130a;
3. Anwendbarkeit hoher Überhitzung, die sonst wegen der Rückwärtsturbine nicht rätlich erscheint. Man rechnet auf eine Brennstoffersparnis von rd. 10 v. H.;
4. Laderaumgewinn infolge Wegfalles des Wellentunnels, vgl. Abb. 774.

Für Kriegsschiffe kommen als weitere Vorteile in Betracht: a) die Austauschbarkeit der aus Einheiten gleicher Größe und Beschaffenheit bestehenden Einzelwellenantriebe; b) der bessere Schutz der getrennt in kleineren Räumen untergebrachten Teile der Maschinen-

anlage; c) ein Wechsel in der Drehzahlübersetzung, so daß auch während des Kreuzens die Turbine mit bestem Wirkungsgrad arbeitet; d) volle Leistung für Rückwärtsfahrt.

Als Wirkungsgrad des Stromerzeugers bei mittleren Kräften wird 95,6 v. H., des Motors 95,9 v. H. angegeben, so daß der Wirkungsgrad der Übertragung 91,6 v. H. beträgt. Bei höchsten Leistungen soll diese Ziffer auf 94 v. H. steigen.

Die Kosten sollen im Gegensatz zur landläufigen Meinung bei elektrischem Antrieb kleiner sein als bei Zahnradübersetzung.

Eine Grenze für die Ausführung ist mit Rücksicht auf die Polzahl des Stromerregers und Motors durch die Schraubendrehzahl gegeben, die nicht kleiner als 100/min sein sollte. Diese Höhe wird als passend bezeichnet bei 11 Knoten/st Schiffsgeschwindigkeit und 2400 PS Antriebsleistung.

Über das bemerkenswerte Großkampfschiff „New Mexico" werden folgende Angaben gemacht.

Wasserverdrang	**t**	**32000**	**Luftleere**	**at abs.**	**0,052**
Geschwindigkeit	**Kn/st**	**21,0**	**Verbr. an trock. gesätt. Dampf:**		
Turbinenzahl		**2**	**bei 10 Knoten**	**kg/PS-st**	**6,92**
Turbinenleistung	**je PS**	**17000**	**„ 15 „**	**kg/PS-st**	**5,24**
Turbinendrehzahl	**min**	**2100**	**„ 21 „**	**kg/PS-st**	**5,22**
Schraubenzahl		**4**	**Stromerzeugerspanng., I. Schaltg.**	**Volt**	**4240**
Motorleistung	**je PS**	**8000**	**„ II. „**	**Volt**	**3000**
Schraubendrehzahl	**min**	**161**	**Stromerzeugerpolzahl**		**2**
Gewicht der Maschinenanlage ohne Kessel und Kondensor	**t**	**590**	**Motorpolzahl bis 15 Knoten**		**24**
Dampfüberdruck vor Turbine	**at**	**17,6**	**„ über 15 „**		**36**
			Schraubendrehzahl bei 15 Knoten		**112**

Die elektrische Ausrüstung zeigt die Neuheit der doppelten Käfigwicklung für den Motor, über die in der Originalmitteilung[1]) Näheres nachgelesen werden kann. Hier sei nur bemerkt, daß eine Hauptaufgabe war, das Motormoment dem jeweiligen Moment der Schraube für Vorwärts- und Rückwärtsgang anzupassen. Bei voller Fahrt voraus bestehen während der Umsteuerung folgende eigentümlichen Verhältnisse:

Bei einer augenblicklichen Schraubendrehzahl im Verhältnis zur Drehzahl bei voller Fahrt voraus	v. H.	— 60	0	+ 35	+ 73	+ 100
ist das zum Antrieb der Schraube erforderliche Moment in v. H. des Höchstmomentes	v. H.	— 210	— 40	— 95	0	+ 100

Um die Schraube bei voller Fahrt voraus auf 35 v. H. ihrer Drehzahl herabzusetzen, ist also ein negatives Moment von fast gleicher Größe erforderlich, wie für volle Fahrt voraus.

Die Dampfturbine selbst besteht aus einem zweikränzigen Curtisrad als Hochdruckstufe und 9 Gleichdruckrädern mit wachsenden Durchmessern, ähnlich wie in Abb. 576. Man kann die Durchmesser des Curtis- und des letzten Niederdruckrades auf etwa 1400 bzw. 1650 mm einschätzen, was bei 2100 Umdr./min 155 bzw. 182 m/sek Umfangsgeschwindigkeit ergäbe. Der übliche gußeiserne Fundamentrahmen ist durch eine steife Blechkonstruktion ersetzt.

Der Vergleich des „New Mexico" mit den genau gleichen Schwesterschiffen „Idaho" und „Missisippi", die mit unmittelbar gekuppelten Parsons- bzw. Curtis-Haupttturbinen und mittels Zahnradübersetzung angeschlossenen Marschturbinen ausgestattet sind, hat ergeben, daß New Mexico bei 13 Knoten um 30 v. H., bei 19 Knoten um 28,6 v. H., bei voller Fahrt um 24,4 v. H. weniger Brennstoff verbraucht. Festgestellt wurde **bei 19 Knoten und voller Fahrt ein Rohölverbrauch von 0,442 und bei 15 Knoten von 0,498 kg/Wellen-PS-st.**

Von Interesse ist der Bericht, daß eine Turbine infolge Lösung eines Regulatorgewichts durchbrannte, da der Sicherheitsregler zwar das Drosselventil auslöste, dieses aber wegen Klemmung nicht ganz schloß. Dabei wurden alle Räder gestreckt, ohne jedoch sonst Schaden anzurichten.

Ebenso hat **Ljungström**, gestützt auf das kleine Gewicht, das seiner Turbine für die Einheit der Leistung zukommt, die elektrische Übertragung wieder aufgenommen und an Ausführungen die Vorteile seiner Bauart bestätigt.

Bei kleinen Kräften wird zwischen Schraubenwelle und Elektromotor eine Zahnradübersetzung eingeschaltet, wie die in Abb. 775 dargestellte Maschinenanlage des Dampfers „Wulsty-Castle" erkennen läßt. Die Turbinen mit unmittelbar gekuppelten Drehstromerzeugern sind seitlich neben den Bunkern aufgestellt. Zwei Elektromotore treiben auf ein großes mittleres, auf der Schraubenwelle sitzendes Zahnrad. Die Hauptabmessungen der Anlage sind die folgenden:

Ritzel-Durchmesser	224	mm	Turbinenlaufrad, äuß. Durchmesser	710	mm
Ritzel-Zähnezahl	23		Turbinendrehzahl	3600	i. d. Min.
Zahnraddurchmesser	2185	„	Motordrehzahl	714	„
Zahnradbreite	560	„	Schraubendrehzahl	73	„

[1]) General Electric Review, 24. April 1919.

Versuche in der Werkstätte haben folgende Ergebnisse feststellen lassen.

Leistung einer (Doppel-)Turbine	kW	606	Kondensatordruck	at abs.	0,048
Dampfdruck vor der Turbine .	at Überdr.	13	Dampfverbrauch	kg f. d. kW-st	5,65
Dampftemp. vor der Turbine .	°C	330			

Ljungström rechnet als Kraftbedarf der Hilfsmaschinen 80 kW, so daß bei einer gesamtverfügbaren Leistung von 1281 kW an den Klemmen der Motoren 1201 kW übrig bleiben. Bei 95 v. H. Wirkungsgrad der Motoren, 98 v. H. Wirkungsgrad des Zahnradvorgeleges, 95 v. H. für den Stromerzeuger, beträgt der Wirkungsgrad der reinen Kraftübertragung $0{,}95 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}98 = 0{,}885$.

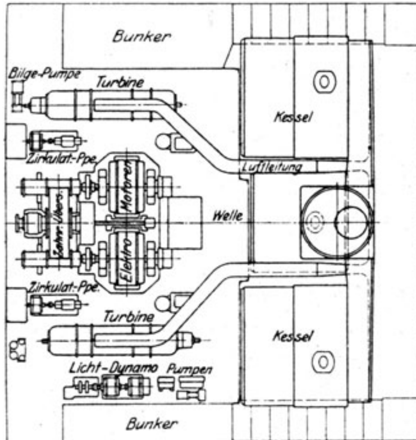


Abb. 775. Elektrische Kraftübertragung nach Ljungström.

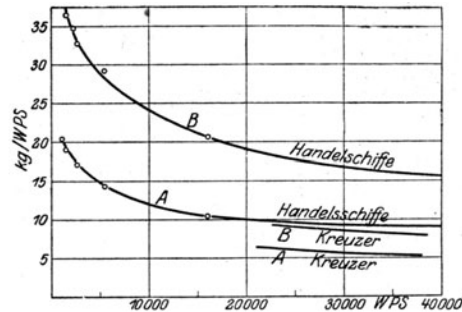


Abb. 776. Maschinengewichte nach Ljungström.

In Abb. 776 stellt Schaulinie A das Gewicht der eigentlichen Turbinenanlage für die Wellenpferdestärke dar. Schaulinie B desgl. einschließlich Elektromotoren, evtl. Zahngetriebe und Manövriervorrichtungen. Um die Wirtschaftlichkeit zu heben, werden der Dampfdruck und die Temperatur hoch gewählt und es wird von der Speisewasservorwärmung mittels Dampfentnahme ausgiebiger Gebrauch gemacht (vgl. Abschn. 215). Auf diese Weise berechnet Ljungström unter folgenden Annahmen:

Kesselüberdruck	at	25	Luftleere	at abs.	0,035
Druck nach Absperrventil	„	20	Speisewasservorwärmung	°C	130
Dampftemperatur	°C	400	Kesselwirkungsgrad		0,80

für einen Ozeandampfer von 43000 WPS Leistung einen Wärmeverbrauch von 3180 kcal für 1 WPS-st, falls die Hilfsmaschinen der Turbinenanlage (mit 600 kW Leistung) in Betrieb sind. Der Verbrauch würde auf 3330 kcal steigen, falls sonstige Hilfsmaschinen mit 2000 kW Leistung in Anspruch genommen werden. Die Studie einer Maschinenanlage für einen Schlachtkreuzer von 180000 WPS Leistung führte auf ein Gesamtgewicht (einschließlich Kessel und Schrauben) von 4000 t oder 22 kg/WPS und 3,87 kg Dampf für die WPS-st (ausschließlich Hilfsmaschinen).

133. Der Umformer von Föttinger.

Föttinger ermöglicht durch eine hydraulische Kraftübertragung mittels koaxial zusammengebauter Kreisel-Treibpumpe und hydraulischer Turbine eine Herabsetzung der Dampfturbinendrehzahl im Verhältnis 1 : 4 und darüber hinaus. In der bemerkenswerten Beschreibung seines „Umformers“[1]) weist er auf mannigfache Nachteile hin, mit denen die direkte Kupplung von Turbine und Schraube verbunden ist. So führte die „Kavitation“ der auf hohen Flächendruck beanspruchten Schrauben zu derartigen Anfressungen, daß oft nach kurzer Fahrtdauer in der Nähe der Flügelwurzel zentimetertiefe Furchen auftraten. Die hohe Flächenbelastung bewirkt weiterhin, daß sonst gute Turbinenschiffe bei Vermehrung des Widerstandes durch Gegenwind oder hohen Seegang an Geschwindigkeit stark einbüßen. Föttinger erachtet die Vergrößerung der Rückwärtsleistung als dringend notwendig. Für ein leichtes Torpedoboot von 600 t Gewicht und 12000 PS Vorwärtsleistung bleibt zwar bei 30 v. H. Rückwärtsleistung noch immer ein Betrag von 6 PS für die Tonne als Verzögerungsarbeit übrig; bei einem Linienschiff mit 20000 t Verdrängung und 30000 PS Maschinenkraft sind aber bei der üblichen Rückwärtsleistung von 40 bis 45 v. H. nur noch 0,6 bis 0,7 PS verfügbar, was Gefahren heraufbeschwören kann.

[1]) Eine neue Lösung des Schiffsturbinenproblems. Jahrb. d. Schiffsbautechn. Gesellsch 1910.

Es liegt auf der Hand, daß eine hydraulische Übertragung die ebenso große Rückwärtsleistung gewährt wie die Kolbenmaschine, eine vorzügliche Umgehung der beschriebenen Schwierigkeiten bildet, falls ihr Wirkungsgrad die erforderliche Höhe erreicht. Nun ergeben nach Föttinger große und richtig gebaute Schrauben bei Kolbenmaschinen Wirkungsgrade von 76 bis 80 v. H., während bei rasch laufenden Turbinenschrauben allerhöchstens 62 und nur ausnahmsweise 73 v. H. festgestellt worden sind. Im Mittel darf man mit Sicherheit annehmen, daß der Wirkungsgrad der Turbinenschraube um 10 bis 15 v. H. hinter dem erreichbaren Höchstwert zurückbleibt. Hierzu gesellt sich eine entsprechende Einbuße an Turbinenwirkungsgrad, im Vergleich mit den Ergebnissen, die bei der ortsfesten Ausführung erreicht worden sind. Wie aus unseren vorherigen Mitteilungen hervorgeht, liegen die thermodynamischen Wirkungsgrade der ausgeführten Schiffsturbinen, bezogen auf die effektive Leistung, etwa zwischen 50 und 58 v. H., höchstens 64 v. H., während für die festländische Turbine 75 v. H. mit Sicherheit nachgewiesen worden sind. Föttinger rechnet mit 12 bis 13 v. H. Verbesserung bei Sattdampf, was mit 10 bis 15 v. H. Gewinn am Propeller 22 bis 28 v. H. Unterschied ausmacht, so daß eine hydraulische Übertragung schon mit 78, ja 72 v. H. Wirkungsgrad in Hinsicht des Dampfverbrauches mit der direktwirkenden Turbine gleichwertig wäre und die Vorteile voller Rückwärtsleistung, größerer Seetüchtigkeit und Betriebssicherheit darböte.

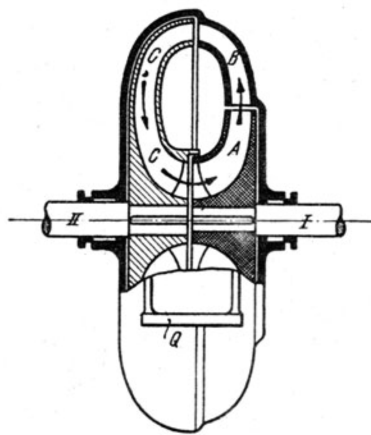


Abb. 777. Grundform des Föttingerschen Getriebes.

Die Gewähr dafür, daß der Wirkungsgrad die angegebenen Beträge nicht bloß erreicht, sondern übertrifft, hat Föttinger vermöge der innigen Verbindung von Kreiselpumpe und Turbine Abb. 777



Abb. 777a.

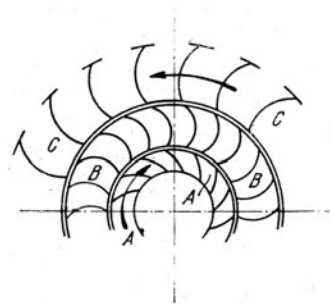


Abb. 777b.

Beschaufelung für gleichen und entgegengesetzten Drehsinn.

geschaffen. Auf der Turbinenwelle I sitzt die Kreiselpumpe *A*, die in mittelbarer Weise die Turbine *C* auf der Schraubenwelle II beaufschlagt, wobei durch geeignete Wahl der Schaufelungen das gewünschte Übersetzungsverhältnis der Umlaufzahlen erzielt wird. Die feststehende Leitungsbahn *B* erlaubt durch eingebaute Schaufeln, wie die Abwicklung der Schaufelschnitte in eine Ebene Abb. 777a u. 777b veran-

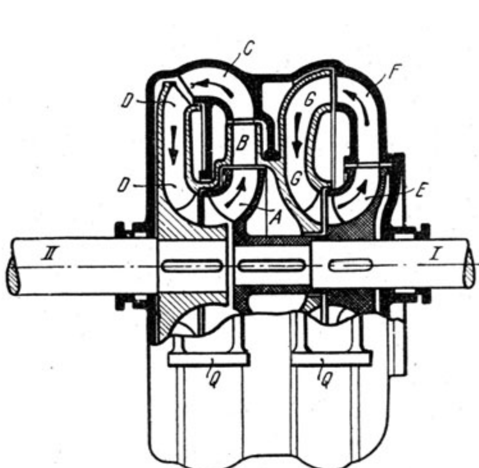


Abb. 778.

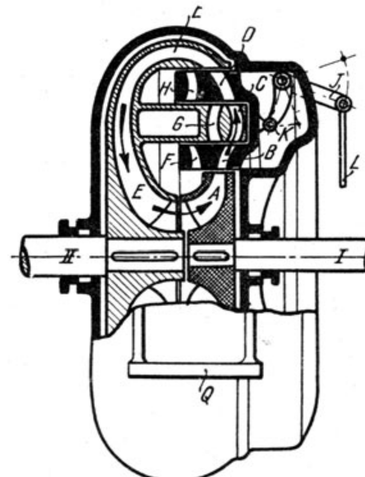


Abb. 779.

Verbundgetriebe für Vorwärts- und Rückwärtsgang.

schaulicht, für die angetriebene Turbine gleichen oder entgegengesetzten Drehsinn vorzuschreiben.. Durch Vereinigung zweier solcher Antriebe entsteht in Abb. 778 der umsteuerbare Umformer, dessen Vor-

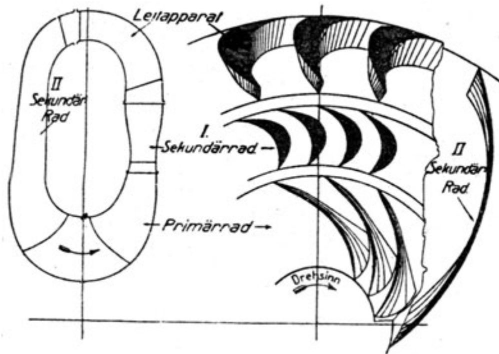


Abb. 780. Tatsächliche Beschaufelung.

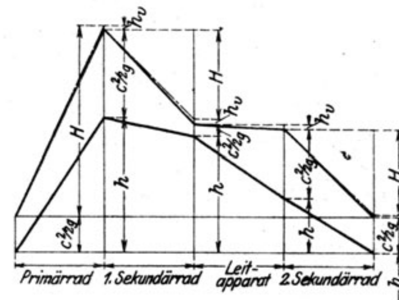


Abb. 781. Energieumwandlung.

wärtsturbine im übrigen zweistufig ausgeführt ist und von den miteinander verbundenen Laufrädern *B* und *D* gebildet wird. Die Rückwärtsturbine *G* ist einstufig. Das Umstellen auf Rückwärtsfahrt erfolgt,

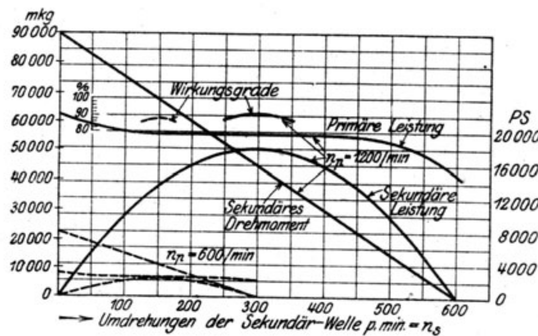


Abb. 782.

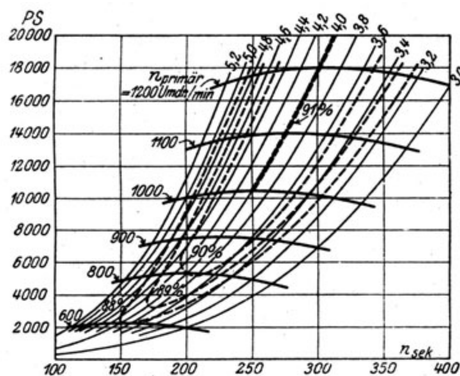


Abb. 782a.

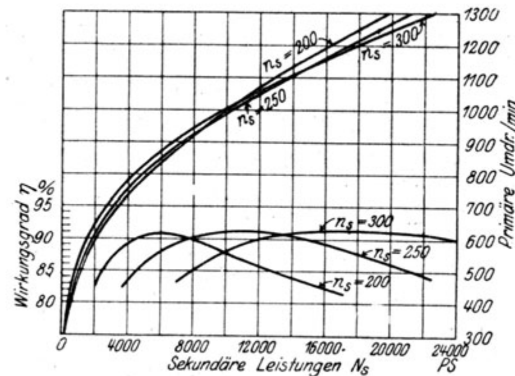


Abb. 782b.

Abb. 782—782b. Wirkungsgrade.

indem man das Gehäuse der Vorwärtsturbine entleert, dasjenige der Rückwärtsturbine mit Treibmittel anfüllt, während die Dampfturbine mit unveränderlichem Drehsinn weiterläuft. Man wendet zwei Stufen an, wenn ein hohes Übersetzungsverhältnis verlangt wird.

Die gleiche Aufgabe kann mit einem einzigen Kreislauf gelöst werden, indem nach Abb. 779 ein verschiebbares Leitrad und in der ersten Turbinenstufe zwei Laufschaufelsysteme angeordnet werden. Kreislauf *ABCDE* dient für den Vorwärtsgang, Kreislauf *AFGHE*, nach erfolgter Verschiebung des Leitrades, für den Rücklauf.

Der Bau des Umformers wurde von den Vulkanwerken A.-G. Hamburg und Stettin aufgenommen. Über die Einzelkonstruktion und die Ergebnisse eines 20000 PS-Umformers kann nach einem Vortrag von Spannhake[1]) folgendes berichtet werden.

[1]) Bayrisches Industrie- und Gewerbeblatt 1917, Heft 23 u. f.

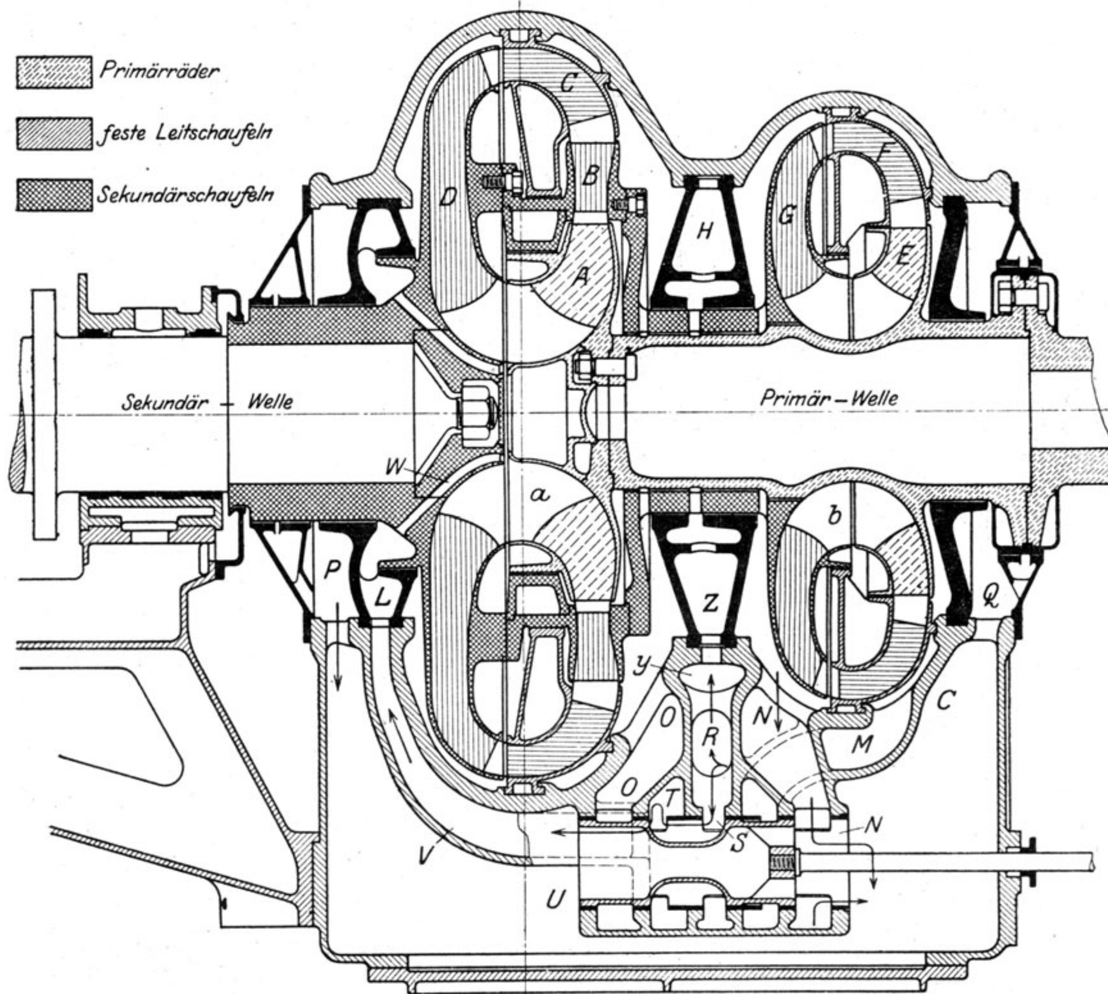


Abb. 783. Konstruktive Ausbildung des Umformers von Föttinger.

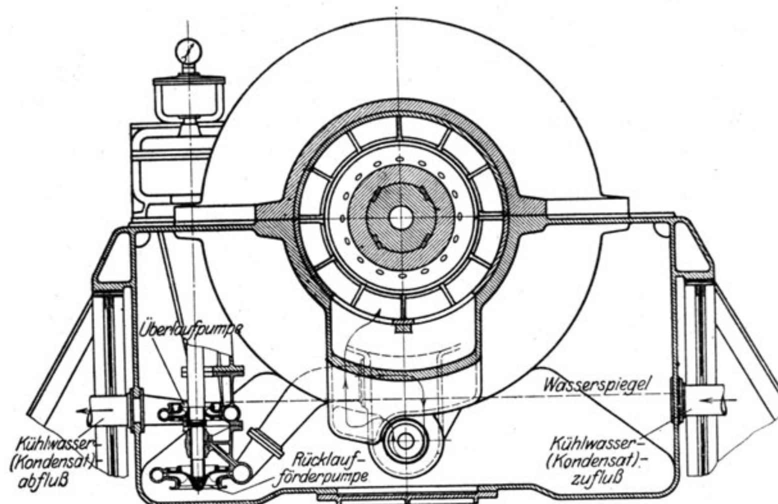


Abb. 784. Querschnitt zu Abb. 783.

Schaufelungs- und Energieverhältnisse. Nach Abb. 780 erhält das treibende Primärrad nach rückwärts gebogene Schaufeln, wie das bei Kreiselpumpen üblich ist. Die Zunahme der Druckenergie h und der kinetischen Energie $c^2/2\,g$ für je 1 kg der strömenden Wassermenge ist in Abb. 781 dargestellt.

Das angetriebene Sekundärrad I besitzt eine Art Gleichdruckschaufelung, indem nach Abb. 781 die Geschwindigkeitsenergie auf etwa $^1/_3$ ihres Betrages sinkt, während der Druck nur unwesentlich vermindert wird. Im hierauf folgenden feststehenden Leitrad bleibt die Gesamtenergie bis auf einen kleinen Reibungsverlust unverändert, jedoch wird etwa die Hälfte der Druckenergie in kinetische umgesetzt. Das Sekundärrad II nimmt den Rest der Druckenergie auf und verringert die kinetische Energie bis auf den anfänglichen Betrag, worauf der Kreislauf sich wiederholt. Der Gesamtwasserinhalt des Umformers beträgt 540 l. Die Zirkulation erfolgt bei 1200 primären und 300 sekundären Umdrehungen so rasch, daß durch jeden Querschnitt i. d. Sek. 7700 l strömen. Mithin ist die Zeitdauer eines Kreislaufes $450/7700 = 7/100$ sek.

Die absoluten Drücke sind durch die Energieumwandlung nur bis auf einen willkürlichen Anfangswert vorgeschrieben. Man könnte den Umformer theoretisch unter einen beliebig hohen Druck setzen, wird sich jedoch praktisch mit einem kleinen Überdruck im tiefsten Punkte begnügen, um keine zu großen Verluste durch Spaltundichtheit zu verursachen.

Verhalten bei verschiedenen Leistungen und Drehzahlen. Das Ähnlichkeitsgesetz. Die durch Versuch ermittelten Kernlinien bei unveränderlich erhaltener primärer Drehzahl sind in Abb. 782 in Abhängigkeit von der Sekundärdrehzahl dargestellt. Man erkennt, daß die primäre Leistung für den weitaus größten Teil des Arbeitsgebietes so gut wie unveränderlich bleibt. Die sekundäre Leistung nimmt gemäß einer Parabel von 0 bis zu einem Höchstwert zu und wieder auf 0 ab. Das Sekundärdrehmoment nimmt fast genau geradlinig mit der Drehzahl ab. Der Wirkungsgrad ändert sich ebenfalls parabolisch und ist in der Abb. nur durch seine Kuppe dargestellt, deren Höchstwert, wie ersichtlich, 91 v. H. erreicht. Durch punktierte Linien sind in der gleichen Abb. die Verhältnisse bei einer primären Drehzahl von 600 i. d. Min. dargestellt. Man erkennt, daß gemäß dem hydraulischen Ähnlichkeitsgesetz bei gleichem Übersetzungsverhältnis die Leistung im Verhältnis der 3. Potenz der Drehzahl, das Drehmoment im Verhältnis der Quadrate der Drehzahl abgenommen haben. Es ist daher ein leichtes, für irgendeine andere Zwischendrehzahl die Kennlinien aufzuzeichnen. Aus Abb. 782 ist die Zusammenstellung 782a abgeleitet, in der die Kurve der Sekundärleistung bei jeweils unverändertem Wirkungsgrad und die Kurven bestimmter primärer Drehzahlen eingetragen sind. Man erkennt, in welch weitem Gebiete der Wirkungsgrad bei der günstigsten Übersetzung (4,0) seinen Höchstwert beibehält. In Abb. 782b sind die Wirkungsgrade bei unveränderlicher Sekundärdrehzahl in Abhängigkeit der sekundären Leistung dargestellt, aus welchen die Frage nach der Eignung des Transformators für ortsfeste Antriebe (Walzenzugmaschinen u. a.) beantwortet werden kann. So würde bei 250 sekundären Umdr. eine Leistung im Gebiete von 6 bis 18000 PS mit Wirkungsgraden zwischen 88 bis 91 v. H. abgegeben werden können. Spannhake führt an, daß diese an sich unbedeutende Wirkungsgradschwankung noch herabgesetzt werden könnte durch Einbau drehbarer Schaufeln im Leitapparat.

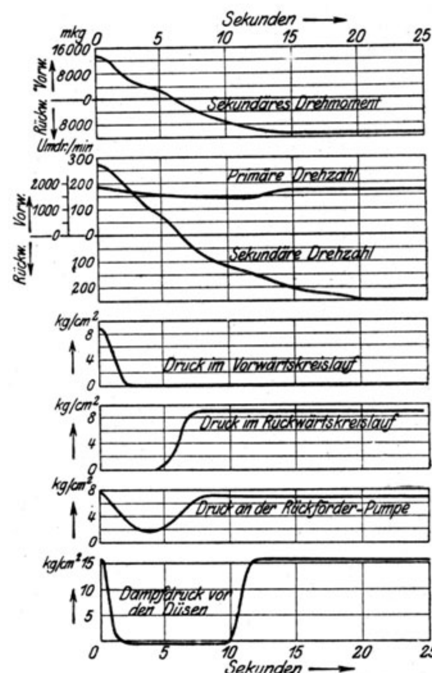


Abb. 785. Anfahrschaulinien.

Konstruktive Ausbildung des Umformers als Umsteuergetriebe. Die konstruktive Ausführung des Getriebes ist in Abb. 783 und 784 veranschaulicht. Darin bedeutet A das Vorwärtsprimärrad, E das Rückwärtsprimärrad, D und B das Vorwärtssekundärrad, G das Rückwärtssekundärrad. Bei dieser einstufigen Ausführung des Rückwärtsrades wird immer noch eine Rückwärtsleistung von 85 v. H. erzielt. Das Spritzwasser wird in den Behälter U zurückgeleitet.

Während des Betriebes ist beim Vorwärtsgang selbstverständlich nur der Vorwärtstransformator, beim Rückwärtsgang nur der Rückwärtstransformator mit Wasser gefüllt. Um vom Rückwärtsgang zum Vorwärtsgang überzugehen, muß der Steuerschieber U in die gezeichnete Lage geschoben werden, wodurch der Rückwärtstransformator sich durch die Radspalte hindurch vermöge des Kanales N in den Tank entleeren kann. Der Vorwärtstransformator wird durch die sogenannte Rückförderpumpe durch den Kanalanschluß R auf dem Wege $T\ V\ L$ vermöge der Bohrungen W angefüllt. Der Schieber bleibt für den Vorwärtsgang in der gezeichneten Stellung, damit das in den Tank abfließende Leckwasser ständig dem Kreislauf wieder zugeführt werde. Beim Übergang zum Rückwärtsgang wird der Schieber in die entgegengesetzte Endstellung geschoben, worauf sich der Vorwärtstransformator durch die Kanäle O entleert und der Rückwärtstransformator durch Kanäle M und durch die hohl gegossenen Leitschaufeln aufgefüllt wird. Das Manöver Stopp kann entweder so ausgeführt werden, daß man die Arbeitsmaschine stillsetzt, oder so, daß in der Mittelstellung des Steuerschiebers beide Kreisläufe sich entleeren können und die Antriebsmaschine durch ihren Regler auf Leerlauf eingestellt wird. Den

Verlauf einer Umsteuerung stellt. Abb. 785 nach einer Aufnahme am Probierstand dar. Die Sekundärwelle war durch eine Wasserbremse belastet, die im Anfang 6000 PS aufnahm. In ungefähr 6 sek wurde die Sekundärwelle stillgestellt, und nach 20 sek. erreichte sie die volle Drehzahl nach rückwärts. Der Druck im Vorwärtskreislauf war nach $2^1/_2$ sek verschwunden, der im Rückwärtskreislauf erreichte nach 7 sek den vollen Wert. Während 10 sek war der Dampfdruck vor den Düsen 0. Der Antrieb der Primärräder erfolgte daher durch die Wucht der vorhandenen Schwungmassen. Die Größe der Rückförder- oder Füllpumpe ist durch die vorgeschriebene Füllungszeit bedingt. Ihr Arbeitsbedarf im Betriebe bei einem Wirkungsgrad von 55 v. H. und etwa $^1/_7$ des höchsten Primärdruckes bei etwa $^3/_4$ v. H. der zirkulierenden Wassermenge als Leckverlust beläuft sich bloß auf $^1/_5$ v. H. der primären Leistung.

Kühlwasserzufluß und Überlaufpumpe. Um eine zu starke Erwärmung der im Kreislauf strömenden Wassermenge zu verhindern, muß Kühlwasser zugesetzt werden, als welches ein Teil des Kondensates der Dampfturbine benützt wird. Eine gleich große Menge muß als Überschuß ständig abgeleitet werden, was durch die in Abb. 784 dargestellte Überlaufpumpe geschieht. Die Höhenlage ihres Einlaufs bedingt auch die Höhe des Wasserspiegels im Tank. Überlauf- und Förderpumpe sind auf derselben Welle angeordnet und werden durch ein kleines mehrkränziges Dampfturbinenrädchen angetrieben.

Gesamtwirkungsgrad mit Rücksicht auf die Rückgewinnung der Reibungswärme. Indem man den Kreislauf mit dem Kesselspeisewasser betreibt, wird die Reibungswärme des Umformers ihm einverleibt. Der Umformer bildet also zugleich einen Speisewasservorwärmer. Den sich hieraus ergebenden Wärmegewinn berechnet Spannhake für die volle und für $^1/_{10}$ Last wie in nachfolgender Zahlentafel angegeben ist.

	Vollast	$^1/_{10}$ Last
Primärleistung . . . . PS	20 000	2000
Dampfverbrauch für die primäre PS u. st. . . kg	5,3	8,25
Gesamtdampfverbrauch der Hauptmasch. i. d. st. kg	106 000	16 500
Gesamtdampfverbrauch der Hauptmasch. i. d. sek. kg	29,45	4,58
Zuschlag für Hilfsmasch. v. H.	20	25
Gesamt. Dampfverbrauch kg/sek	35,4	5,72
Temperatur des Kondensats °C	35	30
Verlust im Transformator v. H.	9	11
„ „ „ PS	1800	220
Leistung der Rückförderpumpe . . . . v. H.	$^2/_3$	$^2/_3$
Leistung der Rückförderpumpe . . . . PS	140	14
Gesamte in Wärme übergehende Leistung . . PS	1940	234
Gesamte in Wärme übergehende Leistung im Wärmemaß . . . kcal/sek	341,0	41,0

	Vollast	$^1/_{10}$ Last
Demnach Erwärmung durch Transformator °C	9,6	7,2
Wärmeinhalt des Kesseldampfes von 17 at. kcal	672,4	672,4
Aus dem Kessel kommende Wärmemenge kcal/sek	23 800	3850
Speisewassertemperatur nach der Vorwärmung durch Transformator und Hilfsmaschinen °C	95	95
In den Kessel strömende Wärmemenge kcal/sk	3360	544
Im Kessel übertragene Wärmemenge . . kcal/sek	20 440	3306
Kohlenersparnis durch Transformator . . . v. H.	1,65	1,23
Gesamtwirkungsgrad d. Kraftübertragung . . v. H.	92,64	90,23

Der Transformator erreicht hiernach einen Wirkungsgrad von 92,6 oder rund 93 v. H.

Die Vorteile des Föttingerschen Umformers gegenüber der unmittelbar antreibenden Turbine sind ganz bedeutende, obschon die letztere inzwischen, durch einen großen Aufwand an Konstruktionsmitteln, ihren Dampfverbrauch bis auf 5,5 kg für die PS/st bei Naßdampf von 3 % Feuchtigkeit und etwa 16 at. Druck zu vermindern vermocht hat. Die schnelllaufenden Turbinen können demgegenüber kaum weniger als 5,2 kg f. d. PS/st in Aussicht stellen. Auch die Schraubendrehzahl kann, verglichen mit denjenigen der letzten großen Schnelldampfer, durch den Transformator nicht erheblich herabgesetzt werden. Es bleibt also immerhin ein Gewinn von 5 bis 7 v. H. an Dampfverbrauch, was an sich wertvoll jedoch vielleicht nicht ausschlaggebend ist. Allein es besteht ein außerordentlicher Unterschied im Gewicht, in der Freiheit der Leistungsaufteilung und der Einfachheit des praktischen Betriebes. Dies wird von Spannhake an Hand der Mitteilungen von Direktor Dr. Bauer durch den Vergleich der Imperatorturbine mit einer gleichwertigen Föttinger-Anlage schlagend beweisen, wie nachfolgende Zusammenstellung zeigt:

		Unmittelbarer Antrieb	Föttinger-Transformator
Zahl der Schaufeln und Füllstücke		1 500 000	44 000
Gewicht der Maschinenanlage	t	2910	1890
Kohlenverbrauch	kg f. d. PS/st	0,6	0,58
Rückwärtsleistung	v. H.	55	85

Der Krieg hat die Entwickelung des Transformators hintangehalten. Inzwischen ist ihm im Zahngetriebe ein gefährlicher Wettbewerber entstanden, der Wirkungsgrade bis 98 v. H. aufweist. Bauer und Lasche bemerken zwar, daß von diesem Betrag der Reibungsverlust der stets erforderlichen Rückwärtsturbinen abgezogen werden muß. Bei 45 v. H. Rückwärtsleistung, die zu fordern sei, schätzen sie diesen auf 3 v. H., dazu den im Drucklager mit 0,5 v. H., so daß in Wahrheit das Zahngetriebe nur 94,5 v. H. Wirkungsgrad liefern würde. Die nahe Zukunft wird lehren, ob sich beim Zahngetriebe im Laufe der Zeit Abnützung, starkes Geräusch u. a. einstellen, was die Aussichten des Umformers namhaft erhöhen würde.

134. Kraftübertragung mittels Zahngetriebe.

Das Zahngetriebe wurde als Kraftübertragungsmittel von de Laval in den Dampfturbinenbau eingeführt. Der Übergang von den durch seine Turbine bewältigten Leistungen von 3 bis 500 PS auf Zehntausende von Pferdestärken, die bei der Schiffsturbine in Frage kommen, war einer der größten technischen Fortschritte der Neuzeit. Die Schwierigkeiten, die bei der praktischen Verwendung des Getriebes zu überwinden waren, sind:

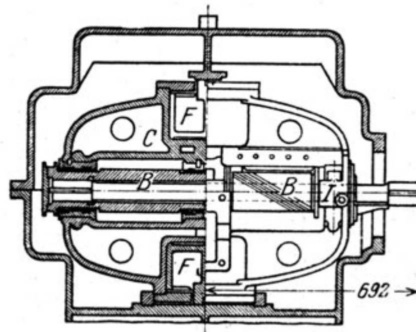
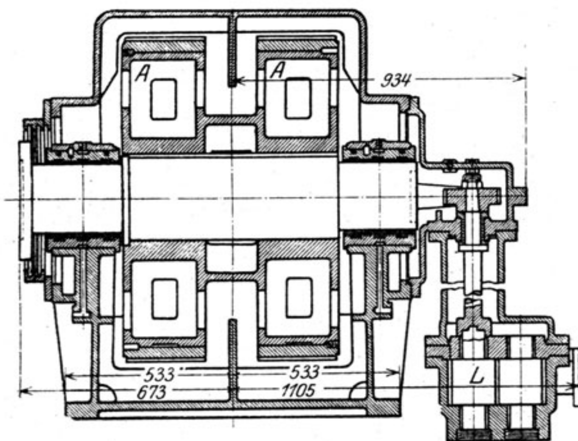


Abb. 786.



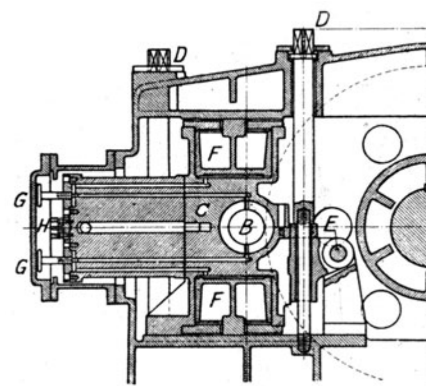


Abb. 786a. Abb. 786b.

Abb. 786—786b. Nachgiebige Ritzellagerung.

1. Die Ungenauigkeit in der Herstellung der Zahnflanken und der Achsenlage der Räder.
2. Hinlänglich gleichmäßige Verteilung der Umfangskraft über die ganze Zahnlänge. Die vollständige Gleichmäßigkeit ist ausgeschlossen:
   a) Wegen der Durchbiegung der Ritzelachse unter der Wirkung des Zahndruckes.
   b) Wegen der Verdrehung des Zahnritzels unter der Wirkung des übertragenen Drehmomentes.
   c) Wegen der größeren Erwärmung des Zahnritzels gegenüber dem Zahnrade.
3. Zweckmäßige Schmierung, um dem Warmlauf und der Abnützung zu begegnen.

Diese Schwierigkeiten wurden, in historischer Reihenfolge betrachtet, durch folgende Mittel überwunden oder auf ein zulässiges Maß herabgemindert.

Die nachgiebige Lagerung des Ritzels. Die erste Ausführung eines derartigen

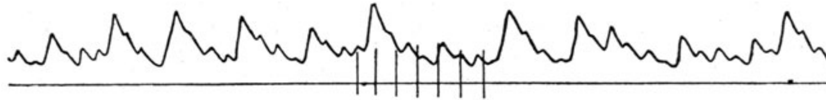


Abb. 787. Durch Zahngetriebe verursachte Schallschwingungen.

Zahngetriebes für 6000 PS Leistung stammt von **Westinghouse** nach den Entwürfen von **W. Melville** und **J. H. Macalpine**[1]); ihr unterscheidendes Merkmal besteht in der Verwendung eines „schwimmenden" Rahmens (floating frame).

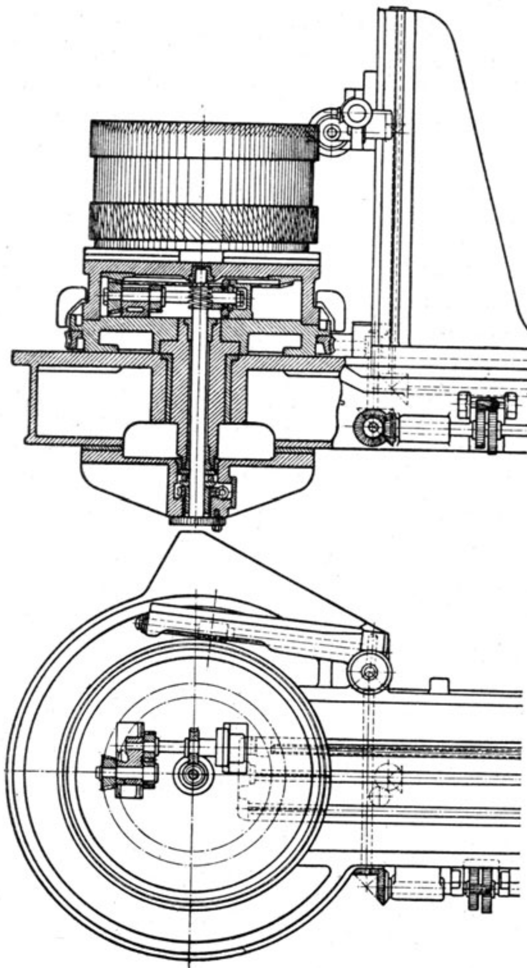


Abb. 788. Zahnfräsen nach Parsons.

Eine der neueren Ausführungen ist in Abb. 786 bis 786b dargestellt[2]). Der schwere Rahmen *C* trägt die drei Lager der hohlen Ritzelwelle *B*, in die die treibende Turbinenwelle mit Spiel eingeschoben und am linken Ende starr verbunden ist. Am rechten Ende ist der Kupplungsanschluß ersichtlich. Der Rahmen ist mit zwei Öldruckkolben *F* zum Zwecke der Zahndruckmessung versehen. Durch Bolzen *J* wird ein unveränderlicher Abstand des Rahmens von der Achse des Zahnrades *A* eingehalten. Der Rahmen kann um den mittleren Stützpunkt in der lotrechten Ebene unter dem Einfluß ungleicher Kräfte kippen, mithin wird sich die Neigung der beiden Ritzelhälften so lange ändern, bis die von ihnen aufgenommenen Kräfte angenähert gleich geworden sind. Der Neigungswinkel der Schraubenzähne gegen eine Achsenebene ist 30°. Die Einstellung in der Achsenrichtung wird durch die Nachgiebigkeit der Kupplung in axialer Richtung ermöglicht. Infolge gleich starker Neigung der Zähne stellt sich Gleichheit der wagerechten Komponenten des Zahndruckes von selbst ein, womit auch die Gleichheit der lotrechten Komponenten gesichert ist. Zum Zwecke der Kraftmessung wird die Schraube *D* in Abb. 786 so weit gelockert, bis der Rahmen in lotrechter Richtung frei zu spielen beginnt, was vermöge einer Zeigerübersetzung bei *H* erkannt wird. Durch teilweises Öffnen eines der Handräder *G* wird dem Öle vom mittleren Lager *B* der Zutritt zu einem der Kolben *F* freigegeben. Man drosselt den Zufluß, bis sich ein dauernder Schwebezustand eingestellt hat, worauf durch Ablesung des Druckes an einem Manometer der Zahndruck, d. h. die Umfangskraft, bestimmt werden. *L* ist eine Zahnradschmierölpumpe. Wird eine Kraftmessung im Betriebe nicht beabsichtigt, so fallen die hydraulischen Kolben *F* weg und der Rahmen *C* wird durch ein lotrechtes Doppel-T-förmiges Stahlstück gestützt, dessen Steg genügend federnd ist, um das Kippen des Rahmens zu gestatten. Die Abbildung bezieht sich auf das erste Vorgelege eines Zahngetriebes von 1450 PS Leistung mit 5,11″ Durchm. des Ritzels und 3860/483 als Drehzahlübersetzungsverhältnis.

Ch. A. Parsons ist bestrebt, die gleichmäßige Druckverteilung bei starrer Lagerung durch eine möglichst vollkommene Herstellung der Zahnflanken zu erzielen.

Da die Erfahrung gezeigt hat, daß die Intensität des auftretenden Geräusches ein guter Maßstab für die Vollkommenheit des Getriebes ist, wurden die erzeugten Schallschwingungen mit Hilfe einer nicht näher beschriebenen Vorrichtung, genannt „Mikrophon Oscillograph", untersucht und dabei die in Abb. 787 dargestellte Wellenform festgestellt. Diese zeigte eine Periodenzahl von 160 mal der Zahl der

[1]) Engineering 1909, II, S. 377.
[2]) Macalpine Reduction Gears, Engineering 1917, 6. April, S. 321.

Raddrehungen, die unerklärlich blieb, bis man herausfand, daß das Schneckenrad der zur Herstellung benützten Radfräsmaschine 160 Zähne besaß. Parsons folgerte hieraus, daß die treibende Schnecke keine vollständig gleichmäßige Teilung besitzt und daß während jeder Zahnteilung eine Beschleunigung und Verzögerung auftraten, die sich in den Zahnflanken des gefrästen Rades entsprechend abbildeten. Um diesen Übelstand zu beheben, baute Parsons nach Abb. 788[1]) auf den bestehenden Fräs-

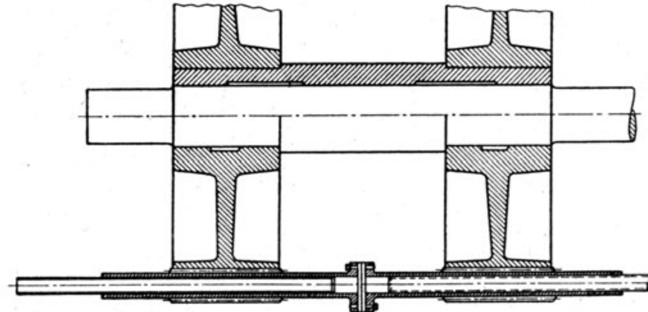


Abb. 789. Kraftentnahme zwischen den Ritzeln nach Power Plant Co.

tisch der Maschine einen zweiten Tisch auf, der diesem gegenüber eine Voreilung von 1 v. H. erhält. Um den gleichen Betrag wird die Winkelgeschwindigkeit des Grundtisches herabgesetzt, so daß die absolute Drehzahl des zu fräsenden Rades dieselbe bleibt. Das Zahnschneiden erfolgt wie üblich nach dem Abwälzverfahren, bei dem die Schraubenfräse, die eine ideelle Zahnstange darstellt, mit einer der Übersetzung entsprechenden Geschwindigkeit sich dreht und zugleich in der Richtung der Radachse bewegt wird. Infolge jener Zusatzbewegung wird bei einer vollen Drehung des Schneckenrades das zu fräsende Rad um 1,6 Zahnteilungen mehr verdreht und der Fehler in der treibenden Schnecke oder im Schneckenrad entsprechend verteilt.

Die **Power Plant Company,** West Drayton, benützt ebenfalls starre Lagerung. teilt jedoch den Ritzel bei über 3000 i. d. Min. liegenden Drehzahlen und bei hohen Leistungen

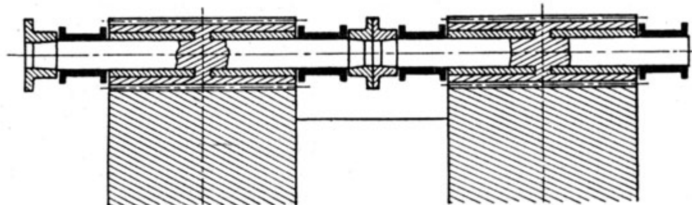


Abb. 790. Unterstochene Ritzel nach Bohuszewicz.

mindestens in zwei Teile. Der eine ist hohl und nimmt die Kraftübertragungswelle auf, die durch ihren Kupplungsflansch oder durch eine Verkeilung das Drehmoment in der Mitte zwischen den Ritzelflächen abgibt, Abb. 789[2]). Hierdurch wird die Verdrehung in erheblichem Maße herabgesetzt und Stöße durch Teilungsfehler können durch die vergrößerte Drehungselastizität der Welle abgeschwächt werden.

Bohuszewicz[3]) verwendet nach Abb. 790 unterstochene Ritzel, so daß das Moment für jede Hälfte in der Mitte der Länge angreift und so die Verdrehungsstrecke nochmals halbiert wird. Um zu verhindern, daß die Ritzel infolge der Glockenform zum Erklingen kommen, soll der Hohlraum nach Bedarf durch eine Hülse ausgefüllt werden. Es ist fraglich, ob bei den üblichen Ausführungen mit knappstem Ritzeldurchmesser die zum Unterstechen notwendige Materialstärke nicht mangeln wird.

Die **A. G. Brown Boveri & Cie.** unterteilt den Ritzel in eine größere Anzahl von Ringen, die auf die Ritzelwelle aufgeschoben werden[4]). Drei durchgehende Keile nehmen nach Abb. 791 die Umfangskraft unter Zwischenschaltung von beweglichen Elementen auf, die eine gegenseitige kleine Verdrehung der Ritzelringe gestatten.

---

[1]) Mechanical Gearing, Engineering 14. März 1913, S. 371.

[2]) Entnommen dem D. R. P. Nr. 254748, Kl. 47h, 1911, Dr. Wiesengrund, London.

[3]) D. R. P. 291051, Kl. 47h, 1914.

[4]) D. R. P. 303704, Kl. 47b, 1916.

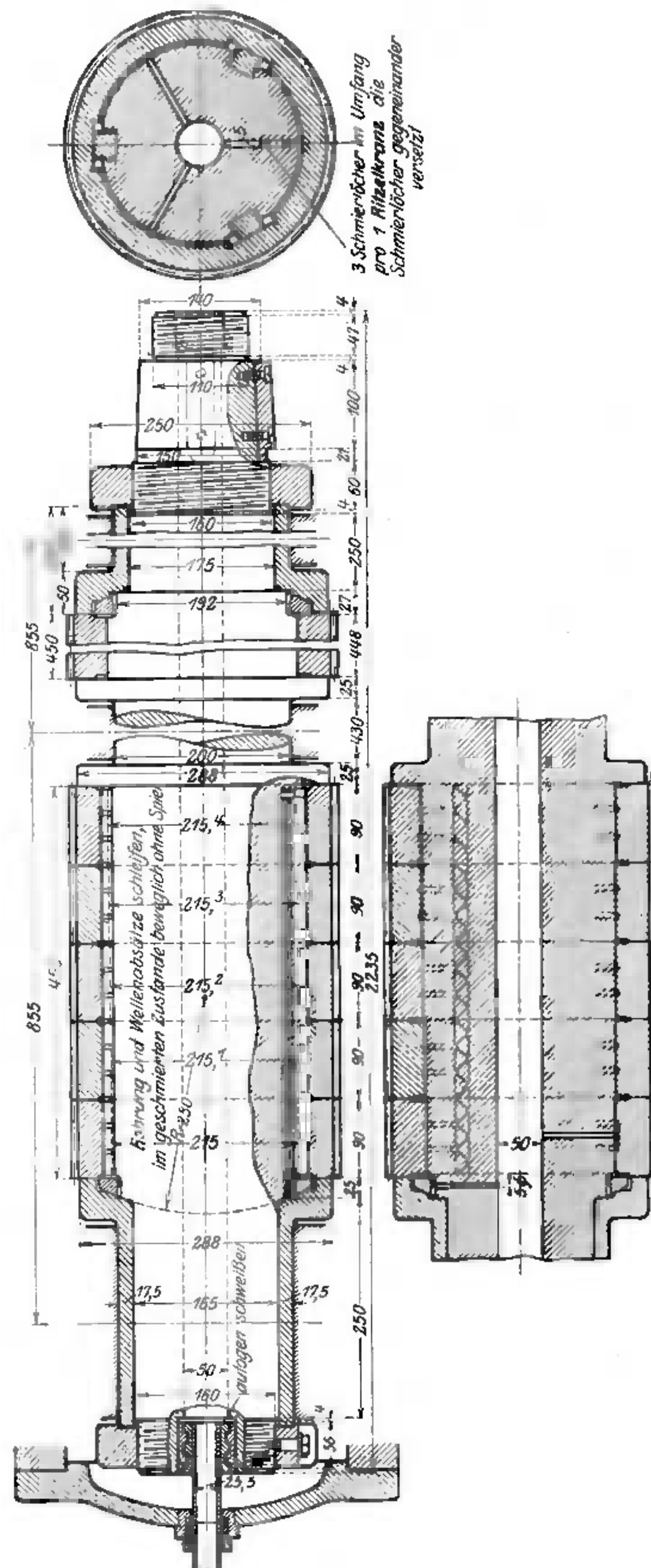


Abb. 791 l. Unterteiltes nachgiebiges Ritzel nach Brown, Boveri & Cie.

Als solche Übertragungsglieder dienen sich gegenseitig stützende rechtwinklige Prismen oder gehärtete Stahlkugeln. Von der Reibung abgesehen, die wohl durch die Erschütterung großenteils ausgeschaltet wird, kann ein Gleichgewicht nur bestehen, wenn jeder Ring die gleiche Umfangskraft über-

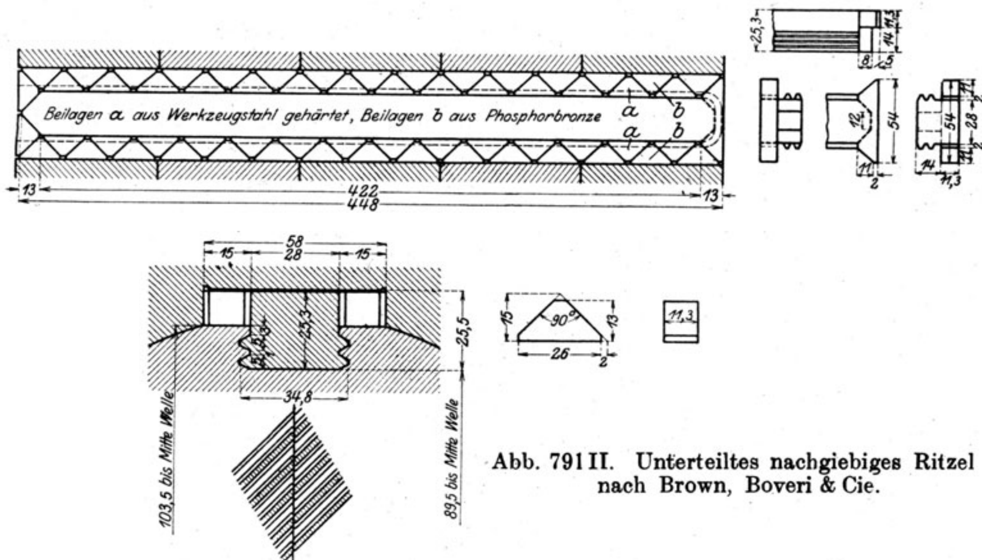


Abb. 791 II. Unterteiltes nachgiebiges Ritzel nach Brown, Boveri & Cie.

trägt. Sollte also das Ritzelende infolge der Wellenverdrehung nicht genügend anliegen, so erzeugt die Umfangskraft der übrigen Ringe einen axialen Schub, der die keilförmigen Elemente gegen das Ritzelende hintreibt und den fraglichen Ring zum vollen Tragen bringt. Jedes Endelement der drei Keile

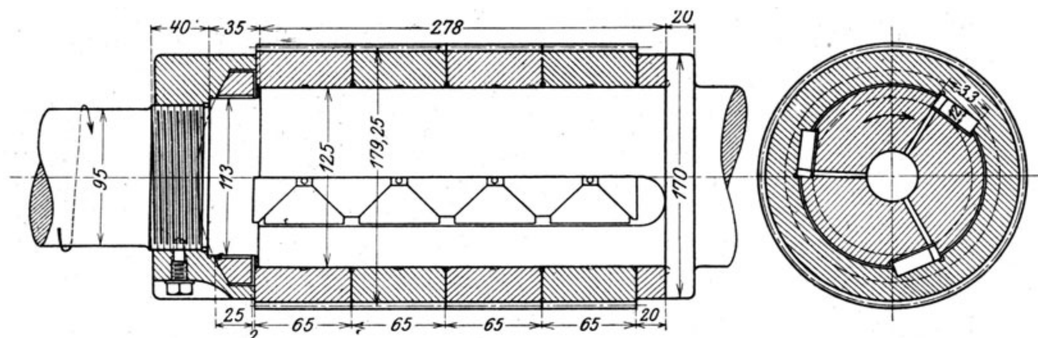


Abb. 791 a. Unterteiltes Ritzel mit Tangentialkeilen.

drückt gegen den mit Kugellagerung versehenen Ring, der so lange nachgibt, bis die drei Drücke gleich sind. Auf diese Weise wird die Umfangskraft auf die Keile gleichmäßig verteilt. Das gezeichnete Getriebe wurde auf dem Prüffeld der Firma einer **mehrstündigen Dauerbelastung** mit 6000 PS Leistung bei 2400—2500 Umdr/min unterworfen und arbeitete mit rund 150 kg/cm Zahndruck befriedigend.

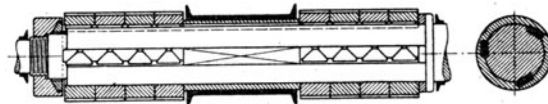
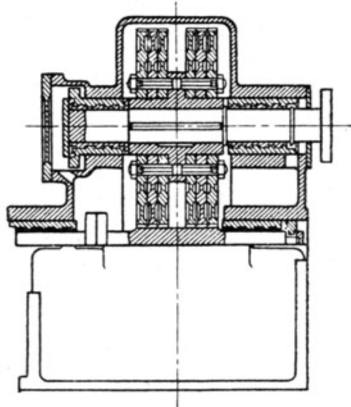


Abb. 791 b. Durch Zwischenlager getrenntes unterteiltes Ritzel.

Vorschrift für die Herstellung der aus Werkzeugstahl bestehenden Ritzelringe war, daß sie zuerst **vorgefräst und nachher 8 Tage lang der elastischen Nachwirkung überlassen,** wohl auch **in Dampf von 250 °C Temperatur auszuwärmen seien.**

Wenn bei dieser Ausführungsart Zweifel übrigbleiben, ob die hervorstehenden Keile trotz bester Herstellung und Befestigung den zahllosen Umfangsstößen auf die Dauer standhalten werden, so ist hiervon die Bauart nach Abb. 791 a frei. Hier werden Tangentialkeile verwendet, mit Kraftausgleich nach dem gleichen Verfahren wie oben.

In Abb. 791b[1]) wird das Verfahren auf den Kraftausgleich zweier durch das Zwischenlager getrennten Ritzelhälften ausgedehnt. Dies gelingt durch Einschaltung eines Längskeiles, der die Lagerlänge überbrückt, wobei als Lauffläche eine übergeschobene Hülse dient.



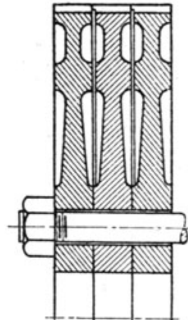


Abb. 792. Abb. 792a.
Elastisches Rad nach Alquist.

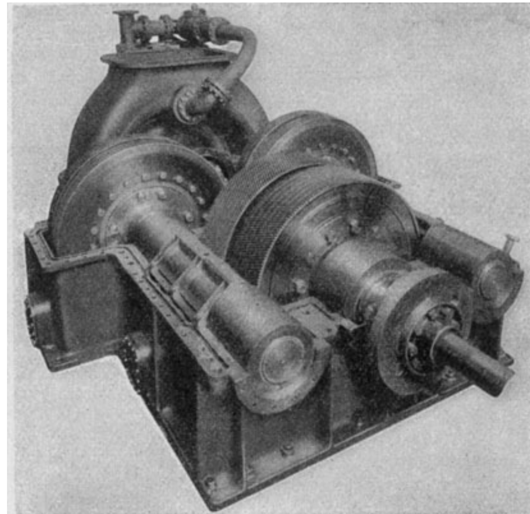


Abb. 792b. Alquistsches Doppelvorgelege.

Die **General Electric Co., Schenectady,** führte als erste eine elastisch nachgiebige Verzahnung nach dem Vorschlage von Alquist Abb. 792[2]) aus. Die Ritzel sind massiv, die Räder hingegen bestehen aus verhältnismäßig dünnen, durch Zwischenräume getrennten Scheiben.

Für die Herstellung erhalten die Scheiben verbreiterte Kränze, so daß eine zusammenhängende äußere Zylinderfläche entsteht. Ist die Verzahnung geschnitten, werden jene Arbeitsleisten weggefräst,

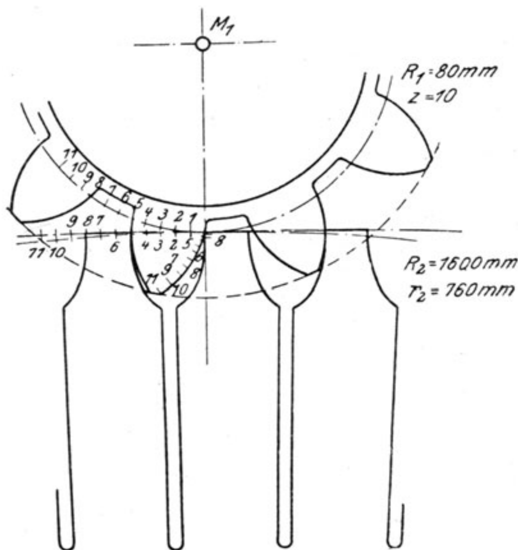


Abb. 793.

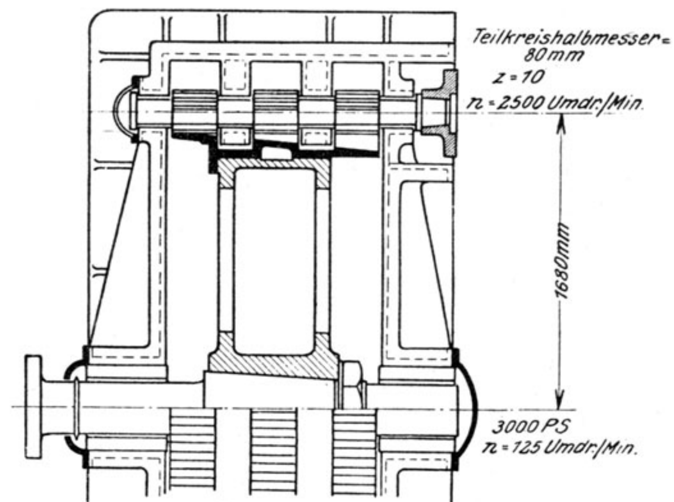


Abb. 793a.

Federnde Zähne nach Gümbel.

und dadurch die Möglichkeit zu einer Federung unter der Wirkung der axialen Komponente des Zahndruckes durch seitliches Ausweichen der Scheiben gegeben. Abb. 792a ist ein Schaubild eines doppelten Vorgeleges mit abgehobenem Gehäusedeckel. Die Steuerungsfugen der Räder sind als Lichtspuren deutlich sichtbar. Im Betriebe haben sich Schwierigkeiten eingestellt, über die wir im Kapitel über „Wirkungsgrade" berichten.

---

[1]) D. R. P. 305 325, 1917.

[2]) Engineering 22. Dez. 1916, S. 613.

Gümbel schlägt in einer bemerkenswerten Abhandlung über „geschmierte Arbeitsräder“ [1]) die Verwendung von Staffelzähnen nach Abb. 793 mit drei um $^1/_3$ der Teilung versetzten Absätzen vor, wobei durch tiefe Fräsenschnitte in den Zahnlücken nach Abb. 793a eine vom freien Ende des Ritzels an zunehmende federnde Zahnlänge erzeugt würde.

Gümbel spricht sich im Gegensatz zur allgemein herrschenden Übung für eine einseitige Zykloiden-Verzahnung aus, die gewiß den schätzbaren Vorteil besitzt, die konvexe Flanke des Ritzels auf einer konkaven Flanke des Rades arbeiten zu lassen, so daß eine weit geringere Abnützung zu erwarten oder eine weit größere Flächenbelastung zulässig wäre, als bei Evolventzähnen, wo zwei konvexe Flächen sich berühren. Hierbei wird jedoch der Hauptvorteil der Evolventenräder aufgegeben, daß die mit der Abnützung des Lagers verbundene Änderung des Achsenabstandes die Genauigkeit des Eingriffes nicht stört. Die von Gümbel entwickelte Theorie der Flüssigkeitszahnreibung wird bei der Ausbildung der Zahngetriebe noch eine Rolle zu spielen haben.

In neuester Zeit beginnt **Maag** die von ihm vervollkommnete Evolventen-Stirnrad-verzahnung bei Turbinenantrieben einzuführen. Die wesentliche Neuerung, die der Maag-Zahnräder-A.-G. in Zürich einen Weltruf und den bekannten Fabrikationserfolg gebracht hat, ist das **Härten und Schleifen der Zähne.**

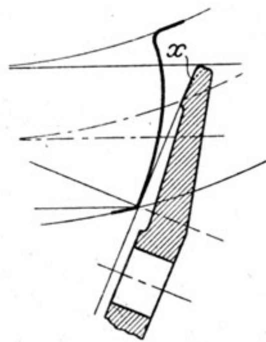


Abb. 794. Zahnschleifen nach Maag.

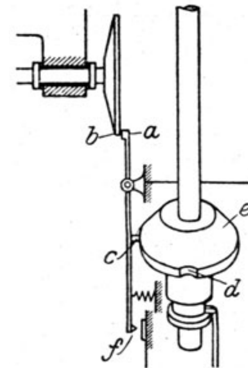


Abb. 794a. Nachstellung der Schmirgelscheibe.

Die Zähne werden durch Messer, deren Form der zum Rade gehörenden Zahnstangenform entspricht, nach dem Abwälzverfahren gehobelt, hierauf im Einsatz bis zu einer Tiefe von etwa 1 mm gehärtet und nach Wiederanlassen auf 100 bis 150° C geschliffen. Diese Aufgabe wurde mit einer den höchsten Ansprüchen genügenden Genauigkeit zum ersten Male von Maag dadurch gelöst, daß zwei Schmiergelscheiben, schräg gegeneinander gestellt, durch ihre Seitenflächen das Profil eines zum Rade gehörenden Zahnstangenzahnes bilden. Die arbeitende Seitenfläche ist ferner schwach konisch unterhöhlt, so daß die arbeitende Ebene lediglich durch eine am Außenrande befindliche Verstärkung *X*, Abb. 794 [2]), gebildet wird, die trotz fortschreitender Abnützung durch ihre äußersten Vorragungen eine zur Achse senkrechte Arbeitsebene definiert. Gegenüber dieser Ebene wird das zu schleifende Zahnrad in richtiger Weise, d. h. so abgewälzt, daß der Teilkreis auf der Teillinie der zugehörigen Zahnstange abrollt. Die Schmirgelscheiben erhalten eine Hin- und Herbewegung, um die ganze Länge des Zahnes zu bestreichen. Das Zahnrad rollt übrigens schwingend hin und her, bis eine Zahnlänge fertiggeschliffen ist, worauf die Scheiben abgehoben, das Zahnrad um eine Teilung verstellt und die benachbarten Zahnflankenpaare in Angriff genommen werden. Nun entsteht die Aufgabe, die Schmirgelscheiben der fortschreitenden Abnützung gemäß auf 1 bis 2 Tausendstel mm stetsfort genau nachzustellen. Zu diesem

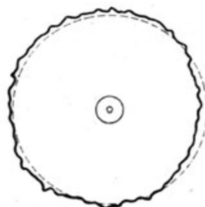


Abb. 795. Gehobelte Zähne.

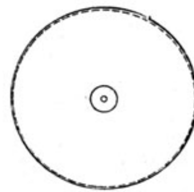


Abb. 795a. Geschliffene Zähne.

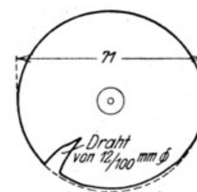


Abb. 795b. Ermittelung des Maßstabes.

Zwecke wird nach Abb. 794a [3]) in regelmäßigen Zeitabständen, dadurch, daß der Nocken *c* in die Kerbe *d* der sich langsam drehenden Scheibe *e* hineinspringt, die diamantene Fühlfläche *a* gegen den Rand *b* der Schmirgelscheibe leicht federnd angedrückt. Ist der Rand inzwischen abgenützt worden, so eilt die Fühlfläche ihm nach und bringt den elektrischen Kontakt *f* ins Spiel, der vermöge eines Schaltwerkes den Scheibenabstand so lange verstellt, bis beim Nachfühlen des Diamanttasters der Kontakt wieder aufgehoben wird. Diese Vorrichtung hat sich glänzend bewährt. Der Grad der erreichten Genauigkeit wird bei jeder wichtigen Lieferung durch eine von Saurer (Arbon) stammenden Meßmaschine folgender Ein-

[1]) Zeitschr. f. d. ges. Turbinenwesen, 1916, S. 269.

[2]) Nach D.R.P. 296139 v. J. 1913. [3]) D.R.P. 303014 v. J. 1915.

richtung festgestellt: die beiden Zahnräder werden auf zwei Wellen in der Eingriffslage befestigt. Die Spindel des einen Rades ist hohl und nimmt eine besondere Welle auf, die mittels einer Scheibe und Drahtbandtriebes von der Welle des ersten Rades mit gleicher Übersetzung, wie das Radpaar sie liefern soll, angetrieben wird. Sind die Zähne nach Teilung und Profil vollkommen, so beschreibt die eingeschobene Welle bei einer von Hand eingeleiteten Drehung den gleichen Winkel wie das auf der hohlen Spindel sitzende Zahnrad. In Wirklichkeit werden Unterschiede auftreten, die man durch einen Multiplikator angemessen vergrößert und auf einer Papierscheibe aufzeichnen läßt. Abb. 795 zeigt die so aufgenommene Linie für ein bloß gehobeltes Radpaar von 40×40 Zähnen ($t = 3\pi$). Die radiale Höhe der dort sichtbaren Zacken ist ein Maß der erwähnten Winkelabweichung, die sich, wie ersichtlich, bei fast jedem Zahne wiederholt. Nach erfolgtem Schleifen wurde die in Abb. 795a dargestellte Kurve beschrieben, die als nahezu vollkommener Kreis keine merkbare Abweichung erkennen läßt. Um den Maßstab zu ermitteln, wurde ein Draht von 0,12 mm Stärke zwischen die Zahnflanken eines Radpaares von 12×12 Zähnen ($t = 12\pi$) im Teilkreise eingeschoben. Es entstand der höckerförmige Ausschlag, Abb. 795b, dessen Ausmessung in Naturgröße ergab, daß einer Abweichung des Zahnprofiles von 0,01 mm ein Ausschlag des Schreibstiftes von 1,5 mm entspricht. Im Lichtbild 795c erkennt man die Form der sich angenähert rechtwinklig kreuzenden Schleifbahnen des Schmirgelscheibenrandes.

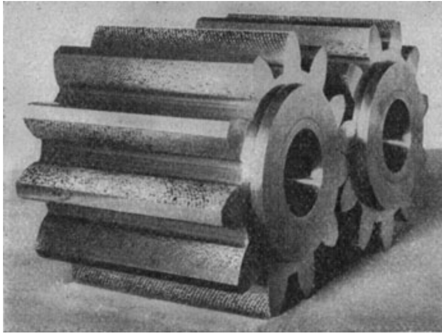


Abb. 795c. Sichtbare Schleifbahnen.

Konstruktive Ausbildung der Zahngetriebe.

Die allgemeine Anordnung des Zahngetriebes bietet eine außerordentliche Mannigfaltigkeit dar mit Wahlmöglichkeiten in dreierlei Hinsicht:

1. Das Getriebe kann mit einfacher oder zweifacher Übersetzung ausgeführt werden. Die Grenze für die einfache ist 1 : 20 (ausnahmsweise 1 : 26), die zweifache ist mit Übersetzungsverhältnissen bis 1 : 50 ausgeführt worden.

2. Die Turbine kann ein- bis dreigehäusig sein. Für die Entscheidung betreffend diese Trennung gelten ähnliche Gesichtspunkte wie bei unmittelbarem Schraubenantriebe (Abschn. 129).

3. Die Zahnräder können eine Schraubenverzahnung mit Pfeilzähnen haben, wodurch sich der Zahndruck selbsttätig ausgleicht, oder man benützt einfache Schraubenräder, deren

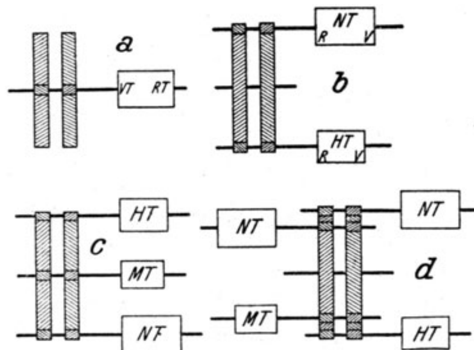


Abb. 796. Einfache Übersetzungen.

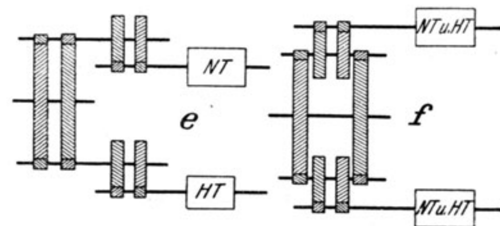


Abb. 797. Zweifache Vorgelege.

Axialdruck einerseits den Dampfschub des Turbinenläufers, anderseits den Schraubenschub aufnehmen kann. Bei Stirnradverzahnung ist dieser Ausgleich selbstverständlich unmöglich.

Die aus der Verbindung der aufgezählten Wahlmöglichkeiten sich ergebenden Kombinationen sind zu zahlreich, um im einzelnen dargestellt werden zu können. Wir beschränken uns auf die Hervorhebung einiger typischer Beispiele.

In Abb. 796 stellt *a* die einfache Übersetzung einer eingehäusigen Turbine auf ein Pfeilrad dar; *b* ist der einstufige Antrieb einer zweigehäusigen oder einer Zwillingsturbine; *c* desgleichen für eine dreigehäusige; endlich *d* derjenige für eine viergehäusige Turbine. In letzterem Falle wird die Teilung meist in eine Hochdruck-, eine Mitteldruckgruppe und zwei Niederdruckgruppen erfolgen. Man stellt die Nieder-

druckgruppen des Raumbedarfes halber auf die andere Seite mit einer in der Nähe des Radscheitels gewählten Angriffslage, indem dann der Kondenser wie bei ortsfesten Anlagen der natürlichen Entwässerung entsprechend unterhalb der Turbine aufstellbar wird. In Abb. 797 stellt *e* den Antrieb einer zweigehäusigen Turbine mit doppelter Übersetzung und Pfeilzähnen dar. Versetzt man die Zwischenzahnräder nach *f* in die Mitte der geteilten Hauptpfeilräder, so werden die Ritzel symmetrisch beansprucht und erfahren eine kleinere Verdrehung als im Falle *e*. Eigenartig ist die Anordnung Abb. 798, wo eine eingehäusige Turbine durch ein zentrales Ritzel auf zwei Vorgelegeachsen treibt, deren Drillinge in das Hauptpfeilrad eingreifen. Der Turbinendrilling überträgt bloß ein Drehmoment; also ist die gefährliche Verbiegung durch einseitige Kräfte vermieden. Das Hauptrad ist durch den doppelten Angriff sehr gut ausgenützt, allein man muß besondere Maßnahmen vorkehren, um eine gleichmäßige Kraftübertragung der zwangsweise bewegten Hauptdrillinge zu erreichen. Dies kann durch Einschaltung elastischer Zwischenglieder geschehen, gegen deren Formänderung die vorkommenden Ungenauigkeiten des Zusammenbaues klein sein müssen.

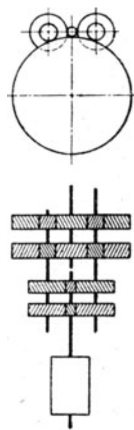


Abb. 798. Zweifaches Doppel-Vorgelege.

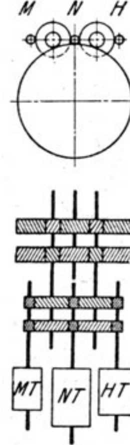


Abb. 799. Zweifache Übersetzung mit dreigehäusiger Turbine.

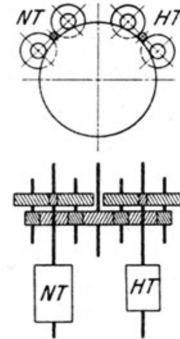


Abb. 800. Aufnahme des Schubes durch die axiale Komponente des Zahndruckes.

Abb. 799 veranschaulicht eine von Parsons benützte Anordnung mit dreigehäusiger Turbine und doppelter Übersetzung, wobei das Niederdruckritzel in die beiden Vorgelegeräder gleichzeitig eingreift.

Abb. 800 ist eine von Brown, Boveri & Cie. bevorzugte Anordnung, die scheinbar auf eine Verdoppelung des in Abb. 798 dargestellten Antriebes für eine zweigehäusige Turbine hinausläuft. In Wahrheit jedoch werden keine Pfeil-, sondern einfache Schraubenräder verwendet, und die Turbine überträgt ihren Achsendruck mittels des ersten Ritzels auf das erste Vorgelege und von diesem durch das Hauptrad auf die Schraube. Damit am Vorgelege die Achsendrücke sich ausgleichen, muß, wie man leicht einsieht, die Steigung der Schraubenlinie dem Durchmesser umgekehrt proportional sein. Da sich das Zwischenvorgelege dann jedoch herausschrauben könnte, muß es axial (durch einen Kamm und ähnliches) festgehalten werden. Um gleichmäßige Kraftübertragung durch die beiden Zwischenachsen zu sichern, ist die Einschaltung eines elastischen Gliedes erforderlich, wie wir bei den Ausführungsbeispielen erörtern.

Erwähnung verdient die Verbindung des Zahnantriebes mit dem unmittelbaren Antriebe, so zwar, daß die Hauptturbine auf der Schraubenwelle sitzt, während die Marschturbinen wie in Abb. 801 durch das Vorgelege auf das freie Stirnende einer Hauptturbinenwelle treiben kann. Bei großer Fahrt werden die Marschturbinen samt Zahngetriebe durch eine mit dem Zahnrad *Z* verbundene Reibungs- oder Klauenkuppelung stillgelegt.

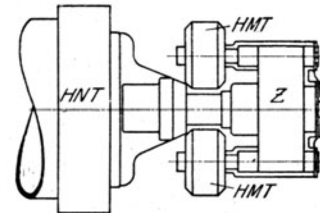


Abb. 801. Mittels Zahnvorgelege angeschlossene Marschturbinen.

Über die **konstruktiven Einzelheiten** ist folgendes zu bemerken.

Zahnform und -stärke. Der Hauptgesichtspunkt für die Bemessung der Verzahnung ist der für die Längeneinheit des Zahnes mit Rücksicht auf Abnützung (Schmierfähigkeit) zulässige Druck q. Dieser beträgt für Handelsdampfer 60 bis 80 kg, für 1 cm auf die Achse projizierte Zahnlänge und bis zu 150 kg bei Kriegsschiffen. Bei doppelter Übersetzung wird man für das erste Ritzel wegen hoher Umfangsgeschwindigkeit q kleiner, etwa 80 kg/cm, für das zweite Ritzel q etwa 120 bis 150 kg/cm wählen.

Nach Marinebaurat W. Laudahn[1]) sollen in der deutschen Marine mit einem Zahngetriebe von 270×2900 mm Durchmesser bei 2×300 mm Länge rd. 20 mm Teilung Zahnbelastungen bis zu 260 kg/cm bei 50 m/sek Umfangsgeschwindigkeit betriebssicher übertragen worden sein, wobei in der Sekunde nicht weniger als 2400 Zahneingriffe erfolgten. Die Leistung stieg auf 10000 PS.

Die Beanspruchung des Flußstahlzahnes auf Biegung durch den auf die Zahnspitze wirkenden normalen Zahndruck gerechnet, beträgt 4 bis 500 kg/qcm bei Handelsdampfern

[1]) Übersetzungsgetriebe im Schiffsbau, Techn. Rundschau d. Berl. Tageblatts, 14. Mai 1919.

und bis 1000 kg/qcm bei Kriegsschiffen. So ergibt sich als **Zahnteilung** (senkrecht zur Zahnflanke gemessen) für kleine Getriebe oder für das erste Getriebe bei doppelter Übersetzung 3 bis 4 $\times \pi$ in mm. Bei ganz großen, langsam laufenden Getrieben bis 8 $\times \pi$. Bedeutet m den Modul t/π, z die Zähnezahl, φ die Zahnneigung gegen eine Achsenebene, so ist der Raddurchmesser $D = mz : \cos \varphi$. Die Zahnhöhe ist etwa gleich 0,6 $\times$ Teilung. Als Zahnschräge wird von Westinghouse 30°, sonst überwiegend 45° angenommen. Der Erfahrung nach scheint bei größerer Schräge der Gang ruhiger zu sein.

Für die allgemein benützten **Evolventenzahnform** beträgt die **Neigung der Erzeugenden** (zugleich der Eingriffslinie) 30°. Die Zahnstärke im Teilkreis wird von manchen Firmen genau der Hälfte der Teilung gleich gemacht. Damit die Räder im Betriebe mit Rücksicht auf die Erwärmung und Schmierung das erforderliche Zahnspiel von 0,3 bis 0,6 mm erhalten, wird der Achsenabstand um ein entsprechendes Maß vergrößert (Abb. 802).

Die **Ritzel** werden überwiegend mit der Welle in einem Stück geschmiedet und vorzugsweise aus 3 bis 5 v. H. nickelhaltigem Stahl angefertigt. Für den Durchmesser ist die kleinste Zähnezahl maßgebend, die man nicht oft unter 30 ÷ 35 wählt. Mitbestimmend ist die Umfangsgeschwindigkeit; für Handelsdampfer etwa $u = 25$ m/sek (bei doppelter Übersetzung gilt dieser Wert für das erste Getriebe, für das zweite ergibt sich dann etwa $u = 8$ bis 12 m/sek). Bei Kriegsschiffen ist man bereits bis zu 45 m/sek vorgeschritten.

Die **axiale Länge** L **des Ritzels** ist gleich P/q, wo P die Umfangskraft in Kilogramm, q die Längenbelastung bedeutet. Es wird also keine Rücksicht darauf genommen, daß stets mehrere Zähne im Eingriff stehen. Die freitragende Länge des Ritzels richtet sich nach der elastischen Formänderung, d. h. Biegung und Verdrehung. Aus den vorliegenden, im Betriebe mit Erfolg arbeitenden Ausführungen kann man für diese elastische Nachgiebigkeit den Wert von 0,02 bis 0,03 mm als zulässige Grenze aufstellen.

Die Verdrehung des Ritzels ermittelt sich, wenn wir das Moment vom freien Ende aus rechnen und gleichmäßige Kraftverteilung voraussetzen, so daß man $M = M_0 x/L$ setzen darf, für ein Element dx im Abstand x zu $d\alpha = M dx / J_p G$ oder für die ganze Länge

$$\alpha_0 = \left| \frac{M_0 x^2}{2 J_p G} \right|_{x=L} = \frac{M_0 L^2}{2 J_p G} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Die Verdrehung wächst parabolisch mit der Länge. Bei einem geteilten Ritzel ist für die äußere Hälfte

$$\alpha_1 = \int_0^{L/2} \frac{M\,dx}{J_p G} = \frac{M_0 L}{8 J_p G} = \frac{1}{4}\alpha_0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

für die innere Hälfte

$$\alpha_2 = \int_{L/2}^{L} \frac{M\,dx}{J_p G} = \frac{3 M_0 L}{8 J_p G} = \frac{3}{4}\alpha_0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Die Verdrehung des zwischen den Ritzelhälften befindlichen Wellenstückes ist einflußlos, weil der axiale Zahndruck die Welle stets so lange verschiebt, bis beide Hälften tragen.

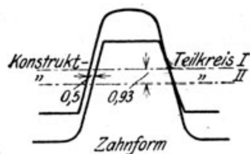


Abb. 802. Zahnform.

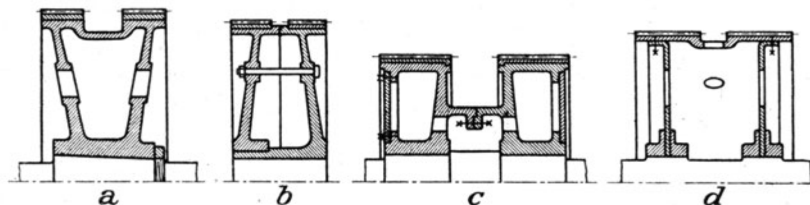


Abb. 802a—d. Radkörper.

Beim Kraftangriff in der Mitte zwischen den Ritzelhälften nach der Power Plant Co. ist die Verdrehung rechts und links gleich groß $= \alpha_0/4$; bei der Anordnung von Bohuszewicz nur noch $\alpha_0/16$.

Die **Erwärmung des Ritzels** gegenüber dem Rad, die bei dessen weit kleinerer Strahlungs- und Leitungsfläche unvermeidlich ist, beträgt erfahrungsgemäß 5 bis 10° C.

Das Zahnrad erhält im allgemeinen einen gußeisernen Grundkörper, auf den die aus geschmiedetem Stahl hergestellten Kränze aufgepreßt oder warm aufgezogen werden. Firmen wie Krupp haben auch schon das ganze Rad aus Stahlformguß hergestellt. Der Rad-

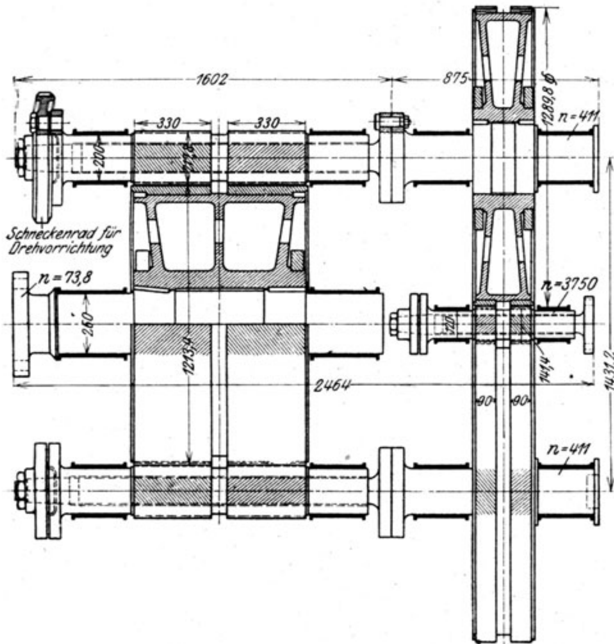


Abb. 803. Doppeltes Vorgelege der Allgemeinen Elektrizitäts-Gesellschaft.

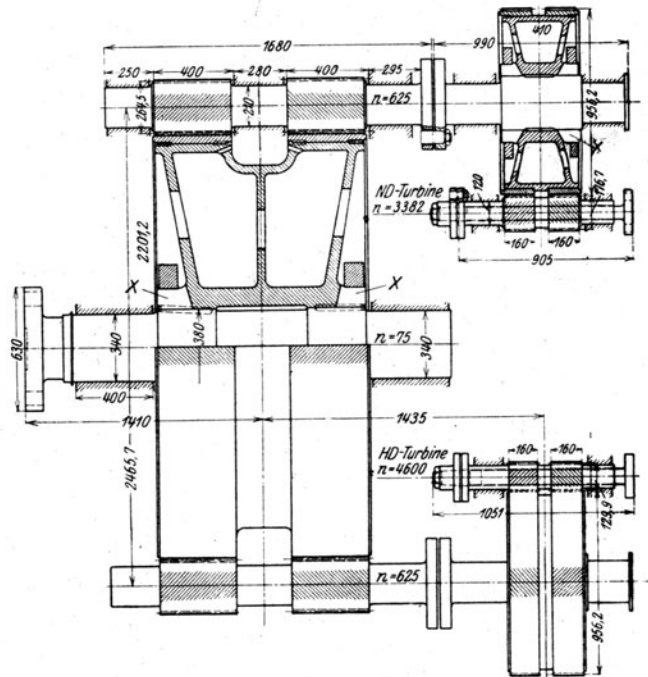


Abb. 804. Doppeltes Zahnradvorgelege der Allgemeinen Elektrizitäts-Gesellschaft mit Antrieb durch Hoch- u. Niederdruckturbine.

körper muß im allgemeinen sehr kräftig gehalten werden, um Geräuschbildung nach Tunlichkeit zu verhindern. Abb. 802a zeigt in *a*, *b*, *c* verbreitete übliche Formen; *d* (für ein französisches Torpedoboot) mit seiner leichten schmiedeeisernen Konstruktion bildet eine Ausnahme.

Ausführungsbeispiele von Zahnradgetrieben.

Abb. 803 ist die Konstruktionszeichnung eines Radgetriebes der **Allgemeinen Elektrizitäts-Gesellschaft** für doppelte Übersetzung bei 1050 WPS Leistung und 3750 Umdr./min der Turbine. Nachfolgende Zahlentafel 1 enthält die Hauptabmessungen.

Zahlentafel 1, Zahnschräge 45°		Ritzel der ersten Übersetzung	Rad der ersten Übersetzung	Ritzel der zweiten Übersetzung	Rad der zweiten Übersetzung
Drehzahl	i. d. min	3750	412	412	74
Zähnezahl		25	228	28	156
Teilung senkrecht zum Zahn	mm	4π	4π	$5{,}5\pi$	$5{,}5\pi$
Teilungskreisdurchmesser	mm	141,4	1289,8	217,8	1213,4
Zahndruck kg für 1 cm Projektion	kg/cm	78,5		127	

Das Wesentliche dieser Bauart ist die Einschaltung elastischer Glieder in die Übertragung in Form von dünnen Wellen, die die hohlen Ritzel durchsetzen und am äußeren Ende durch Kupplungen mit ihnen verbunden werden. Hierdurch wird auch eine Einstellung der Zwischenwellen auf gleichzeitigen Zahneingriff ermöglicht. Die Lager der mit der Schraubenwelle gekuppelten Radwelle sind unverstellbar; die Lager der beiden Zwischenwellen erhalten Nachstellung in wagerechter und die des schnellaufenden Ritzels eine solche in wage- und lotrechter Richtung.

Abb. 804 ist ein Zahngetriebe der gleichen Firma für 2300 WPS Gesamtleistung, die je mittels doppelten Vorgeleges von einer Hochdruckturbine mit 4580 Umdr./min und einer Niederdruckturbine mit 3370 Umdr./min übertragen werden. Die Abmessungen sind in Zahlentafel 2 zusammengestellt.

Zahlentafel 2.

	1. Überzetung			2. Übersetzuag	
	HD-Ritzel	ND-Ritzel	Rad	Ritzel	Rad
Umdrehungen . . . . . . i. d. min	4580	3370	622	622	75
Zähnezahl	25	34	184	34	283
Teilung senkrecht z. Zahn mm		$4{,}5\,\pi$		$5{,}5\,\pi$	
Zahnschräge		30°		45°	
Teilkreisdurchmesser . . . mm	129,9	167,7	956,2	264,5	2201,2
Zahndruck . . . . kg/cm		86,5		131	

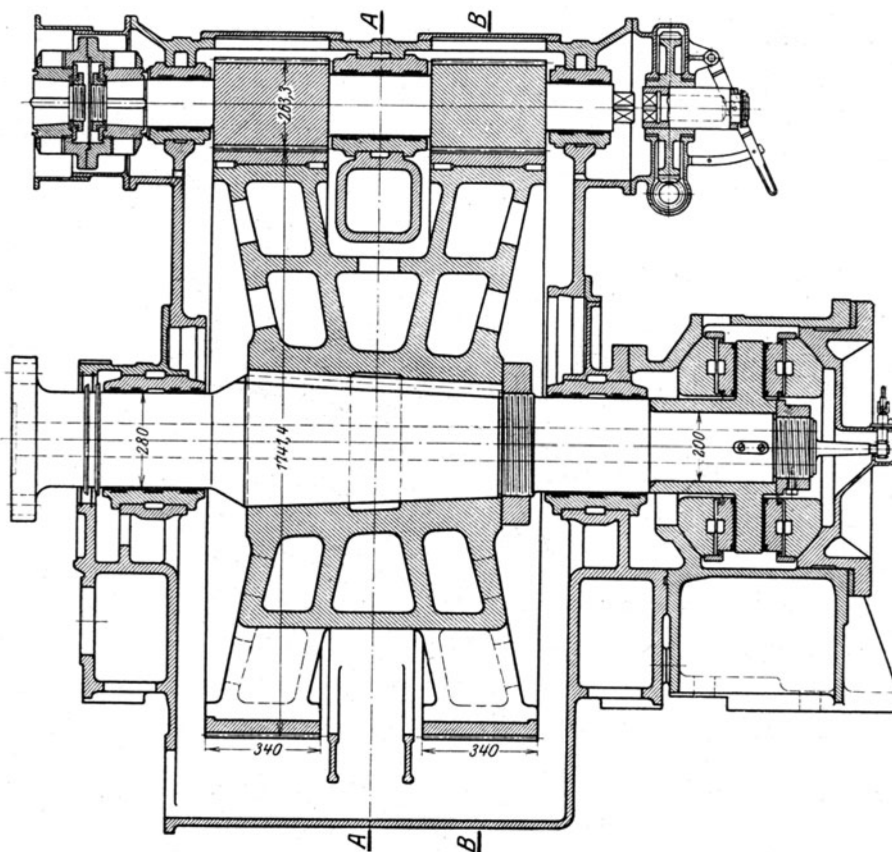


Abb. 805. Zahnradgetriebe mit einfacher Übersetzung für vierfach geteilte Turbine mit 22000 WPS-Leistung von Brown, Boveri & Cie.

Bemerkenswert sind die Einschnitte X in den Nabenenden, um diese zum Anschmiegen an die Welle unter dem ungeheueren Druck der starken Schrumpfringe gefügig zu machen. Die Löcher für die Rundkeile in die Naben werden nach dem Aufziehen gebohrt, wobei wegen der Unzugänglichkeit auf der Kupplungsseite die Lochachse schief sein muß.

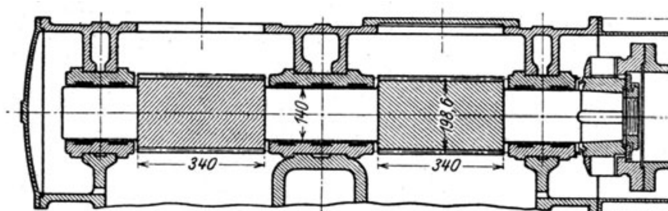


Abb. 805b. Lagerung des Hochdruckritzels zu Abb. 805.

Eine Ausführung mit der gewaltigen übertragenen Gesamtleistung von 22000 WPS für eine vierfach geteilte Turbine und einfache Übersetzung von **Brown, Boveri & Cie.** wird durch den Längenschnitt Abb. 805, den Querschnitt Abb. 805a und den Schnitt durch die Lagerung des Hochdruckritzels 805b dargestellt. Abb. 806 veranschaulicht den Grundriß der Anordnung mit vorne liegender Hochdruck- und Mitteldruck- und rückwärts liegender geteilter Niederdruckturbine. Die Abmessungen und Leistungen des Getriebes sind in nachstehender Zahlentafel vereinigt.

		Rad	Ritzel		
			H. T.	M. T.	N. T.
Teilkreisdurchmesser	mm	1742,30	198,0	198,0	265,87
Zähnezahl		308	35	35	47
Modul		← 4 →			
Zahnschräge		← 45° →			
Übersetzungsverhältnis		—	8,80	8,80	6,55
Drehzahl/min	max.	475	4180	4180	3110
Leistung	WPS	22000	5000	5000	2 × 6000
Umfangskraft	kg	—	8600	8600	10340
Zahnbreite	mm	—	2 × 340	2 × 340	2 × 340
Zahnbelastung	kg/cm	—	126	126	151
Umfangsgeschwindigkeit	m/sek	← 43,5 →			
Verdrehung des Ritzels	mm	—	0,017	0,017	0,012

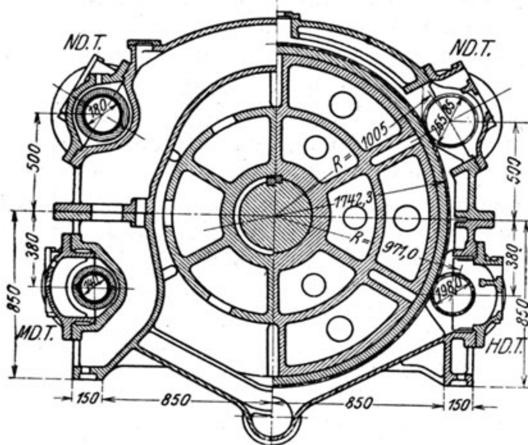


Abb. 805a. Querschnitt zu Abb. 805.

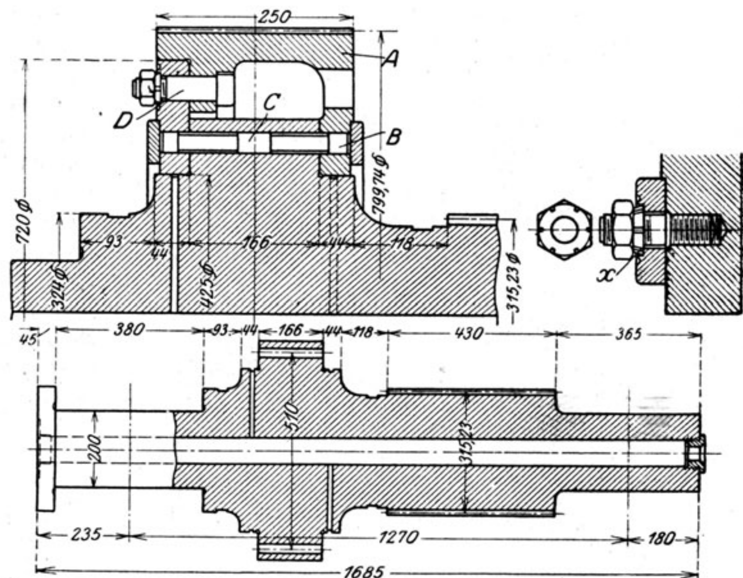


Abb. 805c. Elastisch (mittels Bolzen *B*) verbundener Radkranz.

Der Dampf arbeitet nacheinander in der H. T., in der M. T., und dann in Parallelschaltung in den beiden N. T. Für Rückwärtsfahrt ist in beiden N. T. je ein zweikränziges Curtisrad vorhanden. Die Dampfturbinenkonstruktion wird in Abschnitt 139 eingehender besprochen.

Bei doppelter Übersetzung nach dem Schema der Abb. 800 wird die erforderliche Elastizität mindestens einer Zwischenwelle gemäß Abb. 805c dadurch erzielt, daß der Zahnradkranz *A* gegen die Welle elastisch nachgiebig ist. Zu diesem Zwecke erhalten die kraftübertragenden Bolzen *B*, die gehärtet werden, Eindrehungen, so daß sie an der (verdickten) Stelle in der Mitte bei *C* aufliegen und sich im Verhältnis des Zahndruckes durchbiegen können.

Für die Herstellung gelten folgende Vorschriften: 1. Der Ritzel wird erst nach Fertigstellung der Welle, aber ohne Zahnkranz, gefrät. 2. Der Zahnkranz wird zunächst auf Festsitz gedreht, die Löcher bei *D* werden vorerst nur auf 30 mm ausgebohrt zur Aufnahme von Werkstattschrauben; der Kranz wird mit der Welle durch je drei Prisonstifte auf jeder Seite verbunden und mit je drei Abdrückschrauben

versehen. Hierauf werden die Löcher für Bolzen *B* gebohrt, ausgerieben und dann das Rad gefräst. 3. Nach dem Fräsen werden die Löcher *D* auf 55 mm gebohrt, die Ritzelwelle wird auf Laufsitz geschliffen,

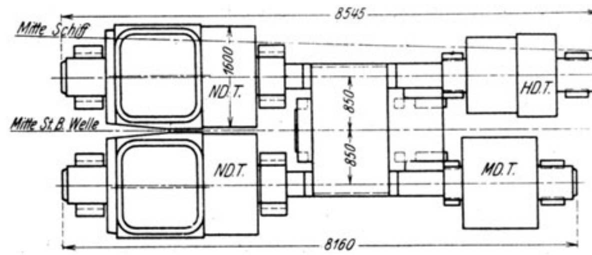


Abb. 806. Gesamtanordnung zu Abb. 805.

Bolzen *B* eingebracht, Prisonstifte und Abdrückschrauben entfernt. Bemerkenswert ist die Sicherung der Muttern durch Verstemmen des Loches um den konischen Anpaß bei *X*.

Schmierung der Zahntriebe. Wegen der hohen Umfangsgeschwindigkeit müssen besondere Vorkehrungen getroffen werden, um genügende Mengen Öl in die Zahnlücken hineinzuschaffen. Als zweckmäßig hat sich das Einspritzen (auf der Vorwärtseingriffsstelle) durch Öldüsen von 3 bis 4 mm Durchmesser, die in Abständen von 40 bis 100 mm angebracht werden, erwiesen (s. Abb. 806a nach einer Ausführung von Brown, Boveri & Cie.). Der Druck wird so bemessen, daß die Ölmenge je nach der Umfangsgeschwindigkeit bei $u = 10$ m/sek; 0,5 bis 1,0 l in der Minute für 1 cm Radbreite, bei $u = 40$ m/sek; 1,5 bis 2,0 l in der Minute für 1 cm Radbreite beträgt. Die Erhöhung der Ausflußgeschwindigkeit, die an sich günstig wäre, findet ihre Grenze in der Weite der Düse, die wegen Verstopfungsgefahr nicht kleiner als angegeben ausgeführt werden kann. Sodann aber hat sich gezeigt, daß bei zu hoher Spritzgeschwindigkeit das Öl zerstäubt und als Nebel

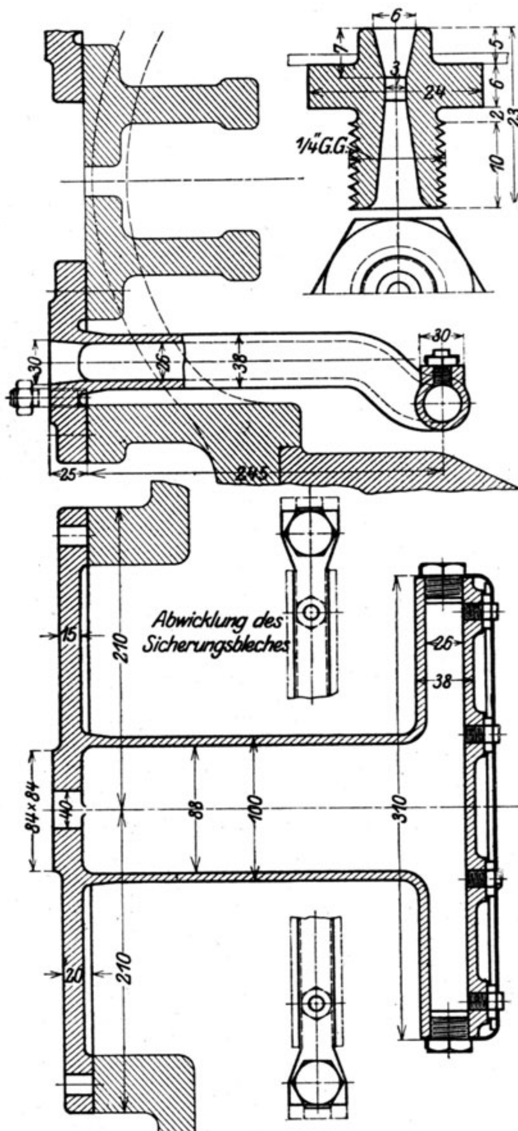


Abb. 806a. Einzelheiten der Zahnschmierung mittels Düsen.

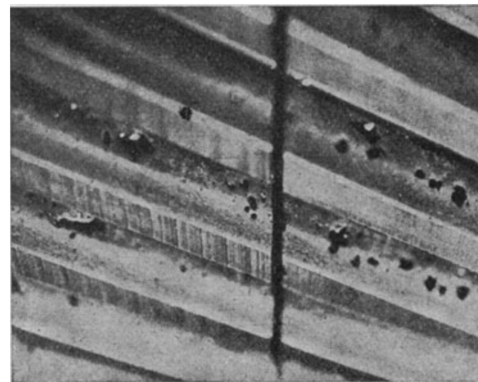


Abb. 806b. Anfressungen an Alquist-Zahngetrieben.

entweicht. Die Anlage eines Hochbehälters ist bei Handelsdampfern beliebt und hat den Vorteil, daß beim Versagen der Ölpumpe die Anlage nicht sofort ohne Schmierung ist.

Wirkungsgrad der Zahngetriebe. Zahnverschleiß.

Nach Laudahn[1]) soll die Erprobung des oben beschriebenen Versuchsgetriebes durch die deutsche Marine einen **Wirkungsgrad von 99 v. H. ergeben haben,** wobei obendrein ein Hauptteil des Verlustes der Lagerreibung, zuzuschreiben ist; auf die eigentliche Zahnreibung

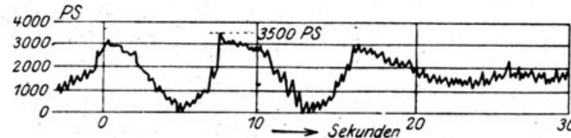


Abb. 806c. Schwankungen des Kraftmomentes.

würden bloß 1 bis 4 v. T. entfallen. Auch von anderer Seite stammende Angaben setzen den Wirkungsgrad auf mindestens 98 v. H. an. Doch darf nicht verschwiegen werden, daß auch weit ungünstigere Versuchsergebnisse vorliegen. So wurde von der General Electric Co. eine 2400 PS-Schiffsturbine[2]) durch zwei Gruppen von doppelter Zahnradübersetzung auf einen Stromerzeuger geschaltet und die abgegebene Leistung mit der verglichen, die unter gleichen Umständen erhalten wurde, wenn die Turbine unmittelbar an denselben Stromerzeuger angeschlossen war. So ergaben sich die Zahlen:

Wellen-PS	Drehzahl in der Minute	Verlust in einer doppelten Übersetzung	Wirkungsgrad v. H.
2400	87	125 PS	95,0
1420	77	80 „	94,7

Da die Versuche eigens als „sorgfältig“ bezeichnet werden und die Zahnräder ruhig liefen, wird man den großen Verlust zum Teil wohl darauf zurückführen dürfen, daß offenbar eines der Doppelvorgelege ins Rasche übersetzte.

Die Zahnabnutzung muß, dem hohen Wirkungsgrade entsprechend, klein sein. Immerhin wird sowohl bei Schrauben- wie bei gewöhnlichen Stirnrädern schon nach kurzer Betriebsdauer (z. B. 40 Stunden) in der Nähe des Teilkreises die **Bildung von kleinen Grübchen** beobachtet, die indessen nicht weiter fortzuschreiten scheint. Als Ursache sehen die einen das **Herausdrücken des Öles** an, da im Teilkreis kein Gleiten vorkommt. Nach anderen sind es die **abgetragenen Unebenheiten,** die am getriebenen Zahn **gegen den Teilkreis hingedrängt** werden und dort zerquetscht, die Vertiefungen erzeugen.

Über gelegentliche größere Abnutzung berichtet die General Electric Co. insbesondere am großen Rade und seinem Ritzel, wie die **Anfressungen** (Abb. 806b) **veranschaulichen.** Das Radpaar mit 291 mm Ritzeldurchmesser war 400 Stunden mit 205 kg für den Zentimeter Belastung und 6,5 m/sek Zahngeschwindigkeit zur See in Betrieb. Ein Versuchsgetriebe gleicher Art mit 185 mm Ritzeldurchmesser, 534 kg für den Zentimeter Belastung, 35,6 m/sek Zahngeschwindigkeit war in den Werkstätten der G. E. Co. 263 Stunden in Betrieb, ohne auch nur Spuren einer Abnutzung zu zeigen. Als Grund für die zur See gemachte schlechte Erfahrung wird die ungleichmäßige Beanspruchung des großen Zahnrades bei bewegter See bezeichnet. Messungen mittels Torsionsindikators haben in der Tat die in Abb. 806c dargestellte Schwankung des Momentes ergeben. **Die Leistung wechselte zwischen 0 und 3500 PS gegenüber einem Mittel von 2000 PS.**

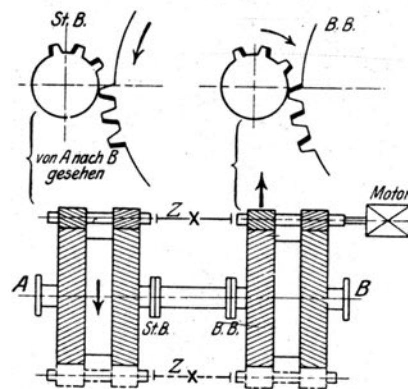


Abb. 807. Ermittelung des Wirkungsgrades.

Die Ermittlung des Wirkungsgrades gelingt nach einem auf Grob[3]) zurückgehenden Vorschlag am sichersten, wenn man zwei (aus Rad und je zwei Ritzeln bestehende) Getriebe A und B gemäß Abb. 807 unter Zwischenschaltung elastischer Wellen $Z—Z$ zusammenbaut und durch Verdrehung dieser Wellen einen der Höchstleistung entsprechenden Zahndruck erzeugt. Die vom Motor M abzugebende Leistung hat dann lediglich die Reibungsarbeit zu überwinden. Die gleiche Vorrichtung kann dazu dienen, um die Getriebe, wie man sagt, „einzuschleifen“, worunter jedoch lediglich ein „Einlaufen“ unter Druck und kein „Schleifen“ verstanden wird. Geschwindigkeit und Zahndruck werden allmählich gesteigert; dem reichlich zuzuführenden Schmieröle darf höchstens etwas feinstgemahlener Graphit zugesetzt werden.

[1]) Berl. Tagebl. (Techn. Rundschau) 14. Mai 1919.

[2]) General Electric Review 1920, Januar. [3]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1911, S. 1435

134a. Manövrier- und Umsteuerungsvorrichtnngen.

Bei großen Anlagen nimmt man zur Betätigung der Wechselventile mechanische Kraft zu Hilfe, wie die sorgfältig durchgebildete Umsteuervorrichtung (Abb. 807a und b) des

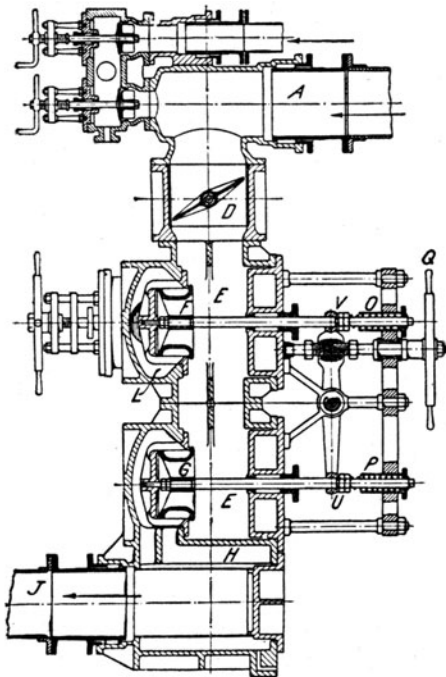


Abb. 807a.

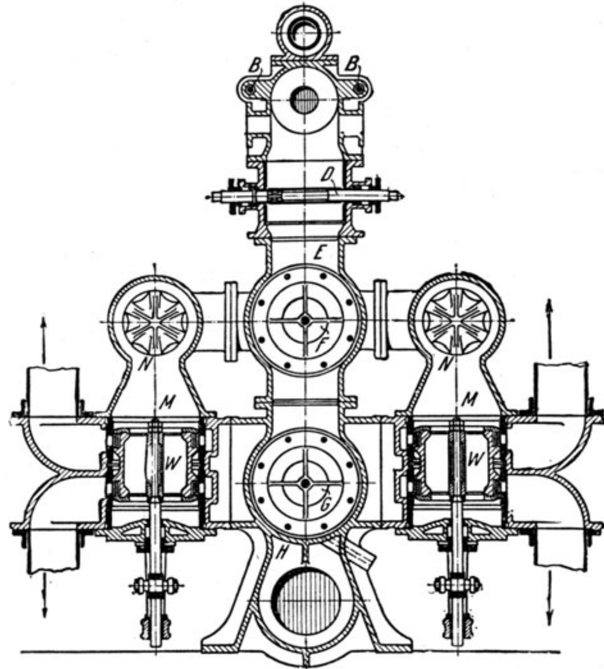


Abb. 807b.

Manövriervorrichtung von Cockerill.

belgischen Postdampfers „Princesse Elisabeth" der Soc. An^{e}. J. Cockerill[1]) veranschaulicht. Der Dampf tritt bei *A* an der Drosselklappe *D* vorbei zu den Ventilen *F*

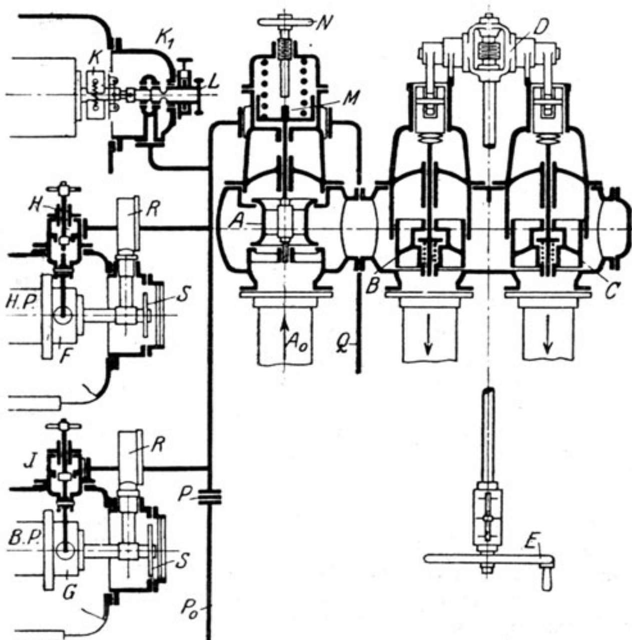


Abb. 807c. Manövriervorrichtung von Brown, Boverie & Cie.

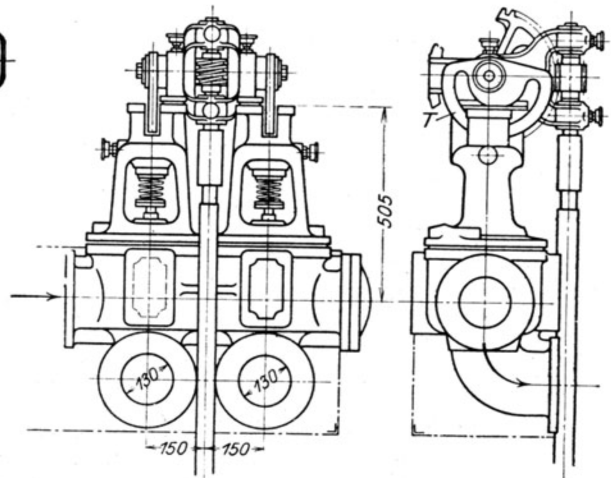


Abb. 807d. Umsteuergetriebe zu Abb. 807c.

[1]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1906, S. 1448.

und G, die mittels Spillrades Q und Hebels UV so betätigt werden, daß in der Mittellage des Hebels beide geschlossen sind, daher im Gange immer nur eines offen sein kann. G leitet den Dampf durch J zur Hochdruckturbine. Beim Manövrieren ist G geschlossen und F stellt die Verbindung mit den Wechselschiebern W, W her, die durch eigene Servomotoren in gewohnter Weise gesteuert werden, so daß nach Belieben eine Niederdruck- oder eine Rückwärtsturbine mit Frischdampf beaufschlagt werden kann.

Eine Manövriervorrichtung für kleinere Frachtdampferanlagen samt der Regeleinrichtung von Brown, Boveri & Cie. ist durch das Schema, Abb. 807c, dargestellt. Darin bedeutet

A_0 den Dampfzutritt vom Kessel,
A das Schnellschluß-Sicherheitsventil,
B das Ventil für Vorwärtsgang,
C „ „ „ Rückwärtsgang,
D die Umsteuerung,
E das Umsteuerungshandrad,
F den Sicherheitsregulator der Hochdruckturbine,
G den Sicherheitsregulator der Niederdruckturbine,
H, J durch Ausklinken mittels der Sicherheitsregulatoren freigegebene Ausflußventile für das Steuerdrucköl ins Freie,
K den Geschwindigkeitsregler, der den Öldruck durch mehr oder weniger starkes Öffnen der Abflußöffnungen K_1 verändert,
L Handverstellung der Drehzahl,
M Kraftkolben der durch Handrad N niedergedrückt werden kann,
P_0 Öldruckleitung,
P Blende zum Zwecke der Abdrosselung des Öldruckes bei der Einwirkung der Regler,
Q Ölrückleitung,
R Drehzahlanzeiger,
S Drehrichtungszeiger.

Die Einrichtung des Umsteuerungsantriebes mit Kurvenschleifen T ist in Abb. 807d besser verdeutlicht Die Sicherheitsregler wirken in Notfällen, wenn sich Brüche ereignen; der Geschwindigkeitsregler stellt eine zwischen 0,8 bis 1,0 der Höchstdrehzahl gelegene Drehgeschwindigkeit dauernd selbsttätig ein. Die Sicherheitsregler greifen beim 1,15fachen der Höchstdrehzahl ein. In die Ventile B, C sind voröffnende Entlastungsventile eingebaut; die Liderung besteht durchweg aus eingewalzten Nickelringen.

C. Ausführungsbeispiele von Schiffsturbinen.

135. Die Schiffsturbine der Allgem. Elektrizitäts-Gesellschaft, Berlin.

Das Hauptmerkmal der A. E.-G.-Schiffsturbine zunächst für **unmittelbaren Schraubenantrieb** ist die Vereinigung einer Anzahl von mehrkränzigen Geschwindigkeitsrädern im Hochdruck, mit der Trommelbauart im Niederdruck, wobei im Laufe der Zeit die Zahl der Hochdruckstufen verringert wurde, um durch den bessern Wirkungsgrad der einfachen

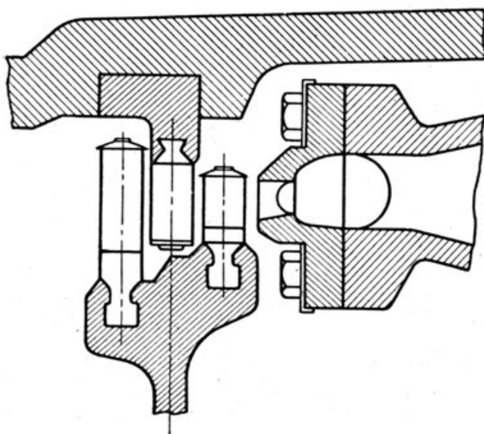


Abb. 809. Zweikränziges Hochdruckrad.

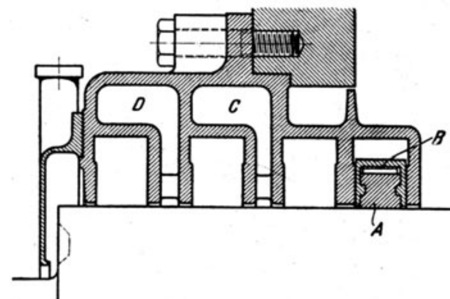


Abb. 810. Stopfbüchse mit Kohlenringen.

Druckstufen die Wirtschaftlichkeit zu erhöhen. Man geht mit der Verringerung bis auf drei Geschwindigkeitsräder, die noch erlauben, ohne Entlastungskolben mit seinen zu Störungen Anlaß gebenden Labyrinthdichtungen, auszukommen, und ohne daß der Dampfdruck auf die Trommelscheibe bzw. das Drucklager ein zu hoher würde. Die Verwendung einer

Niederdrucktrommel, die meist mit Überdruck, teilweise auch mit Gleichdruck arbeitet, bedingt geringere Herstellungskosten und ein kleineres Gewicht als eine Ausführung mit lauter Einzelrädern.

Die allgemeine konstruktive Durchführung wird in Abb. 808 veranschaulicht, die eine von Ganz & Co. Danubius in Budapest, als Lizenznehmerin der A. E.-G. erbaute Kreuzerturbine von 18500 WPS Leistung von 305 Umdr./min darstellt. Die Ausführung bringt ziemlich den Einheitstypus der unmittelbar gekuppelten Schiffsturbine zum Ausdruck, wie er sich im Laufe der Zeit herausgebildet hat. Die Vorwärtsturbine besitzt ein vierkränziges und zwei je dreikränzige Geschwindigkeitsräder, an die sich eine Trommel mit 40 Überdruckstufen und 2650 mm mittl. Durchm. anschließt. Gruppen von je 16, 9, 6, 5 und 4 Schaufeln sind gleich, mit einer von 170 auf 380 mm zunehmenden Länge und bis auf 31,5 mm wachsenden Breite. Die im gleichen Gehäuse untergebrachte Rückwärtsturbine besteht aus einem 4kränzigen Geschwindigkeitsrad und 9 Trommelstufen.

Von den Einzelheiten sind folgende hervorzuheben.

Die Hochdruckdüsen der ersten Stufe werden wie bei der ortsfesten Turbine an besondere Zuführungsleitungen befestigt, die vom Gehäuse möglichst isoliert sind. Der Kranz eines Geschwindigkeitsrades ist in Abb. 809 dargestellt. An den Laufscheiben in Abb. 808 ist die doppelt kegelige Form bemerkenswert, durch die sich eine Verschiedenheit der Wärmedehnung zwischen Kranz und Nabe mit geringerer Verspannung ausgleicht als bei geraden Scheiben.

Die Wellen sind hohl geschmiedet und bestehen aus drei Teilen.

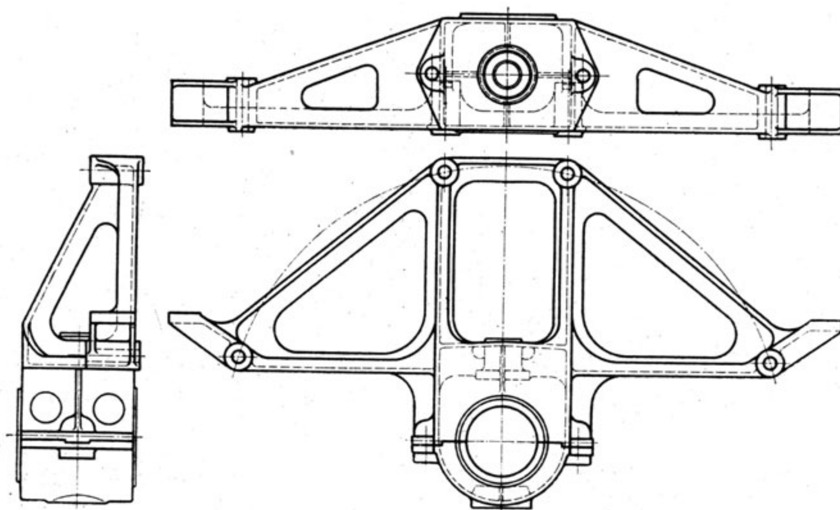


Abb. 810a. Lagerbrücke.

Die Stopfbüchsen erhalten Liderungsringe aus Kohle, die durch leichte Federn *B*, Abb. 810, angedrückt werden. Eine von unten wirkende Feder gleicht das Eigengewicht der Fassung aus.

Die Scheidewände sind einteilig und erhalten durch die stark geschweifte Meridianform, Abb. 808, eine bedeutende Steifheit.

Die Lager sind mit Kugelschalen versehen; die Ölzufuhr erfolgt von unten. Von Wasserkühlung wird abgesehen.

Die einer älteren Ausführung entnommenen Lagerbrücken, Abb. 810a, verdienen wegen der folgerichtigen Befestigungsart, die seither vorbildlich geworden ist, Erwähnung. Durch Anordnung von wage- und lotrechten Gleitlagern erlauben sie nämlich dem Gehäuse freie Wärmeausdehnung, ohne daß sich dabei die zentrische Lage der Welle ändert.

Die Bauart von **Turbinen mit mittelbarem Antrieb,** insbesondere mit Zahnradvorgelege, wird für eine Einheit von 2700 WPS Höchstleistung bei 3280 Umdr./min durch Abb. 811 veranschaulicht. Auf ein Geschwindigkeitsrad mit zwei Kränzen folgen sechs einfache Druckstufen für die Vorwärtsturbine und zwei einfache Druckstufen für die Rückwärtsturbine. Die normale Leistung beträgt bei 13 at Üb. 300° C vor den Düsen, 94,5 v. H. Vakuum im Abdampfstutzen und 3000 Umdr./min der Turbine 2100 WPS bei 11 Sm Geschwindigkeit, wobei ein Frischdampfverbrauch von 4,4 kg/WPS gewährleistet wird unter der Annahme, daß die Hilfsmaschinen stündlich eine Abdampfmenge von 1 t bei 0,5 at Üb. in den Niederdruckteil der Turbine abliefern und ein Abdampfrest zum Vorwärmen des

Additional material from Dampf- und Gasturbinen,
ISBN 978-3-642-50544-7 (978-3-642-50544-7_OSFO8),
is available at http://extras.springer.com



Speisewassers verwendet wird. Bei kleinerer Schiffsgeschwindigkeit bis zu 7 Sm ist ein eigener Marschdüsensatz vorgesehen; dabei sinkt die Leistung auf 540 WPS, die Umdr./min auf 1900. Die Leistung der Rückwärtsturbine beträgt bei gleicher Dampfmenge und gleichem Dampfzustand wie für die Vorwärtsfahrt rd. 60 v. H. der Vorwärtsleistung.

Die Konstruktionseinzelheiten der Turbine sind im wesentlichen die gleichen wie die der ortsfesten A. E. G.-Turbine (s. Abschn. 107). So sind insbesondere die Scheidewände zweiteilig und bestehen wie auch das Gehäuse aus Gußeisen. Die Schaufeln der ersten Stufe bestehen mit Rücksicht auf die hohe Temperatur und wegen größerer Sicherheit bei Wasserschlägen aus hochwertigem Stahl.

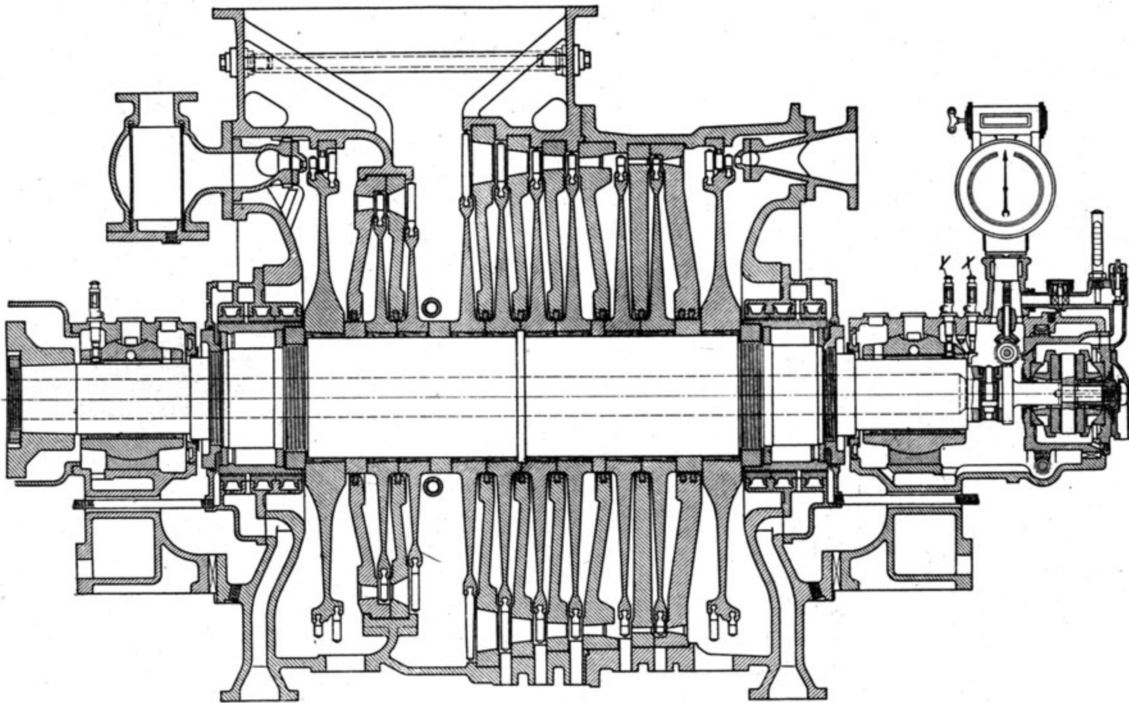


Abb. 811. Schiffsturbine der A.E.G. für mittelbaren Antrieb.

Die übrigen bestehen aus Nickelmessing, die Füllstücke für die Stahlschaufeln aus weichem Eisen, für die Nickelmessingschaufeln aus Marinemessing. Die Schaufeln größerer Länge werden mit verstärktem Fuß, diejenigen der Vorwärtsstufe aus einem Stück mit den Füllstücken gefräst. Die Stopfbüchsen sind mit radialer Spitzendichtung versehen und können ohne Abnahme des Turbinenoberteiles herausgenommen werden. Die Welle besteht aus Siemensmartin-Sonderstahl und ist durchbohrt. Die kritische Drehzahl liegt etwa 30 v. H. höher als die höchste Betriebsdrehzahl. Besondere Sorgfalt ist auf die **Entwässerung** verwendet; obwohl das Kondenswasser innerhalb der Druckstufen selbsttätig abfließen kann, wird jede davon mit besonderer Entwässerung versehen. Der Achsendruck wird durch ein **Blocklager** aufgenommen; die einzelnen Klötze erhalten zylindrische Stützung, ihre gemeinsame Unterstützungsplatte ist kugelig ausgebildet. Die Klötze bestehen aus Phosphorbronze mit einer Weißmetallfütterung, deren Stärke geringer ist als das axiale Schaufelspiel, so daß, wenn das Weißmetall durch Heißlauf etwa ausschmelzen sollte, die **Verschiebung des Rotors** weniger ausmachen kann **als das Schaufelspiel** und so eine größere Beschädigung verhütet wird. Das Schmieröl wird dem Lager auf der Stirnseite durch die hohle Welle zugeführt und an höchster Stelle abgeleitet. Der Ölraum ist aus diesem Grunde mit eingeschliffenen abdichtenden Stopfbüchsen versehen.

Besonders hervorzuheben sind **Sicherungseinrichtungen zur Verhinderung von Havarien.** Die Lage des Läufers wird in axialer Richtung durch die Meßvorrichtung X, in lotrechter Richtung durch die Vorrichtung Y ständig, auch während des Betriebes angezeigt, und man kann die Höhenlage der Welle durch Unterlegen von Paßblechen unter die Unterstützungsplatten der Lagerschale berichtigen. Die **Temperatur** aller Lager kann vom Führerstand aus mittels **Fernthermometer** kontrolliert werden. Die Wichtigkeit der Ölversorgung einer Getriebeturbine hat den Konstrukteur veranlaßt, in die Hauptdampfleitung (vor den Manövrier-Ventilen) ein Absperrventil mit Ölsteuerung einzubauen, die erst öffnet, wenn ein gewisser Mindestöldruck vorhanden ist, so daß, wenn die Ölpumpe versehentlich nicht angestellt sein sollte, überhaupt kein Dampf in die Turbine strömen und diese nicht angelassen werden kann.

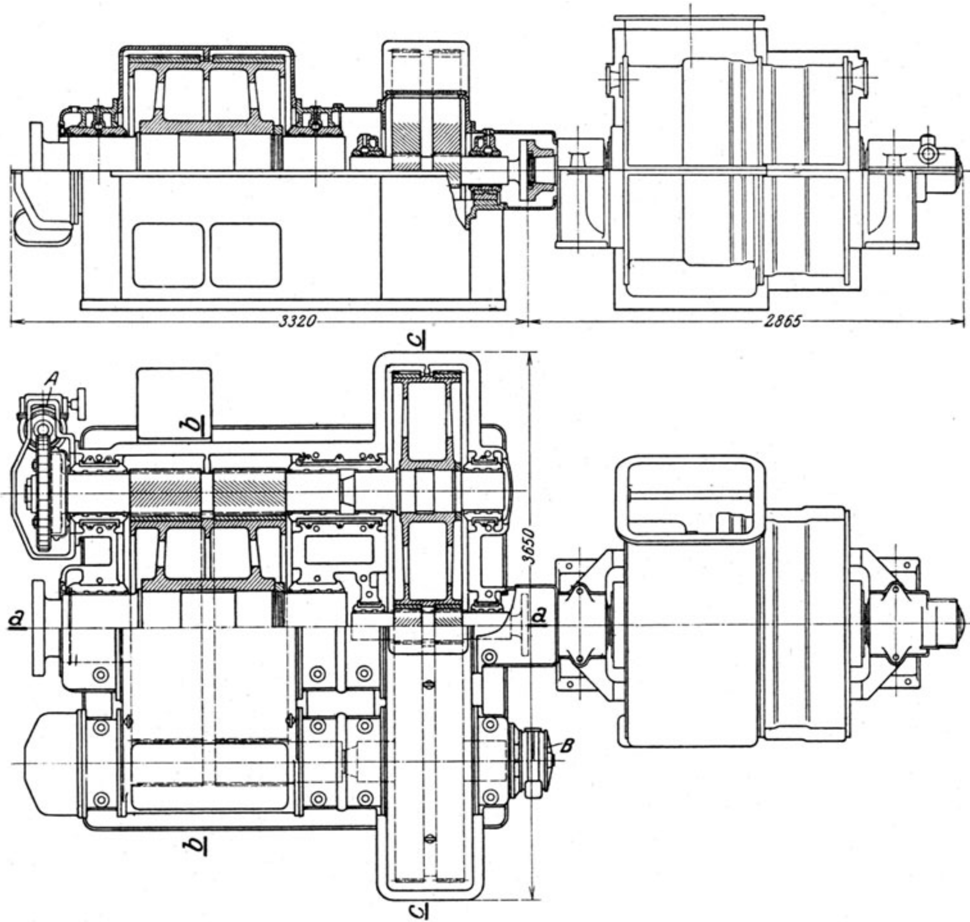


Abb. 812.

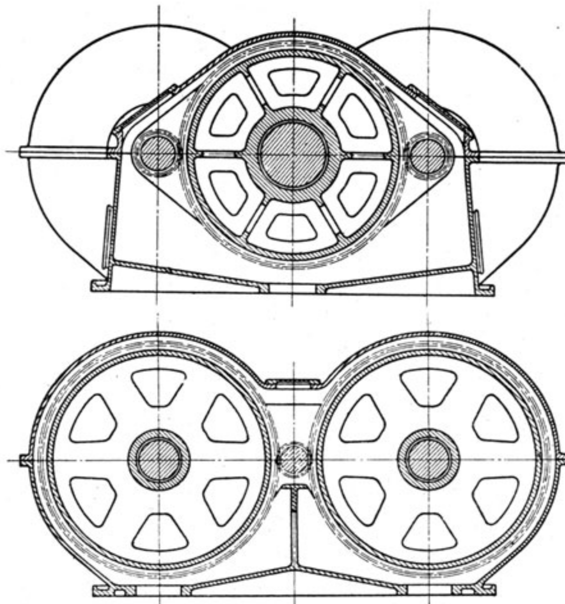


Abb. 812a.
Vorgelege und Gesamtaufbau zu Abb. 811.

Abb. 812, 812a veranschaulichen die Gesamtanordnung für den Projektentwurf der beschriebenen Turbine. Bei *A* befindet sich eine mechanische Andrehevorrichtung, bei *B* die Ölpumpe für die Zahnradschmierung. Mit dieser Anordnung verwandt ist das Projekt

Abb. 813, die sich auf eine Anlage mit 4200 WPS Leistung und einer Übersetzung von 3000/80 Umdr./min bezieht. Hier ist, wie ersichtlich, die Turbine T erhöht aufgestellt,

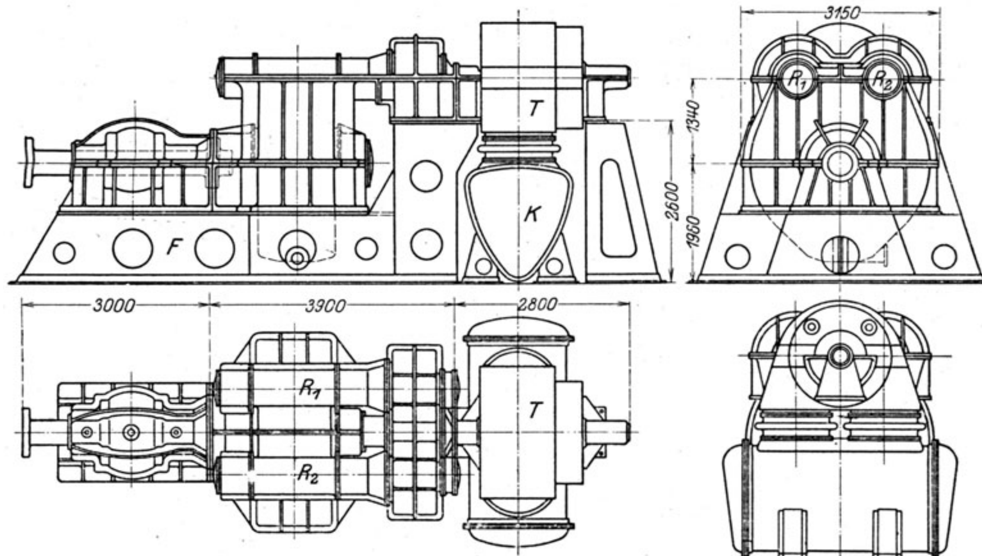


Abb. 813. Aufstellung auf leichten Blechfundamenten mit untenliegendem Kondenser.

so daß die beiden Zwischenritzel R_1 R_2 ziemlich im Scheitel des Hauptrades angreifen können. Dadurch wird bei etwelcher Erhöhung des Fundamentes F soviel Raum gewonnen, daß der Kondenser K unmittelbar unter die Turbine zu liegen kommt. Durch-

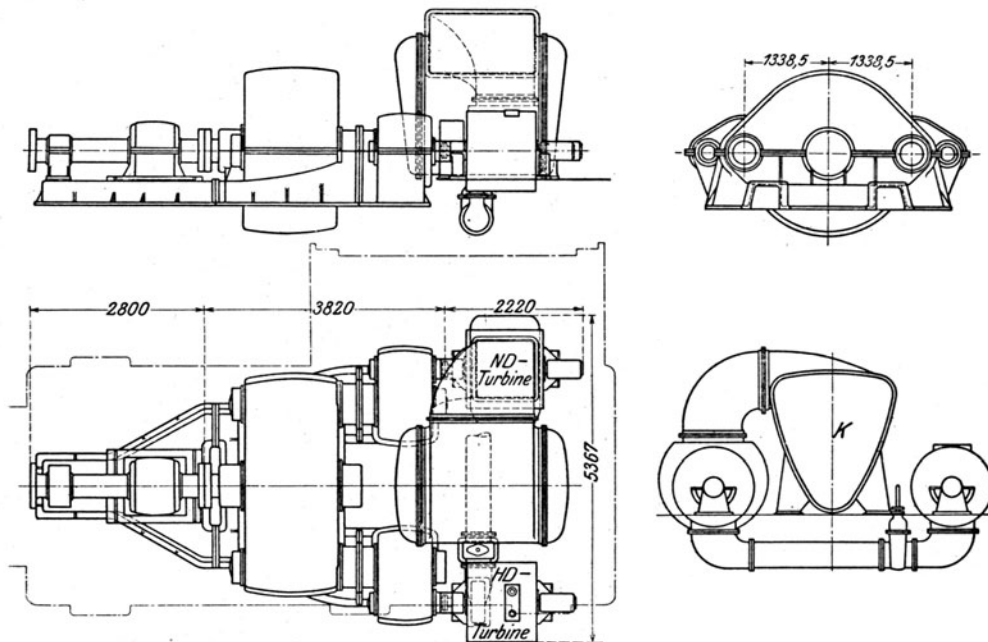


Abb. 814. Hoch- und Niederdruckturbine mit zweifachem Radvorgelege.

gehende Anwendung von Blechkonstruktion für die Stützung ermöglicht Herabsetzung des Gewichtes. In Abb. 814 ist der Entwurf für einen Antrieb mittels geteilter Hoch- und Niederdruckturbine mit doppeltem Vorgelege dargestellt. Die ersten Vorgelegewellen sind nach außen gerückt, so daß zwischen Hoch- und Niederdruckturbine Raum zur Aufnahme des Kondensers K geschaffen wird. Die gesamte Leistung ist 3400 WPS bei einer Drehzahlübersetzung von 3500/57 i. d. min.

Beachtenswert ist die Konstruktion der von der A. E.-G. zur Prüfung großer Schiffsturbinen verwendeten **Wasserbremse,** Abb. 815 und 815a, die aus acht gelochten Scheiben von je 3500 mm Durchm. betseht und gemäß Abb. 815b bei 300 Umdr./min bis 15000 PS aufzunehmen vermag.

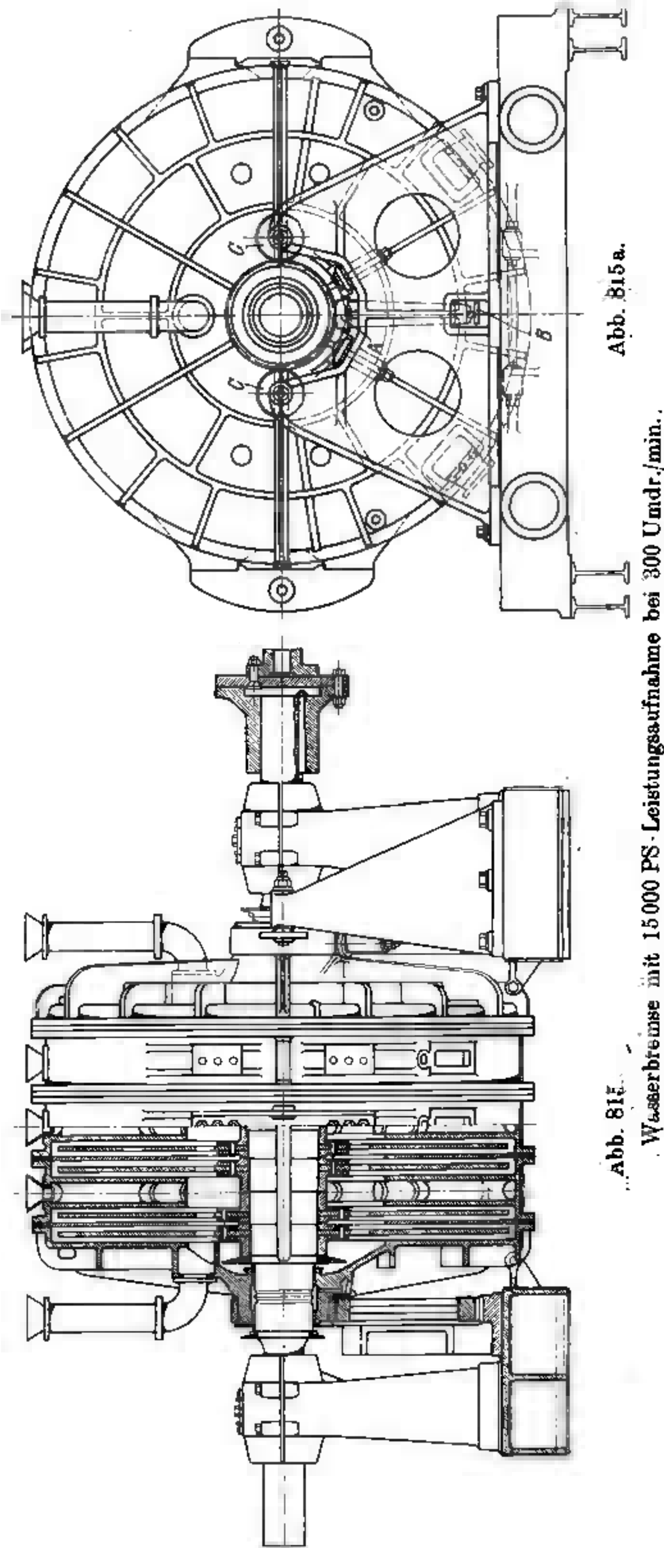


Abb. 815a.

Abb. 815. Wasserbremse mit 15000 PS-Leistungsaufnahme bei 300 Umdr./min.

Das Moment, das die Wasserreibung auf das Gehäuse ausübt, wird durch Wägung bestimmt. Seitliche Verschiebung wird durch Rollen C verhindert; das Gewicht des Gehäuses nehmen die Schneiden B unter Vermittelung des Rollfußes A auf.

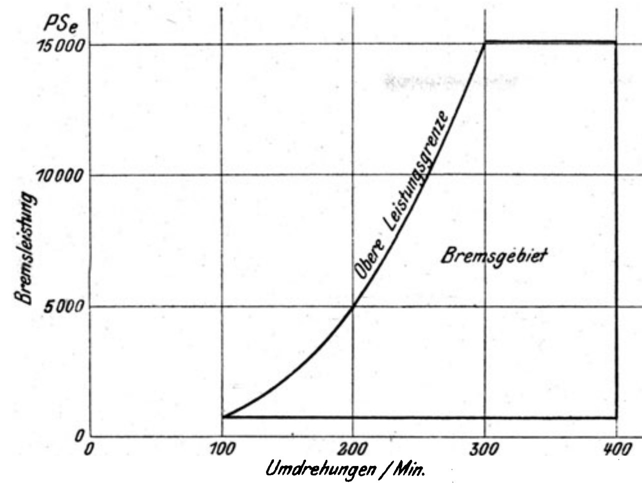


Abb. 815b. Leistungsaufnahme der Bremse Abb. 815.

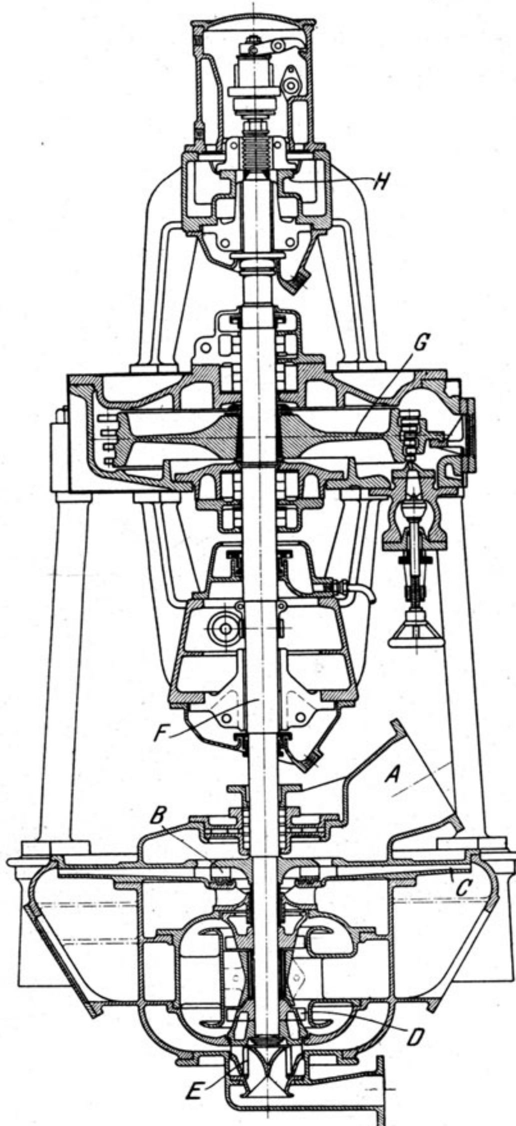


Abb. 816.
Luft-, Kondensat- und Kühlwasserpumpe.

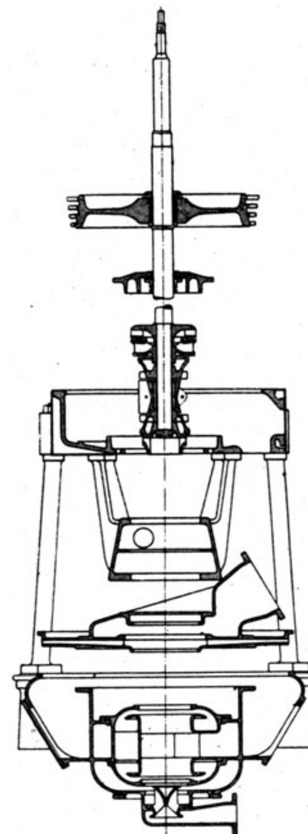


Abb. 816a.
Abbau der Pumpe Abb. 816.

Auch an Bord von Schiffen werden die Hilfsmaschinen der Turbinenanlagen mit kleinen Turbinen angetrieben, wodurch die ganze Speisewassermenge ölfrei erhalten wird. Eine gedrungene Konstruktion der Kreisel-Luft-Kondensat- und Kühlwasserpumpe mit stehender Anordnung zeigt Abb. 816.

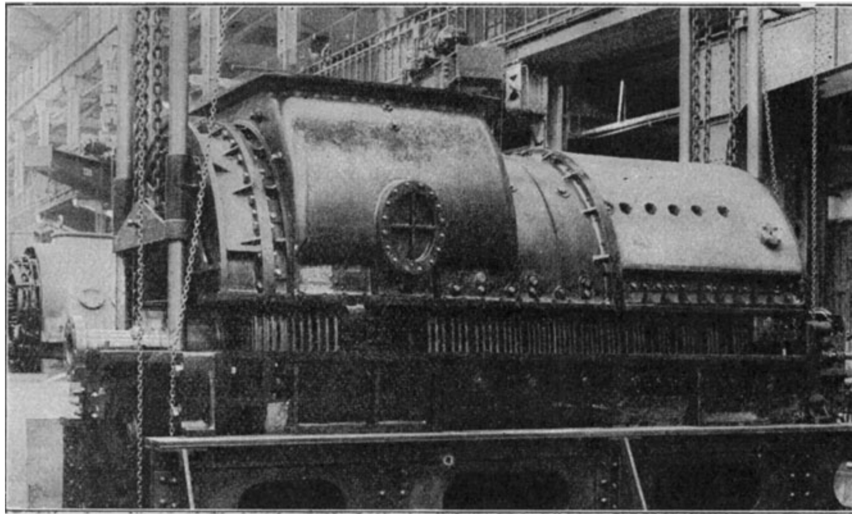


Abb. 817. Torpedobootsturbine der A. E. G.

A ist die Verbindung vom Oberflächenkondensator, *B* das Schleuderrad, *C* der Verdichter (Diffuser) für das Wasser-Luftgemisch, *D* die Kühlwasserpumpe (axial), *E* die Kondensatpumpe, *F* ein Zwischenlager, *G* die Turbine, *H* der Spurzapfen. In Abb. 816a ist angedeutet, wie die Innenteile nach Lösung leicht zugänglicher Flanschenverbindungen überholt werden können.

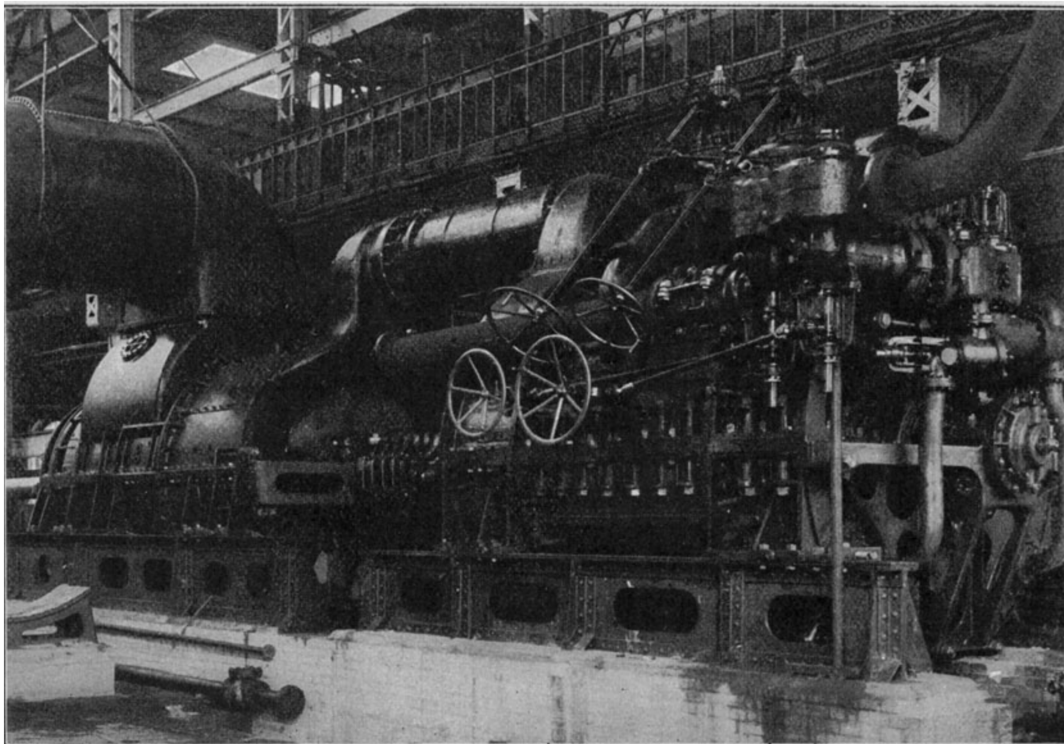


Abb. 817a. A. E. G.-Turbine für einen kleinen Kreuzer.

Die allgemeine Anordnung der A. E.-G.-Schiffsturbine mit unmittelbarem Antrieb wird durch die Abb. 817 und 817a veranschaulicht. Die erste bezieht sich auf eine Torpedobootsturbine von 7500 PS_e Leistung, die zweite auf die Turbine eines Kreuzers mit 10500 PS_e Leistung.

Torpedobootsturbine ohne Marschstufen. Diese Turbinen (Abb. 817) enthalten als Hochdruckteil sechs mehrkränzige Räder, der Niederdruckteil eine Trommel. Sowohl bei Vollast als bei der Marschfahrt sind sämtliche Stufen in Betrieb. Zur Erzielung besserer Wirtschaftlichkeit bei Marschfahrt ist vor die erste Stufe ein kleineres Düsensegment mit Ausdehnungsdüsen eingebaut.

Die aus den Prüffeldmessungen ermittelten Dampfverbrauchszahlen sind folgende:

Druck vor den Düsen: 17,5 at abs.	Effektive Leistung: 7640 PS_e.
Spezifische Dampfmenge: 0,97.	Minutliche Umdrehungszahl: 650.
Gegendruck im Abdampfstutzen: 0,103 at abs.	Spezifischer Dampfverbrauch = 5,72 kg/PS_e-st.
Stündliche Dampfmenge: 43700 kg.	Thermodyn. Wirkungsgrad 61,9 v. H.

Turbine für einen kleinen Kreuzer. Die für einen kleinen Kreuzer bestimmte Turbine Abb. 817a besitzt eine Hochdruck- und Niederdruckturbine in je einem Gehäuse, zwischen denen sich das Drucklager befindet. Die Hochdruckturbine enthält eine Anzahl mehrkränziger Räder, die Niederdruckturbine eine Trommel und im gleichen Gehäuse die eingebaute Rückwärtsturbine. Die Hochdruckturbine ist mit einer Anzahl Marschstufen und besonderer Schaltung für 17 und 20 Knoten versehen. Es kommt überhitzter Dampf für den Betrieb der Hauptturbinen zur Anwendung.

Die im Prüffeld festgestellten Dampfverbrauchsergebnisse sind folgende:

Rechnungsmäßige Schiffsgeschwindigkeit	Knoten	25,5	20,0	20,0	17,0	17,0
Minutliche Drehzahl		325	244	244	206	206
Kesseldruck	at abs.	17,0	17,0	17,0	17,0	17,0
Dampftemperatur am Überhitzer	°C	250	300	250	300	250
Vakuum in der Turbine	v. H.	91,5	92,5	92,5	93,0	93,0
Effektive Turbinenleistung	PS_e	10450	3950	3950	2075	2075
Dampfverbrauch f. d. PS_e-st	kg	5,50	6,00	6,54	6,82	7,09
Thermodyn. Wirkungsgrad	v. H.	58,8	49,5	48,3	44,8	44,2

136. Schiffsturbine der Vulcan-Werke, A.-G., Hamburg und Stettin[1]).

Die Vulcan-Werke haben die ersten mit Turbinen ausgestatteten Kriegsfahrzeuge der deutschen Marine erstellt, die teils mit Turbinen Parsonsscher Bauart, teils mit solchen der Allgem. Elektrizitäts-Gesellschaft Berlin ausgestattet waren. Aus dem Lizenzvertrag mit der letztgenannten Firma entwickelte sich die Turbine „Curtis-A. E.-G.-Vulcan", die in mannigfaltigen Ausführungen in der Hauptsache dem unmittelbaren Antrieb der Schraube diente. Einen Höhepunkt dieser Entwicklung stellt die Turbinenanlage des „Imperator" dar[2]), deren gewaltige Ausmaße aus nachfolgenden Angaben hervorgehen.

Schiffslänge über alles . . . m	280,3	Geschwindigkeit . . . Sm st	22,5
Größte Breite . . . „	29,9	Maschinenleistung . . . WPS	61000
Größter Tiefgang . . . „	11,3	Leistung für Rückwärtsfahrt . „	35000
Wasserverdrängung . . . t	57000	Kesseldruck . . . at Üb.	16
Zahl der Schrauben	4	Kesselprobedruck . . . „ „	33

Die Geschwindigkeit wurde auf nahezu 24 Sm (23,96) gesteigert, indem es gelang, die Maschinenleistung bis auf 75000 (mit Spitzenhöhen bis zu 84000) WPS zu erhöhen. Die Maschinenanlage ist in Hinsicht auf die außergewöhnliche Größe mit Hintereinanderschaltung der in Hoch-, Mittel- und zwei Niederdruckteile getrennten Antriebsmaschine ausgeführt. Insbesondere befindet sich auf der Backbord-Mittelwelle vorn die Hochdruckvorwärtsturbine, hinten eine Hochdruckrückwärtsturbine; auf der Steuerbordmittelwelle vorn eine zweite Hochdruckrückwärtsturbine und hinten eine Mitteldruckvorwärtsturbine. In den getrennten hinteren Maschinenräumen befinden sich auf den Außenwellen je eine Niederdruckvorwärts-, hinter ihr je eine Niederdruckrückwärtsturbine. Die Turbinen der vier Wellen können auf untereinander gleiche Leistung eingestellt werden. Es sind Schaltungen vorgesehen, um jede Schiffswelle unabhängig von den andern zu betreiben. Der Hochdruckvorwärtsturbine ist ein dreikränziges Curtisrad vorgeschaltet. In der Mitteldruckturbine ist ein Curtisrad unmittelbar auf die Trommel aufgesetzt. Die übrige Beschaufelung ist auf Trommeln untergebracht und arbeitet mit Überdruck bis auf die ersten vier Gruppen der Hochdruckrückwärtsturbine, die auf Gleichdruck eingestellt sind. Die Hochdruckvorwärtsturbine hat fünf Düsengruppen, von denen die drei oberen für sich durch Ventile abgeschaltet werden können. Die Umkehrschaufeln sitzen auf nach außen aufklappbaren Deckeln. Es wird auf die besondere Art der Schraubensicherung hingewiesen, die darin besteht, daß die Unterlagscheiben in der Mitte gewölbt, am Rande umgebogen sind

[1]) Die nachfolgenden Mitteilungen sind in der Hauptsache der mir von der Firma zugestellten Druckschrift Nr. VI über Schiffsturbinen entnommen.

[2]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1914, S. 993.

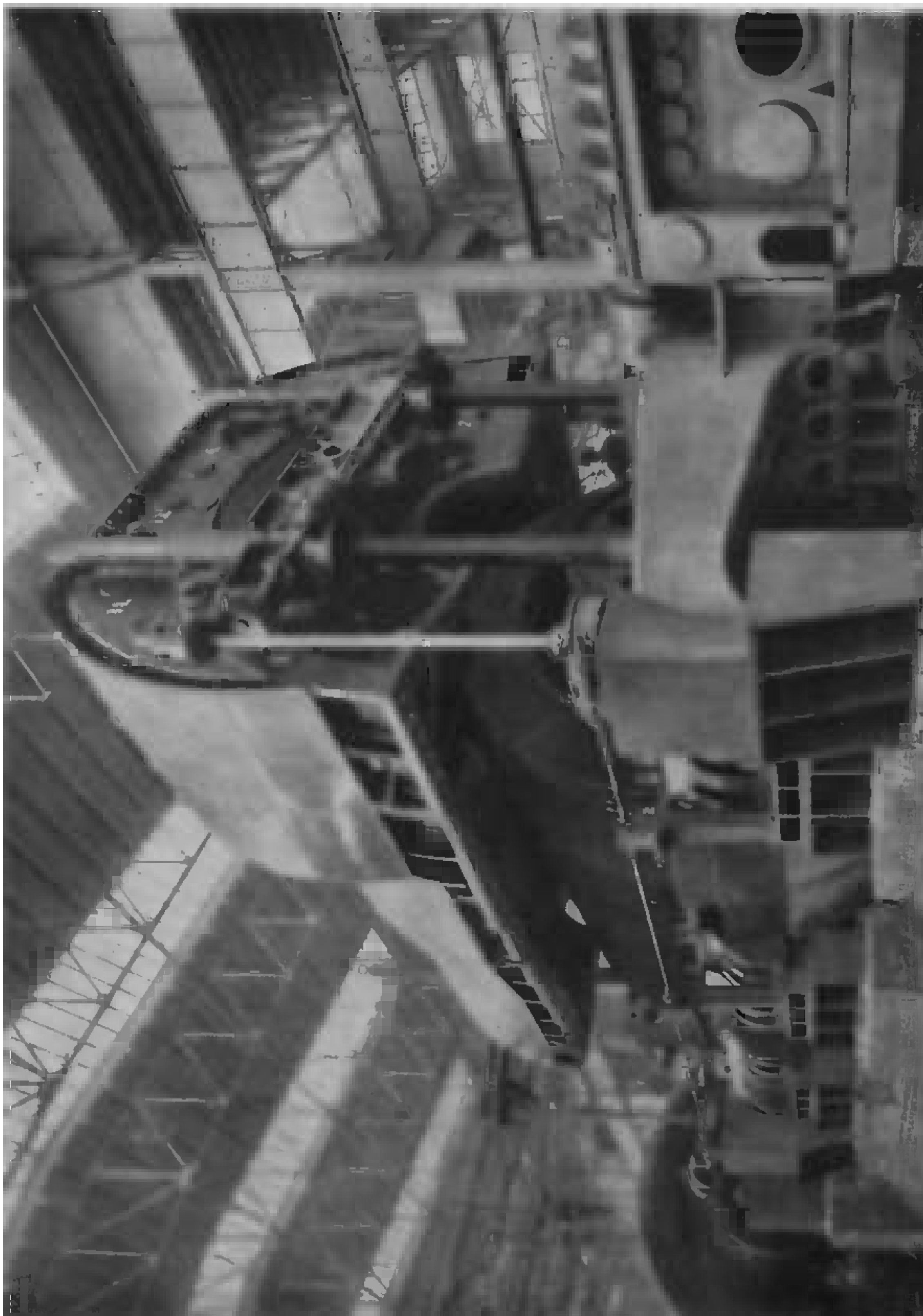


Abb. 818. Gesamtansicht der Niederdruck-Vorwärtsturbine des „Imperator“.

und in einer unterschnittenen Aussparung des Werkstückes liegen, wodurch beim Anziehen der Mutter die Scheibe auseinandergespreizt, hierauf der Rand umgebörtelt und so mit der Mutter verbunden wird. Die Turbinentrommeln sind aus Stahlguß hergestellt. Durch große Öffnungen in den Trommelböden kann man in das Innere der Trommeln gelangen. Der vordere Gehäuseteil der Hochdruckvorwärts-

turbine besteht aus Stahlguß, die übrigen aus Gußeisen. In die wagerechten Gehäuseflanschen sind Nuten eingefräst, in die man am Niederdruck Frischdampf leitet, während sie am Hochdruck, wo Überdruck herrscht, mit dem Kondenser in Verbindung gebracht werden. Unter die Gehäusefüße sind auf das Fundament genietete Gleitplatten geschoben und die Fundamentbolzen so ausgeführt, daß die Füße der Turbinen nicht festgeklemmt werden können. Die Drucklager zur Aufnahme des Unterschiedes zwischen Schrauben- und Dampfschub sind jeweils zwischen der Vorwärts- und Rückwärtsturbine angeordnet. Jede Welle ist mit einem Notregler versehen, der verhindert, daß die Drehzahl der Turbine 250 i. d. min. übersteigt. Die Schnellschlußventile werden mittels Brownscher Kraftzylinder geschlossen. Die an die Turbine sich anschließenden Wellenleitungen haben einen Durchmesser von 452 mm. Der Kern ist auf 200 mm ausgebohrt.

In Abb. 818 ist eine Gesamtansicht der Niederdruckvorwärtsturbine dargestellt. Man erkennt die durch vier kräftige Schraubenspindeln gebildete Hebevorrichtung, die mittels Zahngetriebe und elektrischen Motors den Oberteil mechanisch zu lüften erlaubt.

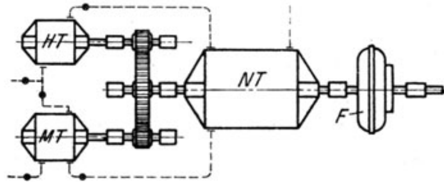


Abb. 819.

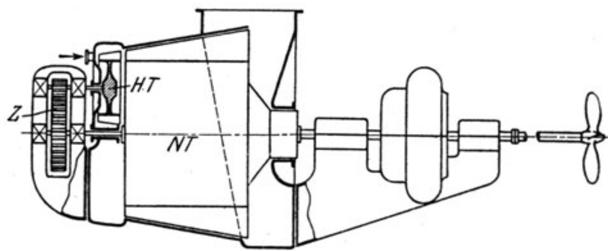


Abb. 819a.

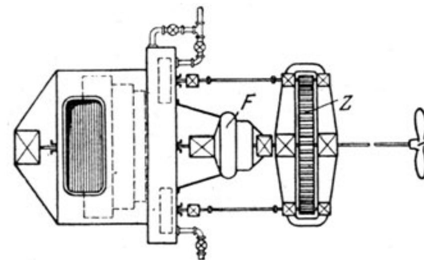


Abb. 819b.

Verbindung von Zahnradvorgelegen mit Föttinger-Umformern.

Die Vulkanwerke haben den Bau des Föttinger-Transformators aufgenommen, den wir in Abschn. 133 ausführlich besprochen haben. Neuere Patente lassen erkennen, daß auch eine Vereinigung des Zahnradgetriebes mit dem Föttinger-Umformer ins Auge gefaßt wird.

So würde nach dem D. R.-P. Nr. 303655, Abb. 819, auf die Welle der Niederdruckturbine die Hochdruckturbine *HT* und die Mitteldruckturbine *MT* mittels Zahngetriebes die Kraft abgeben, wodurch deren Drehzahlen beliebig hoch gesteigert werden könnten. Hinter der Niederdruckturbine befindet sich der Umformer *F*. In ähnlicher, eine schwierige konstruktive Aufgabe stellender Weise sollen nach dem D. R.-P. Nr. 303162 gemäß Abb. 819a eine oder mehrere Hochdruckturbinen *HT* in das Gehäuse der Niederdruckturbine *NT* eingebaut werden und durch Zahnradvorgelege *Z* die Kraft an die Niederdruckturbine abgeben, oder schließlich würde nach Abb. 819b bei sonst gleicher Anordnung das Zahngetriebe *Z* hinter dem Umformer *F* folgen.

137. Die Schiffsturbine von Blohm & Voß K.-G. a. A. in Hamburg.

Der Schiffsturbinenbau von Blohm & Voß war der Richtung der Vorkriegszeit entsprechend ebenfalls auf den unmittelbaren Antrieb der Schraube eingestellt, dessen Erfolge durch den Vierschraubendampfer „Vaterland" der Hamburg-Amerika-Linie glänzend veranschaulicht werden. Über diesen Bruderriesen des „Imperator" hat die Z. d. Ver. deutsch. Ingenieure" eine ausführliche Beschreibung[1]) veröffentlicht, der wir folgende Einzelheiten entnehmen.

Die vertraglichen Bedingungen wurden gegenüber dem „Imperator" verschärft, indem bei gleicher Geschwindigkeit von 22,5 Knoten/st die mittlere Verdrängung von 57000 auf 59900 t bei gleicher Maschinenleistung von 61000 WPS erhöht wurde, und zwar insbesondere durch Vergrößerung des Tiefganges von 11,3 auf 11,7 m. Das Schiff ist mit dem Frahmschen Schlingertank zur Dämpfung der Rollbe-

[1]) 1918, S. 842f.

wegung ausgestattet. Für die Maschinenanlage kamen der beim Entwurf (1910) erreichten Entwicklungsstufe entsprechend folgende Möglichkeiten in Betracht:

a) Zweischraubenantrieb mit 4 Kolbenmaschinen.
b) Dreischraubenantrieb mit je einer Kolbenmaschine auf den Seitenwellen und einer Abdampfturbine auf der Mittelwelle.
c) Vierschraubenantrieb mit 2 Kolbenmaschinen und 2 Abdampfturbinen, oder mit 4 Turbinen.

Die letzte Bauart wurde gewählt. Mit Rücksicht auf die 3000 t ausmachende Gewichtserparnis entschied man sich trotz mangelnder Schulung des Heizpersonals auf Handelsschiffen für **Wasserrohrkessel** der Jarrow-Art mit Normandscher Rauchgasführung. Die Gesamtheizfläche beträgt 19550 qm, die Gesamtfläche 358 qm. Der Dampfdruck, ursprünglich mit 17 at Üb. geplant, wurde auf 17,9 at erhöht wegen des zu befürchtenden Druckverlusts in **den bis 90 m langen Dampfleitungen.** Der Unterwind wird auf 200° C vorgewärmt. Die Kessel ergaben 77 v. H. Nutzeffekt bei 125 bis 175 kg/st verbrannter Waleskohle auf 1 qm Rost. Die Turbinenverteilung und Schaltung ist dieselbe wie beim „Imperator" (Abschn. 136). Einige Hauptmaße der größten Dampfer der Welt sind in nachfolgender Zahlentafel vereinigt.

	Zahl der Turbinen-Laufkränze	Niederdruck-Trommel-Durchm. mm		Zahl der Turbinen-Laufkränze	Niederdruck-Trommel-Durchm. mm
Mauretania	184	2560	Aquitania	218	3660
Imperator	162[1]	3650	Vaterland	224	3900

Für „Vaterland" gelten insbesondere

Länge der Niederdruck-Trommel . . mm	5135	Gesamtzahl der Turbinenschaufeln . .	817000
Größte freie Schaufellänge . . . . "	615	Wellenleitung Durchm. . . . . . mm	460
Niederdruck-Lagerbohrung . . . . "	900	Schrauben Durchm. . . . . . . "	5000
" Lagerlänge . . . . . . "	1950	" gewicht . . . . t	16

Als Tagesverbrauch wurde bei 61000 WPS Leistung der Betrag von 880 t bester Kohle gewährleistet, allein schon bei der ersten Reise wesentlich unterschritten[2]).

Beachtenswert sind die Mitteilungen über die **Versorgung der Kessel mit Speisewasser.** Dieses wird von den Luftpumpentanks durch Vorpumpen in einen Mischvorwärmer gehoben, wo es durch Zwischendampf aus den Hauptturbinen auf 70° C erwärmt wird und in einen großen Ausgleichstank gelangt. Von hier drücken es die Speisepumpen durch einen Oberflächenvorwärmer, wo es durch den Abdampf der Hilfsmaschinen bis auf 120° C erwärmt wird, in die Kessel. Während der letzten Stunden einer Wache geht das Feuer infolge der Rostreinigung zurück, die betreffenden Kessel verdampfen wenig, der durch die Dampfblasen nicht mehr aufgeblähte Kesselinhalt schrumpft zusammen, und die selbsttätigen Schwimmer öffnen die Speiseventile, so daß eine erhebliche Menge Speisewasser nachströmt. Der Bedarf ist in dieser Zeitspanne größer als die Lieferung an Kondensat, und zwar handelt es sich **rechnungsmäßig um Mengen von 60 bis 70 t (!),** daher die Notwendigkeit des Ausgleichsbehälters. Nach dem Reinigen und Wiederaufleben des Feuers nimmt der Rauminhalt des Wassers stark zu, man braucht längere Zeit nicht zu speisen; das Kondensat nimmt selbsttätig den Weg zum Ausgleichbehälter, da die hohe Pressung in der Speisewasserdruckleitung die Hauptpumpen abstellt. Das Gleiche besorgt der steigende Wasserstand in den Mischvorwärmern mit den Vorpumpen. Dann überfließt das Kondensat in den Ausgleichbehälter. Wird wieder viel Speisewasser benötigt, so stellen die Schwimmer der Mischvorwärmer die Vorpumpen auf rascheste Gangart, **ein Glockensignal meldet, daß man die Vorpumpen umstellen muß, damit sie aus dem Ausgleichbehälter saugen.** Die Selbsttätigkeit der Regelung ist hiernach eine begrenzte. und man darf fragen, warum nicht lieber der Speisewassermangel automatisch behoben wird und Umstellungen eher einem Überschuß vorbehalten wurden.

Die **Konstruktion** der Schiffsturbine von Blohm & Voß für unmittelbaren **Einzelwellenantrieb** und **überhitzten Dampf** stellt Abb. 820 dar. Der Hochdruckdampf beaufschlagt ein vierkränziges Curtisrad, gelangt in die Marschstufen, die bei großer Fahrt durch ein Umlaufventil überbrückt werden. Die Rückwärtsturbine besteht aus einem ebenfalls vierkränzigen Curtisrad mit anschließendem Überdruckteil. Abb. 821—821c veranschaulichen die Aufstellung und den **Rohr- und Steuerungsplan** der Turbine.

[1]) und ein dreikränziges Curtisrad.
[2]) Über die Kondensatoren vergleiche man Abschn. 150.

Die Hauptleitung A mit der Verankerung des Stopfbüchsendruckes durch Zugstange B führt den Dampf einerseits zum Hauptabsperrventil C, anderseits rückwärts dem Ventil D zu. Von C aus gelangt der Dampf zu den Düsengruppenventilen I—IV, von welchen I mit konischen, die übrigen mit parallelen Düsen versehen sind. Die Gruppenventile werden durch das Vorwärtsmanöverrad E der Reihe nach geöffnet, wobei jedoch, wenn Ventil Nr. III an die Reihe kommt, zugleich die beiden Umleitungsventile U_1 und U_2 selbsttätig geöffnet und die Marschstufen übersprungen werden. Die Einzelheiten der Gruppenventilsteuerung sind in Abb. 822 durch den Längsschnitt des Gehäuses für Ventile II, III dargestellt. Die Ventile werden durch Längsverschiebung der in Abb. 822a sichtbaren Spindel F mittels der Rollenhebel G geöffnet, wobei die auf den Querspindeln H befindlichen Innenhebel J die Ventilspindeln anfassen. Der strichpunktierte Kreis K bedeutet den Querschnitt des Zuflußrohres, der Abfluß erfolgt bei L_2 L_3. Beim Anheben des Ventils III wird der Wechselschieber M angehoben; dabei ist in der gezeichneten Stellung die Hinterseite des Umlaufventilkolbens vermöge des Abschnittes N mit einem Frischdampffenster in Verbindung, während die Vorderseite mit dem „Bypaß" verbunden ist. Wird der Wechselschieber angehoben, so findet die umgekehrte Verbindung statt und die Umlaufschieber werden geöffnet. Der Probedruck des Stahldruckgehäuses beträgt 37 at.

Abb. 823 veranschaulicht einen **Umlaufschieber** mit zugehörigen Dampfsteuerkolben. Bei größeren Ausführungen wird, wie auch in Abb. 821 angedeutet, der Umlaufschieber auch durch eine Ölsteuerung betätigbar gemacht. Das **Hauptabsperr**ventil Abb. 824 ist, wie ersichtlich, mit einem Entlastungsschieber versehen.

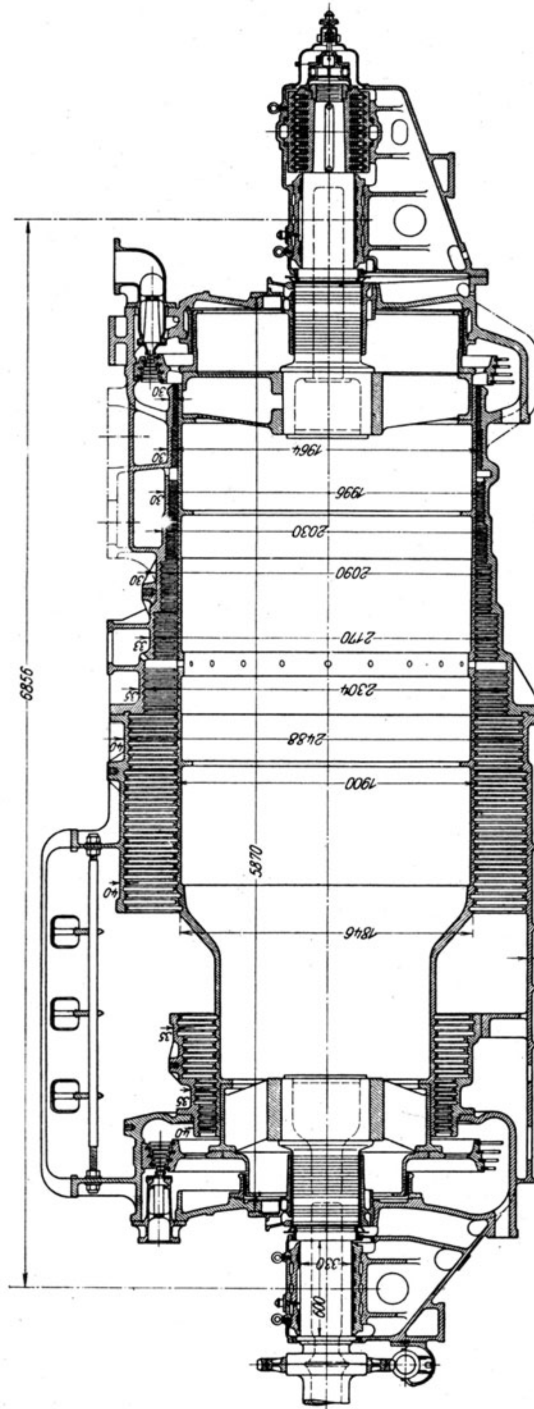


Abb. 820. Blohm & Voß-Turbine für Einzelwellenantrieb und überhitzten Dampf.

Abdampfschiffsturbinen wurden von Blohm & Voß wiederholt ausgeführt. Nach Abb. 825 wird zwischen Kolbenmaschine und Turbine ein Wechselventil eingeschaltet, dessen Lage durch eine selbsttätige Dampfsteuerung oder durch eine Handölpumpe mittels des unten angeordneten Ölkraftkolbens bestimmt wird.

In der Zusammenstellung Abb. 826 bedeuten a_1 a_2 die Umsteuerungswellen, in b_1 b_3 sind Muschelschieber untergebracht, die bei Vorwärtsgang eine Verbindung zwischen der Oberseite des Dampfkraftkolbens A in Abb. 825 und dem Niederdruckschieberkasten der Nachbarmaschine herstellen. Da die Kolbenunterseite stets dem frischen Kesseldampf ausgesetzt ist, werden die Wechselschieber geöffnet, d. h. der Dampf auf die Turbine geschaltet. Wird auch nur eine, z. B. die rechte Maschine, auf Rückwärts umgesteuert, so stellt b_1 eine Verbindung zwischen der Frischdampfleitung und der Oberseite des Kolbens A her, worauf der Überdruck (wegen einseitiger Kolbenstange) die Wechselventile senkt, d. h. auf den Kondenser umstellt. Gleichzeitig wird Hahn h_1 geschlossen, so daß von b_2 her kein Frischdampf in den Schieberkasten dringen kann. Im Normalbetriebe sind Hähne o, u auf, Hahn z zu. Im Falle einer Turbinenhavarie werden die Schieber b_1 b_2 von Hand umgesteuert und die Umlaufleitungen an den Ölzylindern geschlossen.

Die **Schaufelbefestigung** der Überdruckturbine erfolgt bei hoher Zentrifugalbeanspruchung nach Abb. 827 durch Anstauchen eines Fußes, der durch die mit gewindeförmigen Nuten versehenen

Zwischenstücke festgehalten wird. Der Baustoff der Schaufeln ist bei Sattdampf Patronenmessing, bei Heißdampf 5 v. H.-haltiger Nickelstahl. Die Zwischenstücke bestehen bei Messingschaufeln aus Messing,

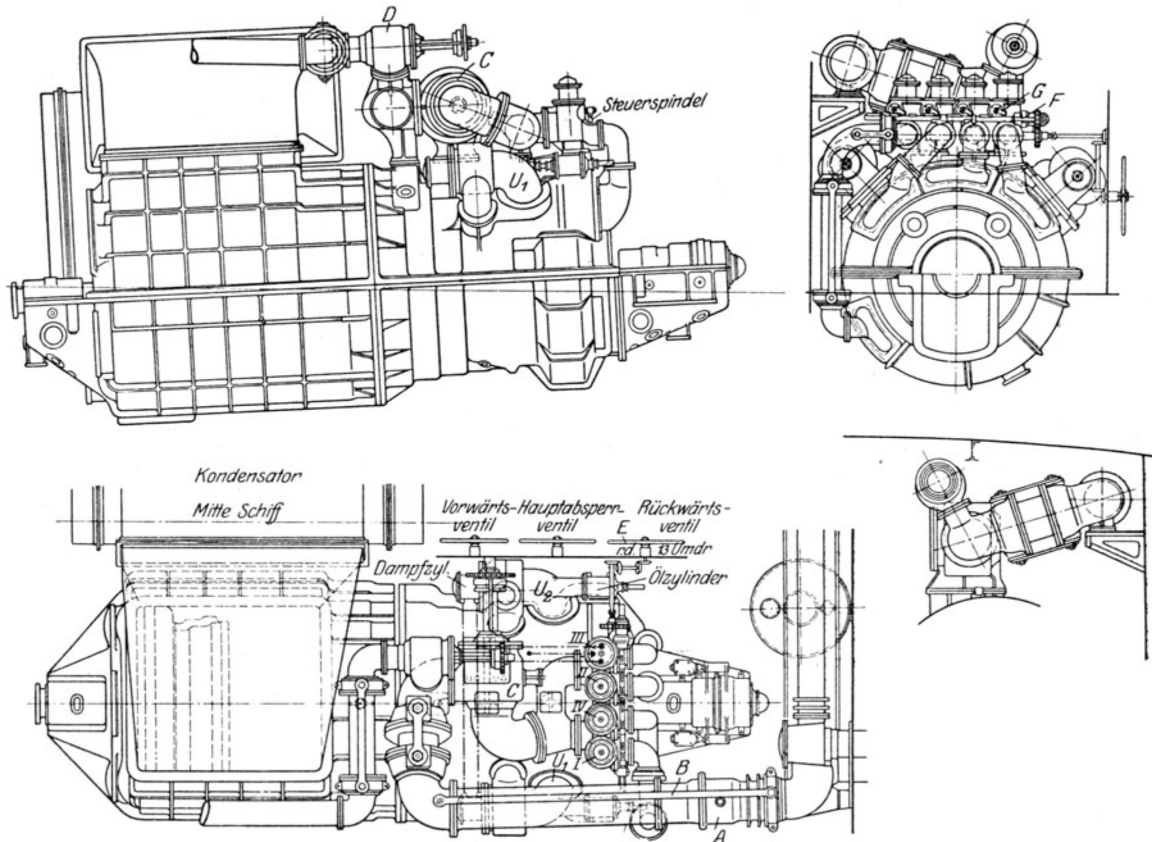


Abb. 821—821c. Rohr- und Steuerungsplan zu Abb. 820.

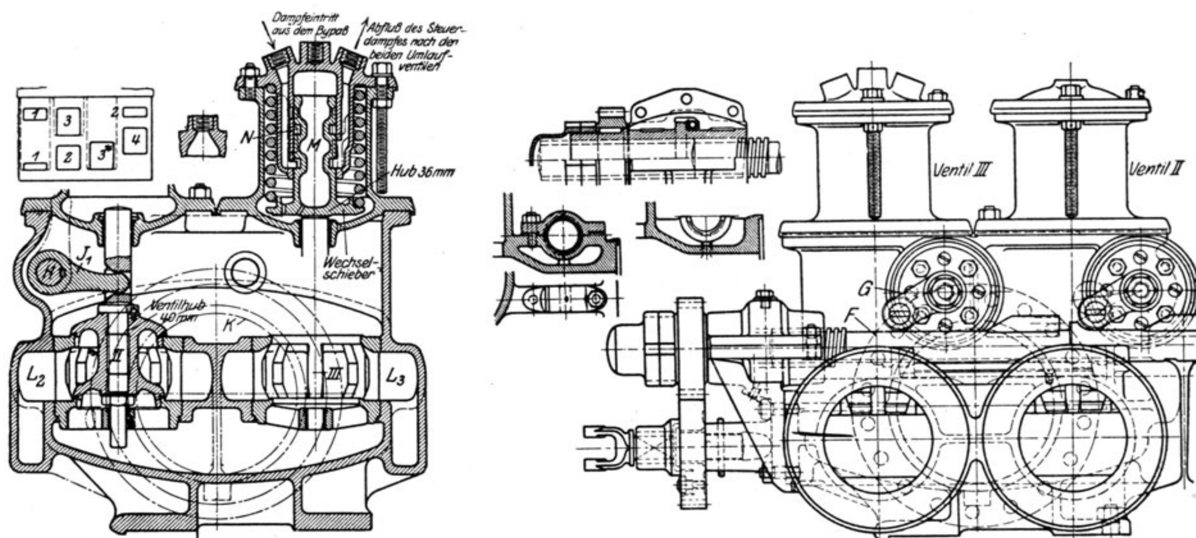


Abb. 822. Steuergetriebe der Gruppenventile. Abb. 822a.

bei Stahlschaufeln aus weichem Eisen. Die **Scheiben** werden mit einem **Schrumpf** von 1,0—1,2 v. T., die Radsterne mit einem solchen von 1,4—1,5 v. T. angeschrumpft.

Wertvolle Beobachtungen über die **Gehäusetemperatur** einer größeren Überdruckturbine, die eine Nacht hindurch im Leerlauf lief und dann 4 Stunden gestanden hatte, sind in nachfolgender Zahlentafel wiedergegeben. Die Beobachtung bezieht sich auf das Wiederanwärmen nach dem Stillstand.

Zeit der Messung	Temperatur oben °C	unten °C	Bemerkungen	Zeit der Messung	Temperatur oben °C	unten °C	Bemerkungen
1.15	85	57	die Turbine steht still	7.45	115	92	die Turb. läuft m. 150 U.
1.45	92	60	" " " "	8.45	120	98	" " " " 150 U.
2.15	94	58	" " " "	9.45	120	98	" " " " 150 U.
2.45	94	63	" " " "	10.45	120	98	" " " " 150 U.
3.15	95	65	" " " "	11.45	120	98	" " " " 150 U.
4.30	100	70	" " " "	12.45	120	98	" " " " 150 U.
5.15	110	85	" " " "	1.45	120	98	" " " " 150 U.
5.45	110	87	dieTurb. läuft mit 150 U.	2.45	120	98	" " " " 150 U.
6.15	110	87	" " " " 150 U.	3.45	120	95	" " " " 150 U.
6.45	110	87	" " " " 150 U.	4.45	120	95	" " " " 150 U.

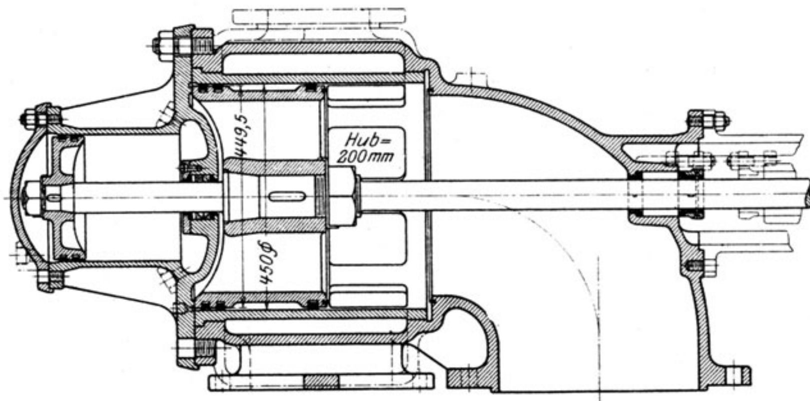


Abb. 823. Umlaufschieber.

Man erkennt, daß die Temperatur oben von Anbeginn an höher war als unten. Dieses Verhältnis steigert sich während der 4 Stunden dauernden Vorwärmung im Stillstand. **Der Unterschied verschwand, wie ersichtlich, nach 9 stündigem Lauf noch nicht vollständig.**

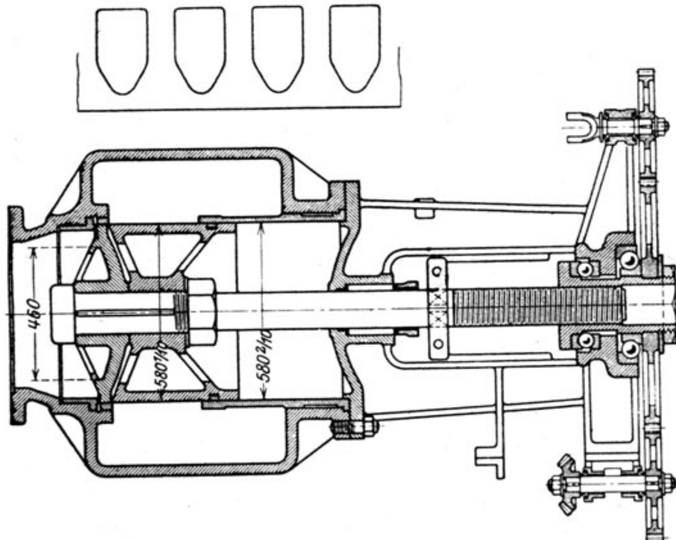


Abb. 824. Hauptabsperrventil.

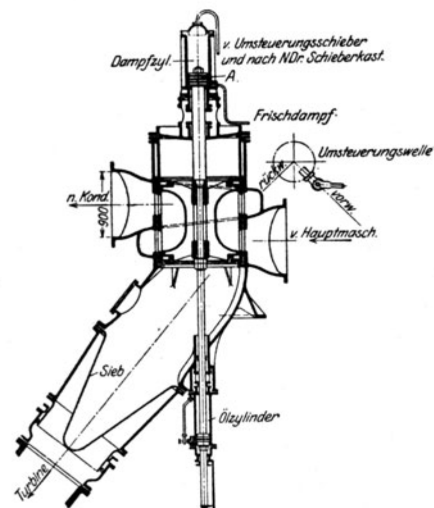


Abb. 825. Wechselventil zur Anlage Abb. 826.

Ebenfalls wichtig sind die in Abb. 828 eingetragenen Messungen der **Ausdehnung von Welle und Gehäuse** an einer Vierwellenanlage während der Probefahrt mit Vollbelastung, wobei die Turbinen im Beharrungszustande waren. Die Festpunkte sind bei der N. D. T. in der Mitte des Gehäuses, bei der H. D. H. T. an der Verschraubungsstelle mit der H. D. R. T. Die Meßpunkte an dem Gehäuse sind durch kleine Zacken hervorgehoben. Die daneben stehenden Pfeile geben die Ausdehnungsrichtung, die Zahlen die (absolute) Ausdehnung in mm an. Die Festpunkte der Spindeln sind bei der H. D. H. T. im äußeren

Drucklager, bei der N. D. T. im mittleren Drucklager. Die an den Wellenmittellinien angegebenen Pfeile und Zahlen bedeuten die (relative) Mehrausdehnung der Welle gegenüber dem Gehäuse.

An diesem Orte ist hinzuweisen auf den

Torsionsindikator und Leistungsmesser von Frahm.

Frahm benützt nach Abb. 829 die Verdrehung eines zwischen den Querschnitten a, b gelegenen Wellenstückes, um das durchgehende Moment zu bestimmen. Die zweiteilige Hülse f ist im Querschnitt a auf die Welle fest aufgeklemmt und endigt rechts an

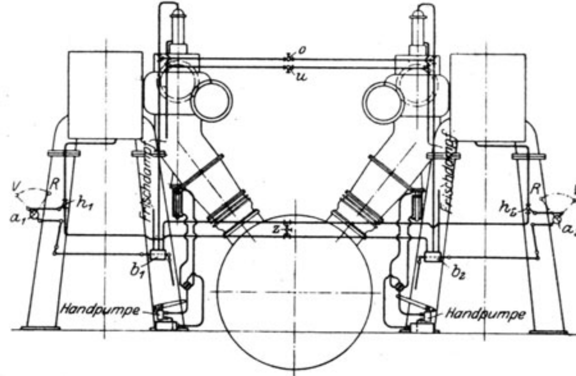


Abb. 826. Kolbenmaschinen und Turbinen-Verbund-Anlage.

Flansch k. Diesem gegenüber steht der ebenfalls fest aufgeklemmte Flansch i, von dem aus durch eine Zugstange der um eine radiale Achse schwingbare Hohlspiegel l bewegt wird. Die links sichtbare Glühlampe mit radial stehendem Kohlenfaden erzeugt vermöge des Hohlspiegels ein auf die sich drehende Papiertrommel w fallendes radiales Bild.

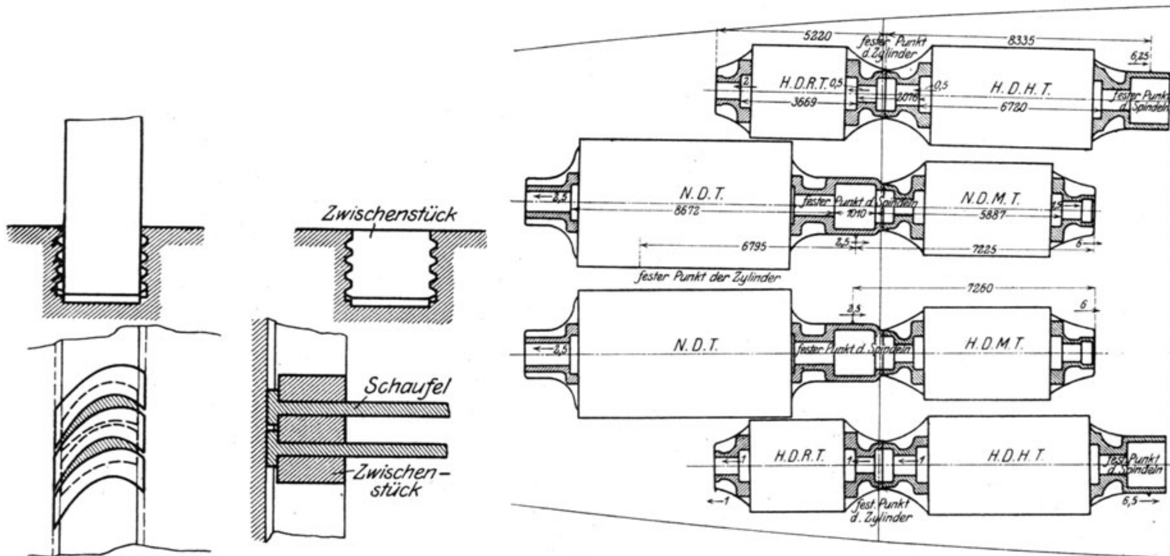


Abb. 827. Schaufelbefestigung. Abb. 828. Wärmedehnungen einer Vierwellen-Anlage im Betrieb.

Die Trommel ist von einer Dunkelkammer umschlossen, die einen zur Achse senkrecht verschränkten Schlitz von 0,1 mm Weite trägt. Hierdurch gelangt von dem Fadenbild nur ein Punkt auf das lichtempfängliche Papier, welches durch das Zahnradvorgelege p_0 ein langsam fortschreitende Bewegung erhält. p und a greifen in die gleich großen Zahnräder s und r ein. Dabei wird s von p fest angetrieben, r aber bleibt durch Zwischenschaltung der Zahnradpaare u, t um etwas zurück. Wird die gezeichnete Klauenkupplung nach links eingerückt, so drehen sich s und r mit gleicher Geschwindigkeit, die Papierbewegung ist ausgeschaltet. Die Winkelverdrehung des Wellenstückes wird auf diese Weise mit beliebiger Vergrößerung auf dem lichtempfindlichen Papier aufgezeichnet. Ein fester Hohlspiegel x und eine an der Feder v befestigte Glaslinse dienen zur Zeitmessung. Die Feder v wird bei jeder Umdrehung der Papiertrommel leicht angestoßen und zeichnet durch ihre Schwingung eine langsame abklingende Wellenlinie mit gleichbleibender Periode im untern Teil des Schlitzes auf. Die Vorrichtung

bewährt sich nach der unten angegebenen Quelle[1]), auf die wegen weiterer Einzelheiten verwiesen wird, vorzüglich. Sie dient der Leistungsmessung, indem bei stillstehender Maschine die Nullinie auf das von Hand bewegte Papierband, und zwar für eine kurze Vorwärts- und Rückwärtsdrehung, verzeichnet wird.

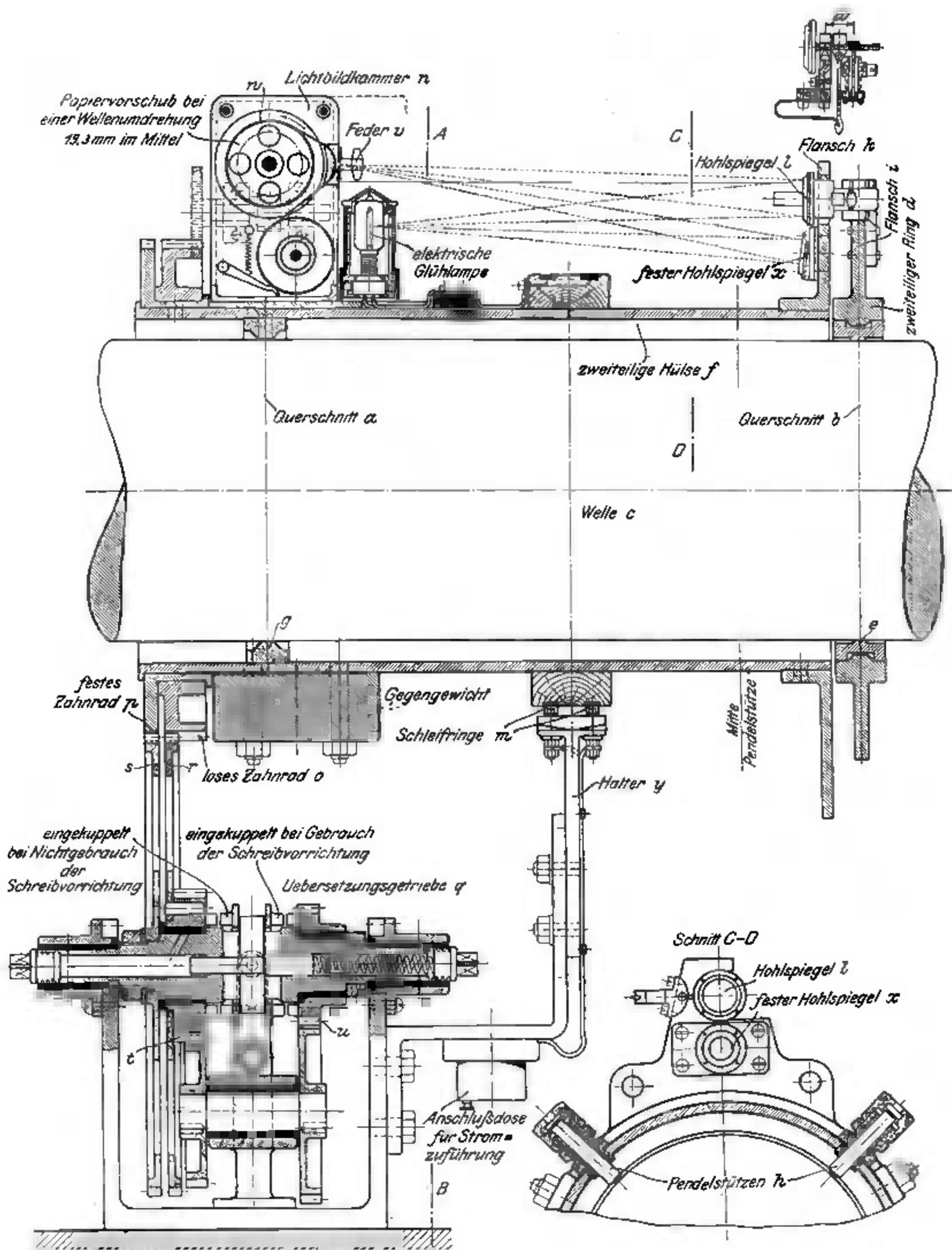


Abb. 829. Torsionsindikator von Frahm.

Das Mittel der Aufzeichnung gibt die spannungslose Lage der Welle an. Nach Frahm kann eine Meßgenauigkeit von 2 v. H. gut erreicht werden.

Schwingungsmessung von Turbinenlagern. Die oben beschriebene Anordnung von Hohlspiegeln, Glühlampe, Schreibtrommel benützt Frahm, um die Erschütterungen von Turbinenteilen, insbesondere

[1]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1918, S. 177.

den Lagern graphisch aufzunehmen. Zu diesem Behufe wird der bewegliche Hohlspiegel am Gewicht eines kurzen lotrechten Pendels angebracht. Die Lagerung des Pendels aber tunlichst starr mit dem Lager (oder Gehäuse u. a.) verbunden. Die Trommel und der feste Hohlspiegel sind auf einem von der Schwingung unbeeinflußten Klotz befestigt. Die Vorrichtung erweist sich auch für diesen Zweck als ungemein feinfühlig. Die kritische Drehzahl tritt mit größter Deutlichkeit in Erscheinung. Nach mir vorgelegten Lichtbildern treten neben der eigentlichen Schwingung eigentümliche Sekundärschwingungen auf, deren Natur weiterer Aufklärung bedarf.

138. Schiffsturbine der A.-G. Brown, Boveri & Cie., Baden und Mannheim.

In Abb. 805, 806 führten wir die neueste Ausführung der Rädervorgelege durch Brown, Boveri & Cie. vor. Abb. 830—832 stellen die dazu gehörende Hoch-, Mittel- und Niederdruckturbine dar. Die H. D. T. ist mit einem einkränzigen Gleichdruckrad als erste Stufe

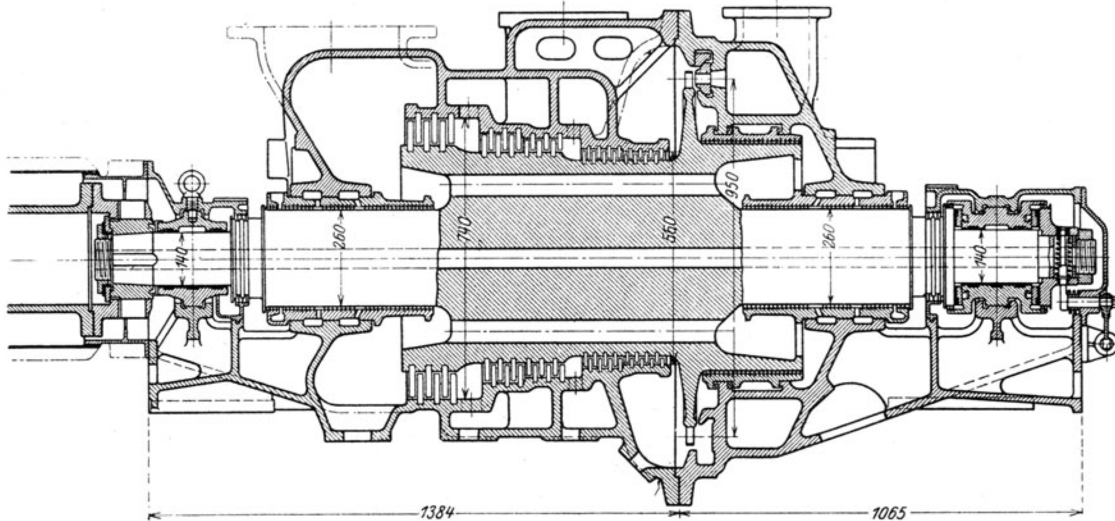


Abb. 830. Hochdruck-Schiffsturbine von Brown, Boveri & Cie

versehen. Die darauf folgenden zwei Gruppen der Überdruckstufen sind Marschturbinen, wobei die erste mit der zugehörigen Düsengruppe des Gleichdruckrades für 20 v. H., die

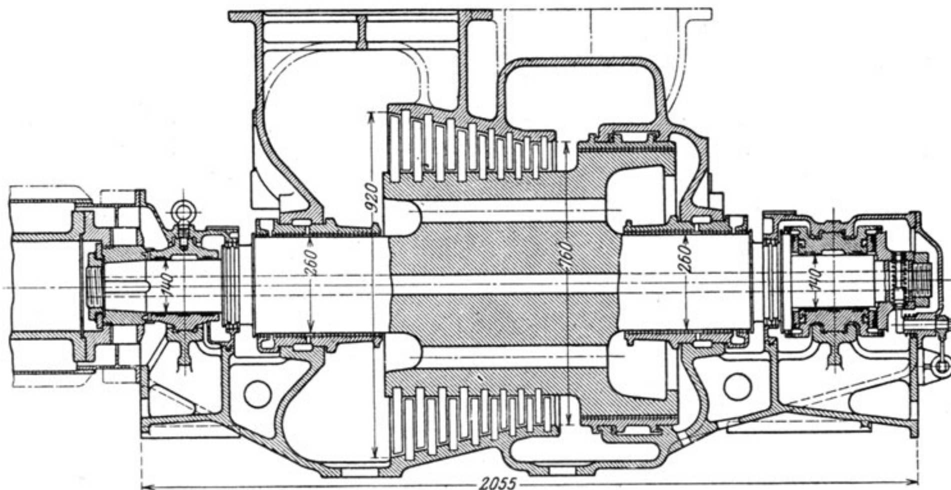


Abb. 831. Mitteldruckturbine zu Abb. 830.

zweite (mit zugehöriger Düsengruppe) für 50 v. H. der gesamten Dampfmenge bemessen ist. Abb. 832a veranschaulicht die Druckverteilung, die der Benützung der 1., 2., 3. Düsengruppe entspricht. Die Abmessungen der Düsen sind in nachfolgender Zusammenstellung enthalten.

	Düsenzahl	Höhe mm	Breite mm	Fläche cm²	Dampfmenge t/st
I	7	28	13,7	25,9	21,3
II	9	28	14,7	37,1	29,2
III	2 × 9	28	14,7	74,2	58,5
					Insgesamt 109,0 t/st

Die Umlaufventile der 1. und 2. Gruppe sind mit den Düsenventilen verblockt. Die Drehzahlen betragen, wie schon angegeben, für die H. D. T. und M. D. T. 4180, für die N. D. T. 3110 i. d. Min. Diesen

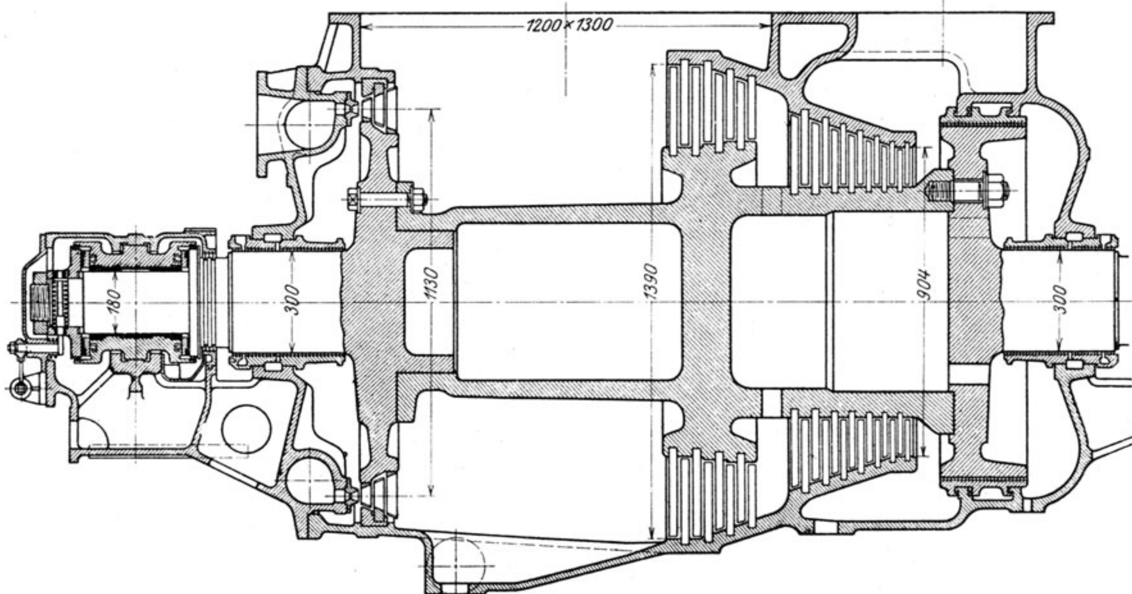


Abb. 832. Niederdruck-Vorwärts- und Rückwärts-Turbine zu Abb. 830.

hohen Drehzahlen entsprechend sind die hohlen Wellen äußerst kräftig konstruiert. Insbesondere erhalten die am weitesten ausladenden Radkränze der N. D. T. durchgehende bohrungsfreie Radscheiben.

Ein Beispiel einer Turbinenanlage mit **gemischtem Antrieb,** wobei die geteilten Hochdruckturbinen auf ein Zahnradvorgelege treiben, dessen Achse die Niederdruckturbine und in ihrer Fortsetzung die

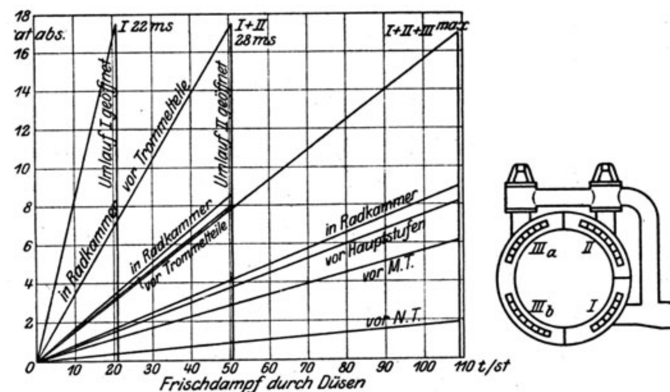


Abb. 832a. Druckverteilung bei verschiedenen Schaltungen.

Schraube trägt, ist in Abb. 833, mit Querschnitt in Abb. 833a dargestellt. Die Abmessungen des Getriebes für die St. B.-Turbine sind: großes Rad 2015,2 Dmr., Zähnezahl 285, Ritzel 304,05 Dmr., Zähnezahl 43, Teilung 5π, Zahnneigung 45°, axiale Zahnlänge 2 × 500 mm. Die Drehzahlen sind 2400/360. Die beiden Getriebe leisten 24 000 WPS, die dargestellte Anlageeinheit im ganzen 50 000 WPS.

Der **unmittelbare Antrieb** in einer hervorragend großen Ausführung wird in Abb. 834 und Abb. 834a veranschaulicht. An der Hochdruckturbine ist hervorzuheben die sorgfältige Anwärmung des Radsternes

durch die bei X in die hohlen Arme dringenden Bohrungen, die dem Dampf bei Y den Weg in die hohle Welle freigeben, wobei die in der Verschlußscheibe befestigte kleine Bohrung Z ständigen Durchfluß ermöglicht. Die mit der Hochdruckseite durch die Kupplung K unmittelbar verbundene Niederdruckseite, Abb. 834a, zeigt die Trommelbauart mit dem bedeutenden Innendurchmesser von 2,7 m.

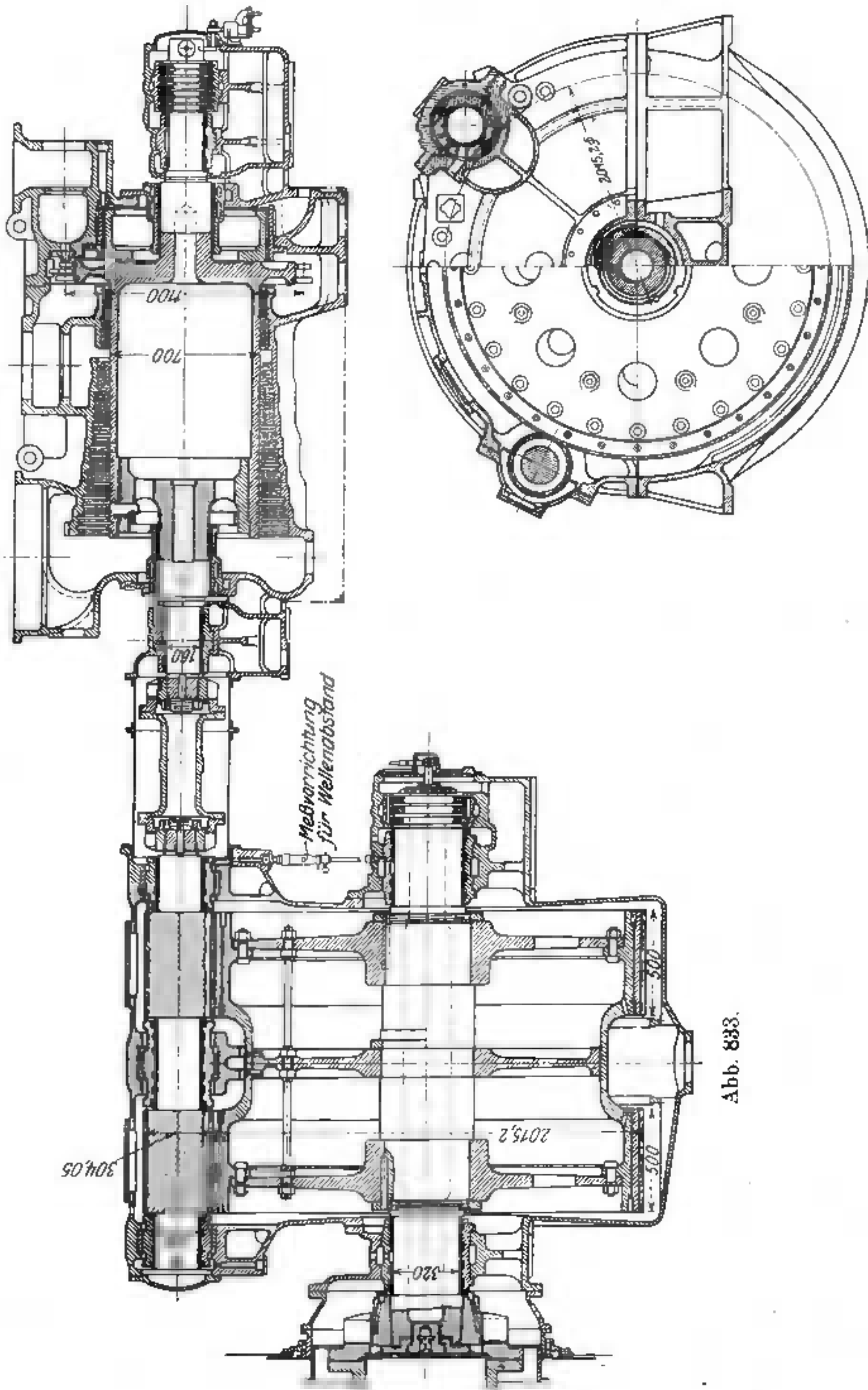


Abb. 833.

Abb. 833a.

Zahnradvorgelege für die geteilten H.-Turbinen einer unmittelbar gekuppelten Niederdruck-Turbine.

Bei diesen großen Turbinen sind vielfach **Notlager** vorgesehen, durch die das Gewicht der Welle für den Fall abgefangen wird, daß die Hauptlager heiß laufen und der Weißguß auszuschmelzen beginnt. Nach Abb. 834b benützt man zwei mit Kugellagerung versehene Rollen, die mit einem Spiel von 0,8 mm unterhalb der Welle an beiden Enden derselben angeordnet sind. Um dieses Spiel kann die Welle sinken, ohne daß die Schaufeln gegen das Gehäuse reiben.

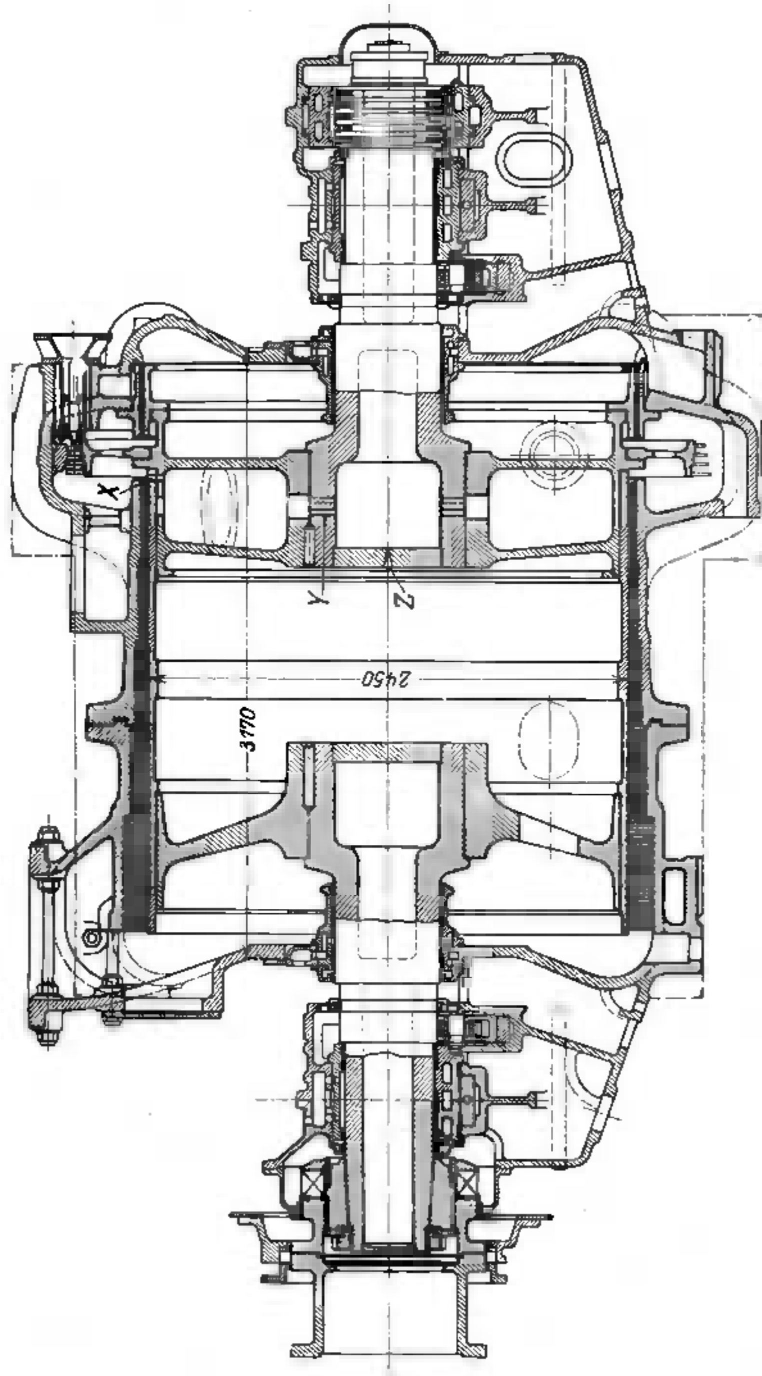


Abb. 834. Hochdruckturbine, in Reihe mit der Niederdruckturbine Abb. 834a.

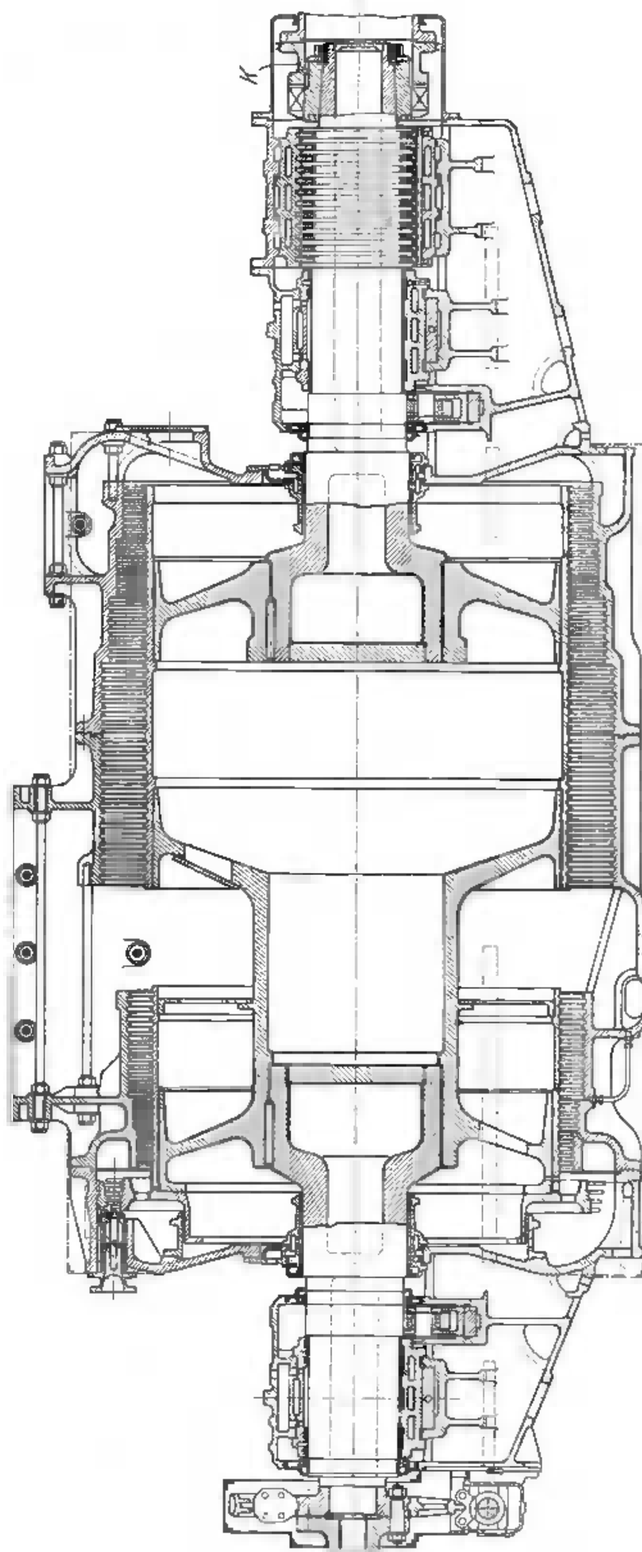


Abb. 834a. Niederdruck- und Rückwärtsturbine für unmittelbaren Antrieb.

Die gleiche Abbildung stellt auch die **Anlüft-** und **Hebevorrichtung** der Welle dar. Das Anlüften geschieht durch Anziehen der auf Kugelspurlagern gegen die Brücke B abgestützten Schraubenbolzen A, die vermöge des Halbringes C die Welle tragen. Beim vollständigen Ausbau des Läufers wird vorher

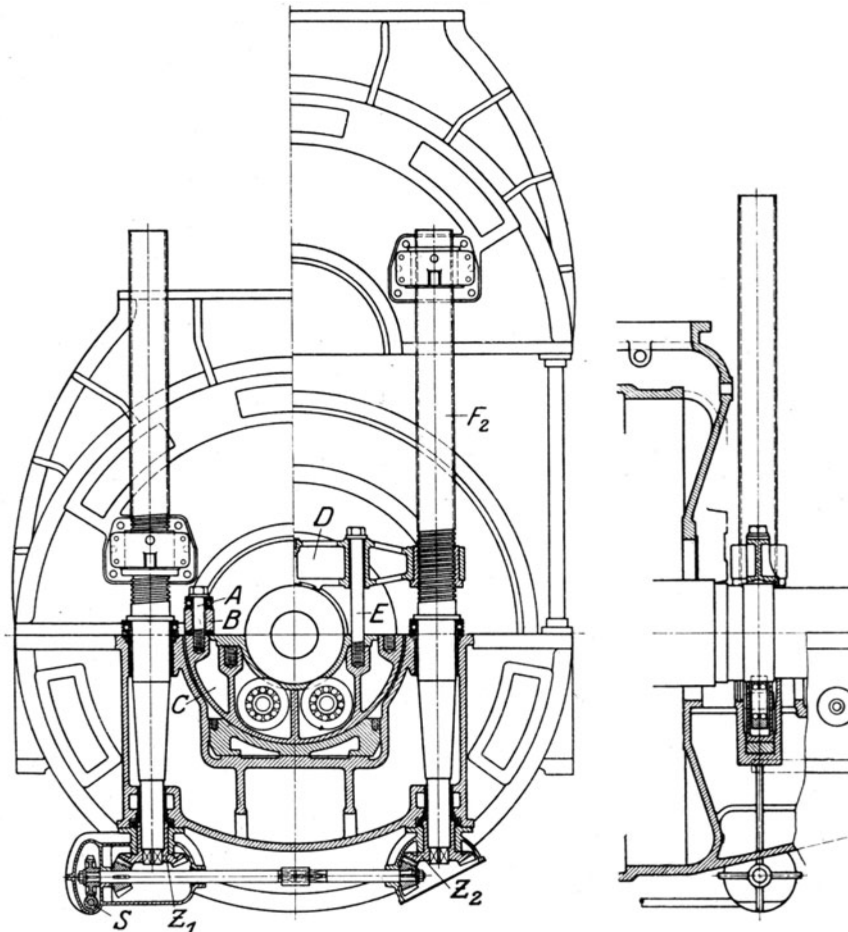


Abb. 834 b. Rollen-Notlager und Hebevorrichtung.

in den Zwischenraum X eine Bronzebeilage eingeschoben, die weniger Spiel besitzt als die Rollen. Dann wird Joch D durch Schrauben E mit dem Tragring C fest verbunden, worauf man die symmetrisch an beiden Gehäuseenden angeordneten Tragsäulen F_1 F_2 mittels Schneckenvorgelege S und Zahngetriebe Z_1 Z_2 in Drehung versetzt.

139. Schiffsturbine der A.-G. Weser in Bremen.

Abb. 835 und 835a veranschaulichen die hintereinander geschaltete Hochdruck- und Niederdruck-Turbine einer 2-Wellen-Anlage. Die Niederdruckturbine ist, wie üblich, mit der Rückwärtsturbine in einem Gehäuse vereinigt. Die auf eine Schraube übertragene Leistung ist 25 000 PS bei 400 Umdr. i. d. min. Die Hochdruckturbinen sind für kleine Fahrt mit einem vierkränzigen Curtisrad und mit Marschstufen versehen. Die Anlage arbeitet mit der Rölligschaltung, wie wir sie in Abschn. 129 unter c) beschrieben haben.

Die Hochdruckturbine ist durch einen Labyrinthkolben nahezu entlastet. Die Niederdruckturbine besitzt keinen Entlastungskolben, das Drucklager nimmt den Unterschied zwischen Dampf- und Schraubenschub auf. Die Lagerständer sind an die Gehäuse angeschraubt und schweben frei. Das Gehäuse wird durch Füße gestützt, die am Abdampfteil festgelegt sind, im übrigen der Wärmeausdehnung sowohl axial wie radial freies Spiel gestatten. Die richtige axiale Lage des Gehäuses wird durch gleitbare Gradführungen gesichert. Die wagerechten Teilfugen des Gehäuses sind aufgeschabt und mit dünn aufgetragenem Kitt abgedichtet. In die senkrechten Teilfugen werden Klingeritplatten eingeschoben. Bemerkenswert ist der von den früher gebrachten Vorbildern abweichende Bau der

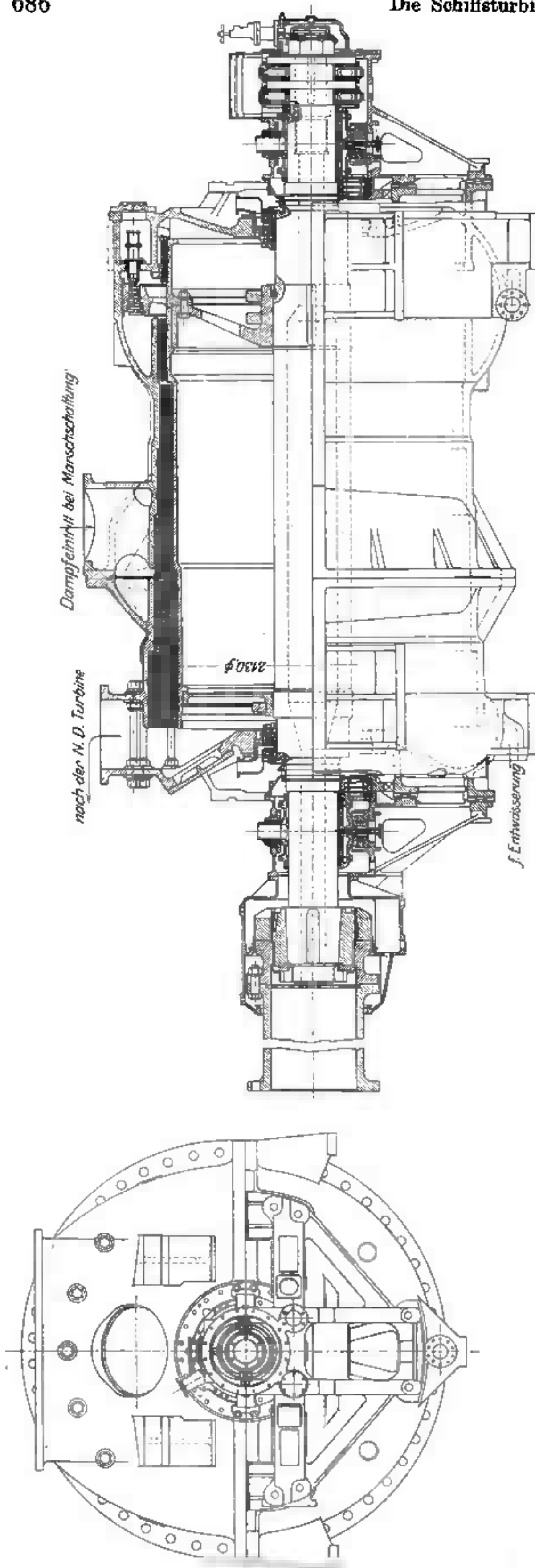


Abb. 835. Hochdruckteil einer Schiffsturbine der A. G. Weser.

Turbinenläufer. Diese bestehen zwar auch aus geschmiedeten Trommeln, werden jedoch auf einer durchgehenden Welle befestigt. Ebenso verdient die nach einwärts vorragende Abstufung der Niederdruckstufen Erwähnung, die die Bearbeitung des Niederdruckgehäuses sehr vereinfacht. Die Zahl der Überdruckstufen an der Hochdruckturbine beträgt 76, an der Niederdruckturbine 44. Die Rückwärtsturbine besitzt eine 4 kränzige Druckstufe und 17 Überdruckstufen. Die Trommeln sind auf die Stützscheiten aufgeschrumpft und durch zahlreiche radiale Gewindebolzen verbunden. Die Nabe der Radsterne wird auf der Welle durch sehr kräftige Schrumpfringe gehalten. Die Befestigung der Radscheiben gegen die Trommel am Ausströmungsende erfolgt durch Stemmringe ähnlich wie bei den Reifen der Lokomotivräder. Die unteren Lagerschalen der Turbine stützen sich auf je 2 Keile, durch deren gegeneinander gerichtete Verschiebung die Höhenlage der Welle eingestellt wird. Die untere Lagerschale ist, nachdem man sie entlastet hat, herausdrehbar. Die Lagermittelpunkte der Niederdruck-Turbine sind, um der **Durchbiegung der Welle Rechnung zu tragen, von Anfang an 0,4 mm über die Mittelachse gehoben.** Fest eingebaute Meßvorrichtungen zeigen die Lage der Welle jederzeit an. Die Temperatur jedes Lagers wird durch je ein Fernthermometer (System Fourrier) angezeigt. Die Hohlräume der Unterschalen werden von Kühlwasser durchströmt. Auch zur Feststellung der axialen Lage der Turbine ist eine ständige Meßvorrichtung am vordern Deckel des Drucklagers eingebaut. Das Absperrventil dient zugleich als Schnellschluß. Kugelstopfbüchsen gestatten der Rohrleitung allen Ausdehnungen zwanglos zu folgen. Hinter dem Hauptmanövrierventil verzweigt sich der Dampfstrom in 5 Düsengruppen, die mit wachsender Belastung der Reihe nach geöffnet werden. **Bei plötzlichem Stoppen** der Maschine wird **der überschüssige Dampf durch besondere Leitung in den Kondensator geführt.** Der Sicherheitsregler, der insbesondere beim Bruche einer Schraubenwelle oder Verlieren einer Schiffsschraube in Wirksamkeit zu treten hat, ist im Drucklager der Hochdruckturbine eingebaut. Er öffnet, sobald die Umlaufszahl auf 420 in der Minute gestiegen ist, einen Steuerschieber, der Frischdampf auf den federbelasteten Steuerkolben des Schnellschlußventiles treten läßt, wodurch das Ventil heruntergedrückt wird.

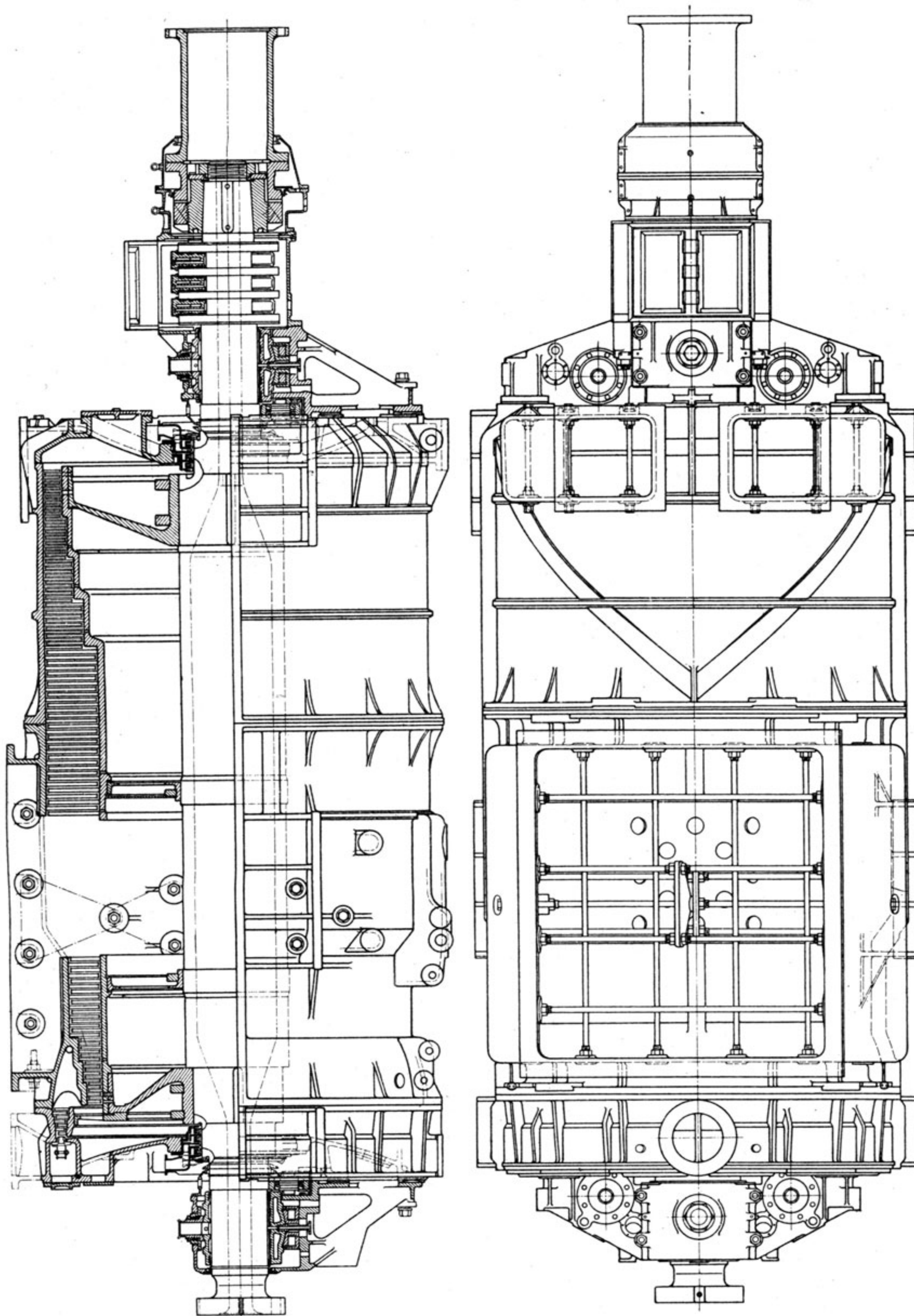


Abb. 835a. Niederdruckteil zu Abb. 835.

140. Die Schiffsturbine von Zoelly.

Die Schiffsturbine von Zoelly hat die Umwandlung von der langsam laufenden, unmittelbar gekuppelten Turbine zum Schnelläufer mit Zahnradübersetzung ebenfalls durchgemacht. Abb. 836 veranschaulicht die gewählte Lösung für eine Anlage von 11000 WPS.

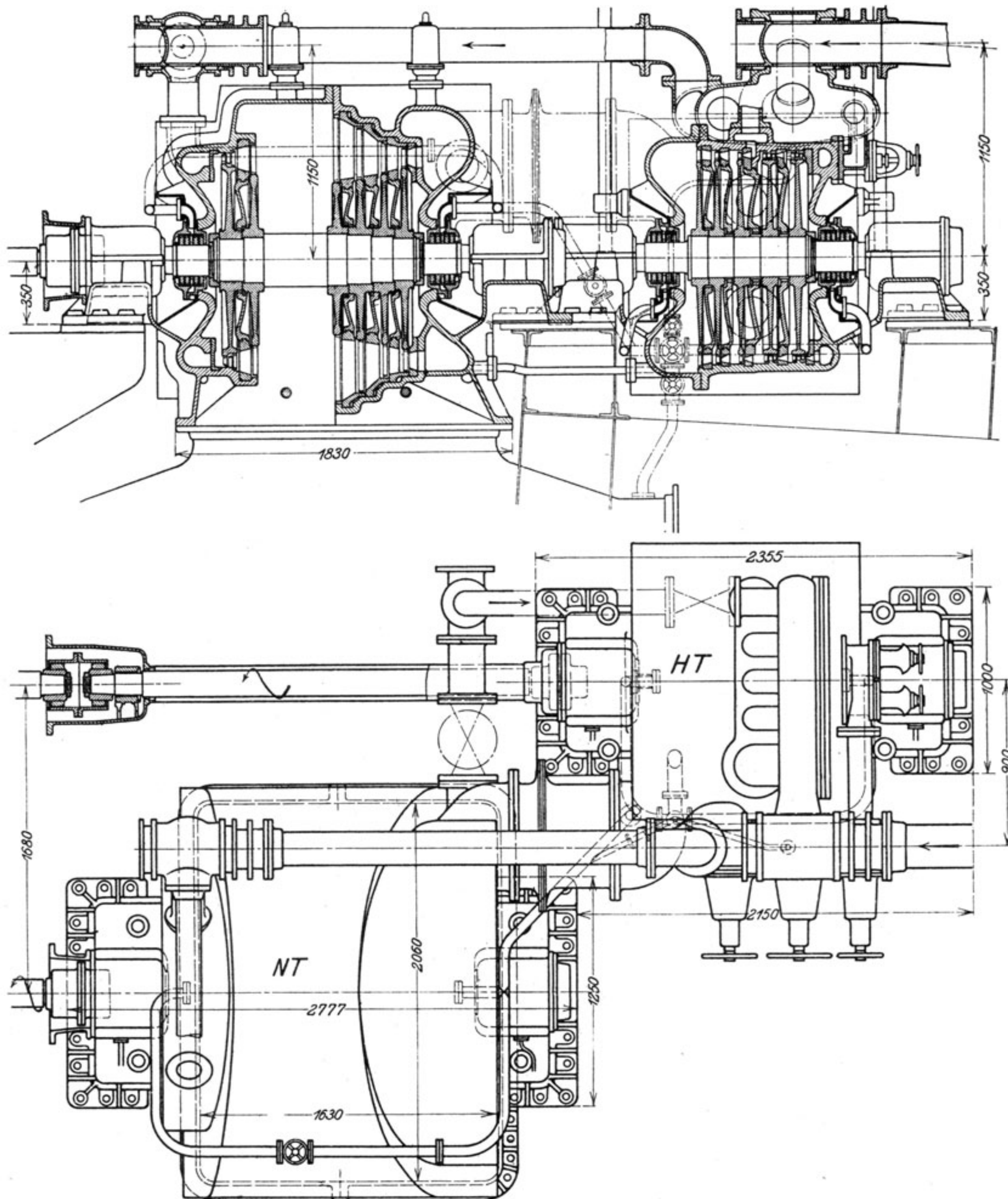


Abb. 836. Schiffsturbine von Zoelly.

Die Turbine wird in einen Hochdruckteil *HT* und einen Niederdruckteil *NT* getrennt, die je einen Ritzel eines einfachen Zahnradvorgeleges treiben, wobei für angestrengte Fahrt eine Übersetzung von 3250/400 Umdr./min vorgesehen ist. Die für 16 at Üb. gebaute Hochdruck-Vorwärtsturbine besteht aus 2 zweikränzigen Curtisrädern und 3 einfachen Druckstufen. Die Niederdruck-Vorwärtsturbine enthält 4 einfache Druckstufen. Die zweikränzigen Räder der Hochdruckturbine dienen bloß für die Marschfahrt, und zwar sind nach Abb. 836b folgende Schaltungen vorgesehen.

Marschfahrt. Beaufschlagt wird die erste Druckstufe, Ventile ABD sind geöffnet, C geschlossen, a oder b oder beide zusammen geöffnet. Der Abdampf der Hilfsmaschine wird zur ersten Druckstufe

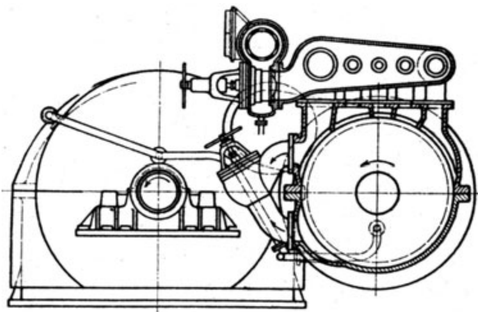


Abb. 836a. Schnitt durch den Hochdruckteil

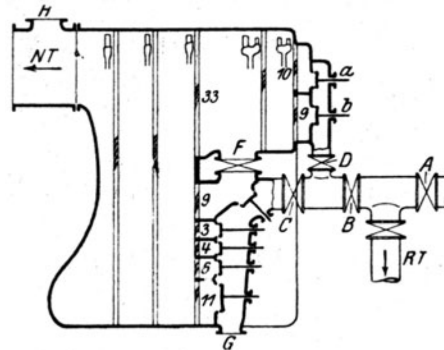


Abb. 836b. Schaltungen zu Abb. 836.

bei G eingeleitet und von den Nachbargruppen nach Bedarf eine oder mehrere geöffnet (die eingeschriebenen Zahlen bedeuten die zugehörige Düsenzahl). Es kann auch das Öffnen von F erforderlich werden, um dem Frischdampf die erforderliche Beaufschlagungsbreite zu beschaffen.

Volle Fahrt. Die Marschstufen werden überbrückt, so daß D geschlossen, C geöffnet, F geschlossen und je nach der Leistung eine Anzahl der Nebengruppen geöffnet sind.

Angestrengte Fahrt. Neben C wird F geöffnet. Der Abdampf der Hilfsmaschinen wird bei H in die Verbindungsleitung zur Niederdruckturbine eingeführt. RT ist die Frischdampfleitung zur Rückwärtsturbine.

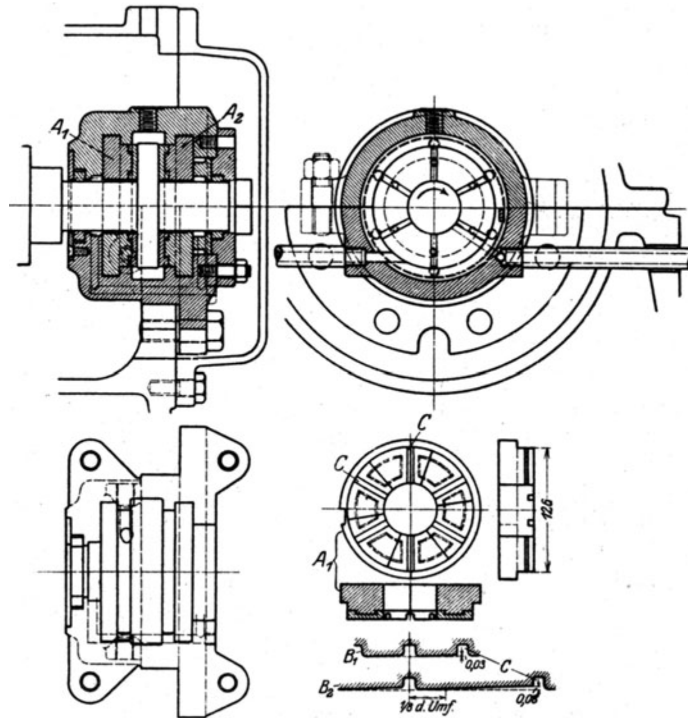


Abb. 837. Drucklager zu Abb. 836.

Von den Einzelheiten sind, insofern sie von denjenigen der ortsfesten Zoellyturbinen abweichen, folgende zu erwähnen. Die Scheidewände zwischen den Druckstufen bestehen aus kugelförmigen Stahlgußböden, die in einem Stück ausgeführt sind. Die getrennt gegossenen Leitschaufelkränze sind in der wagerechten Mittelebene geteilt. Das Drucklager der Turbine Abb. 837 ist nach dem Vorbild der Spurlager der hydraulischen Turbinen von Escher, Wyss & Cie. mit festliegenden Spurplatten $A_1 A_2$ versehen, die, wie die Abwicklung bei $B_1 B_2$ für den Innen- bzw. Außendurchmesser zeigt, mit sechs Nuten C versehen sind, durch die das Schmieröl den Zugang findet. Die dazwischen vorhandenen Tragflächen werden auf der Innenseite um 0,03, auf der Außenseite um 0,08 mm abgeschrägt. Je $^1/_8$ des Umfanges bleibt unberührt und soll für den ersten Augenblick des Anfahrens als Tragfläche dienen. Die so vorgesehene keilige Ölschicht ruft eine Drucksteigerung des Schmiermittels hervor, die nach der Reynoldsschen Theorie zu beurteilen ist. Die Gewährleistung lautet für 16 at Überdruck bei gesättigtem Dampfe für die Marschfahrt mit 10 Düsen von 600 bis 1050 PS 8,16 sinkend auf 6,8 kg/PS-st. Desgleichen mit 19 Düsen von 1050 bis 2500 PS 7,7 sinkend auf 6,35 kg/PS-st; für volle Fahrt mit 13 Düsen und 2500 PS anfangend bis 11000 PS von 7,9 sinkend bis 5,1 kg/PS-st. Angestrengte Fahrt bei 12500 PS 5,45 kg/PS-st.

VIII. Turbinen für Sonderzwecke.

141. Die Abdampfturbine.

Es gibt insbesondere im Berg- und Hüttenwesen Auspuffmaschinen, die infolge der besonderen Betriebsanforderungen zeitweilig stillstehen und während der Betriebsperioden mit großer Füllung arbeiten müssen. Den ungewöhnlich hohen Dampfverbrauch derselben hat man durch Einführung der Verbundwirkung und der Kondensation herabzusetzen getrachtet. Erstere bedeutet indes eine Erschwerung der Handhabung der Maschine, letztere nützt wegen des hohen Enddruckes der Ausdehnung nur einen kleinen Teil der Arbeitsfähigkeit des Dampfes aus. Es gebührt Rateau das Verdienst, erkannt zu haben, daß die Belassung des Auspuffbetriebes und Aufnahme des Dampfes in einer mit Kondensation arbeitenden Turbine weit mehr Arbeitsausbeute verspricht.

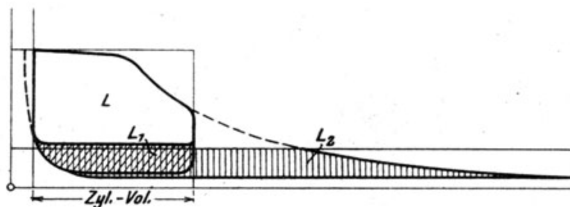


Abb. 838. Leistungsgewinn durch Abdampfturbinen.

In der Tat gewinnen wir durch die Kondensation bei unverändertem Zylinderinhalt nach Abb. 838 nur die Arbeitsfläche L_1, während die Überleitung in eine Turbine einer Fortsetzung der Ausdehnung bis auf den Gegendruck entspricht, daher als Gewinn die Fläche L_2 ergibt. Für diese darf obendrein das Vakuum, weil leicht erreichbar, weit tiefer angesetzt werden als für die Kolbenmaschine.

Die Schwierigkeit, daß wegen zeitweilig unterbrochenen Betriebes der vor allem in Betracht kommenden Fördermaschinen und Walzenzugsmaschinen die Abdampfturbine in den Pausen ohne Triebmittel bliebe, wurde von Rateau durch die Aufstellung eines Wärmespeichers überwunden. Dieser besteht aus einem zwischen Fördermaschine und Turbine eingeschalteten Hohlgefäß, dessen Wasserinhalt den eintretenden Abdampfüberschuß kondensieren soll, während in den Pausen umgekehrt die eintretende Druckerniedrigung eine Verdampfung mit Hilfe des aufgespeicherten Wärmevorrats veranlaßt.

Theorie des Wärmespeichers mit Niederschlag und Wiederverdampfung.

Es bedeute:

dG_1 das während des Zeitelementes dz in den Wärmespeicher eintretende Dampfgewicht mit dem Zustand p_1, t_1, x_1, i_1;
dG_2 desgleichen die austretende Menge mit dem Zustande p_2, t_2, x_2, i_2;
G_0 das Wassergewicht des Wärmespeichers;
$dG_0 = dG_1 - dG_2$ die Zunahme des Gewichtes.

Die eintretende Energie beträgt $dG_1 i_1$, die austretende Energie $dG_2 i_2$.

Die Zunahme der Eigenenergie des Wärmespeichers ist $d(G_0 q)$, wo q die Flüssigkeitswärme bedeutet.

Indem man die kinetische Energie des strömenden Dampfes vernachlässigt, liefert der Energiesatz die Beziehung

$$i_1 dG_1 = i_2 dG_2 + d(G_0 q) \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

In dieser Gleichung müßte bekannt sein, um wieviel sich die Temperatur des Wasserinhaltes von der Temperatur des eintretenden Dampfes unterscheidet. Je inniger die Durchdringung und Durchmischung der beiden stattfindet, um so kleiner ist der Unterschied.

In Ermangelung genauer Erfahrungswerte begnügen wir uns mit einer Annäherung, indem wir $t_1 = t_2 =$ der Temperatur des Wärmespeichers setzen. Dann kann man Gl. (1) in der Form

$$i(dG_1 - dG_2) = G_0 dq + (dG_1 - dG_2) q$$

oder mit $r = i - q$ als Verdampfungswärme:

$$r(dG_1 - dG_2) = G_0 dq \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

schreiben. Die Änderung dq ist angenähert $= cdt$ oder $= dt$, und so kann aus Gl. (2) die Temperatur-, daher auch die Druckzunahme des Wärmespeichers berechnet werden, falls die übrigen Größen bekannt sind.

Es möge nun der intermittierende Betrieb von der einfachen Beschaffenheit sein, daß während z_1 Sekunden das sekundliche Gewicht G_1 dem Behälter zugeführt wird, während z_2 Sekunden aber keine Lieferung vorhanden ist. Die Entnahme möge unveränderlich G_2 kg/sek betragen. Im Beharrungszustand ist

$$G_1 z_1 = G_2 (z_1 + z_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

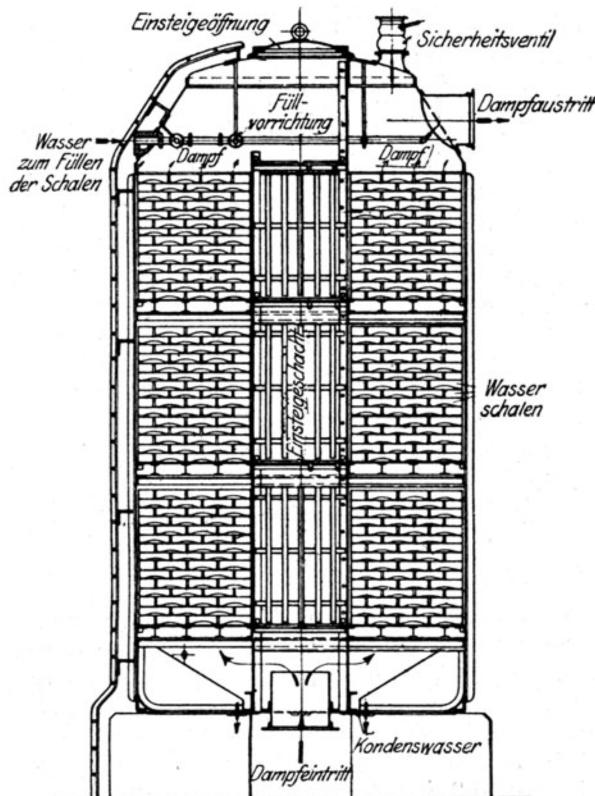


Abb. 839. Wärmespeicher mit Wasserbehältern.

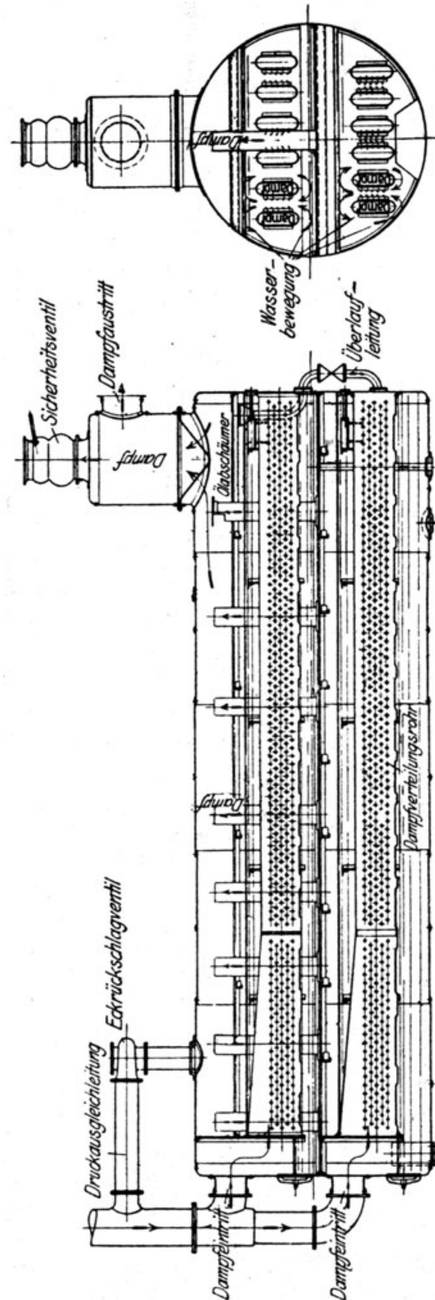


Abb. 840. Wärmespeicher mit doppeltem Wasserraum.

und dient zur Bestimmung von G_2. Die größte Temperatur- und Druckänderung ermittelt man leicht mit Hilfe von Gl. (2), wenn man sich die weitere Annäherung erlaubt, auf der linken Seite für r einen Mittelwert r_m einzuführen. Dann ist für das Ende der Periode z_1

$$r_m (G_1 - G_2) z_1 = G_0 (q_2 - q_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Ist G_0 gegeben, so kann $q_2 - q_1$, also auch die Druckzunahme berechnet werden; umgekehrt wird aus einem vorgeschriebenen Druckunterschied der Wert $q_2 - q_1$ also aus (4) der Wasserinhalt G_0 zu ermitteln sein.

Nach einer Druckschrift der A.-G. Balcke, Bochum, beträgt bei einem praktisch zugelassenen Druckunterschied von 0,2 at der Temperaturunterschied 4°C, während sich theoretisch 5°C ergeben. Die Temperatur würde also um bloß 1°C dem Drucke nacheilen.

Die Konstruktion des Wärmespeichers von Rateau.

Nach Abb. 839 und 840 besteht der Wärmespeicher in der Ausführung der A.-G. Balcke entweder aus einer großen Zahl von mit Wasser gefüllten flachen Gefäßen, die vom Dampf

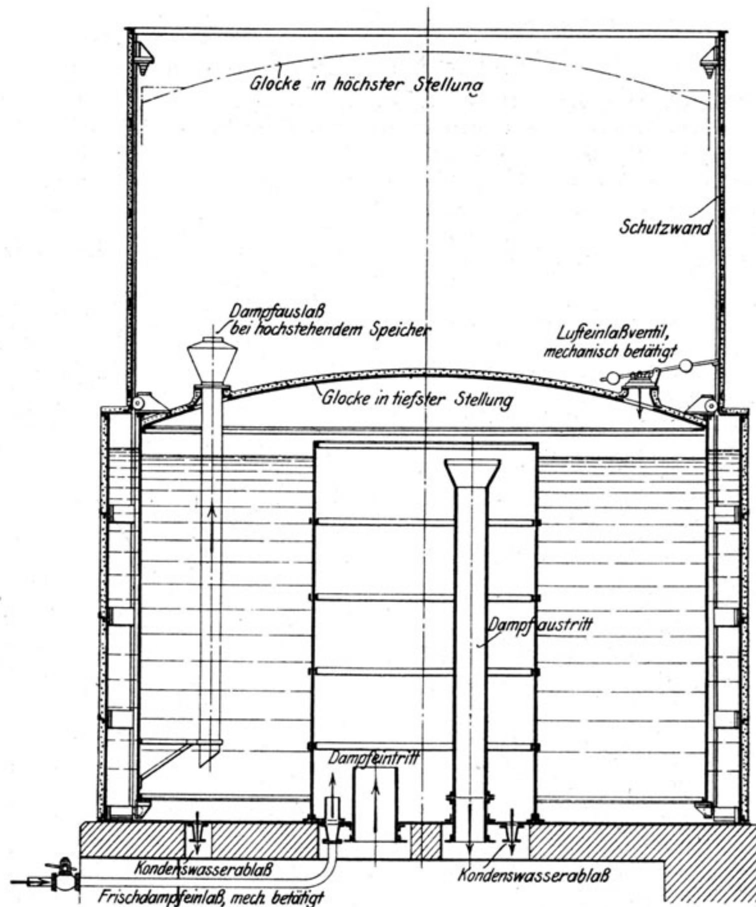


Abb. 841. Glockenspeicher nach Harlé-Balcke.

umspült werden, oder aus einem Zylinderkessel, dessen Wasserraum durch mehrere durchlochte Röhren durchsetzt wird, wobei der austretende Dampf zugleich das Wasser in starke Wallung bringt und so für gute Durchmischung sorgt. Der Mindestdruck des Abdampfes beträgt der Wassertiefe entsprechend 0,05 bis 0,1 at. Der Kessel ist durch eine wagerechte Mittelwand geteilt, damit die Wassertiefe nicht zu groß wird.

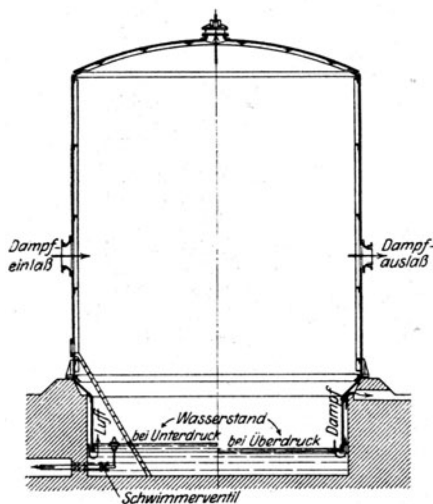


Abb. 842. Raumspeicher.

Der Glockenspeicher speichert den Dampf als solchen durch Anheben der bekannten schwimmenden Glocke auf. In der Ausführung Abb. 841 nach Harlé-Balcke erkennt man, daß die Glocke von einer besonderen mit schlechten Wärmeleitern umhüllten Schutzwand umgeben ist. Die innere Wasserfüllung kann bis auf einen schmalen Ringraum, der abdichtet, vermindert werden. Sie wird dann etwa durch Öl ersetzt, das bei wesentlich höherem Siedepunkt auch nur wenig verdunstet.

Der Raumspeicher besteht nach Abb. 842 in der Ausführung von Balcke in einem unbeweglichen Blechgefäß (mit Wasserabschluß, als Sicherung gegen Unter- oder Überdruck), dessen Größe so bemessen wird, daß der periodisch aufzuspeichernde Dampfüberschuß auf eine Verdichtung von nicht mehr als 0,2 at führt.

Die Zustandsänderung darf man bei gutem Wärmeschutz als adiabatisch ansehen, so daß für den Anfang und das Ende der Verdichtung

$$p_1 v_1^k = p_2 v_2^k \qquad (5)$$

mit $k = 1{,}135$ gilt. Daraus folgt das Verhältnis der eingeschlossenen Gewichte

$$\frac{G_2}{G_1} = \left(\frac{V}{v_2}\right) : \left(\frac{V}{v_1}\right) = \frac{v_1}{v_2} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Oder wenn man $G_2 - G_1 = \Delta G$; $p_2 - p_1 = \Delta p$ setzt angenähert:

$$\frac{\Delta G}{G_1} = \frac{1}{k}\frac{\Delta p}{p_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Die Frisch- und Abdampfturbine.

Reine Abdampfturbinen bieten zu keinen Bemerkungen Anlaß, kommen auch praktisch wenig vor, da die Dampflieferung in den Hüttenwerken und anderwärts eine zu unregelmäßige zu sein pflegt, um selbst mit Wärmespeicher einen befriedigenden Betrieb zu ermöglichen.

Um die Unabhängigkeit der Kraftabgabe von der Abdampfmenge zu erreichen, muß der Abdampfturbine eine mit Kesseldampf betriebene „Frischdampf"turbine vorgeschaltet werden, die zur Zeit des Abdampfmangels den Fehlbetrag ausgleicht. Diese heute allgemein verbreitete Verbindung wird auch „Zweidruck"- oder „Mischdruck"- oder „gemischte" Turbine genannt. Sie arbeitet mit Abdampf allein, wenn dieser in genügender Menge vorhanden ist, oder mit Frischdampf allein, oder „gemischt". Mit Rücksicht auf die Steuerung des Abdampfzuflusses können drei Arten unterschieden werden:

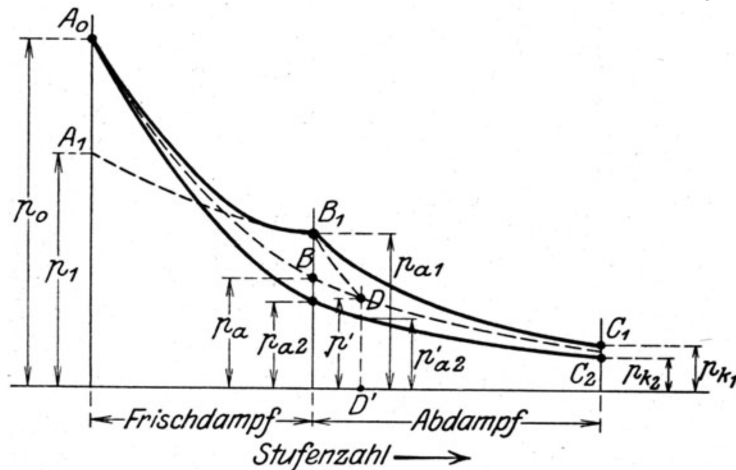


Abb. 843. Druckverlauf der Abdampfturbine in Abhängigkeit von der Stufenzahl.

1. Frisch- und Abdampf **mischen** sich vor dem 1. Niederdruckleitrad. Dabei kann α) der Abdampf durch ein **Drosselventil** vor der Turbine gesteuert werden, wodurch bei Teillast der Druck vor dem Niederdruckteil sinkt, — β) es kann am 1. Niederdruckleitrad Mengenregelung mittels Einzelventilen vorhanden sein, so daß der Druck sich nur unwesentlich ändert.

2. Die erste Niederdruckstufe hat getrennte Beaufschlagung für Frisch- und Abdampf, wobei wieder Drossel- oder Mengenregelung in Betracht fallen (Ausführung der Allgem. Elektrizitäts-Gesellschaft Berlin und der Maschinenfabrik Oerlikon).

3. Die erste Niederdruckstufe wird bloß vom Abdampf beaufschlagt; der Frischdampf wird durch einen Umgehungskanal auf das 2. Leitrad geleitet, wo er mit dem Abdampf zusammentrifft (Ausführung der Allgem. Elektrizitäts-Gesellschaft Berlin).

Wärmetheorie der Turbine 1. Art.

Je nach Turbinen- und Regelungsart sind die Verhältnisse verschieden. Wir setzen für Frischdampf Düsengruppenregelung für Abdampf nach 1 α) reine Drosselung voraus. In jedem Fall sind die Hauptbetriebsfälle herauszugreifen und getrennt zu untersuchen, und zwar:

I. Höchstleistung N_{max} unter Benützung der größten verfügbaren Abdampfmenge G_{a1} kg/st. Diese kann hinreichend sein oder nicht; letzterenfalls wird eine Frischdampfmenge G_{f1} kg/st hinzuzufügen sein.

II. Höchstleistung mit Frischdampf allein G_{f2} kg/st.

III. Normalleistung mit Frischdampf.

Abb. 843 stellt den Verlauf der Spannung in Abhängigkeit von der Stufenzahl, Abb. 843a die J-S-Kurven dar. $A_0 B_1 C_1$ bezieht sich auf Fall I, wobei p_{a1}, d. h. die höchste vorhandene Abdampfspannung voll ausgenützt werden muß. $A_0 C_2$ entspricht dem Fall II,

wobei, da durch den Niederdruck eine kleinere Dampfmenge $G_{f2} < G_{f1} + G_{a1}$ strömt, $p_{a2} < p_{a1}$ sein wird.

Im Entropieschaubild ist B_{f1} das Ende der Ausdehnung im Hochdruck für den Fall I, B_{a1} der gegebene anfängliche Abdampfzustand. Die Mischung der Dampfmengen ergibt den Zustand B_1 gemäß der Energiegleichung

$$G_{f1} i_{f1} + G_{a1} i_{a1} = (G_{f1} + G_{a1})\, i_1 \quad \text{. . . . . (8)}$$

(wobei i_{f1} sich auf den Zustand mit schon vernichteter Auslaßenergie bezieht und die Strömungsenergie des Abdampfes vernachlässigt ist). $B_1 C_1$ ist die Ausdehnung im Niederdruck auf den vorgeschriebenen Kondensatordruck p_{k1}. $A_0 B_2 C_2$ bezieht sich auf G_{f2} und p_{k2}, wobei p_{a2} noch unbekannt ist. Diese Ausdehnungslinien müssen vorläufig auf Grund vorhergehender Erfahrung (Proberechnung), oder einfach unter Abschätzung der Wirkungsgrade angenommen werden, und dienen zur Bestimmung der inneren Wärmegefälle. Wenn die Endpunkte auf den Zustand mit vernichteter Auslaßenergie bezogen werden, so erhält man im Hoch- und Niederdruckteil die Gefälle

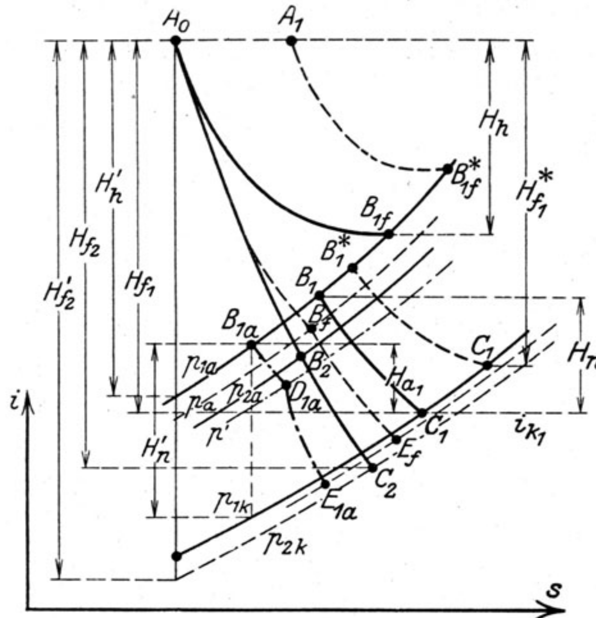


Abb. 843a. J-S-Schaubild zu Abb. 843.

$$H_h = i_0 - i_{f1} \quad \text{. . . (9)}$$

$$H_n = i_1 - i_{k1} \quad \text{. . . (10)}$$

Hieraus folgt die Energiegleichung für die ganze Turbine bezogen auf die stündliche Leistung

$$G_{f1} H_h + (G_{f1} + G_{a1}) H_n = 632\, N_{i\,max} \quad (11)$$

Man könnte auch die Anfangszustände A_0 und B_1 unmittelbar mit dem Endzustand C_1 vergleichen und die Gefälle $H_{f1} = i_0 - i_{f1}$, $H_{a1} = i_{a1} - i_{k1}$ einführen. Man leitet die neue Energiegleichung aus (11) ab, indem man die Werte (9), 10) einsetzt und von Gl. (8) Gebrauch macht. Dann entsteht Gl.

$$G_{f1} H_{f1} + G_{a1} H_{a1} = 632\, N_{i\,max} \quad \text{. . . . . (12)}$$

die auch unmittelbar einleuchtet.

Die Energiegleichung für den Fall II lautet

$$G_{f2} H_{f2} = 632\, N_{i\,max} \quad \text{. . . . . (13)}$$

Für den ersten Entwurf wird man die Wirkungsgrade einschätzen, und erhält mit Einführung der adiabatischen Gefälle gemäß Abb. 843a

$$H_h = \eta_h H_h'; \quad H_n = \eta_n H_n'; \quad H_{f2} = \eta_{f2} H_{f2}' \quad \text{. . . . . . . (14)}$$

Gl. (11) und (13) dienen zur Berechnung von G_{f1}, G_{f2}, da G_{a1} im allgemeinen gegeben sein wird.

Der unbekannte Druck p_{a2} folgt gemäß dem Gesetz des unveränderlichen Verhältnisses zwischen Anfangsdruck und Gewicht, aus

$$\frac{p_{a2}}{p_{a1}} = \frac{G_{f2}}{G_{f1} + G_{a1}} \quad \text{. . . . . (15)}$$

Nun werden die Querschnitte der Hochdruckseite offenbar für das durch sie strömende größte Gewicht G_{f2} und das Druckgefälle $p_0 - p_{a2}$, die der Niederdruckseite für das Gewicht $G_{f1} + G_{a1}$ und das Gefälle $p_{a1} - p_{k1}$ zu rechnen sein. Da es sich um die Höchstleistung handelt, wird man das Verhälnis u/c_1 entsprechend kleiner wählen, so daß bei der Normalleistung der gewünschte beste Wert herauskommt. Im Falle I arbeiten die letzten Stufen des Hochdruckteiles ungünstig, weil die Querschnitte viel zu groß sind; ähnlich, wenn auch nicht in gleichem Maße, die letzten Stufen des Niederdruckes im Falle II. Im

Fall III, d. h. der Normalleistung, wird sich ein Zwischendruck p_a einstellen, der ebenso wie der Druck- und Zustandsverlauf durch stufenweise Proberechnungen zu ermitteln ist. Man berechnet zu diesem Zwecke das sekundliche Gewicht $G_{f3} = 632\, N_{in}/\eta_{in}$ mit einem geschätzten η_{in}, nimmt den Druck nach dem 1. und 2. Leitrad der Dampfmenge verhältnisgleich an und rechnet mit der sich ergebenden Geschwindigkeit den 2. Leitradquerschnitt aus. Ist dieser kleiner als der gegebene, so war (bei Unterschallgeschwindigkeit) das Gefälle zu groß angenommen. Aus dem 2. Probeergebnis wird man den richtigen Wert durch Interpolation genügend genau ermitteln.

Bei **reiner Drosselung im Hochdruckteil** wird im Falle I die Anfangspressung auf den kleineren Betrag $p_1 = OA_1$ (Abb. 843) herabgesetzt. Dieser unbekannte Druck steht mit dem ebenfalls unbekannten Gewicht G_{f1} angenähert im Verhältnis

$$\frac{p_1}{G_{f1}} = \frac{p_0}{G_{f2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Will man genauer verfahren, so ist das Gesetz des Dampfkegels Abschn. 67 heranzuziehen. Die Lösung kann offenbar nur auf dem Wege graphischer Interpolation gewonnen werden. Man würde auf der Linie $i_0 =$ konst., auf der der Zustand A_1 liegen muß, einige Punkte annehmen, und aus dem abzulesenden p_1 nach (16) oder dem (auf Grund vorhergehender Erfahrungen zu entwerfenden) Dampfkegel G_{f1} ermitteln. Mit dem geschätzten Wirkungsgrad ergibt sich $B_{1f}{}^*$ und mit Gl. (8) B_1 daraus C_1. Die Annahmen sind so lange abzuändern, bis die Gl. (11) erfüllt ist.

Vollends verwickelt wird die Sache, wenn man, wie bei Drosselung üblich, für die Höchstleistung ein zur 2. oder 3. Stufe führendes Zusatzventil öffnet, so daß in der Drucklinie ein Knick entsteht. Doch wird man sich durch sinngemäße Erweiterung des oben erläuterten Verfahrens bald zurechtfinden.

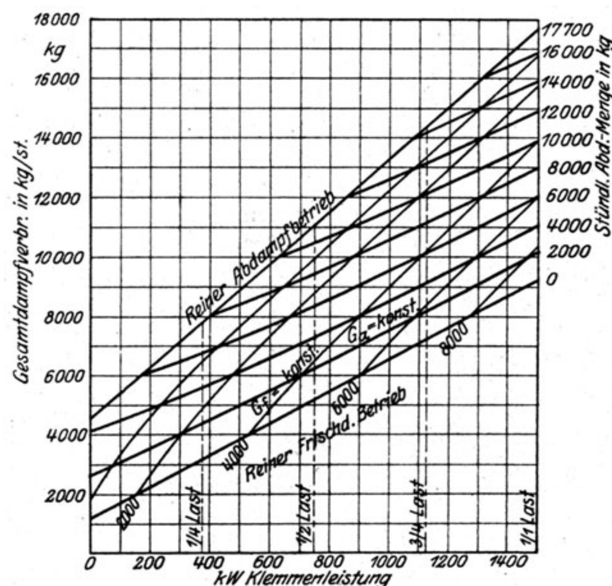


Abb. 843b. Dampfverbrauch einer Mischdruckturbine von Bergmann.

Darstellung des Dampfverbrauches.

Für eine beliebige Zwischenleistung von N_i PS wird nach dem Energiesatz, ähnlich wie Gl. (11), wenn man abkürzend $H = H_h + H_n$ setzt:

$$G_f H + G_a H_n = 632\, N_i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Löst man nach G_f auf, so ergibt sich die gesamte stündlich verbrauchte Dampfmenge

$$G_t = G_f + G_a = \frac{632\, N_i}{H} + G_a \frac{H_h}{H} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Schreiben wir $N_i = N_e + N_r$, so kann die Gesamtdampfmenge als Abhängige von N_e und der jeweiligen verbrauchten Abdampfmenge G_a dargestellt werden, wie beispielsweise Abb. 843b für eine Zweidruckturbine der Bergmann Elektrizitätswerke für 1500 kW. bei $n = 1500$, i. d. Min. und 12 at. 300° C Anfangszustand für den Frischdampf 1,2 at abs. für den Abdampf, 0,05 at abs. Luftleere veranschaulicht. Ebensogut kann man aus Gl. (17) G_a in Gl. (18) einschieben, woraus sich

$$G_t = \frac{632\, N_i}{H_n} - \frac{H_h}{H_n} G_f \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18\text{a})$$

mit den Kurven G_f = konst. als Parameter, die in Abb. 843b ebenfalls eingetragen sind, ergibt. Die Grenze für beide Darstellungen bildet die Linie reinen Frischdampf-, bzw. reinen Abdampfbetriebes. Wie ersichtlich, ist der Leerlaufverbrauch bei letzterem erheblich größer, als bei ersterem, was in der Hauptsache an der Ventilationsarbeit der leer umlaufenden Hochdruckräder gelegen ist.

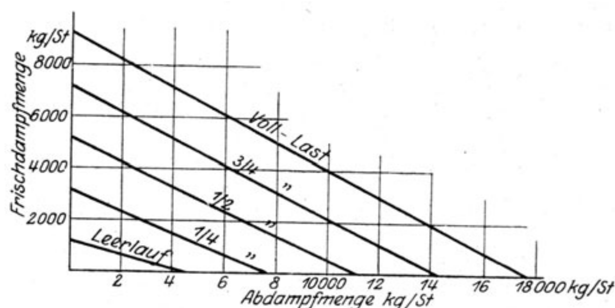


Abb. 843c. Dampfverbrauch und Linien gleicher Leistung.

Schließlich kann man bei gegebenen Werten von N_i die Frischdampfmenge G_f als Abhängige der Abdampfmenge nach Gl. (17)

$$G_f = \frac{632\,N_i}{H} - G_a\frac{H_n}{H} = \frac{632\,(N_r + N_e)}{H} - G_a\frac{H_n}{H} \quad (19)$$

auftragen, wie Abb. 843c veranschaulicht. Diese Darstellungen werden beim Entwurf der Regelung mit Vorteil benützt.

Wenn die 1. Niederdruckstufe nach 1,β) mit einer **Gruppen-** (d. h. **Mengen-**) **Regelung** versehen wird, so kann die Drosselung des Abdampfes bei kleineren Leistungen, wie sie in Abb. 843 durch den Abfall von p_{a_1} auf p_a dargestellt ist, vermieden werden, indem man die Beaufschlagung so weit verringert, daß sich als Anfangsdruck stets p_{a_1} (oder ein davon wenig verschiedener Druck) einstellt.

Wärmetheorie der Turbine 2. Art.

Hier empfiehlt sich für den Abdampf stets die Mengenregelung, so daß ein fast unveränderlicher Abdampfdruck p_{a_1} aufrechterhalten werden kann. Der für Höchstleistung erforderliche zusätzliche Frischdampf darf mit einer kleineren Spannung z. B. p_a vor dem 1. Niederdruckrad ankommen, und expandiert darin auf den Druck p'. Von da an sind die Drücke für Frisch- und Abdampf jeweils gleichgroß, und die Querschnitte die Summe der für Frisch- und Abdampf benötigten Ausmaße. Im J-S-Schaubild Abb. 843a geht die Entspannung des Frischdampfes nach Linie $A_0 B_f E_f$, diejenige des Abdampfes nach Linie $B_{1a} D_{1a} E_{1a}$ vor sich; aus diesen sind die Gefälle in Gl. (12) sinngemäß abzugreifen. An Stelle von p_{a_1} und p_{a_2} in Gl. (15) treten nun p' und p'_{a_2} in Abb. 843. Hinter dem 1. Niederdruck-Laufrad ist ein genügend großer Raum vorzusehen, damit bei Betrieb mit reinem Frischdampf dieser ohne Drosselung sich längs des ganzen 2. Niederdruck-Leitrades ausbreiten könne. Da Frisch- und Abdampf in örtlich getrennten zusammenhängenden Strahlen auf das 1. Niederdruckrad treffen, wird in der Niederdruckturbine bloß eine unbedeutende Vermischung der beiden stattfinden, was als Vermeidung einer Nichtumkehrbarkeit einen wenn auch nur kleinen Gewinn bedeutet.

Die Hauptveranlassung zur Einführung dieser Turbinenart scheint im übrigen der bei der gewöhnlichen Art auftretende Übelstand gewesen zu sein, daß bei reinem Abdampfbetrieb die Hochdruckseite in Dampf von mindestens atmosphärischem Drucke umläuft und infolge der **als Wärme auftretenden Lüftungsarbeit, die nicht abgeleitet werden kann, gefährlich hohe Temperaturen annehmen kann.** Diese Gefahr wird hier durch die Erniedrigung der Spannung im Hochdruckteil auf den Wert p' in Abb. 843 merklich vermindert.

Die Wärmetheorie der Turbine 3. Art

wird auf Grund obiger Erörterungen sinngemäß zu entwickeln sein.

142. Die Regelung der Frisch- und Abdampfturbine.

Wenn bei kleiner Abdampflieferung und großer Leistungsforderung der Speicher durch die Turbine leergesaugt würde, wäre er der Gefahr der Einknickung durch äußeren Überdruck ausgesetzt, anderseits würde durch undichte Fugen Luft eindringen und das Vakuum verschlechtern. Dies muß unbedingt verhütet werden; außerdem ist die Zufuhr des Abdampfes der Leistung anzupassen. Jede Abdampfturbine ist daher außer dem Drehzahlregler mit einem zweiten Regelorgan zu versehen, das vom verfügbaren Abdampfvorrat, bzw. der sekundlich zufließenden Menge desselben beeinflußt wird. Bis jetzt benützt man als wirksames Mittel vorzugsweise bei Wärme- oder Druckspeichern den Speicherdruck, bei Glockenspeichern den Glockenstand.

An die Steuerung sind folgende Anforderungen zu stellen:

1. Bei zunehmender Belastung muß, soweit der Vorrat reicht, zuerst der Abdampf, und erst wenn dieser nicht hinreicht, der Frischdampf zur Arbeitsleistung herangezogen werden. Bei der Abnahme der Leistung muß umgekehrt zuerst der Frischdampf, darauf der Abdampf abgeschaltet werden.

2. Bleibt die Leistungunveränderlich, so soll bei abnehmender Abdampfmenge der selbsttätige Druckregler den Abdampfzufluß verkleinern, den Frischdampfzufluß vergrößern, und zwar so, daß die Geschwindigkeit der Turbine, d. h. die Stellung des Fliehkraftreglers sich nicht ändert.

Ein befriedigender Betrieb ist übrigens möglich, auch wenn diese Forderungen nicht dem Buchstaben nach erfüllt werden. Wenn z. B. im Gegensatz zu Forderung (1) der Drehzahlregler bei zunehmender Belastung beide Ventile gleichzeitig öffnet, so wird, falls dabei zu viel Abdampf verbraucht wird und Forderung (2) erfüllt ist, der Druckregler eingreifen und die richtige Ventillage herstellen.

Versuchen wir nun für die erste Hauptart einen die vollkommene Lösung bietenden **Erfindungsgedanken plangemäß zu entwickeln.** Den ersten Anhaltspunkt ergibt wohl die Betrachtung der 2. Forderung, die gleichbedeutend ist damit, daß während des gemischten Betriebes, falls das Abdampfventil sinkt, das Frischdampfventil steigen muß und umgekehrt. Da liegt das Bild eines Wagebalkens nahe, an dessen Enden die beiden Ventile herabhängen und an dem der Druckregler so angreift, daß bei Abnahme des Speicherdruckes die Abdampfseite herabgeht.

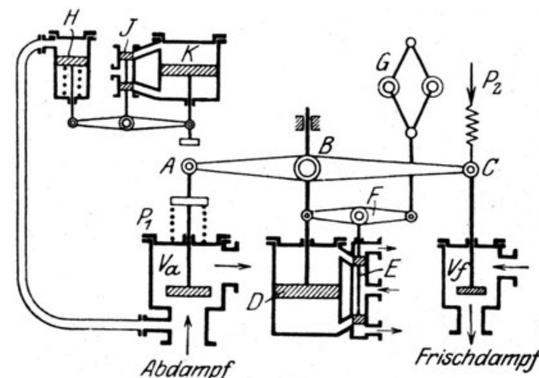


Abb. 844. Grundform der Frisch- und Abdampfregelung.

Wenn wir den Drehpunkt des Wagebalkens hinaufschieben, so werden je nach den Widerständen (dem „Gewicht“) die beiden Ventile gleichzeitig oder nacheinander geöffnet, also ist eine Möglichkeit geboten, die 1. Forderung auch zu erfüllen, indem wir an diesem Drehpunkt den Drehzahlregler angreifen lassen. Infolge der großen Kräfte, die zu überwinden sind, würde der Regler bei unmittelbarem Angriff unausführbar groß, also werden wir selbstverständlich zwischen ihn und den Angriffspunkt ein Kraftgetriebe einschalten, das vom Regler in gewohnter Weise beeinflußt, seiner Bewegung unmittelbar und eindeutig folgt. Auch die zum Verstellen der Balkenneigung erforderliche Kraft wird gewöhnlich durch Kraftgetriebe geliefert, so daß man als Druckregler einen kleinen Zylinder mit Kolben benutzen kann, auf dessen eine Seite der Speicherdruck, auf die andere eine Feder einwirken. Bei Glockenspeichern dient hierfür ein Bewegungselement beliebiger Art, dessen Verschiebung dem Hube der Glocke proportional ist.

Nachdem unsere Überlegung soweit gediehen ist, wird die Ausgestaltung im einzelnen unter Mithilfe einer Handskizze Abb. 844 leicht vollendet. Darin bedeutet AC den Wagebalken, B den Drehpunkt, an dem der Kraftkolben D angreift, der mittels Steuerschiebers E und des dreipunktigen Hebels F vom Drehzahlregler G beeinflußt wird. Der Druckregler wirkt vermöge des Kolbens H auf den Steuerschieber J und den zweiten Kraftkolben K. Die Verbindung zwischen Kraftkolben K und dem Abdampfventil V_a muß so beschaffen sein, daß wohl ein zu starkes Öffnen, nicht aber ein Schließen jenes Ventils durch den Fliehkraftregler verhindert wird. Daher wirkt der Kraftkolben K nur als Hubbegrenzung von A. Nun ist noch zu „erfinden“, auf welche Weise erzwungen wird, daß bei einer Leistungszunahme zuerst das Abdampf-, und erst wenn dieses die Hubbegrenzung nicht erreicht hat, das Frischdampfventil öffnet. Die Lösung ist in der Anschauung des Wagebalkens mit verschieden belasteten Wagschalen enthalten. Wir müssen das Frischdampfventil „schwerer“ oder das Abdampfventil „leichter“ machen, indem wir Gewichte oder wie in der Skizze die Federn $P_1 P_2$ einschalten. Dann bildet Punkt C bei geschlossenem V_f, sobald der Regler zu sinken, also B zu steigen beginnt, den festen Drehpunkt, bis A die Hubgrenze erreicht hat. Von da an ist A der feste Drehpunkt und C wird angehoben; beim Steigen des Reglers findet das Umgekehrte statt.

Dieser dem Grundsatze nach zuerst von Rateau angegebene Erfindungsgedanke kann in die verschiedenartigsten Formen eingekleidet werden. Eine Erschöpfung aller Möglichkeiten ist nicht von ferne denkbar; wir beschränken uns auf einige praktisch wichtige Ausgestaltungen.

a) Verlegen des Wagebalkens an die Umsteuerungsschieber der Kraftgetriebe.

In Abb. 844 wird die Bewegung des Abdampfventils durch einen starren die ganze Kraft aufnehmenden Hebel mit der Bewegung des Frischdampfventils gekoppelt. Es liegt auf der Hand, daß wir mit einem weit geringeren Aufwand an Material auskommen, wenn wir die entsprechende Koppelung zwischen den Umsteuerungsorganen der zugehörigen Kraftkolben herstellen. Wir benutzen also wieder einen zweiarmigen Wagebalken, allein so, daß das eine Ende davon den Steuerschieber des Abdampfventils, das andere Ende denjenigen des Frischdampfventils ergreift, Abb. 845; in der Mitte des Hebels greift wieder der Drehzahlregler an. Links ist das Kraftgetriebe des Abdampfventils V_a, rechts das Getriebe des Frischdampf-

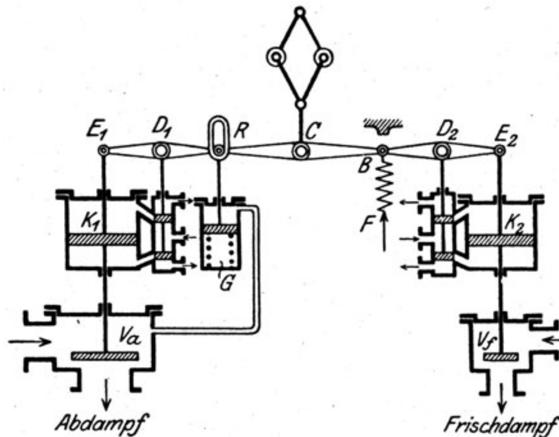


Abb. 845. Der Wagebalken greift an den Steuerschieberhebeln an.

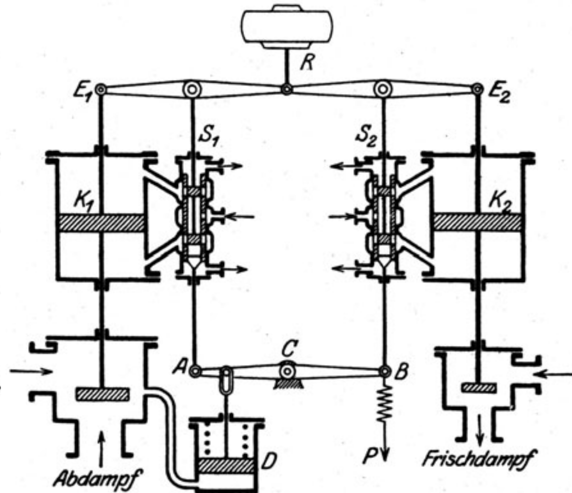


Abb. 846. Der Druckregler greift mittels Wagebalkens an Hülsen der Steuerschieber an.

ventils V_f. An den Kraftgetrieben rücken im Ruhezustand die Punkte $D_1\,D_2$ immer in die alte Lage zurück. Bliebe also RB wagerecht, so würde dem Steigen des Reglers ein gleichmäßiges Schließen beider Ventile entsprechen. Schalten wir die Druckfeder F ein, so wird diese stets bestrebt sein, das Frischdampfventil zu schließen. Beim Sinken des Reglers bildet B in seiner höchsten Stellung einen Drehpunkt, so daß beim Öffnen die Reihe zuerst an das Auslaßventil kommt. Der Druckregler G schiebt vermöge der angedeuteten Öse Punkt R bei sinkendem Abdampfdruck nach oben; um den entsprechenden Betrag wird das Abdampfventil geschlossen, das Frischdampfventil jedoch unter Überwindung der Gegenfeder F durch die Regulatorstellkraft geöffnet, wobei, falls die Verhältnisse richtig gewählt sind, der Regler seine Stellung nicht zu ändern braucht. Diese Lösung entspricht einer Ausführung der Gutehoffnungshütte.

b) Verlegung des Wagebalkens an die Hülsen der Steuerschieber.

Wie bekannt kann die Umsteuerung eines Kraftgetriebes gemäß Abb. 846a entweder dadurch stattfinden, daß der Steuerschieber S oder aber die ihn umgebende bewegliche Hülle von der Reglerkraft

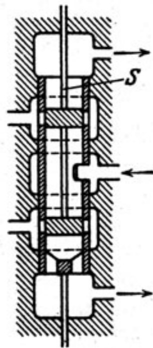


Abb. 846a zu Abb. 846.

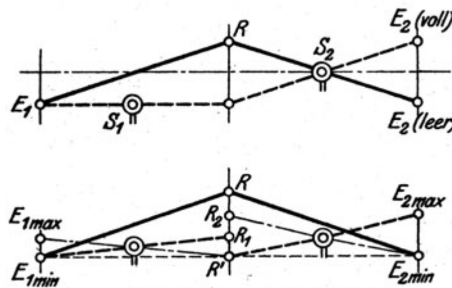


Abb. 846b zu Abb. 846.

bewegt wird. Führen die links angedeuteten Zuflüsse zur obern bzw. untern Seite eines Kraftkolbens, so wird ein Sinken jenes Kolbens ebensogut durch Erhebung des Schiebers als durch ein Sinken der Hülse bewirkt. Hieraus ergibt sich die in Abb. 846 dargestellte Lösung der Maschinenfabrik

Thyssen & Co.[1]). Wird am Wagebalken ABC Punkt A durch den Druckregler gesenkt, so bewegt sich Kolben K_1 nach abwärts, K_2 nach aufwärts. Dadurch wird vermöge der Hebel E_1R, E_2R eine Rückführung der Steuerschieber vermittelt; das Abdampfventil schließt, das Frischdampfventil öffnet, während der Reglerangriff R an Ort und Stelle bleibt. Wenn jedoch im gemischten Betriebe die Belastung zunimmt, öffnet der sinkende Regler beide Ventile und es muß, wie schon erwähnt, der Druckregler nach Bedarf berichtigend eingreifen. In Abb. 846b sind die Abschlußstellungen der Schieber S_1 S_2 durch die doppelt geringelten Punkte dargestellt. Das obere Bild stellt den Fall reinen Frischdampf-

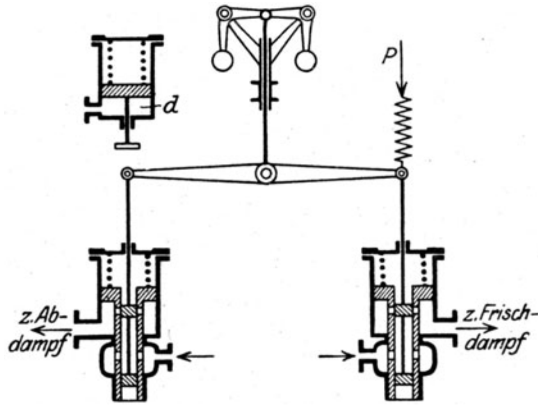


Abb. 847. Wagebalken in Verbindung mit hydraulischem Gestänge nach Tosi.

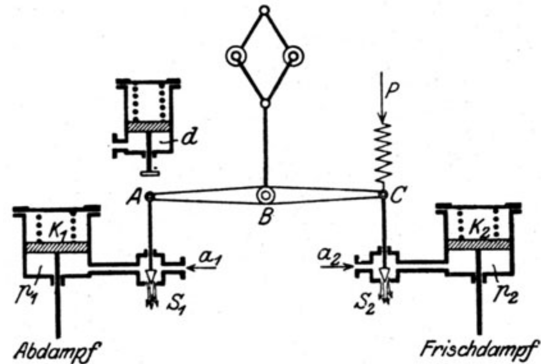


Abb. 848. Zwei unabhängige Kraftgetriebe mit Öldurchfluß.

betriebes dar. Das starke Überheben des Schiebers S_1 läßt ohne Schaden Drucköl auf die obere Seite des in tiefster Stellung befindlichen Kolbens K_1 treten. Im unteren Bild 846b ist angenommen, daß nur wenig Abdampf vorhanden ist. Hier öffnet bei sinkendem Regler in der strichpunktierten Lage des Hebels R_2E_2 zuerst das Frischdampfventil und erst bei R_1E_1 das Abdampfventil. Der Reglerhub RR_2 wird nicht ausgenutzt, und bei kleiner Belastung wird zunächst nur mit Frischdampf gearbeitet. Dieser Zustand ist indes nicht so nachteilig, als es zunächst den Anschein hat; denn infolge der Nichtausnutzung des Abdampfes wird der Speicher gefüllt, der Druckreglerkolben gehoben und so nach kurzer Weile doch wieder der Abdampf ein, der Frischdampf ausgeschaltet. Besitzt die Niederdruckturbine eine Mengenregelung, so wird deren Wirkungsgrad wegen höheren Anfangsdruckes sogar wachsen.

c) Kraftgetriebe mit hydraulischem Gestänge.

Das hydraulische Gestänge in der Ausführungsart von Tosi ist in Abb. 519 und 520 veranschaulicht worden. Abb. 847 zeigt, wie dasselbe in Verbindung mit dem „Wagebalken" verwendet werden kann. Der Druckregler begrenzt den Hub des Abdampfendes; auf das Frischdampfende muß ständig eine Federkraft P einwirken, die auf den Schluß des Frischdampfventils hinwirkt. Die federbelasteten eigentlichen Kraftkolben sind nicht eingezeichnet. Eine Abart dieser Ausführung ist die weiter unten besprochene Steuerung von Breitfeld & Danek.

d) Kraftgetriebe mit Öldurchfluß.

In Abb. 848 sind a_1 a_2 zwei **unabhängige Druckölquellen.** Die Steuerschieber S_1 S_2 erweitern oder verengern den Ausflußquerschnitt, so daß unter dem federbelasteten Kraftkolben K_1 K_2 bestimmte Drucke p_1 p_2 auftreten. Eine hierher gehörige Ausführungsform der Gutehoffnungshütte besprechen wir weiter unten.

e) Hydraulischer Wagebalken mit Öldurchfluß.

Verbinden wir zwei Kraftzylinder durch eine „kommunizierende" Röhre, so bildet die darin enthaltene Flüssigkeit insofern einen „Wagebalken", als bei vollkommener Dichtheit, wenn der eine Kolben sinkt, der andere steigen muß. Da indessen auf Dichtheit praktisch nicht zu rechnen ist, wird man besser für ständigen Öldurchfluß sorgen und muß dann die Hebung und Senkung durch eine Steuerung bewirken. Eine hierfür geeignete, zuerst von Brown, Boveri & Cie. verwirklichte Lösung ist in Abb. 849 veranschaulicht. a ist die Ölzuleitung, b der durch den Fliehkraftregler verstellbaren Durchflußquerschnitt. Die Kraftkolben K_1 K_2 erhalten wie üblich Federbelastung

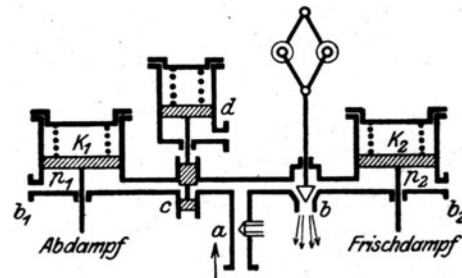


Abb. 849. Hydraulischer Wagebalken.

[1]) D. R.-P. Nr. 284727 v. J. 1910.

Das auf ihre Unterseite wirkende Drucköl kann bei $b_1 b_2$, indessen nur durch verhältnismäßig kleine Querschnitte, ebenfalls ins Freie strömen. c ist ein Drosselschieber, der vom Druckregler d betätigt wird. In der Höchstlage des Reglers fließt bei b die ganze Ölmenge sozusagen widerstandsfrei ab; die Überdrücke $p_1 p_2$ sinken auf Null, die Ventile werden geschlossen. Sinkt der Regler allmählich, so wird das Abdampfventil zuerst angehoben, weil wir die Kolbenfeder von K_1 auf einen kleineren Druck als diejenige von K_2 abstimmen. Ist eine bestimmte Leistung bei gemischtem Betrieb erreicht und sinkt der Regler weiter, so bewegen sich freilich beide Kolben gleichzeitig nach aufwärts, der „ersten Forderung" wird nicht

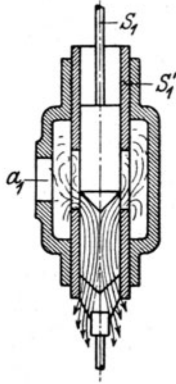


Abb. 850. Durchflußänderung mittels Doppelschieber.

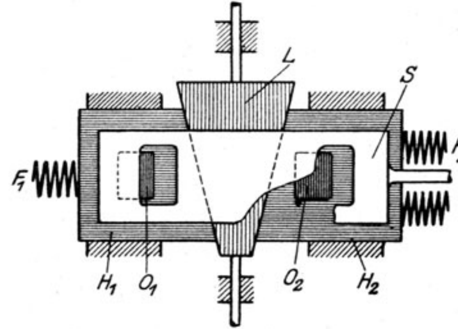


Abb. 850a. Frisch- und Abdampfbeeinflussung durch Doppelschieber.

vollständig entsprochen. Bei sinkendem Abdampfdruck sinkt auch Druckregler-Kolben d, drosselt den Zufluß zu Kolben K_1 ab, wodurch dieser zum Sinken gebracht wird; gleichzeitig wird bei unveränderter Reglerstellung der Druck p_2 erhöht, so daß K_2 steigen muß. Die „zweite Forderung" ist vollkommen erfüllt.

f) Ersatz des Wagebalkens durch eine Doppelschiebersteuerung mit Öldurchfluß.

Die Öldurchflußsteuerung gestattet die voneinander unabhängige doppelte Beeinflussung eines Kraftkolbens durch zwei Steuerorgane beispielsweise, wenn man nach Abb. 850 zwei ineinandergeschobene Kolbenschieber an Stelle der Durchflußventile in Abb. 848 anwendet, wobei der eine (S_1) vom Fliehkraft-, der andere (S_1') vom Druckregler betätigt wird. Der Abfluß kann, wie ersichtlich, bei stillstehendem Druckregler durch Senkung von S_1, bei stillstehendem Fliehkraftregler durch Heben von S_1' gedrosselt werden. Um nun den beiden Steuerungsforderungen zu genügen, muß der steigende Drehzahlregler die Innenschieber für Abdampf und Frischdampf nacheinander anheben, was bei einer Anordnung nach Abb. 848 ohne weiteres möglich wäre. Der Druckregler anderseits muß die ihm zugeordneten Schieberhülsen $S_1' S_2'$ im gegensätzlichen Sinne bewegen. Um dies zu erreichen, wird man je die beiden Schieber und die Schieberhülsen zusammenfassen, Abb. 850a, die die Abwicklung der Schieberspiegel darstellt. Darin bedeutet der Lappen S die in ein Stück zusammengefaßten Schieber, die vom Drehzahlregler bewegt werden; $H_1 H_2$ die Hülsen, die durch einen Keil L, der vom Druckregler erfaßt wird, mehr oder weniger auseinander geschoben werden können. Federn $F_1 F_2$ sorgen für stetes Anliegen. Man erkennt, daß, wenn bei steigendem Abdampfdruck der Keil L herabgedrückt wird, die für den Abdampfkolben dienende Durchflußöffnung O_1 verkleinert, die für den Frischdampf dienende Öffnung O_2 vergrößert wird. Demnach wird das Abdampfventil geöffnet, das Frischdampfventil geschlossen. Wenn der Drehzahlregler den Schieber S nach rechts verrückt, so werden beide Durchflußöffnungen verkleinert, somit müssen beide Ventile steigen. Es liegen also die gleichen Verhältnisse vor wie bei Abb. 846. Eine grundsätzlich mit dieser Anordnung gleiche Ausführung stammt von der Gutehoffnungshütte[1]).

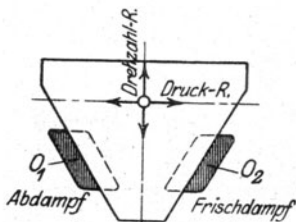


Abb. 850b. Doppelsteuerung durch einfachen Schieber.

g) Ersatz des Wagebalkens durch Doppelbewegung eines einfachen Schiebers mit Öldurchflußgetriebe.

In Abb. 850b seien $O_1 O_2$ die Ölabflußquerschnitte für die Kraftzylinder des Abdampf- und des Frischdampfgetriebes. Der flache Trapezschieber wird durch den Druckregler bei hohem Abdampfdruck nach links, bei kleinem Druck nach rechts geschoben. In letzterem Falle wird O_1 vergrößert, O_2 verkleinert, also nimmt, wie erforderlich, die Abdampfmenge ab, die Frischdampfmenge zu. Der Drehzahlregler verrückt den Schieber beim Steigen nach oben, beim Sinken nach unten. In letzterem Falle, d. h. bei zunehmender Leistung werden beide Durchflußöff-

[1]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1911, S. 387.

nungen verkleinert, also beide Ventile gleichzeitig gehoben. Auch hier liegen die gleichen Verhältnisse vor wie bei Abb. 846. Ein Vorschlag dieser Art stammt von der Maschinenfabrik Örlikon, D. R.-P. 302376 v. J. 1916.

h) Ersatz des Wagebalkens durch Flüssigkeitsrückfluß auf die Kraftkolben.

Nach Abb. 851 wirkt der Drehzahlregler auf einen Steuerschieber Tosischer Art U_0, der durch hydraulisches Gestänge den Druck auf die Kraftkolben K_1 K_2 überträgt, die mithin beim Steigen des Reglers sinken werden. Der Druckregler D soll nun auf die Rücken der Kolben K_1 K_2 Flüssigkeitspressungen einwirken lassen, deren Größe sich im entgegengesetzten Sinne ändert. Dieser Zweck ist durch Anwendung von zwei weiteren Tosischen Steuerschiebern U_1 U_2 erreichbar, die voneinander unabhängig sind, aber durch den mit D fest verbundenen Regulierschieber S_1 S_2 gesteuert werden. Steigt der Ab-

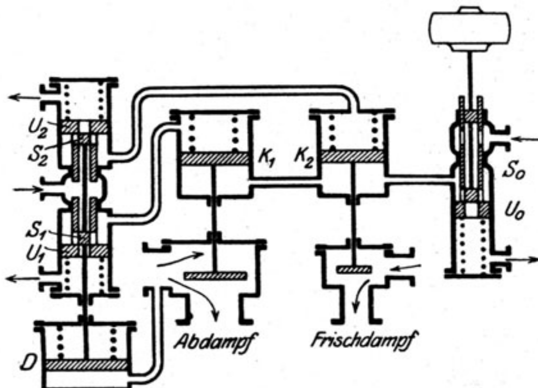


Abb. 851. Flüssigkeitsrückfluß über die Kraftkolben.

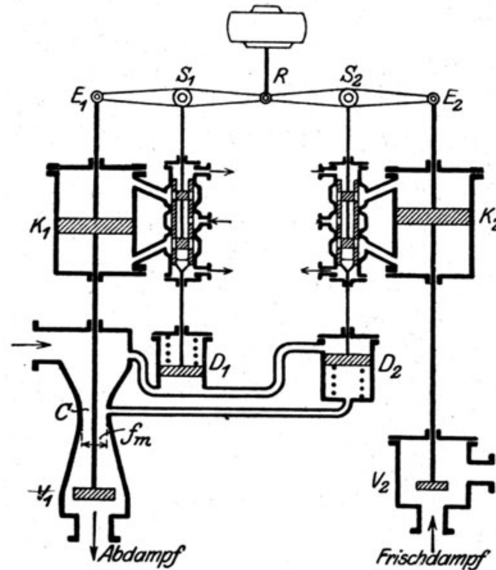


Abb. 852. Beeinflussung durch die augenblicklich zuströmende Abdampfmenge.

dampfdruck, so steigt D und zugleich U_1 U_2. Dadurch wird der Druck über K_1 kleiner, derjenige über K_2 jedoch größer. Daher wird K_1 das Abdampfventil öffnen, K_2 das Frischdampfventil schließen. Sollte der verdrängte Rauminhalt in beiden Zylindern nicht gleichgroß sein, so entleert sich der Überschuß durch leichtes Lüften von U_0, ohne daß dabei die Reglerstellung und die Pressung sich zu ändern braucht. Eine verwandte Ausführung ist der Frankfurter Maschinenbau A.-G., vormals Pokorni & Wittekind, im D. R.-P. Nr. 298640 v. J. 1914 geschützt.

Steuerung durch den Speicherdruck und die augenblicklich zuströmende Abdampfmenge.

Im D. R.-P. Nr. 297889 (v. J. 1915) von J. Joos kommt der neue Grundsatz, die Steuerung auch durch die Größe der zuströmenden Abdampfmenge zu beeinflussen, Abb. 852, zum Ausdruck. Der auf die Hülse des Schiebers S_2 wirkende zweite Druckregler D_2 ist auf seiner Oberseite dem Speicherdruck, auf der Unterseite dem Druck an der Einschnürung bei C ausgesetzt. In der auf f_m folgenden Erweiterung findet Wiederverdichtung wie beim Venturimesser statt. Sinkt der Abdampfdruck, so bewegen sich D_1, und mit ihm K_1 und V_1 nach abwärts, wodurch die abströmende Abdampfmenge **geringer,** daher der Druck bei C **größer** wird. Da R vorläufig unverrückt bleibt, muß D_2 steigen. V_2 wird angehoben, der Frischdampfzufluß vergrößert. Die Aufgabe ist, die Verhältnisse so zu wählen, daß die Leistung unverändert bleibt. Nimmt bei gleichbleibendem Speicherdruck die Leistung zu, so sinkt der Drehzahlregler und hebt beide Ventile an. Dadurch sinkt der Druck bei C, und wenn R inzwischen stehen blieb, so wird mit D_2 auch V_2 sinken, und die Leistung genügt nicht. Der Drehzahlregler greift also von neuem ein, so daß der Abdampf in erster Linie zur Leistung herangezogen wird. Dann aber wird der Speicherdruck sinken und D_1 zwingen, die nötige Berichtigung anzubringen.

143. Ausführungsformen der Zweidruckturbinen und ihrer Steuerungen.

Die **Allgemeine Elektrizitätsgesellschaft** Berlin baut Zweidruckturbinen der in Abb. 853 bis 855 dargestellten Art. In Abb. 853 mischen sich der Frisch- und Abdampf vor den Düsenventilen des Niederdruckteiles. Die mittlere Scheidewand ist, wie die Seitenansicht zeigt,

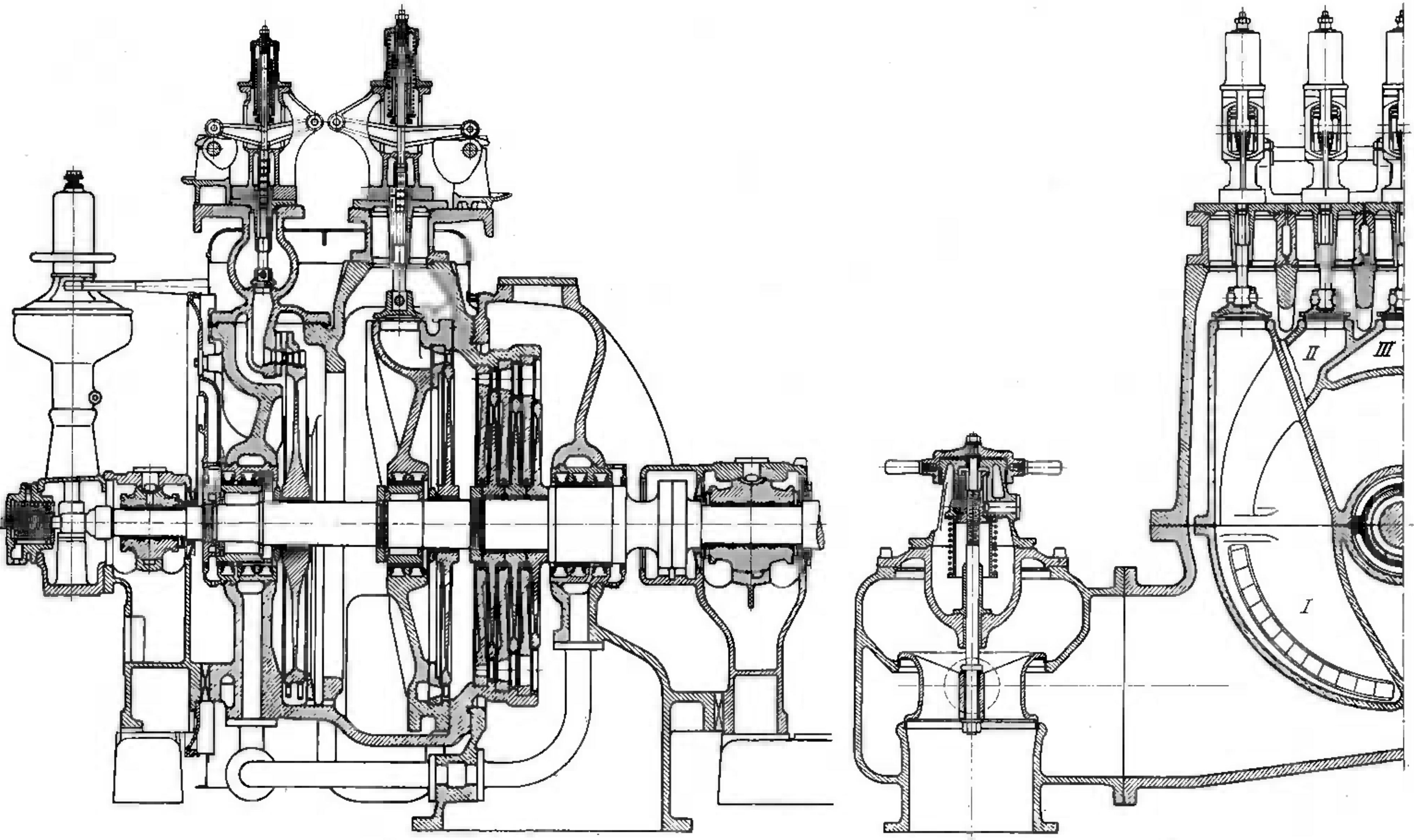


Abb. 853. Frisch- und Abdampfturbine der Allgemeinen Elektrizitäts-Gesellschaft.

als Hohlguß ausgebildet mit zu den Düsengruppen I bis V führenden Zugängen. In Abb. 854 wird das erste Niederdruckrad vom Frisch- und vom Abdampf getrennt beaufschlagt, wobei der letztere ebenfalls Düsengruppen-Regelung aufweist. Nach Abb. 855 endlich ist die erste Niederdruckstufe lediglich vom Abdampf beaufschlagt, mit dem sich der Frischdampf erst vor dem zweiten Niederdruck-Leitrad mischt. Die Ausführung nach Abb. 853 wird bis

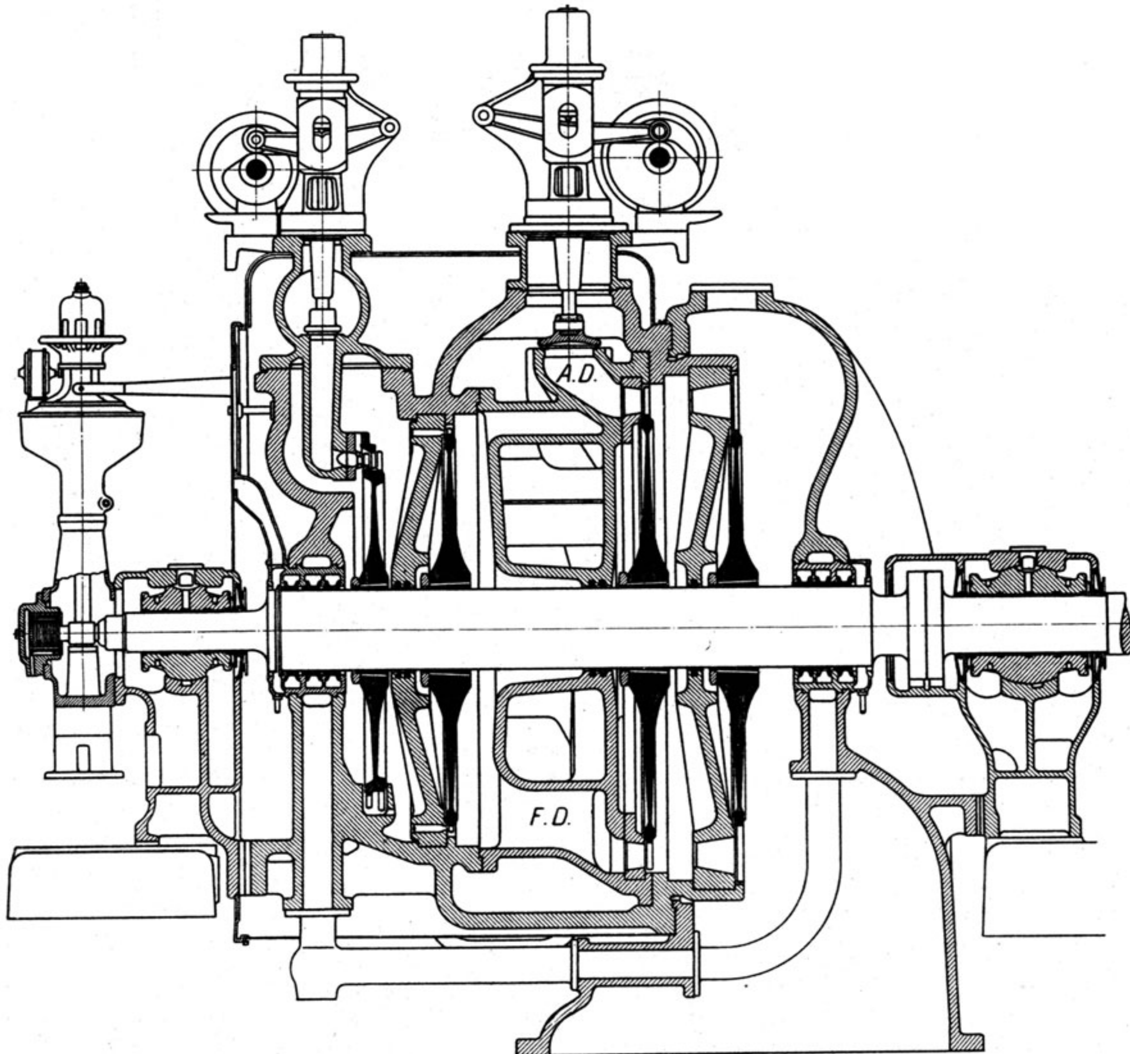


Abb. 854. A. E. G.-Turbine mit getrennter Beaufschlagung der 1. Niederdr.-Stufe mit Frisch- und Abdampf.

etwa 3000 kW benutzt; darüber hinaus greift man zur Bauart Abb. 854, und bei ganz großen Abdampfmengen zu der nach Abb. 855. Die besonderen Vorteile der beiden letztgenannten Bauarten haben wir in Abschn. 141 erläutert. Die zur Ausführung Abb. 854 gehörende Steuerung Abb. 856 entspricht dem Regelschema Abb. 845, und zwar bedeutet A das Frisch-, B das Abdampfventil. Als Kraftgetriebe wird der Drehkolben nach Abb. 504 mit der dort beschriebenen Rückführung durch spiralförmige Nuten benutzt. S_1 S_2 sind die Steuerschieber, D der Druckregler. Die Steuerung zur Anordnung nach Abb. 853 ist in Abb. 856a dargestellt.

Darin bedeutet R den Drehzahlregler, 1 den festgelagerten Stellhebel, 2 den „Steuerhebel", an dem im Punkt A der Druckregler D angreift. Bei Glockenspeichern wird D durch Steuerkolben E ersetzt, dessen Oberseite einem von der Glocke beeinflußten Öldruck ausgesetzt wird, der hoch ist bei tiefem und niedrig bei hohem Glockenstand. In F an Hebel 2 greift die Zustellung zum Kraftgetriebe des Frischdampf-, bei G diejenige des Abdampfventiles an, und zwar werden die Ventile bei der Aufwärtsbewegung von F und G geöffnet. Die drei Hauptfälle sind: 1. Reiner Frischdampfbetrieb. A befindet sich in der tiefsten Stellung und bildet einen festen Drehpunkt. Frisch- und Abdampfventile werden gleichsinnig bewegt, bei Höchstlast nur ein Teil des letzteren geöffnet. 2. Reiner Abdampfbetrieb.

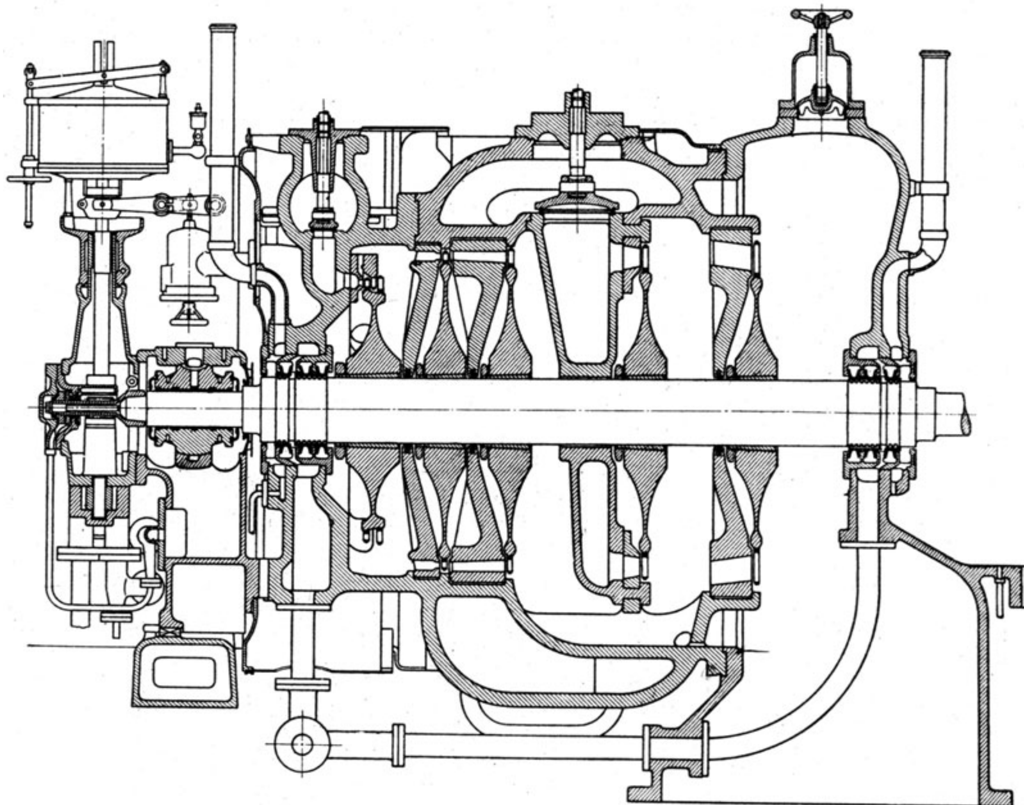


Abb. 855. A.E.G.-Turbine mit Umgehung der 1. Niederdr.-Stufe durch den Frischdampf.

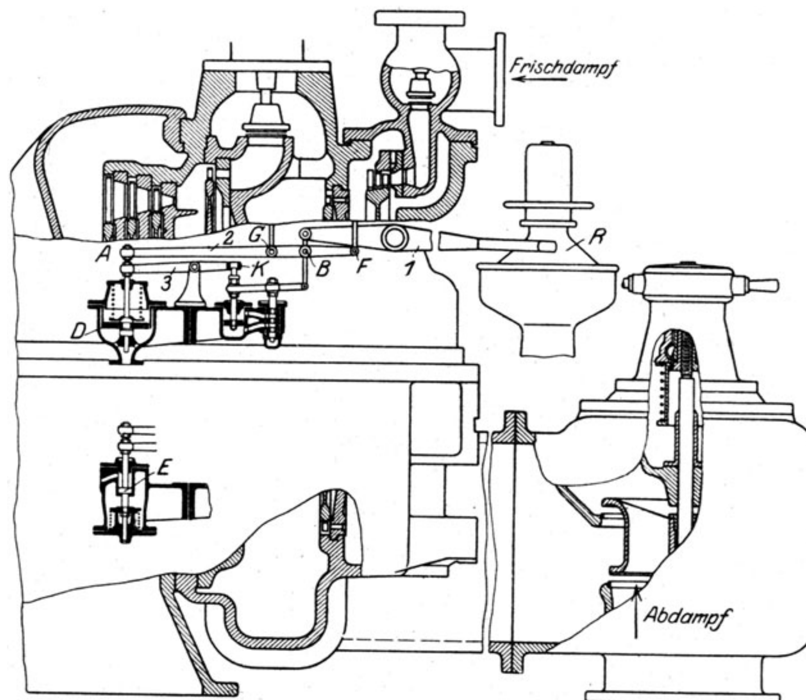


Abb. 856a. Zweidruck-Steuerung zu Turbine Abb. 853.

Die Frischdampfventile müssen ständig geschlossen sein, F muß einen festen Drehpunkt bilden. Um dies zu erreichen, erhält A eine Zusatzbewegung durch Kraftgetriebe K, dessen Kolben den Hebel 3 mittels losen Anschlages zu verdrehen und A im geraden Verhältnis zum Reglerhub zu senken vermag.

Der Kraftschluß wird durch den Abdampfdruck auf Kolben D aufrecht erhalten. 3. Gemischter Betrieb. Bei einer Veränderung des Abdampfdruckes allein bildet B einen festen Drehpunkt; Frisch- und Abdampfventile werden im entgegengesetzten Sinn um so viel verstellt, daß die Gesamtleistung sich nicht ändert.

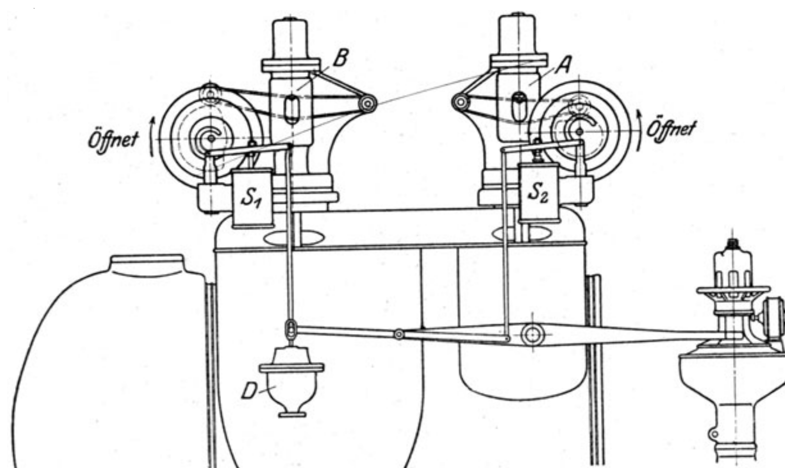


Abb. 856 I.

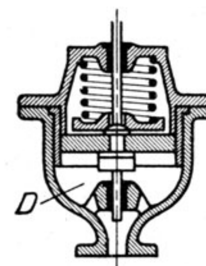


Abb. 856 II.

Neuere Zweidruckregelung der A. E. G.

Bei genügend hohem Abdampfdruck steigt A stets, bis Anschlag K anliegt, wodurch das Frischdampfventil geschlossen wird. Nimmt die Leistung bei gleichbleibendem Abdampfdruck zu, so bildet A den festen Drehpunkt, und es werden Frischdampf- wie auch Abdampfventile in dem Maße zugeschaltet, daß sich der Abdampfdruck nicht ändert.

Die **Maschinenfabrik Augsburg-Nürnberg A.-G.** baut Zweidruckturbinen mit einer Steuerung Abb. 857, die der ursprünglichen Rateauschen Anordnung nahekommt. Die beiden Winkelhebel ABC und EFG, die durch Stangen CD und DE verbunden sind, stellen hier

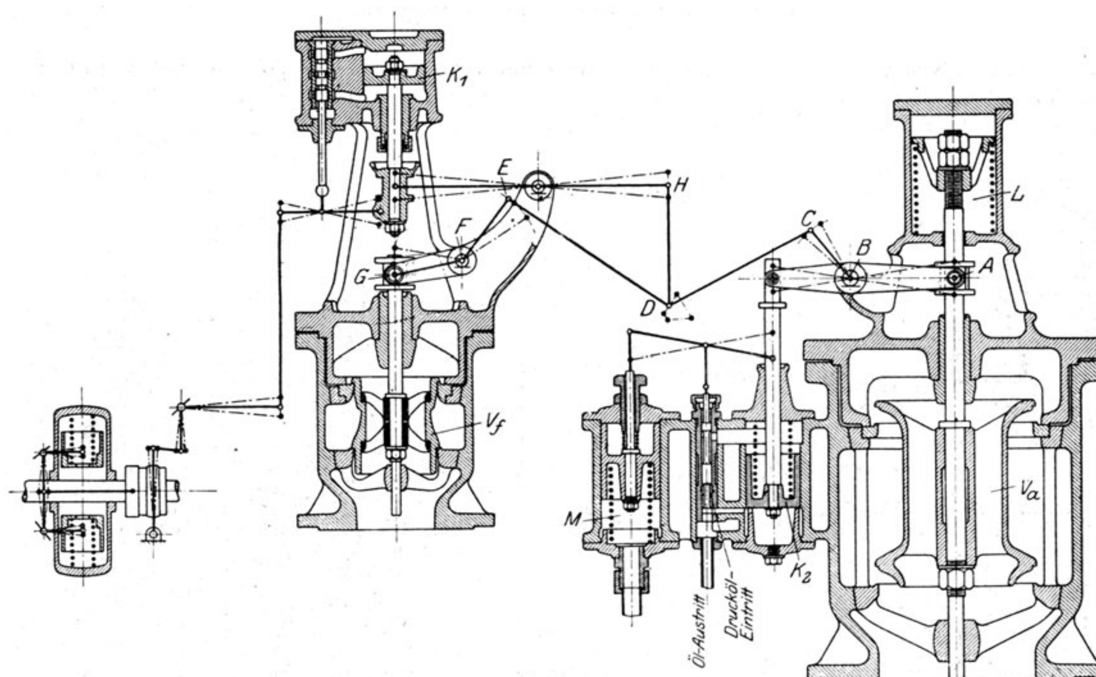


Abb. 857. Ursprüngliche Rateausteuerung für Zweidruckturbinen.

den „Wagebalken" dar. Solange Punkt H durch den Kraftkolben K_1 festgehalten wird, muß in der Tat bei sinkendem Abdampfventil das Frischdampfventil steigen und umgekehrt. Wenn anderseits der Regler durch den Kraftkolben K_1 den Punkt H senkt, so wird infolge

der entlastenden Feder L zuerst das Abdampfventil, und wenn dieses seine Hubbegrenzung erreicht hat, das Frischdampfventil angehoben. Die Beeinflussung durch den Druckregler M

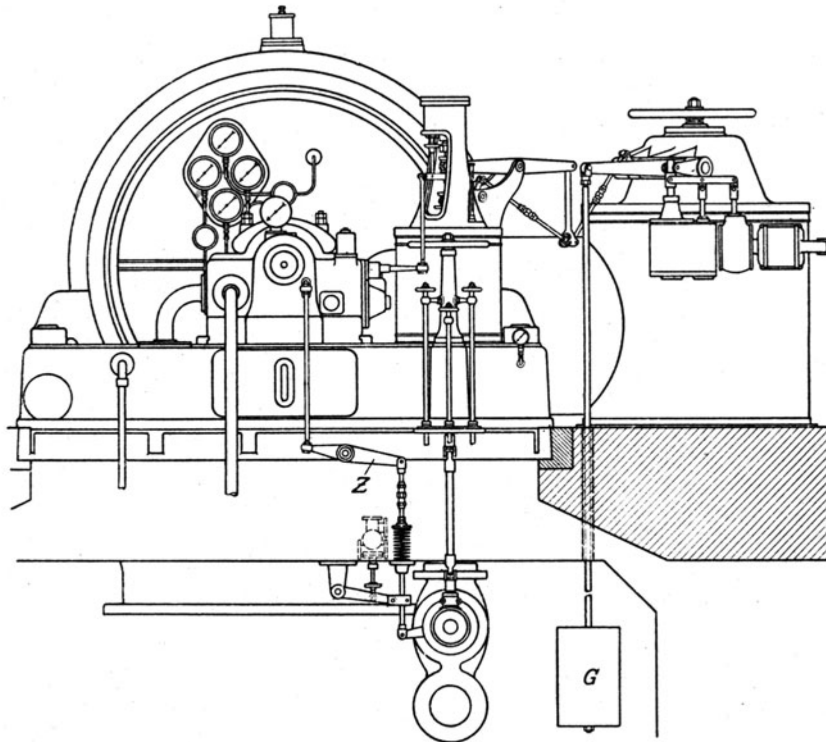


Abb. 858. Steuerungsansicht zu Abb. 857.

vermöge seines Kraftkolbens K_2, der eine Hubbegrenzung für das Abdampfventil bildet, stimmt ebenfalls mit dem Schema Abb. 844 überein. Die Außenansicht der Steuerungsanordnung zeigt Abb. 858.

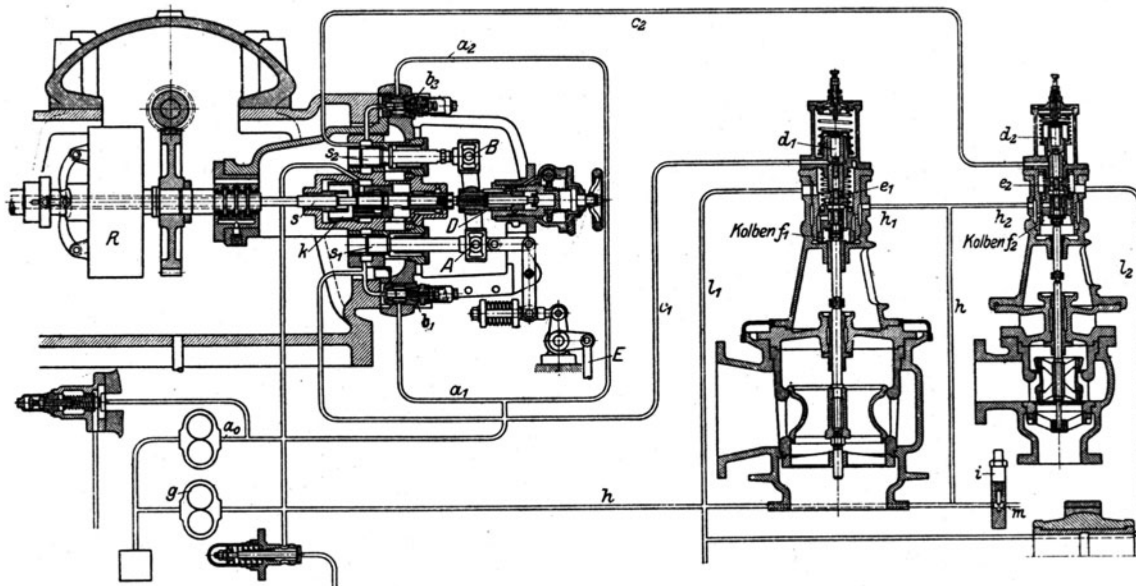


Abb. 860. Zweidrucksteuerung der Gutehoffnungshütte.

Zum Unterschiede gegen Abb. 857 ist hier die Entlastung des Abdampfventiles durch ein Hängegewicht G bewirkt. Zustellung Z bedeutet die Sicherheitsauslösung.

Abb. 859 ist die konstruktive Ausgestaltung des Schemas Abb. 844 nach einer Ausführung der **Skodawerke.** Der Kraftkolben des Abdampfgetriebes K ist mit hohler Kolbenstange über die Spindel des Abdampfgetriebes geschoben und bildet bei L dessen Hub-

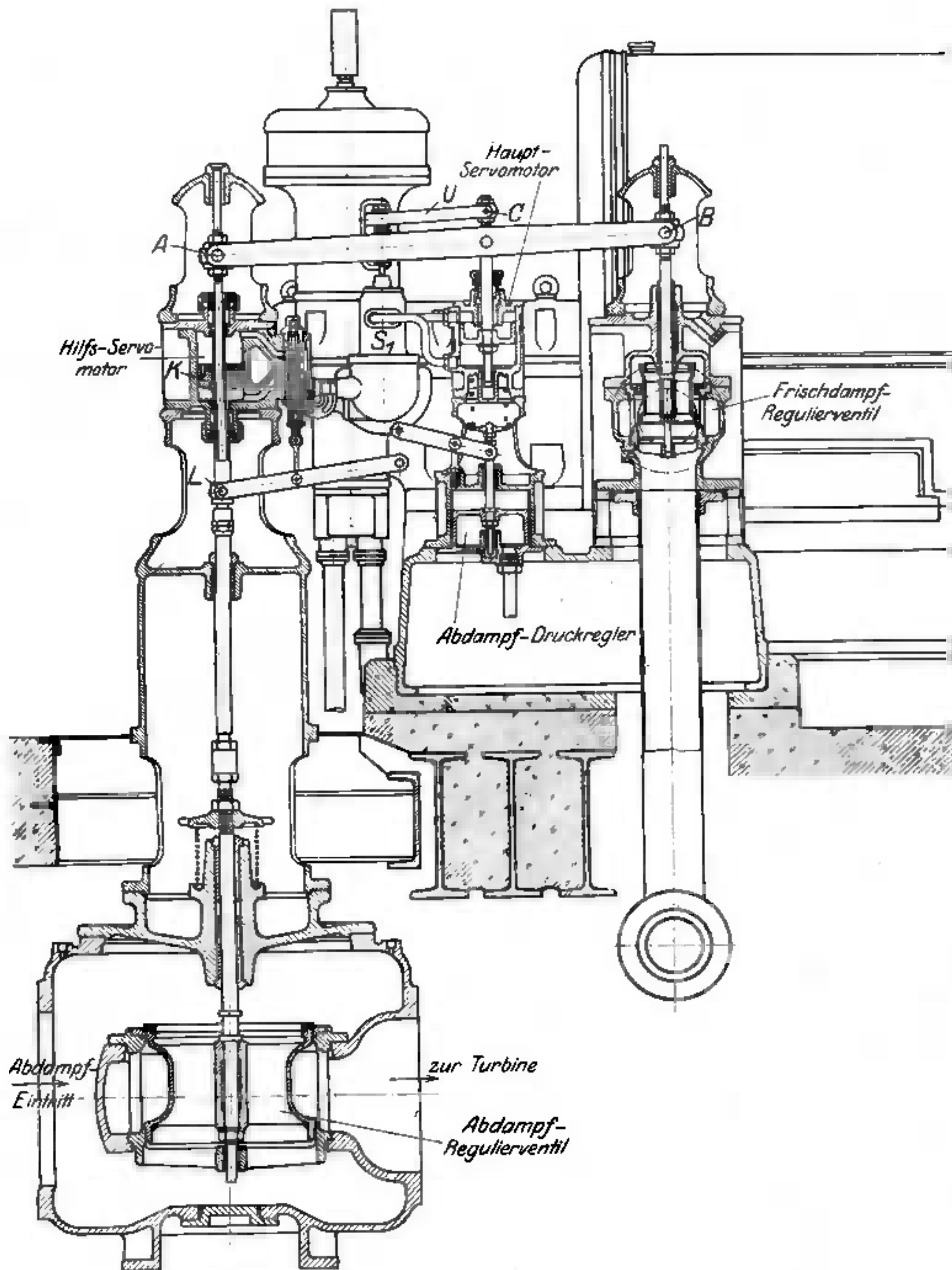


Abb. 859. Zweidrucksteuerung der Skodawerke.

begrenzung. Das Steuerventil des Frischdampfes S_1 ist samt Reglerzustellhebel U schräg zum Haupthebel ABC gelegt.

Die Steuerung der **Gutehoffnungshütte A.-G.** Abb. 860 entspricht im wesentlichen dem Schema Abb. 848. Hebel AB ist der „Wagebalken", $a_1\,a_2$ sind die Öldruckleitungen von der Zahnradpumpe a_0. Vor dem Zutritt zu den Reglerschiebern $s_1\,s_2$ wird der Druck durch die Drosselventile $b_1\,b_2$ von $3^1/_2$ bis 4 auf 1 bis $2^1/_2$ at abgedrosselt. Das „Steuer"-Öl gelangt durch die Leitungen $c_1\,c_2$ zu den Kraftgetrieben, wo es indessen nicht unmittelbar wirkt,

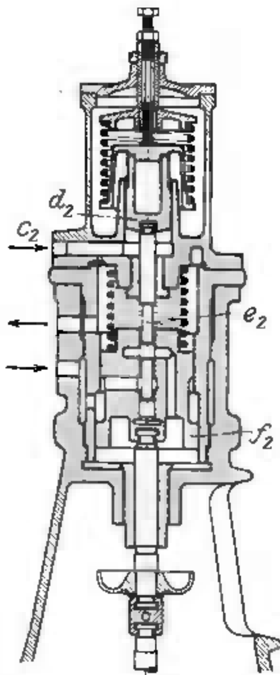


Abb. 861. Kraftgetriebe zu Abb. 860.

sondern vermöge der Vorsteuerkölbchen d_1 d_2 und ihrer Steuerstifte e_1 e_2 die Kraftkolben f_1 f_2 steuert. Die Einrichtung dieses Kraftgetriebes ist in Abb. 861 verdeutlicht. Das „Arbeits“-Öl kommt von der Zahnradpumpe *g*, die es durch Leitung h h_1 h_2 den Getrieben und zugleich nach einer im Drosselflansch *i* erfolgenden Druckverminderung auf 0,2 at durch Leitung *m* den Lagern zuführt. l_1 l_2 sind die Abflußleitungen. Im übrigen wirkt auch der eigentliche Regler *R* nicht unmittelbar, sondern vermöge des Steuerschiebers *s* und des Kraftkolbens *k*. Dabei wird durch Verdrehung der Schraubenmutter *D* die Lage des Angriffspunktes und damit der auszunutzende Teil des Reglerhubes verschoben, also die Drehzahl geändert. Der Druckregler greift mittels Stange *E* am Punkte *A* an. Die zugehörige Dampfturbine wurde bei Abb. 725 besprochen.

Aus den gleichen Elementen wird auch **die Steuerung der gewöhnlichen Turbinen** der Gutehoffnungshütte aufgebaut, wie Abb. 862 zeigt. Darin betätigt der Regler *R* den Ausflußsteuerstift *S*. Die Zahnradpumpe *Z* liefert Drucköl von 3,5 at durch die Leitungen a_1 d_2, dessen Druck durch Drosselbüchse *b* und Steuerstift *S* auf 1 bis 2,5 at herabgesetzt wird. Es gelangt durch Leitung c_1 zur Vorsteuerung des Hauptventiles, durch Leitung c_2 zur Vorsteuerung des Zusatzventiles. Die Einrichtung der zugehörigen Kraftbetriebe ist mit der in Abb. 861 gleich.

Abb. 862. Normale Regelung der Gutehoffnungshütte.

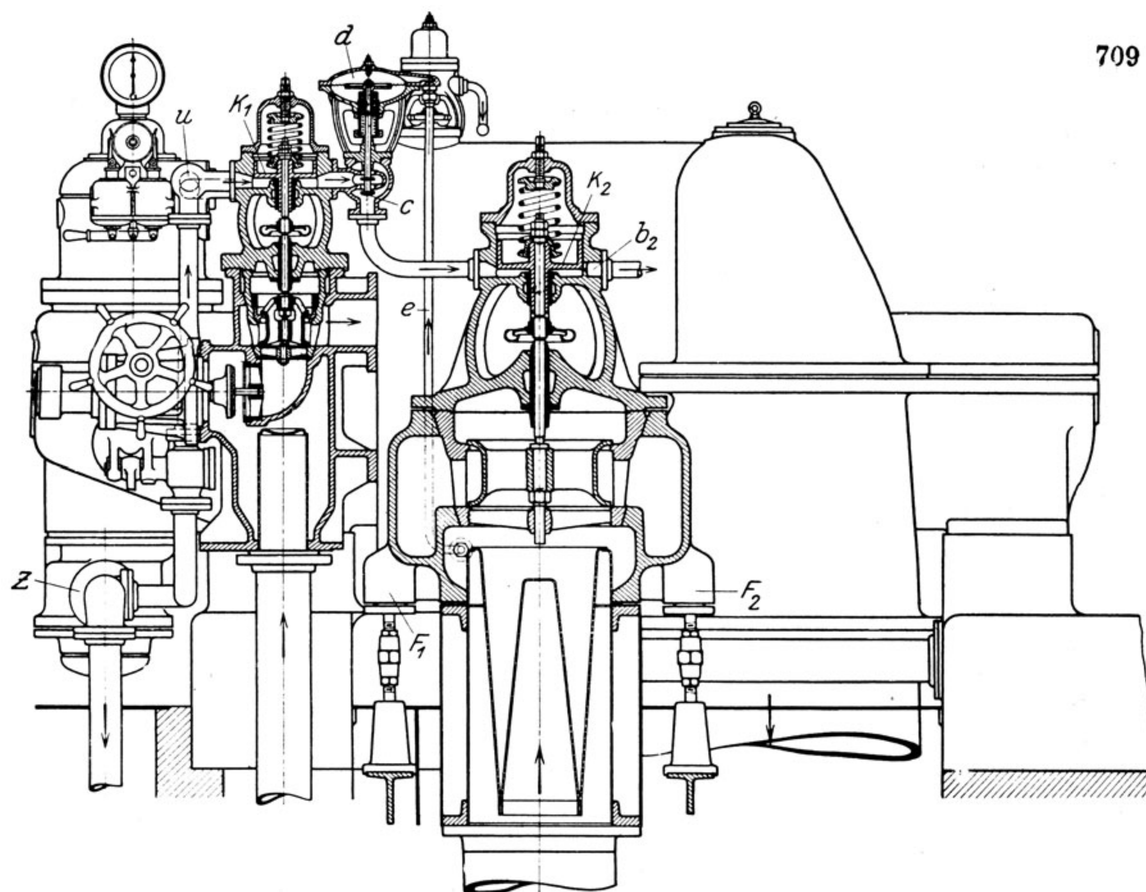


Abb. 863. Zweidruckdurchflußregelung von Brown, Boveri & Cie.

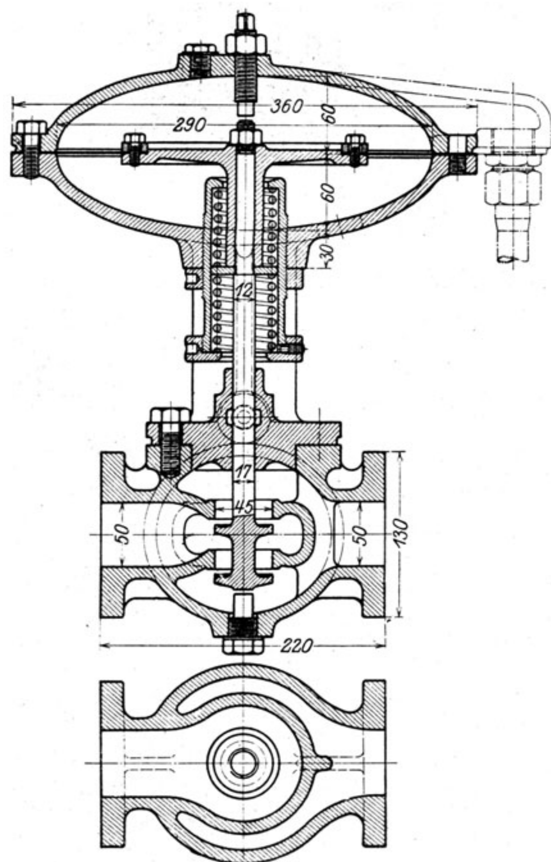


Abb 864. Druckregler zu Abb. 863.

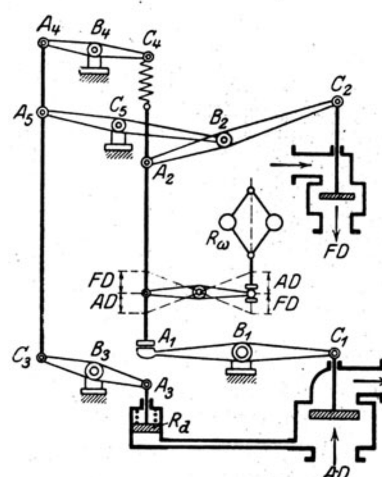


Abb. 865. Gerippe der Zweidrucksteuerung von Melms & Pfenninger.

Die Steuerung **A.-G. Brown, Boveri & Cie.,** die als Schema durch Abb. 849 erläutert wurde, ist in konstruktiver Ausbildung durch Abb. 863 verdeutlicht. Das Drucköl gelangt von der Zahnradpumpe Z durch Abzweigung U zum Durchflußventil, dessen Betätigung

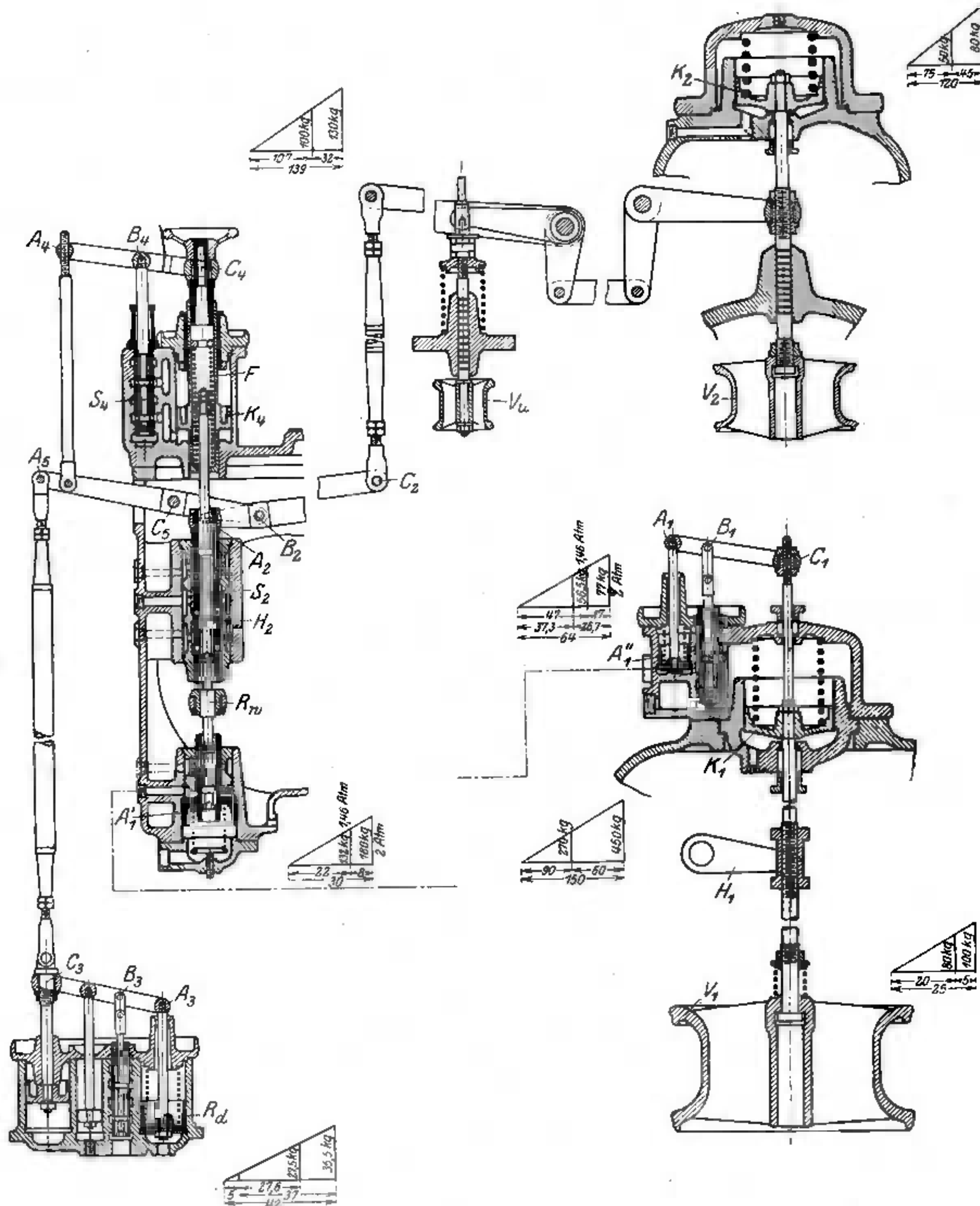


Abb. 865a. Zweidrucksteuerung von Melms & Pfenninger.

durch den Fliehkraftregler in Abb. 518 dargestellt wurde. Von da gelangt das Öl zum Frischdampf-Kraftkolben K_1, unter diesem durchströmend zum Regulierschieber c des Druckregulators d, schließlich zum Kraftkolben des Abdampfes K_2 mit der kleinen Abflußöffnung b_2. e ist die Abdampfzuleitung zum Druckregler. Zu beachten ist die Abstützung des schweren

Abdampfgehäuses auf in den Gehäusen $F_1 F_2$ untergebrachten Federn. Die Einzelheiten des Druckreglers sind aus Abb. 864 ersichtlich.

Melms & Pfenninger führen eine Zweidrucksteuerung nach dem D. P.-R. 291688 v. J. 1911, die in Abb. 865 als Gerippe bei unmittelbar angreifendem Drehzahl- und Druckregler

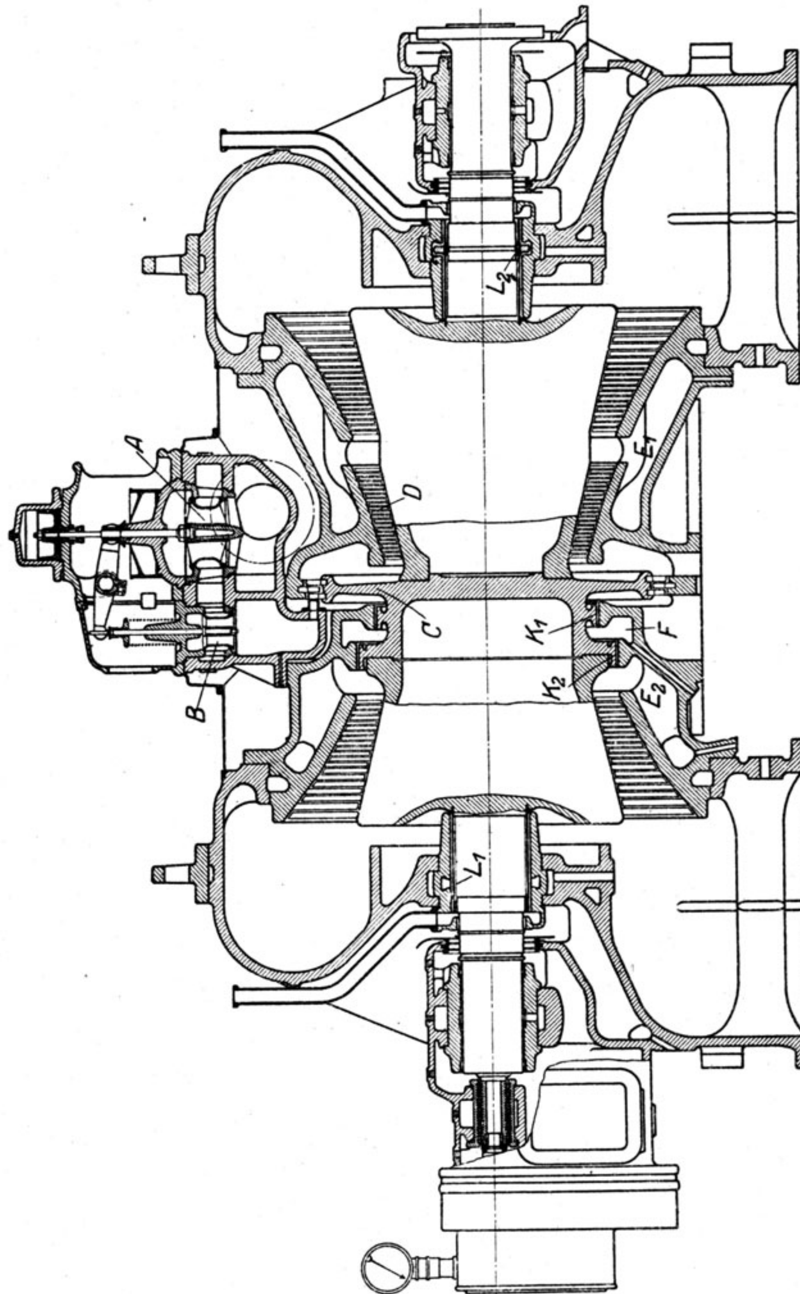


Abb. 866. Zweidruckturbine von Breitfeld, Danek & Cie.

veranschaulicht ist. Der sinkende Regler betätigt (schließt) auf dem Hubbereich *AD* das Abdampfventil. Bei reinem Frischdampfbetrieb wird das zugehörige Ventil auf dem Hubbereich *FD* betätigt, wobei Druckreglerkolben R_d und Drehpunkt B_2 ganz tief liegen. Bei gemischtem Betrieb steigen R_d und B_2 so, daß der Frischdampf-Regulierbereich sich teilweise mit *AD* überdeckt. Nimmt der Abdampfdruck bei gleichbleibender Gesamtleistung zu, so steigen R_d und B_2; gleichzeitig wird die ursprünglich zusammengedrückte Feder bei C_4 entspannt, so daß der Regler R_w bei gleichbleibender Drehzahl sinkt und das Abdampfventil mehr öffnet. Die Hebelübersetzungen sind so zu wählen, daß gleichzeitig das Frischdampfventil schließt, und zwar um einen Betrag, der die frühere Gesamtleistung wieder herstellt.

Die konstruktive Einkleidung dieses Schemas zeigt Abb. 865a. Die Reglerstellkräfte werden hier durch Kraftgetriebe übertragen; demgemäß ist R_w der Angriff des Drehzahlreglers, S_2 der damit verbundene Steuerschieber des Kraftkolbens K_2 zum Frischdampfventil V_2, das durch ein Hebelwerk mit dem Überlastventil V_u und mit dem Endpunkt C_2 des Rückführungshebels $A_2 B_2 C_2$ verbunden ist, so zwar, daß A_2 an der Rückführungshülse H_2 angreift. Ebenso verwandelt sich der Krafthebel $A_3 B_3 C_3$ des Schemas zum gleichnamigen Rückführhebel des Druckreglers R_d. Auch das Entspannen der Feder F erfolgt durch ein Kraftgetriebe mit Kolben K_4 und Steuerschieber S_4, dessen Angriffspunkt B_4 dem früheren festen Drehpunkt am Hebel $A_4 B_4 C_4$ entspricht. Der Abdampfhebel des Schemas wird durch ein Ölgestänge, mit A_1' als druckerzeugender Primärkolben, A_1'' als dem sich proportional verschiebenden Sekundärkolben, und $A_1 B_1 C_1$ als Rückführhebel des Hauptkraftkolbens K_1, ersetzt. H_1 ist ein mit dem Schnellschlußventil gleichzeitig bewegter Schließungshebel des Abdampfventils V_2.

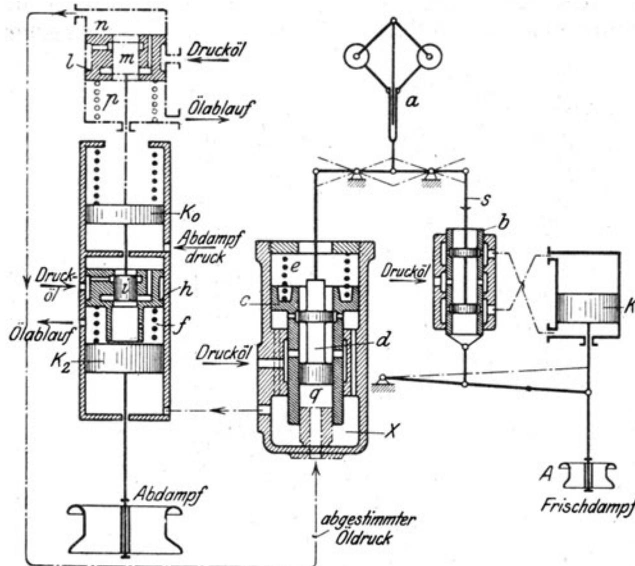


Abb. 866a. Gerippe der Zweidrucksteuerung von Breitfeld, Danek & Cie.

Die Maschinenbau A.-G. vorm. **Breitfeld, Danek & Cie.,** Prag, hat das Ausführungsrecht der Melms & Pfenninger-Turbinen erworben und baut größere Abdampfturbinen, wie Abb. 866 für eine Einheit von 3000 kW und 3000 Umdr./min zeigt als Doppelendüberdruckturbinen, wobei das zweistufige Curtisrad C und die erste Überdruckgruppe D die vorgeschaltete Frischdampfturbine bilden. Der Abdampf tritt, durch zwei getrennte Ventile gesteuert, bei E_1, E_2 ein. A ist das Haupteinströmungsventil, das die erste Düsengruppe drosselt; die übrigen werden durch Zusatzventile, wie B, gruppenweise geregelt.

An der Turbine ist der zweckmäßige, durch gerade (gebrochene) Linien begrenzte Meridianschnitt von Trommel und Gehäuse bemerkenswert. Die Niederdruckschaufeln erhalten nach Abb. 867a angestauchte Füße, die durch beiderseits mit Schultern versehene Beilagen festgehalten werden. Die Leitschaufeln endigen geradlinig und sind durch besondere Stemmringe gehalten.

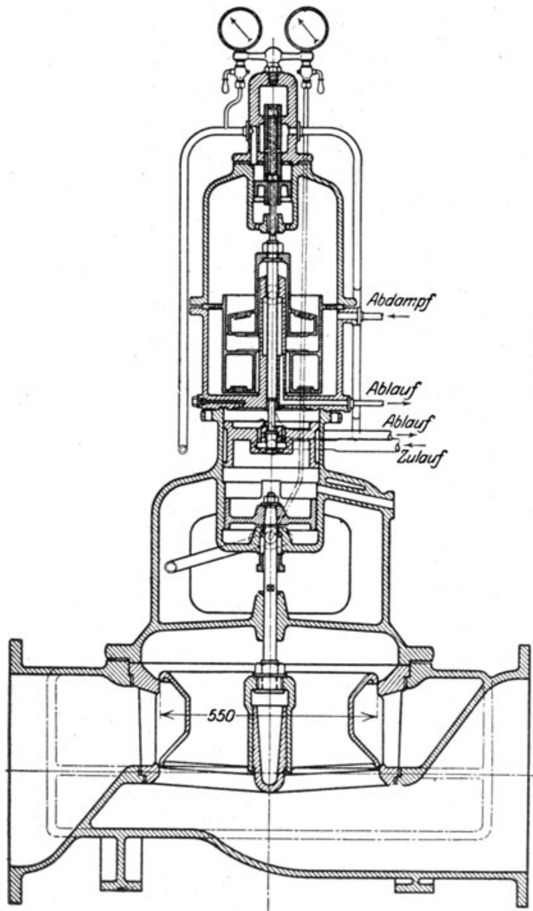


Abb. 867. Konstruktive Einkleidung zu Abb. 866a.

Die Erstellerin legt besonderes Gewicht auf die **über die Welle geschobenen Hülsen für die Labyrinthliderung L_1 L_2.** Die erste ist am Ende aufgewindet, die zweite muß, da die Welle einen Kupplungsflansch besitzt, zweiteilig sein. Ihre Befestigung erfolgt sinnreicherweise dadurch, daß vom Kupplungsflansch ein Ring inwendig abgestochen wird, der mit dem nötigen Schrumpfmaß versehen die Büchsenhälften durch Schrumpfung festhält. Die Dichtung selbst wird durch eingestemmte 0,4 mm starke Messingplättchen erzielt. Es soll sich gezeigt haben, daß durch **Einreiben der Stopfbüchsenlabyrinthe infolge der Wellenerwärmung ein Werfen des Läufers eintrat, worauf die Entlastungskolben einrieben.** Die Hülse verhindert eine irgendwie nennenswerte Erwärmung, und die Entlastungskolben verhalten sich seither einwandfrei.

Beim Betriebe mit Frischdampf allein oder mit wenig Abdampf arbeitet nur die rechte Turbinenhälfte. Die Abdampfeinströmung ist mit dem Raume f zwischen den Entlastungskolben K_1 K_2 verbunden. Die Kolbendurchmesser sind so gewählt, daß in einem großen Belastungsbereich der axiale Druckausgleich ein möglichst vollkommener ist.

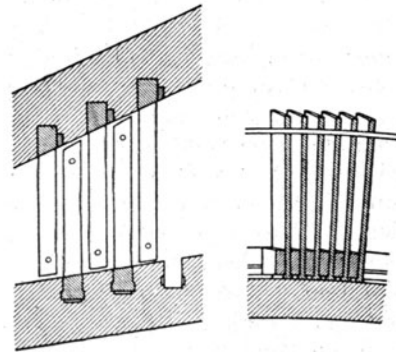


Abb. 867a. Schaufeln zu Abb. 866.

Die Zweidrucksteuerung besteht gemäß Gerippe Abb. 866a aus einer Verbindung des üblichen Kraftgetriebes für den Frischdampf und des hydraulischen Gestänges für den Abdampf. Bei ersterem wird eine Rückführung erzielt, indem die Hülse b dem Schieber s durch den Kraftkolben K_1 nachgeschoben wird (daher die Ölleitungen gekreuzt sind). Auf der Abdampfseite erzeugt der Schieber d durch den ihm nacheilenden Kolben c einen dem Federdruck von e entsprechenden Öldruck, der den Kraftkolben K_2 unter Zusammendrückung der Feder f bis zum Anstoßen am Hubbegrenzer h emporhebt. Damit beim Sinken des Reglers zuerst der Abdampf öffnet, wird Schieberstange s so weit gekürzt, daß der Schieber in die Umsteuerlage erst gelangt, wenn der Öldruck unter K_2 den zur Überwindung des Federdruckes f nötigen Betrag erlangt hat. Der Einfluß des Druckreglers, dessen Kolben K_0 auf der Unterseite der Abdampfpressung ausgesetzt ist, erfolgt durch Steuerschieber i, bei dessen Anheben das über dem Kolben h befindliche Öl durch die dargestellten Steuerkanäle in den Raum über Kolben K_2 und ins Freie abfließen kann. Indem die Feder f den Hubbegrenzer h hinaufschiebt, sich ausdehnt, wird K_2 entlastet, er wird also steigen, bringt dadurch den Kolben c zum Sinken, so daß dem Drucköl an d vorbei der Zutritt geöffnet und das Öl nachgefüllt werden kann. Es wird mithin K_2 dem Hubbegrenzer h auf dem Fuße folgen.

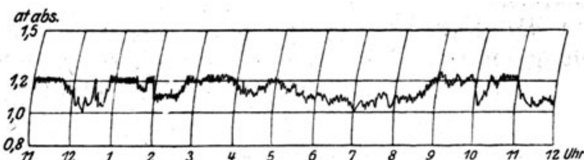


Abb. 868.

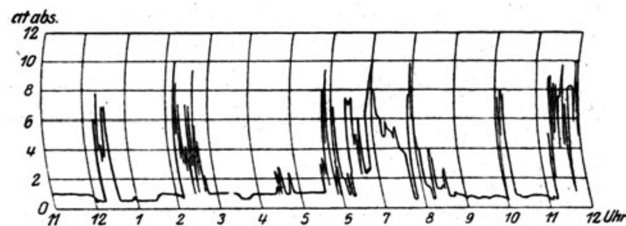


Abb. 868a.
Druckverlauf an einer Thyssen-Zweidruckturbine.

Das Besondere der Steuerung besteht in der **Drehzahlbeeinflussung des Reglers zum Zwecke sicherer Parallelschaltung** und guten Parallelarbeitens. Wenn nämlich bei gegebener Leistung der Abdampfdruck zunahm, und das Abdampfventil wie geschildert, mehr geöffnet wurde, ist die Dampfleistung zu groß geworden. Der Regler muß steigen, wodurch sowohl der Frischdampfzufluß, als auch die Eröffnung des Abdampfventiles etwas verringert werden. Dem neuen Beharrungszustand entspricht dann trotz gleichbleibender Leistung eine höhere Drehzahl. Um diese auf den alten Betrag zu bringen, wird durch den auf der Kolbenstange von K_0 befestigen Steuerschieber m der Hilfskolben l betätigt, und zwar wird l sich mit K_0 gleichsinnig bewegen. Dem Steigen entspricht mithin eine Entspannung der Feder p und eine ihr entsprechende Druckabnahme im Raume n, die sich durch eine Leitung nach dem Raume q unter d fortpflanzt. Hierdurch wird der Fliehkraftregler entlastet, seine Drehzahl (im Beharrungszustande) herabgesetzt, und es ist jeder Leistung eine einzige Drehzahl zugeordnet. Die konstruktive Ausführung des Abdampfgetriebes ist in Abb. 867 dargestellt, die an Hand des Vergleiches mit 866 leicht verständlich sein wird. Zu bemerken ist, daß Kolben K_0 als Schwimmkolben ausgeführt wird, der auf einer Quecksilberfüllung durch den Auftrieb schwimmend erhalten wird.

Betriebsergebnisse von Zweidruckturbinen.

Abb. 868 stellt den Abdampf-Druckverlauf einer 2600 kW-Zweidruckturbine der Firma Thyssen & Co. dar, die in deren Walzwerk (Mülheim-Ruhr) aufgestellt ist[1]) Abb. 868a bezieht sich auf den Frischdampfdruck zwischen Hochdruckventil und den Düsen. Der Abdampf wird entweder unmittelbar (naß) verwendet oder über einen mit Abgasen geheizten Überhitzer geleitet. Versuche mit Abdampf allein ergaben folgende Dampfverbrauche:

Abdampf		naß	überhitzt	Abdampf		naß	überhitzt
Belastung	kW	1610	1615	Luftleere	v. H.	94,4	94,3
Druck vor dem Ventil	at abs.	1,13	1,12	Barometer	mm	777	770
„ hinter dem Ventil	„	0,98	0,946	Dampfverbrauch	kg/kW-st	12,7	12,1

[1]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1911, S. 745.

144. Turbinen mit Zwischendampfentnahme.

In vielen Industriezweigen wird Dampf zu Heiz-, Koch-, Trockenzwecken u. a. mit Überdrücken zwischen etwa 1 bis 6 at benötigt, den man mit Vorteil den Zwischenstufen einer Dampfturbine entnimmt. Der Unterschied des Wärmeinhaltes der Heizdampfmenge zwischen Anfangsdruck und Heizungsdruck wird, von Strahlung und Leitung abgesehen, theoretisch vollkommen in Arbeit umgewandelt, denn die innere Verlustwärme bleibt dem Dampfe einverleibt, und wird in der Heizung nützlich verwertet. Um den Heizdampfdruck, wie es der Betrieb erfordert, möglichst unverändert zu erhalten, wird die Turbine durch ein Überström- bzw Drosselventil in zwei Hälften geteilt. Ist die im Hochdruckteile von der durchströmenden Menge geleistete Arbeit gerade so groß, wie sie der Betrieb augenblicklich fordert, so wird das Überströmventil geschlossen und der Niederdruckteil läuft im Vakuum. Wird anderseits dauernd kein Heizdampf benötigt, so schließt man die Heizleitung, öffnet das Überströmventil ganz und läßt die Turbine wie eine normale arbeiten. Sinkt jedoch während des Heizbetriebes die benötigte Heizmenge nur vorübergehend auf Null, so muß der vorgeschriebene Heizdampfdruck dennoch eingehalten werden und das Überströmventil muß gegen den Niederdruckteil so stark drosseln, daß sich an den Entnahmestellen der Druck wenig ändert.

Entwurf des Wärmeschaubildes.

Für den Entwurf des Wärmeschaubildes kommen nach obigem folgende Hauptfälle in Betracht.

I. Höchste Leistung bei höchstem Heizdampfbedarf. Setzen wir Düsengruppenregelung im Hochdruck voraus, so wird nach Abb. 869 der Druckverlauf in Abhängigkeit

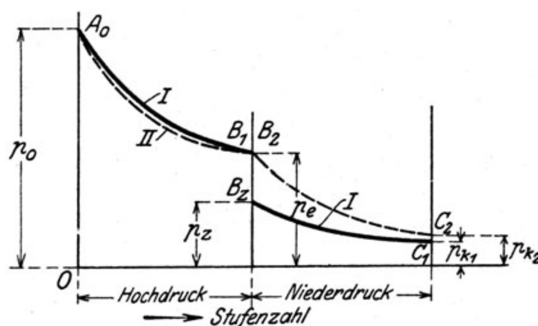


Abb. 869. Druckverlauf in der Entnahmeturbine in Abhängigkeit von der Stufenzahl.

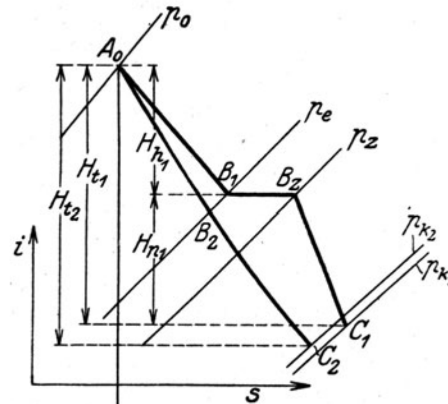


Abb. 870. Entropieschaubild zu Abb. 869.

der Stufenzahl gemäß Linie I im Hochdruckteil vom Anfangsdruck p_0 bis zum Heizdruck p_e verlaufen. Den Niederdruckteil wird in diesem Betriebsfall eine geringere Dampfmenge durchströmen als im unten betrachteten Fall II. Demzufolge wird der Anfangsdruck p_z kleiner als p_e. Im J-S-Schaubild, Abb. 870, erhalten wir eine Entspannung von A_0 auf den Punkt B_1, dann eine Drosselung mit $i =$ konst. bis auf den Druck p_z, von da eine Ausdehnung auf den Punkt C_1 beim Kondensatordruck p_{k1}.

II. Höchstleistung bei einer Heizdampfentnahme = Null. Man wird die Turbine so zu entwerfen haben, daß unnütze Drosselungsversuche vermieden werden. Demnach wird gemäß der punktiert eingetragenen Linie II in Abb. 869 die Entspannung im Hochdruck ebenfalls von p_0 nach p_e führen, allein mit einer schärfer sinkenden Kurve, da die Dampfmenge im Hochdruck geringer ist als vorhin. Im Niederdruckteil erfolgt die Ausdehnung wie punktiert von B_2 nach C_2, zum Kondensatordruck p_{k2}. Im J-S-Schaubild, Abb. 870, verläuft die Ausdehnung von A_0 über B_2 nach C_2. Wir beziehen den Zustand in allen Punkten auf den schon beruhigten Dampf (vernichtete Auslaßenergie) und bezeichnen mit

G_t die stündliche Gesamtdampfmenge in kg,
G_h die entnommene (Heiz-) Dampfmenge in kg/st,
G_n die durch den Niederdruck strömende Dampfmenge in kg/st.

Dann lauten mit den in Abb. 870 einbeschriebenen Wärmegefällen die Energiegleichungen für Fall I und II:

$$G_{t1} H_{h1} + G_{n1} H_{n1} = 632\, N_{i\,max} \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

$$G_{t2} H_{t2} = 632\, N_{i\,max} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

$$\frac{p_z}{G_{n1}} = \frac{p_e}{G_{t2}} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

$$G_{t1} = G_{h\,max} + G_{n1} \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Hierin ist $G_{h\,max}$ durch den Betrieb vorgeschrieben. Gl. (2) gibt sofort G_{t2} und die Gleichungen (1) und (3) sind durch „Probieren" nach G_{t1} p_z aufzulösen. Man wird etwa zwei bis drei Werte von p_z annehmen, aus dem Entropieschaubild H_{h1}, H_{n1} abgreifen, aus (1) G_{t1}, dann $G_{n1} = G_{t1} - G_{h\,max}$ berechnen, sowie p_z/G_{n1} bilden, als Kurve über p_z auftragen, und so durch Interpolation (graphisch durch Schnitt mit der Geraden im Abstand p_e/G_{t2}) den wahren Wert von p_z/G_{n1}, damit auch p_z und G_{t1} bestimmen.

Denkt man sich diese Bestimmung für eine Reihe von Leistungen erledigt, so kann Gl. (1) nach G_t aufgelöst werden, was mit $N_i = N_e + N_r$ auf

$$G_t = \frac{632\,(N_e + N_r)}{H_h + H_n} + G_h \frac{H_n}{H_h + H_n} \quad (5)$$

führt, und für verschiedene Werte von G_h die in Abb. 871 ersichtliche Abhängigkeit des G_t von N_e ergibt. Die tiefste Linie entspricht reinem Kondensationsbetrieb mit $G_h = 0$. Für die obere Grenzlinie ist $G_t = G_h$, so daß in (1) $G_n = 0$, mithin $G_t = 632\, N_i/H_{h1}$ sich ergibt. Die Zwischenlinien weichen praktisch von Geraden wenig ab.

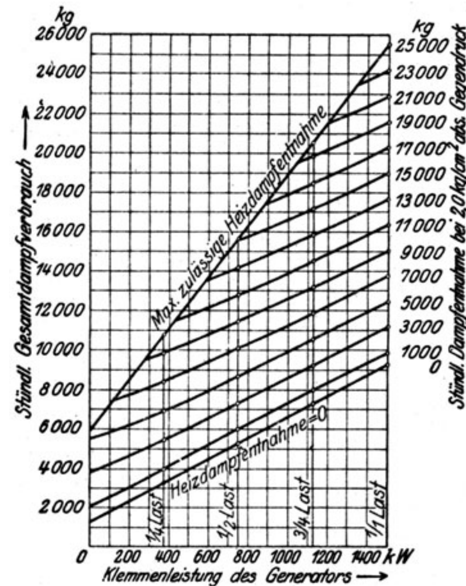


Abb. 871. Dampfverbrauch einer Entnahmeturbine von Bergmann.

Besitzt der Niederdruckteil eine **Mengenregelung**, so wird für die wichtigsten Belastungsstufen der Anfangsdruck des Niederdruckteiles stets p_e sein, und das J-S-Schaubild ist sinngemäß abzuändern.

145. Die Regelung der Entnahmeturbine.

Eine Entnahmeturbine zu regeln bedeutet, daß man ihre Leistung unter tunlichster Aufrechterhaltung der Drehzahl, — und die abzugebende Entnahmemenge unter tunlichster Einhaltung des Entnahmedruckes dem Bedarfe anpaßt. Daraus folgt, daß die Turbine selbstverständlich 1. mit einem Fliehkraftregler ausgestattet ist, der für den Ausgleich der Geschwindigkeit 2. einen Druckregler erhält, der für den Ausgleich des Entnahmedruckes sorgt. Da indes der Fall vorkommen kann, daß der Leistungsbedarf nahezu auf Null sinkt, nicht aber der Heizdampfbedarf, so wird eine weitere Vorrichtung anzubringen sein, die selbsttätig die benötigte Heizdampfmenge aus dem Kesseldampfvorrat anliefert. Schließlich ist eine besondere Sicherheitsvorrichtung erforderlich, die bei plötzlicher vollständiger Entlastung der Turbine verhütet, daß sich der Inhalt der Heizleitungen nach dem Niederdruckteil entleert und die Turbine zum Durchgehen bringt.

Hieraus folgen nachstehende Regelungsforderungen.

1. Bei einer Zunahme der Belastung aber gleichbleibender Dampfentnahme muß der Drehzahlregler sowohl das Hauptregulier- als auch das Überströmventil (oder -ventile) mehr öffnen, denn bei unverändert stehenbleibendem Überströmventil würde der Heizleitung eine zu große Dampfmenge zugeführt, die zu einer Druckerhöhung und so zu einem nachträglichen Eingreifen des Druckreglers führen würde.

2. Bei gleichbleibender Leistung soll bei einer Zunahme des Heizdampfbedarfs der Druckregler, der infolge Sinkens des Entnahmedruckes in Tätigkeit tritt.

das Hauptventil anheben, das Überströmventil senken. Dadurch wird die den Niederdruckteil durchströmende Menge und ihre Arbeitsabgabe geringer, während diejenige der vergrößerten Hochdruckmenge größer ist. Das Maß der Verstellung soll den vollständigen Ausgleich der Leistung anstreben.

Diese Vorschriften unterscheiden sich von den bei der Zweidrucksteuerung für das Frisch- bzw. Abdampfventil gegebenen nur dadurch, daß beim Eingreifen des Drehzahlreglers dort beide Ventile nacheinander, hier hingegen gleichzeitig zu heben oder zu senken sind. Die hierfür erforderliche kleine Abänderung ist, wie unten am Beispiel der A. E.-G.-Turbine gezeigt wird, leicht anzubringen; und so sind alle im vorigen Abschnitt besprochenen Steuerungen auf die Entnahmeturbine übertragbar.

Was die Sicherheitsvorrichtungen betrifft, so verweisen wir auf die Ausführungsbeispiele unten.

Ausführungsformen der Entnahmeturbine und ihrer Steuerung.

Die **Allgemeine Elektrizitäts-Gesellschaft** Berlin bildet gemäß Abb. 872 die Hochdruckseite als zweikränzige Curtisstufe aus. Das Überströmventil wird in eine größere Zahl von

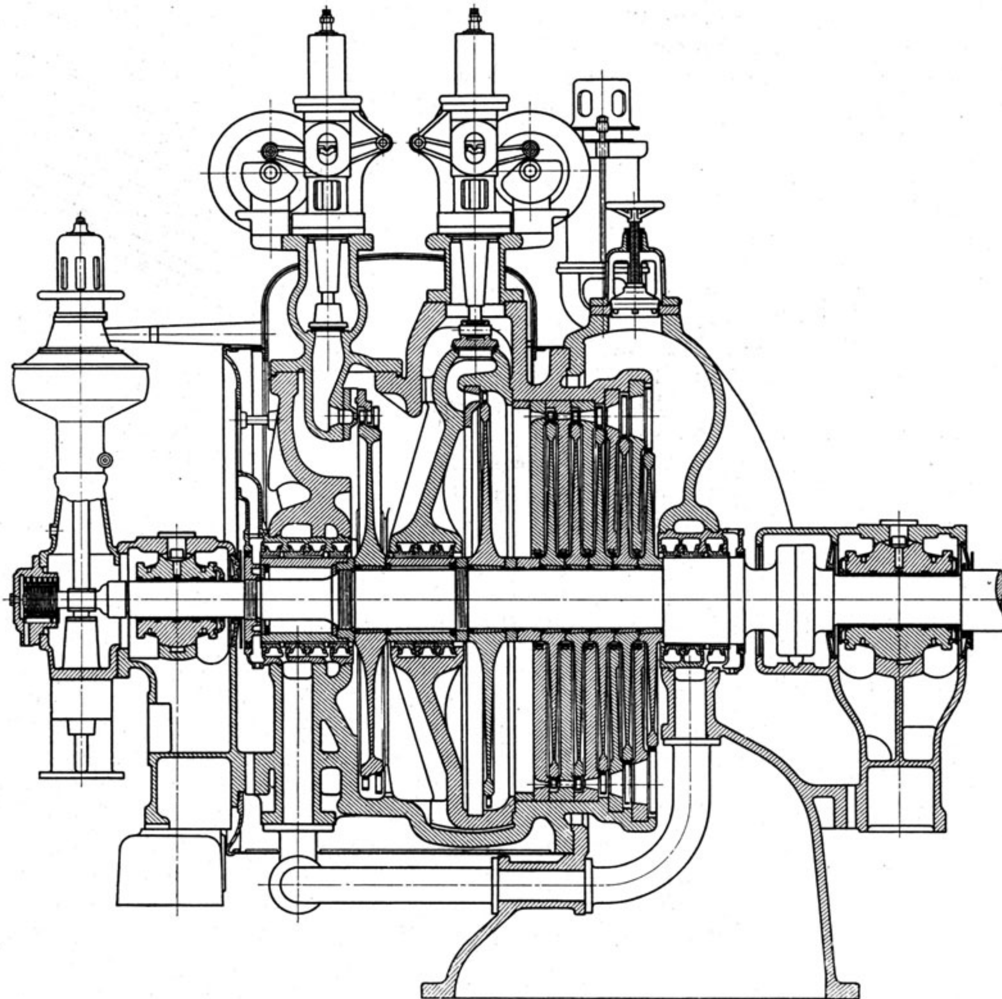


Abb. 872. Entnahmeturbine der Allgem. Elektrizitäts-Gesellschaft.

Gruppenventilen geteilt, die der Reihe nach geöffnet werden und dadurch den Drosselungsabfall im Niederdruckteil großenteils zu vermeiden gestatten. Abb. 873 ist eine Ansicht der Außensteuerung, wobei G_1 den Drehkolben des Hochdruck-, G_2 denjenigen des Niederdruckkraftgetriebes, D den Kolben des Druckreglers bedeuten. Während der Einwirkung des Drehzahlreglers bildet A_2 den festen Drehpunkt und die Steuerventile werden im

gleichen Sinne betätigt; beim Eingreifen des Druckreglers bildet A_0 den festen Drehpunkt und die Ventile bewegen sich im entgegengesetzten Sinne. Wird die Dampfentnahme dauernd

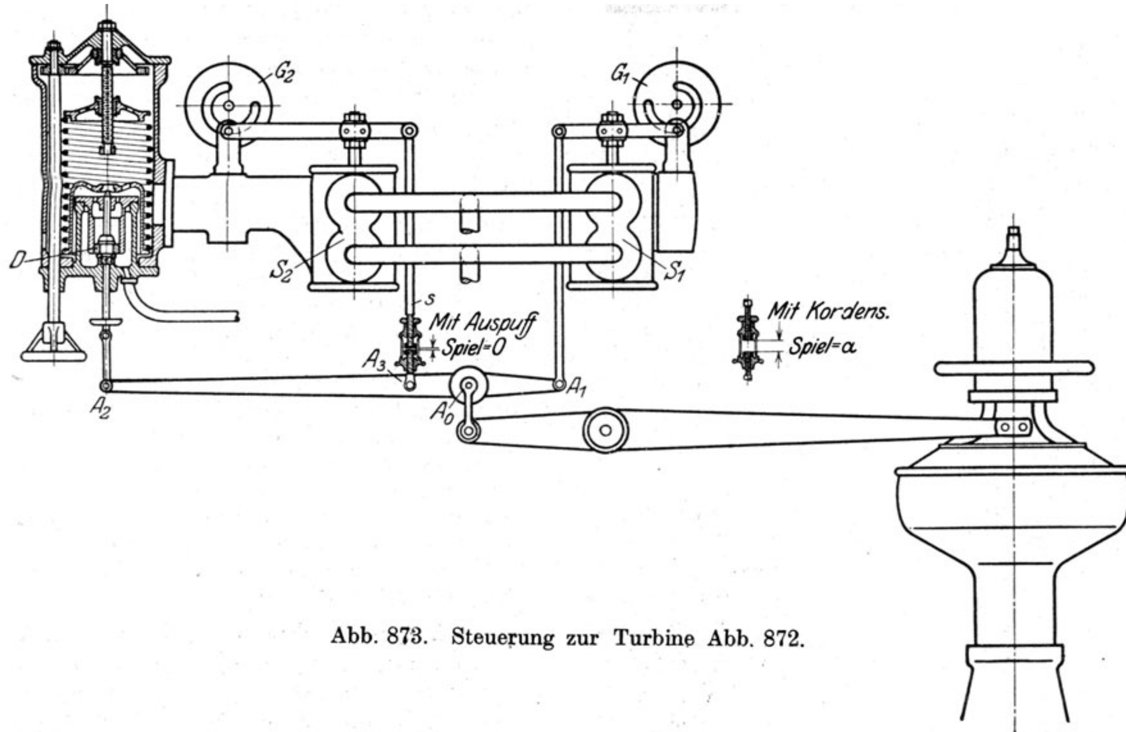


Abb. 873. Steuerung zur Turbine Abb. 872.

abgestellt, so verlängert man die zur Niederdrucksteuerung führende Zugstange *s*, wodurch die Niederdruckventile im Hubbereich des Drehzahlreglers dauernd geöffnet bleiben.

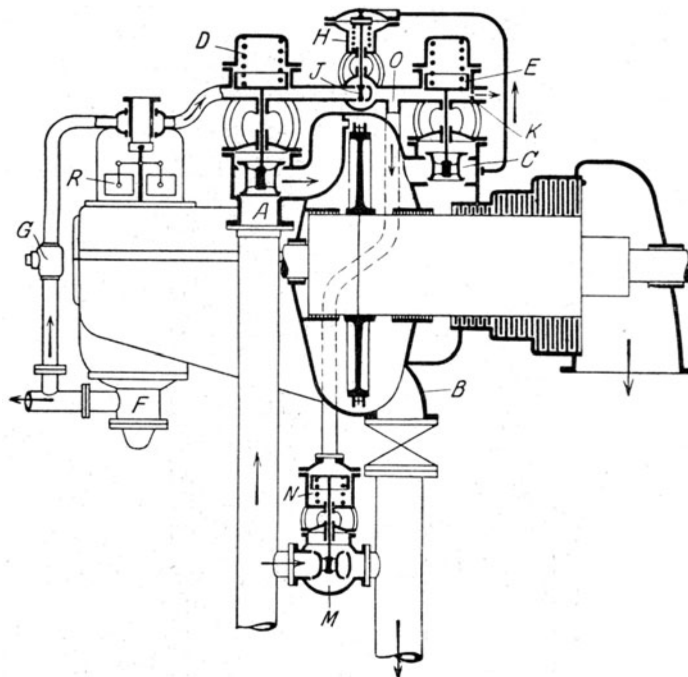


Abb. 874. Entnahmesteuerung von Brown, Boveri & Cie.

Die **A.-G. Brown, Boveri & Cie.** benützt ihre oben beschriebene Zweidrucksteuerung in der Ausführungsform Abb. 874. Es bedeutet *A* das Hauptreglerventil, *C* das Überströmventil, *D, E* die zugehörigen Kraftkolben, *R* den Fliehkraft-, *H* den Druckregler. Abb. 875

stellt die Einzelheiten des letzteren dar. Darin ist beachtenswert die Ausführung der biegsamen Membrane, die sich unter der Wirkung des Heizdruckes durchbiegt und durch einen Kranz von radialen Hebeln Q gestützt wird. Der kleine Kolben G bildet eine Ölbremse für den Drosselschieber. Wird die Dampfentnahme dauernd abgestellt, so schraubt man das Stiftventil P ganz auf, wodurch, wie die Pfeile L andeuten, das Öl drosselungsfrei unter den Kolben des Überströmventiles gelangt und dieses dauernd in angehobenem Zustande erhält.

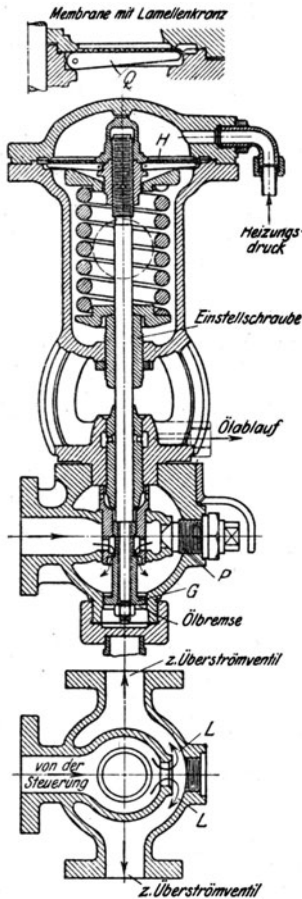


Abb. 875. Druckregler zu Abb. 874.

Das **Nachfüllen der Heizleitung** bei sinkender Leistung der Hauptturbine erfolgt durch das Drosselventil M, welches für gewöhnlich durch die darüberliegende Feder N geschlossen gehalten wird. Auf den zu N gehörenden Kolben wirkt der Öldruck der Steuerung durch die bei O sich abzweigende Leitung. Bei abnehmendem Heizdruck wird durch den Druckregler der Öldruck gedrosselt. Sobald dieser bei schon geschlossenem Überströmventil unter einen bestimmten Wert sinkt, überwiegt die Kraft der Feder N, Ventil M wird geöffnet und läßt gedrosselten Dampf nachströmen. Bei B wird als letzte Sicherheitsmaßregel ein Rückschlagventil nach Abb. 875a eingeschaltet, das durch sein Eigengewicht schließt, durch einen Wasserbremskolben am Flattern verhindert wird und durch ein Handrad bei dauernder Außerbetriebsetzung festgestellt werden kann.

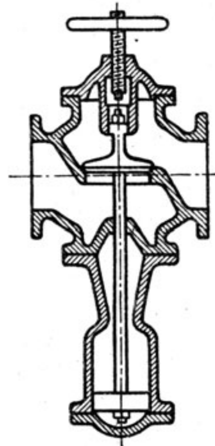


Abb. 875a. Rückschlagventil zu Abb. 874.

Bergmann Elektrizitätswerke A.-G. verwenden in Zusammenhang mit der in Abb. 887b dargestellten Düsensteuerung einen Heizdampfregler, der vom Druck und zugleich von der verbrauchten **Heizdampfmenge** beeinflußt wird.

Zu diesem Zwecke ist ein von unten federbelasteter Kolben auf der Oberseite dem Heizdampfdrucke ausgesetzt, auf der unteren Seite

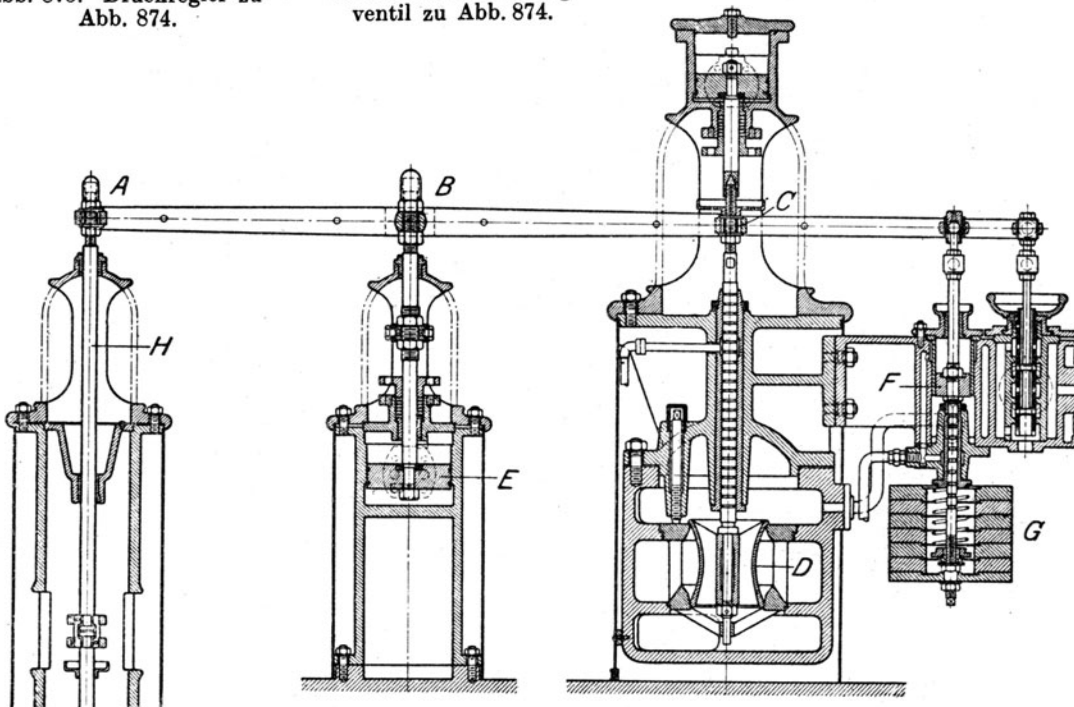


Abb. 876. Entnahmeregelung nach Thomsen.

mit dem engsten Querschnitt eines in die Heizleitung eingeschalteten Venturimeters verbunden. Je größer die Heizdampfmenge, um so kleiner ist jene Pressung, der Kolben sinkt und schließt mittels Kraftgetriebes das Überströmventil. Neuerdings ist gleichzeitige Beeinflussung auch der Frischdampfventile vorgesehen; so daß bei gleichbleibender Leistung der Fliehkraftregler nicht gestört wird.

Die **A.-G. Atlas,** Kopenhagen, verwendet nach Entwürfen von Prof. Thomsen mechanische Koppelung nach Abb. 876.

A ist der Angriff des Hauptventiles, das durch Kraftkolben *E* bei festliegendem Drehpunkt *C* betätigt wird. Verharrt der auf *E* wirkende Fliehkraftregler in Ruhe und ändert sich die Entnahmemenge, so greift der durch Gewicht *G* belastete Kolben *F* des Druckregulators ein. Er öffnet bei zunehmendem Entnahmedruck Ventil *C* und schließt gleichzeitig vermöge Hebels *ABC*, indem *B* den festen Drehpunkt abgibt, das Einlaßventil. Eine Änderung in der Entnahmemenge kann also ausgeglichen werden ohne den Drehzahlregler zu beeinflussen. Bei einer Leistungsänderung hingegen wird nachträglich auch der Druckregler nachregulieren müssen. Abb. 877 zeigt die Gesamtanordnung bei gleicher Bezeichnung der Teile wie in Abb. 876.

Die **A.-G. Görlitzer Maschinenbauanstalt und Eisengießerei** verwendet eine Lösung, bei der höchste Wirtschaftlichkeit das Ziel ist. Zu diesem Zwecke wird das Überströmventil *A* mit einem besonderen Heizventil *B* so verbunden, daß, wenn eines schließt, das andere öffnet. Die gezeichnete Stellung entspricht dem Betriebe als reine Kondensationsmaschine mit einer Heizdampfentnahme Null. Bei großer Dampfentnahme wird umgekehrt *A* geschlossen, *B* voll eröffnet. Bei einer Zwischengröße der Entnahme ist sowohl *A* wie *B* teilweise offen.

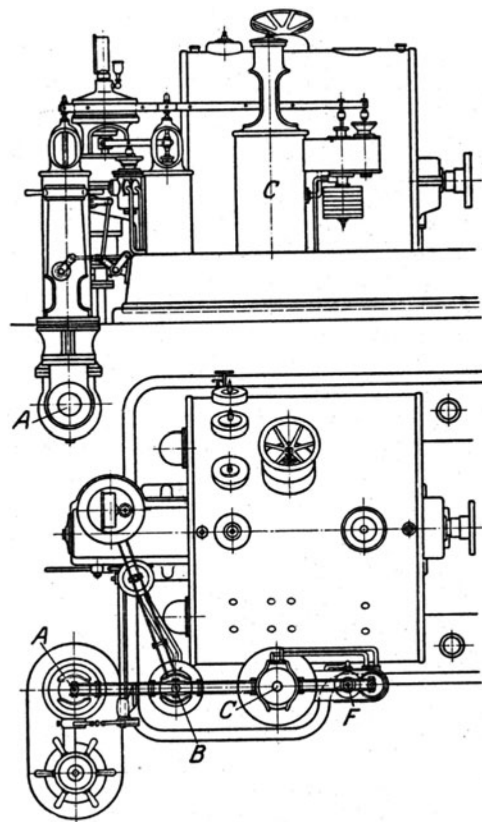


Abb. 877. Gesamtanordnung der A.-G. Atlas zu Abb. 876.

Dabei kann der Heizdampfdruck geringer sein, als der Druck an der Überströmungsstelle. Die damit verknüpfte kleine Arbeitseinbuße wird durch die geringere Drosselung des zum Niederdruck strömenden Dampfes eingebracht, was insbesondere bei großen Turbinenleistungen und geringen Entnahmemengen, oder wenn Dampf nur selten entnommen wird, oder wenn die Turbine nur vorübergehend Vollast hergeben muß, sonst aber mit Teillast läuft, Vorteile ergibt. Die Regelung beruht auf geigneter Beeinflussung des Haupt- und des Überströmventiles, so daß auch bei vollständiger Kraftabstellung das Überströmen des Heizungsdampfes in den Niederdruckteil, also ein Durchgehen der Turbine, verhütet wird. Wenn umgekehrt das Frischdampfventil vollkommen angehoben ist, wird das Heizventil *B* geschlossen. Dieser Fall tritt ein, wenn zuviel Heizdampf entnommen wird und die Drehzahl der Maschine unter einen bestimmten Betrag zu sinken anfängt. Der kinematische Zusammenhang ist ferner so beschaffen, daß bei schwankender Entnahme die Drehzahl nicht beeinflußt wird.

Daß der Betrieb auch ohne Koppelung von Frischdampf- und Überströmventil störungsfrei verlaufen kann, beweisen die nachfolgenden Ausführungen.

Die **A.-G. Escher, Wyss & Cie.** betätigt nach Abb. 879 das Überströmventil *C* durch den Druckregler *E*, dessen Gegenfeder *H* durch Handrad *G* nachstellbar ist und durch Bremse *J* gedämpft wird. Der durch Undichtheit bei *E* austretende Dampf wird zum Kondenser geleitet.

Das Durchgehen der Turbine durch rückströmenden Heizdampf wird durch den Sicherheitsregler *X* verhütet, der nach erfolgter Auslösung, wie in der Abbildung angedeutet ist, vermöge des Hilfsschiebers *L* Drucköl zum Vorsteuerkölbchen *N* treten läßt, wodurch dieses angehoben wird und Drucköl auf die Oberseite des Kraftkolbens *D* treten läßt, während die Unterseite sich durch Leitung *P* entleeren kann. Handhebel *S* dient zur Abstellung von Hand. Indem man *Z* von Hand niederdrückt, kann die Turbine wieder in normalen Betrieb versetzt werden.

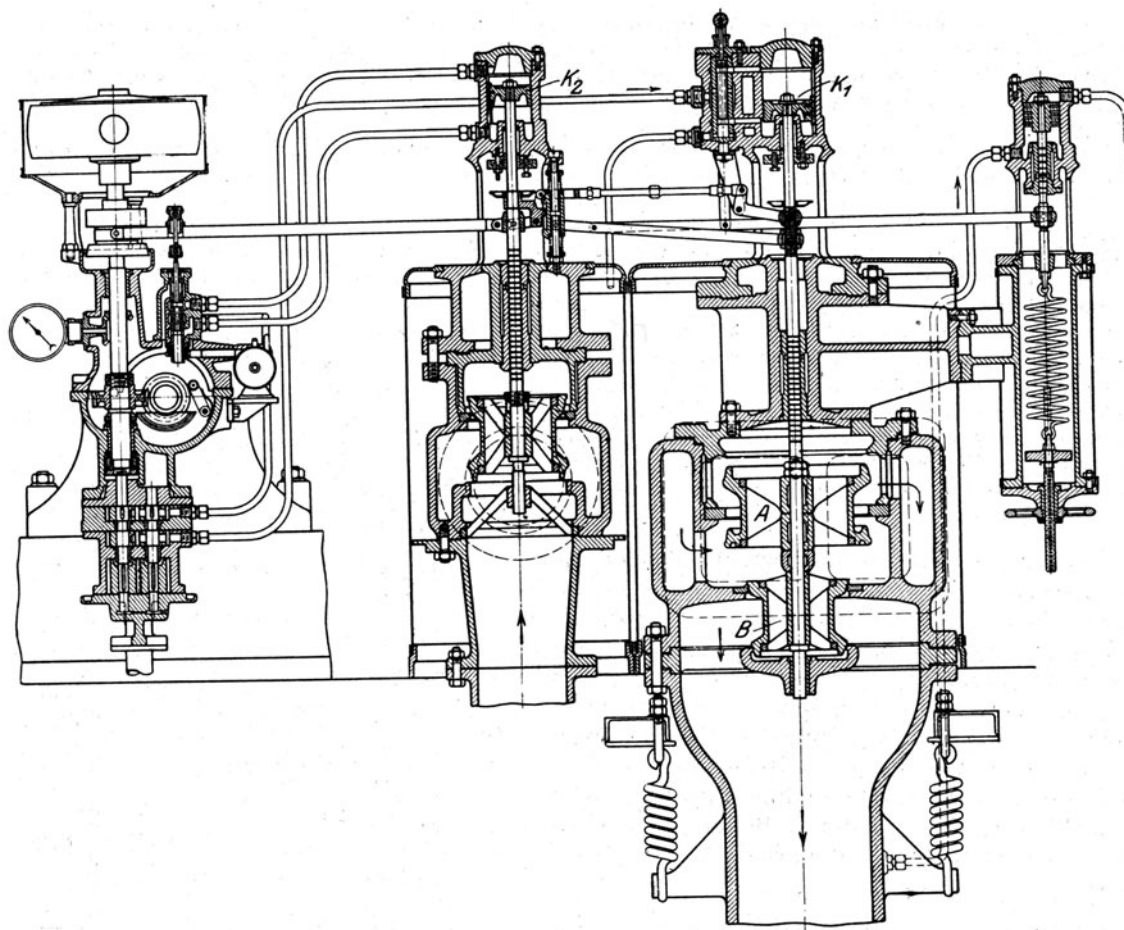


Abb. 878. Entnahmesteuerung der Görlitzer Maschinenbauanstalt.

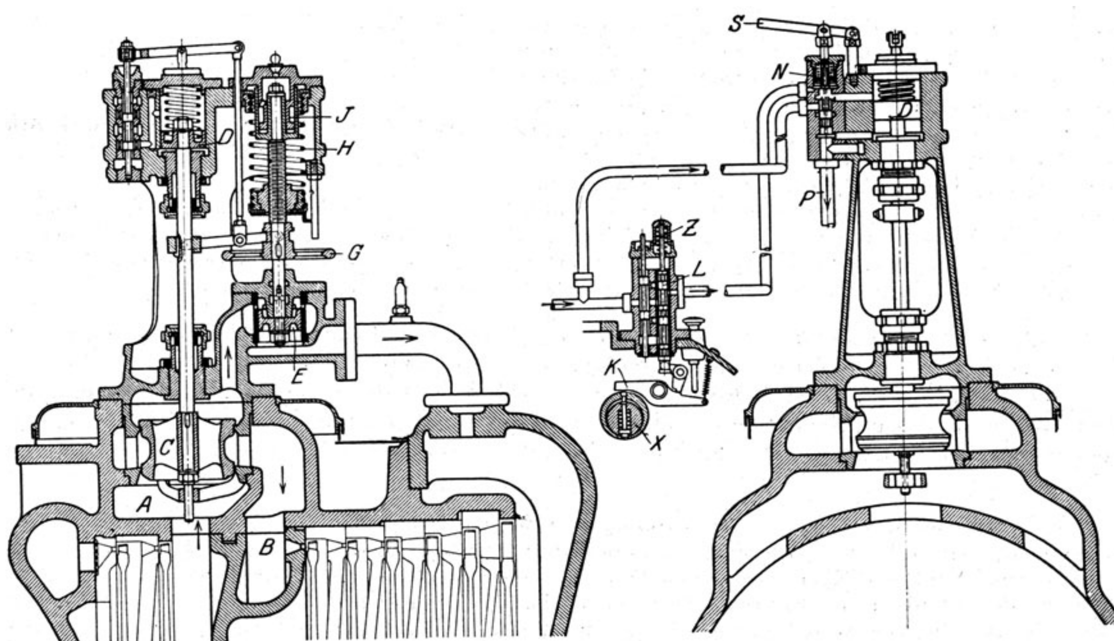


Abb. 879. Entnahmeturbinen-Steuerung von Escher, Wyss & Cie.

Die **Maschinenfabrik Augsburg-Nürnberg A.-G.** benutzt nach Abb. 880 ein Hauptüberströmventil U, das durch den Druckreglerkolben D mit Hilfe des Kraftkolbens K in üblicher

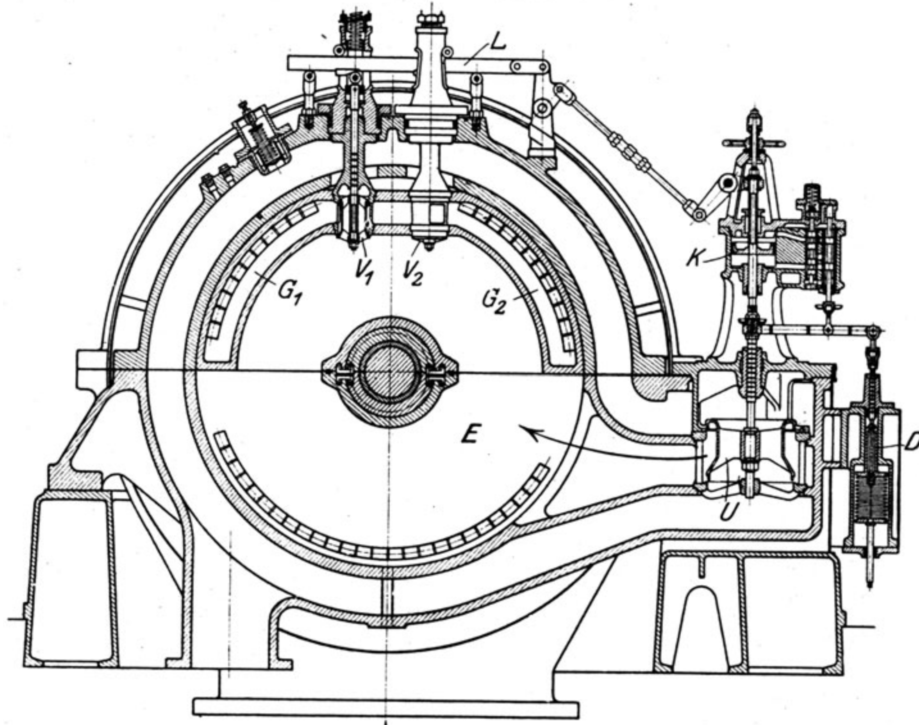


Abb. 880. Entnahmeturbinensteuerung der M.A.N.

Weise gesteuert wird. Innerhalb des Einströmungsraumes E zum Niederdruckteile sind zwei weitere Leitdüsengruppen G_1 G_2 abgegrenzt, die durch die zugehörigen Ventile V_1 V_2 mit E in Verbindung gebracht werden. Diese Ventile werden vom Kraftkolben K, wenn sein Hub eine gewisse Größe überschritten hat, durch das Schubgetriebe L der Reihe nach eröffnet. Hierdurch wird das Sinken des Druckes vor dem ersten Leitrad des Niederdruckes hintan gehalten.

Melms & Pfenninger verwenden eine Abart ihrer Zweidrucksteuerung Abb. 881. R ist der Angriff des Drehzahlreglers, der mittels Schieber S_2 den Kraftkolben K_2 des Frischdampfventiles steuert. Die Rückführung erfolgt durch Gestänge G und Hebel $A_2 B C_2$, dessen Endpunkt C_2 die Rückführhülse H_2 bewegt. Punkt B ist bei unveränderlichem Heizdruck fest.

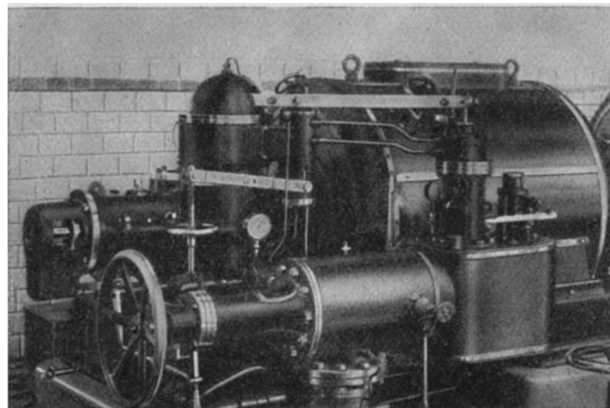


Abb. 882a. Steuerungsansicht zu Abb. 882.

Der mit S_2 verbundene Schieber S_1 steuert den Primärkolben K_1, dessen hydraulisches Gestänge zum Kraftkolben K_1' des Überströmventils V_1 führt. Steigt der Regler, so sinken sowohl das Frischdampf- wie das Überströmventil. Steigt der Heizdruck, so geht Regulierkolben R_h in die Höhe, Drehpunkt A ist fest, C_2 spielt vorläufig die Rolle eines festen Punktes, also wird das Frischdampfventil geschlossen. Darauf greift der sinkende Drehzahlregler ein, indem er beide Ventile wieder etwas öffnet. Feder F ist mit dem Regler unwandelbar verbunden, kann also zu einer Drehzahlverstellung benutzt werden.

Die **A. B. de Lavals-Angturbin** führt für die in Schweden verbreiteten Sulfitfabriken Mehrfach-Entnahmeturbinen aus, deren Steuerungsgerippe in Abb. 882 dargestellt ist.

Abb. 881. Entnahmeturbinensteuerung von Melms & Pfenninger.

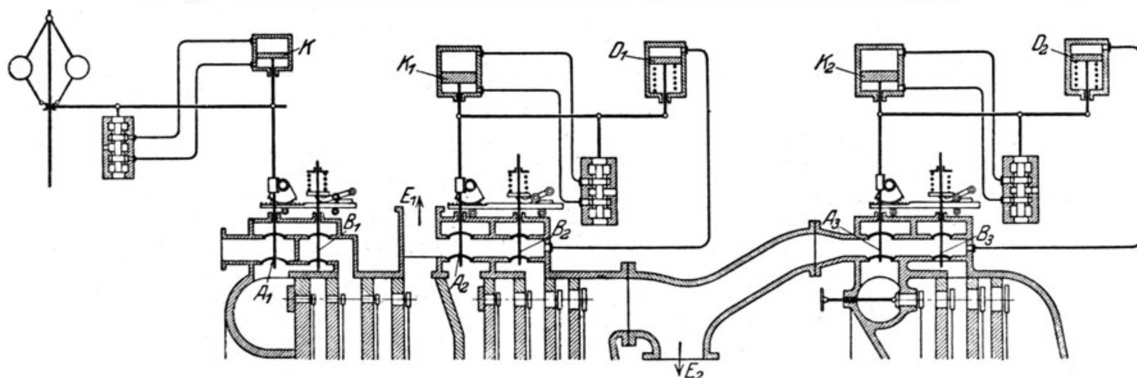


Abb. 882. Steuerungsgerippe der de Lavalschen Mehrfachentnahmeturbine.

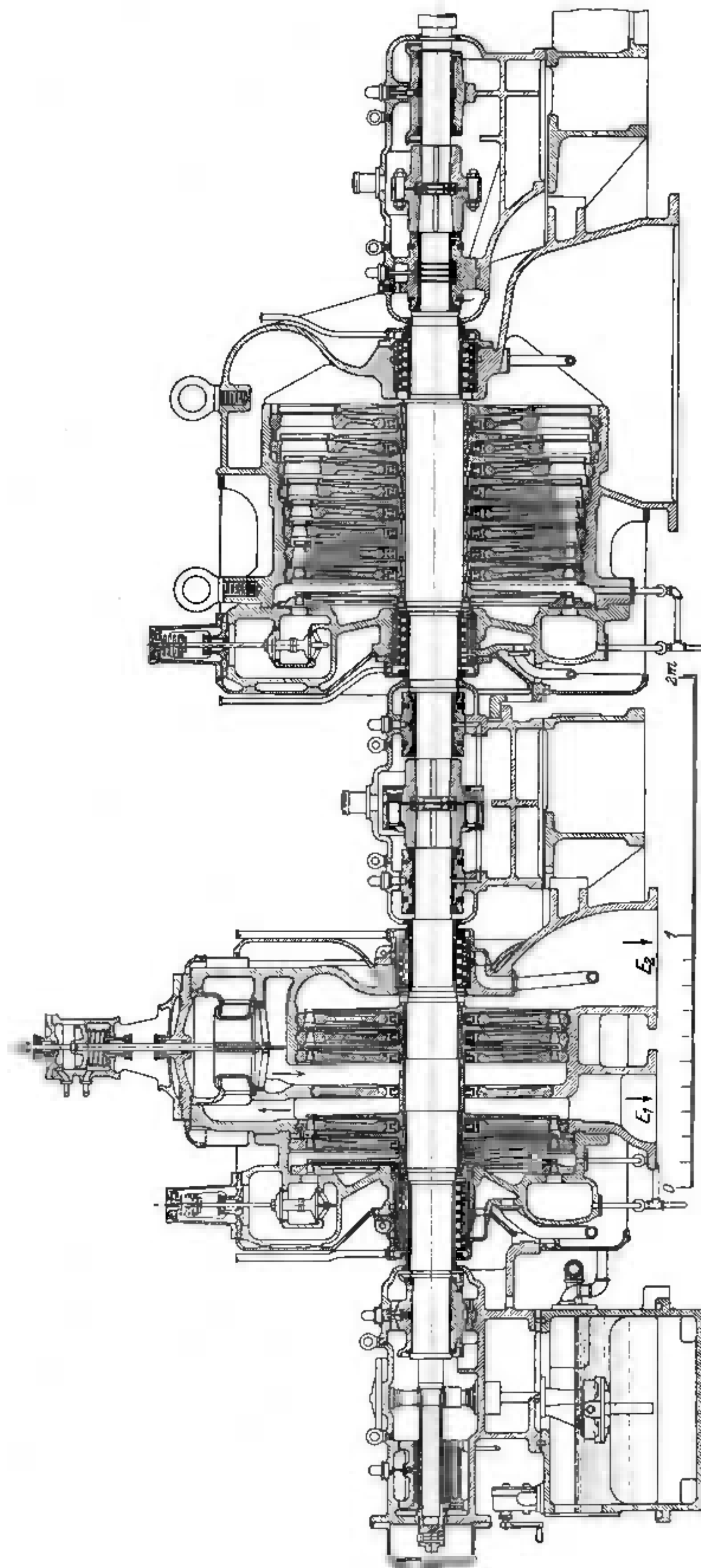


Abb. 883. Mehrfachentnahmeturbine der A. B. de Lavals-Angturbin.

A_1 ist das Haupteinlaß-, B_1 das Überlastungsventil, das vom Kraftkolben K durch ein Zahnradsegment und Zahnstange mitgenommen wird. E_1 ist die erste Entnahmestelle mit 6 at Druck; A_2 das Haupt-, B_2 das Überlastungsventil der Mitteldruckturbine, deren Regelung nur vom Druckregler D_1 abhängt. E_2 ist die zweite Dampfentnahmestelle mit 2 at Druck. Der Dampfrest wird dem Niederdruckteil zugeführt mit A_3 B_3 als Haupt- und Überlastungsventil, die ihrerseits allein durch den Druckregler D

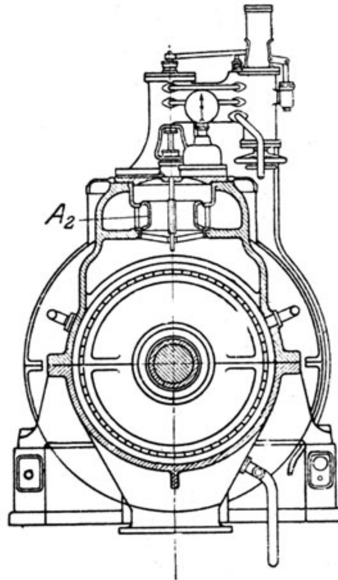


Abb. 883a. Mitteldruck.

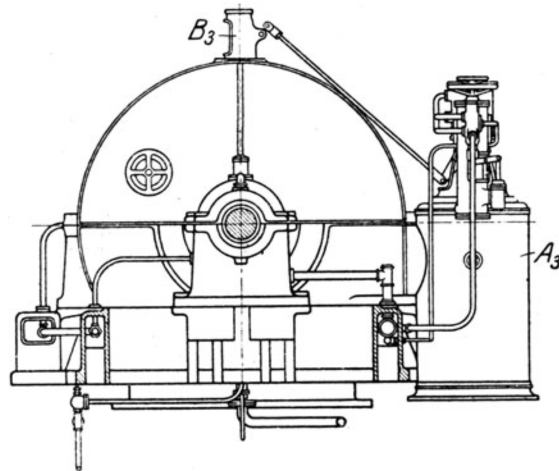


Abb. 883b. Niederdruckteil zu Abb. 883.

betätigt werden. Lichtbild 882a stellt die Außenansicht der Hoch- und Niederdrucksteuerung dar. Abb. 883 bis 883b sind Schnitte einer größeren derartigen Turbine für 5000 PS bei 3000 Umdr./min für eine Gesamtdampfmenge von 54000 kg/st, wobei bis zu 25000 kg an der ersten, bis zu 25000 kg an der zweiten Stelle entnommen werden. Die große Stufenzahl bezweckt eine Erhöhung der Wirtchaftlichkeit über das gewöhnliche Maß. Wie die Ansicht des Niederdruckteiles Abb. 883b erkennen läßt, wird hier das Hauptventil A_3 unmittelbar durch ein Kraftgetriebe, das Überlastungsventil B_3 hingegen durch eine Hebelübersetzung betätigt. Abb. 883a zeigt den Schnitt durch das Mitteldruck-Überströmungsventil A_2. Die Erbauerin betont, daß, obwohl die drei Steuerungen voneinander unabhängig arbeiten, die Regelung rasch wirkt und stets frei von Pendelungen verläuft.

146. Die Gegendruckturbine.

Wenn die gesamte Dampfmenge die eine Turbine durchströmt, zu Heiz- (Koch-) u. a. Zwecken verwendet wird, entsteht die „Gegendruckturbine", deren Name an die erhebliche, zwischen 1 bis 6 at Überdruck liegende Größe des Auspuffdruckes erinnern soll. Sie ist, wenn man will, eine „Entnahmeturbine", deren Niederdruckteil weggelassen worden ist.

Die Aufgabe der Steuerung ist besonders einfach, wenn die Turbine, wie sehr häufig der Fall ist, **mit anderen Turbinen parallelgeschaltet arbeitet, die die Regelung der Leistung übernehmen.** Man unterstellt dann das Einlaßventil dem Druckregler, der auf unveränderlichen Gegendruck reguliert und so viel Dampf in die Turbine schickt, als für die Heizung benötigt wird. Ein Drehzahlregler muß indessen auch vorhanden sein, der in Wirksamkeit tritt, wenn die Gesamtleistung des Netzes unter die Höchstleistung der Gegendruckturbine sinkt. Eine in solchen Fällen brauchbare Lösung stellt die Ausführung Abb. 884 von Brown, Boveri & Cie. dar. Z bedeutet die Zahnradpumpe, U ein Drosselventil, B die Durchflußbüchse, D den Druckregler, K den Kraftkolben mit dem Nebenabfluß bei L. Der Drosselschieber V macht bei steigendem Heizdruck einen weiteren Abfluß ins Freie bei X auf.

In allen Fällen ist die Beigabe eines Zusatzventiles für Nachfüllung von Frischdampf in die Heizleitung empfehlenswert, das in Wirksamkeit zu treten hat, wenn der Heizdruck einen gewissen Mindestwert erreicht, unabhängig von der Eröffnung des Einlaßventiles. Es gibt in der Tat Anlagen, wo der Heizdampfbedarf zeitweilig größer ist als die bei Höchst-

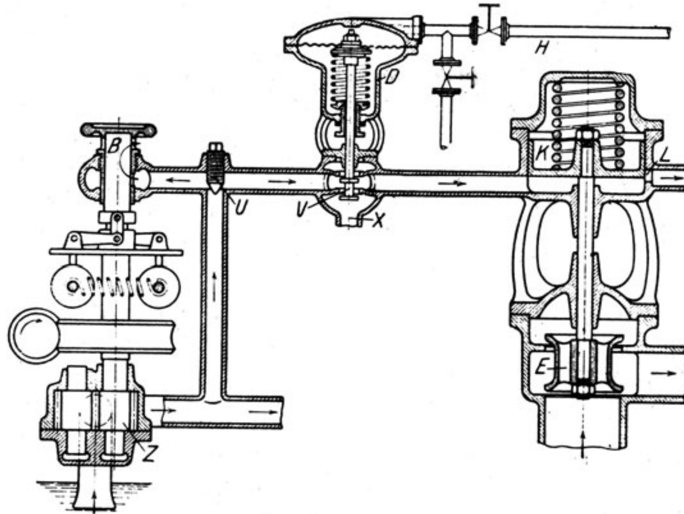


Abb. 884. Gegendruckturbinensteuerung von Brown, Boveri & Cie.

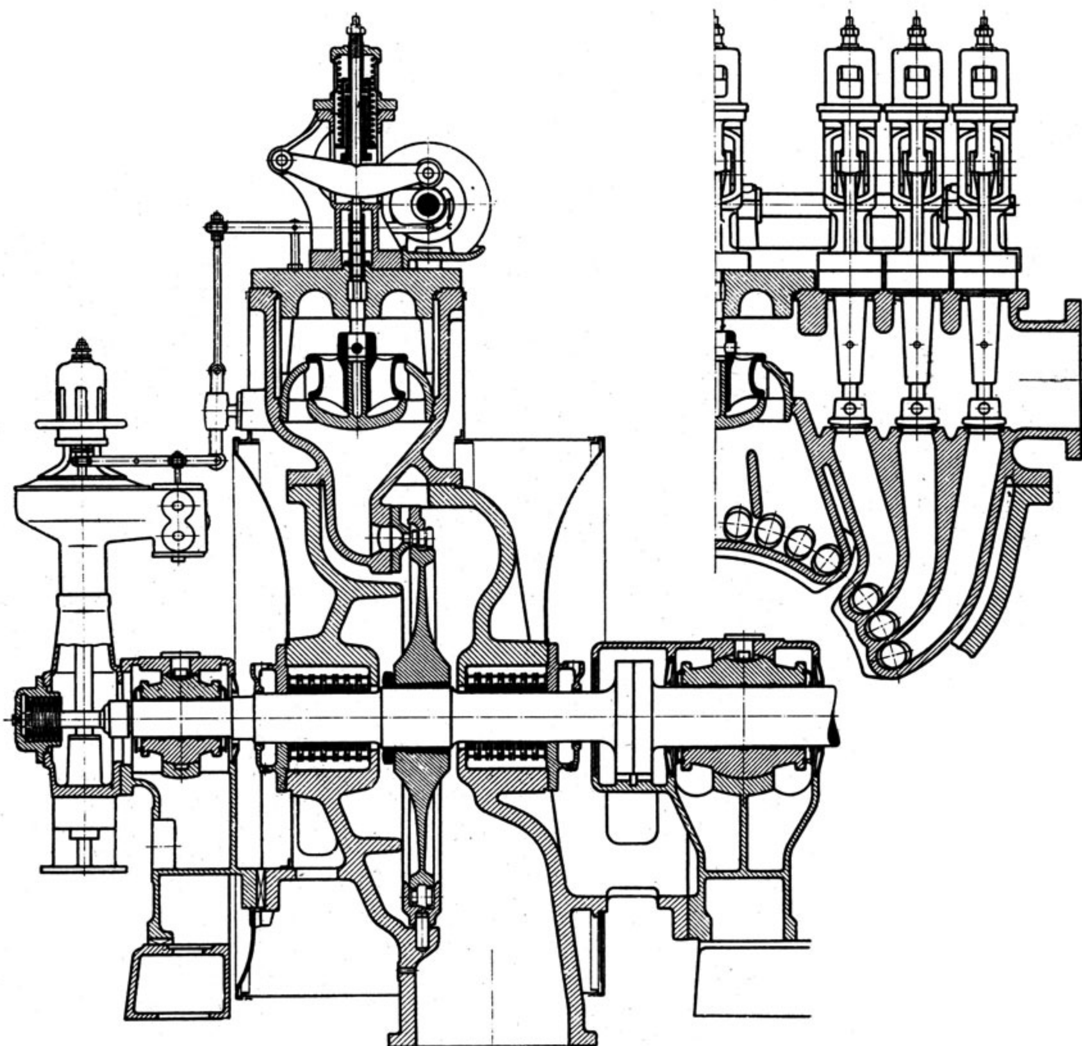


Abb. 885. Gegendruckturbine der A.E.G.

leistung durchströmende Dampfmenge. Anderseits ist von der Praxis schon die Forderung aufgestellt worden, daß die Turbine mit freiem Auspuff soll fahren können, wenn kein Heizdampf, wohl aber eine Arbeitsleistung benötigt wird. Eine derartige Verschwendung ist offenbar nur entschuldbar, wenn sie so selten vorkommt, daß sich die Aufstellung einer Niederdruckturbine nicht lohnt.

Die konstruktive Druckbildung einer Gegendruckturbine mit einem zweikränzigen Curtisrad und Düsengruppenregelung in der Ausführung der Allgem. Elektrizitäts-Gesellschaft, Berlin, ist in Abb. 885 veranschaulicht.

147. Turbinen-Lokomotive.

Den Turbinenantrieb auf Lokomotiven einzuführen, wurde schon mehrfach versucht. So hörte man von einer Lokomotive der North British Locomotiv Co. nach Plänen von Reid und Ramsay, bei welcher eine elektrische Kraftübertragung auf die Achsen geplant war, so daß eine Rückwärtsturbine überflüssig würde. Dem Vernehmen nach ist auf gleicher Grundlage eine neue Lokomotive im Bau. Obwohl manches für die Vorteile der elektrischen Kraftübertragung angeführt werden kann, so dürfte doch, seit sich das Zahnradgetriebe für Schiffantrieb auch bei größten Kräften lebensfähig erwiesen hat, der unmittelbare Antrieb der Laufachsen vorzuziehen sein. Dies ist die Lösung, die Zoelly gewählt

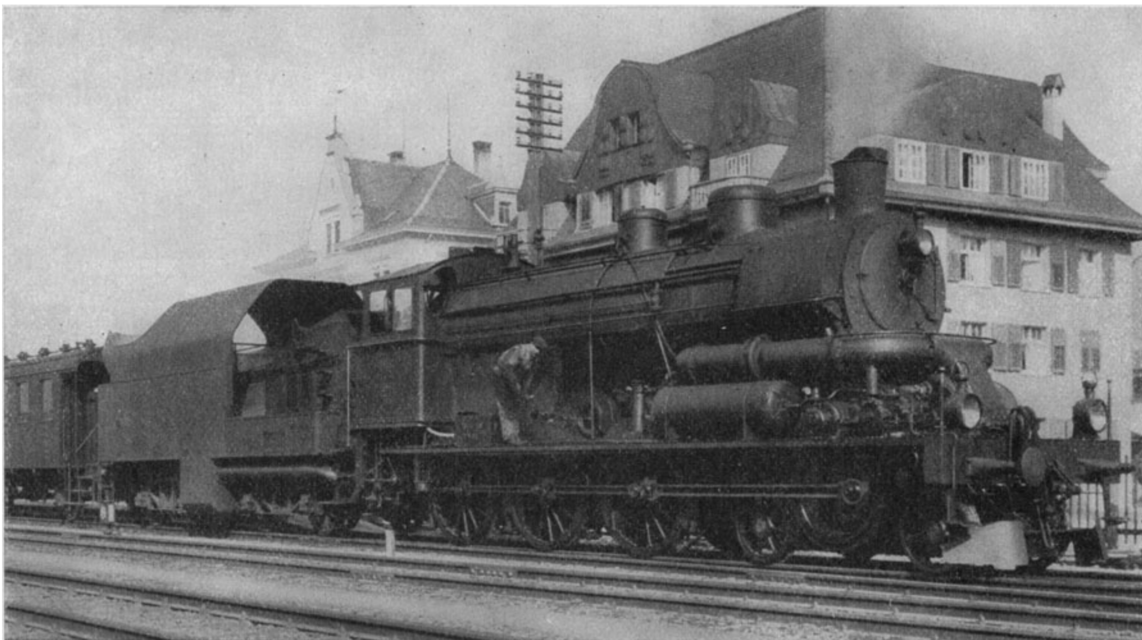


Abb 886. Lokomotive mit Turbinenantrieb nach Zoelly.

und inzwischen im Verein mit der A.-G. Escher, Wyss & Cie. und der Schweiz. Lokomotiv- und Maschinenfabrik Winterthur an einer von den schweizerischen Bundesbahnen zur Verfügung gestellten Heißdampflokomotive mit Erfolg in die Wirklichkeit umgesetzt hat. Das wesentliche Element der neuen Bauart ist die Einführung der Kondensation. Da indessen die Versuche, Oberflächenkondensatoren mit Luft zu kühlen, infolge der Unmöglichkeit, im gegebenen Raume eine genügend große Kühlfläche unterzubringen, gescheitert sind, wurde ein normaler Oberflächenkondensator mit Wasserkühlung aufgestellt; das erwärmte Kühlwasser wird durch eine im Tender aufgestellte Kühlvorrichtung zurückgekühlt. Nach Mitteilungen von Dr. Zoelly besteht diese im wesentlichen aus einem langen Blechkasten mit auf der oberen Seite angebrachten Wasserverteilungsröhren. Eine durch Dampfturbine angetriebene Kreiselpumpe saugt das Kühlwasser durch eine Rohrleitung aus dem Tenderbehälter, drückt es durch die Kühlröhren des Kondensers in die erwähnten Verteilungsröhren, von wo es in Form feiner Strahlen als dichter Regen durch den Blechkasten hin-

abfällt. Der während der Fahrt erzeugte natürliche Luftstrom bewirkt die Verdunstung und Abkühlung. Der Wasserverlust beträgt nur ungefähr die Hälfte des Wasserverbrauches einer gewöhnlichen Lokomotive und wird durch einen selbsttätigen Schwimmer aus dem Tendervorrat ergänzt. Bei zahlreichen bereits ausgeführten Probefahrten hat sich die Kondensation und Rückkühlung bewährt und das gewünschte Vakuum erzeugt, wodurch eine Kohlenersparnis von rund 30 v. H. gegenüber normalen Heißdampflokomotiven gesichert ist. Mithin ist sowohl der Kohlen- wie auch der Speisewasservorrat, für gleiche Fahrstrecken gerechnet, bei Turbinenantrieb geringer als bei der gewöhnlichen Lokomotive. Als weiterer Vorteil ist die Verwendung warmen Speisewassers anzuführen, welches ölfrei mit etwa 50° C. vom Kondensator durch die Speisepumpe angesaugt, in einem Vorwärmer auf rund 120° C. erwärmt, in den Kessel gedrückt wird. Da stets die gleiche, vollkommen salzfreie Menge zirkuliert, wird bloß eine kleine Zusatzmenge an frischem Wasser erforderlich, so daß die Kesselsteinbildung und Verschmutzung nur ganz geringfügig sein können. Der Kessel erzeugt Dampf von 14 at Überdruck bei 350° C; die Dampfturbine ist 6stufig und entwickelt 1000 PS an der Welle. Bei einer Fahrgeschwindigkeit von 60 km/st ist die Drehzahl 6000/min. Die Kraft wird mittels doppeltem Zahnradgetriebe auf eine Blindwelle übertragen, die durch Koppelstangen mit den Triebachsen verbunden ist. Der Kondensator liegt unter dem Kessel zwischen dem Rahmen. Zum Absaugen der Luft dient eine umlaufende Vakuumpumpe. An Stelle des üblichen Blasrohrs wird das Feuer durch einen von besonderer kleiner Dampfturbine angetriebenen Ventilator angefacht. Abb. 886 veranschaulicht den Gesamtaufbau. Die Dampfturbine ist auf der vorderen Plattform über dem Drehschemel quer zur Längsachse der Lokomotive aufgestellt. Man erkennt das sich gabelnde Auspuffrohr, den Speisewasservorwärmer und Zubehör; unterhalb der Plattform die Blindachse mit der Triebstange, im Hintergrunde des Tenders ein Ablenkblech für die sich entwickelnden Dampfschwaden. Das Anfahren und die Rückfahrt gehen anstandlos vor sich. Die schon im ersten Anlauf gewonnenen Ergebnisse berechtigen zu weitgehenden Hoffnungen auf die Weiterentwicklung dieser Lokomotivart.

147a. Kleinturbinen.

Die Turbinen kleiner Leistung sind in bezug auf Wirtschaftlichkeit gegenüber ihren großen, Tausende von Pferdestärken abgebenden Schwestern stark benachteiligt. In eine günstigere Lage geraten sie seit der Anwendung von Zahnradübersetzungen, was die Radgröße und Stufenzahl erheblich herabsetzt. Es gibt zahlreiche Verwendungsarten, wo die Kleinturbine mit künstlich erhöhtem Gegendruck arbeitet, und der Dampf nachher in einer Turbine hohen Wirkungsgrades ausgenützt wird. So wird bei den Antriebsturbinen der Kondensationspumpen der Abdampf der Kleinturbine in eine Zwischenstufe der Hauptturbine geleitet. In gleicher Weise wird der Abdampf der an Bord von Schiffen benützten Hilfsmaschinen verschiedener Art dem Zwischenbehälter der Hauptturbine zugeführt. Die konstruktive Ausführung für Kesselspeisepumpen haben wir beispielsweise in Abb. 661 vorgeführt; weitere Beispiele folgen in Abschn. 155 bei den Kondensationsanlagen. Hier besprechen wir einige in neuerer Zeit aufkommende **Schaltungen für die Kondensationshilfsturbinen.**

Die Abdampfmenge, die jene Turbinen an die Hauptturbine abliefern, genügt, um diese bei kleiner Leistung zum Durchgehen zu bringen, selbst wenn der Schnellschluß richtig eingreift, denn dieser schließt ja nur die Frischdampfzufuhr ab. Für gewöhnlich hilft man sich durch ein Wechselventil, das die Kleinturbine selbsttätig unmittelbar auf den Kondensator, oder auch auf freien Auspuff umschaltet (vgl. die Thyssen-Turbine).

Man kann jedoch die Hilfsturbine nach dem Vorgang der M. A.-G. Breitfeld, Danek & Co.[1]) auch der Herrschaft des Hauptreglers unterstellen, Abb. 887. Zu diesem Behufe wird der Abdampf der Turbine *T* zum Wechselventil *W*, das im Leerlauf eine Verbindung zum freien Auspuff *A*, und bei wachsender Belastung vermöge Kraftkolbens *B* eine solche mit Leitung *C* zur Hilfsdüsengruppe *D* herstellt. Wesentlich ist, daß als erste Hauptturbinenstufe ein zweikränziges Curtisrad benützt wird, welches das vom Abdampf dargebotene Druckgefälle gut verarbeiten kann, und daß der Gegendruck der Hilfsturbine **beständig auf der Höhe von 5 at abs. erhalten wird.** Da nach dem Curtisrad ein gemäß Abb. 887a von 3 auf 0,5 at abs. sinkender Druck herrscht, so beträgt das Druckgefälle bei Vollast 2 at, und steigt bis

[1]) Man vergl. den auch für Zweidruckturbinen wichtigen Aufsatz von Melan, Dampfturbinen mit Zusatzdampf in Z. f. d. ges. Turbinenwesen 1919, S. 341.

$^1/_4$ Last auf rd. 4 at, wobei die Ausnützung so gut ist wie für den Hauptdampf. Der Druck vor der Hilfsturbine braucht nur bei starken Druckschwankungen im Kessel nachreguliert zu werden: kleine

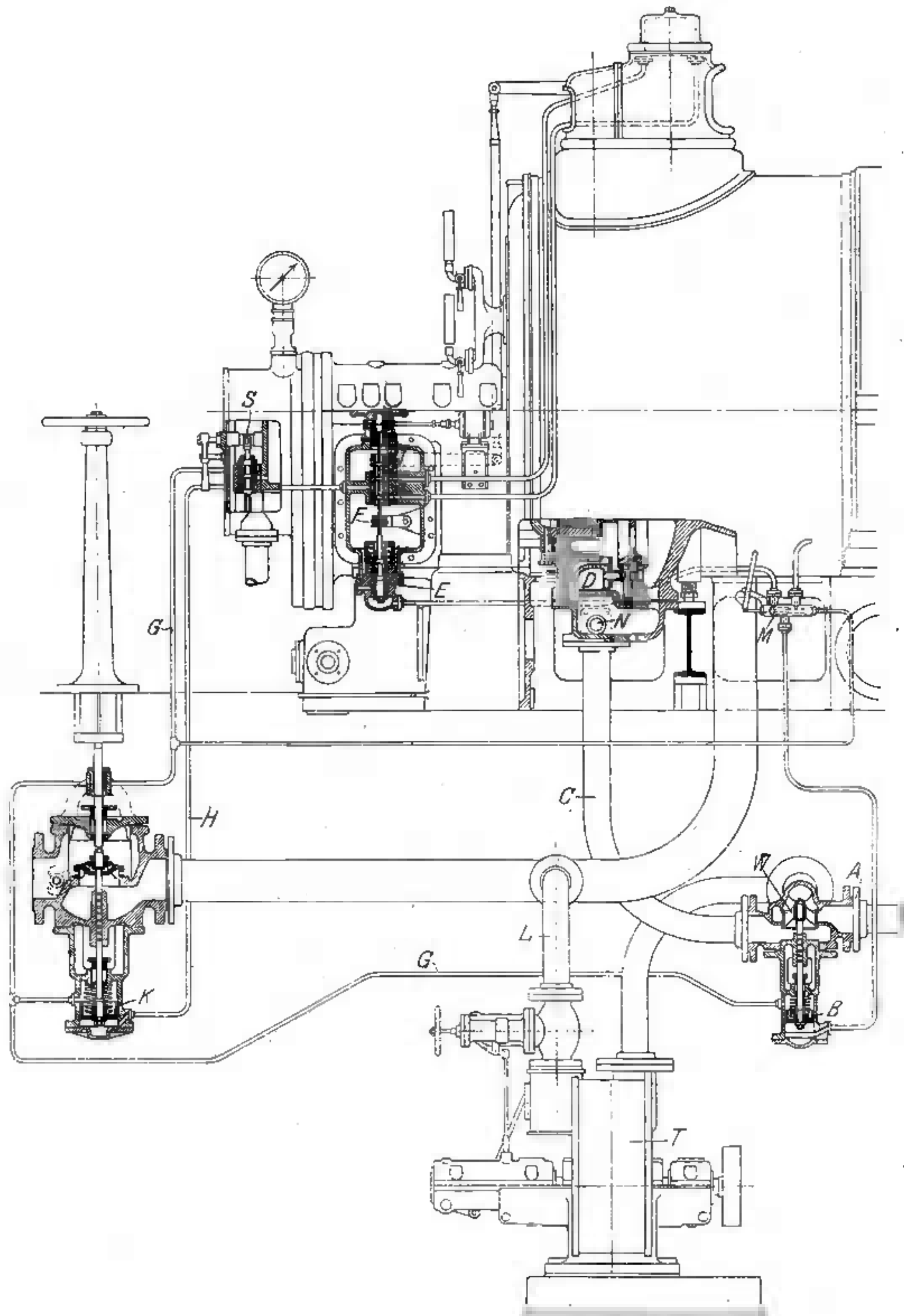


Abb. 887. Steuerung der Kondensationsturbine durch den Hauptregler.

Änderungen beeinflussen die Drehzahl der stets gleich belasteten Turbine nur unwesentlich. Die Öldruckregelung des Wechselventiles wird mittels hydraulischen Gestänges von einem Steuerschieber *E* der Tosischen Art durch den bei *F* angreifenden Hauptregler besorgt. Da Frischdampf erst hinzu-

tritt, wenn die volle Leistung des Abdampfes erreicht ist, kann mit dem **Hilfsdampf auch angefahren werden.** Der Sicherheitsregler S läßt durch Leitung G Drucköl über den Kolben K des Hauptventiles und über Kolben B des Wechselventiles treten, während das Öl unter Kolben K durch Leitung H ent-

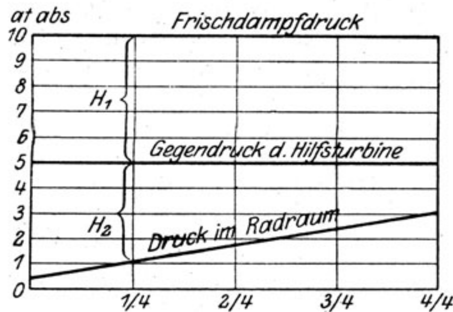


Abb. 887a. Druckverteilung zu Abb. 887.

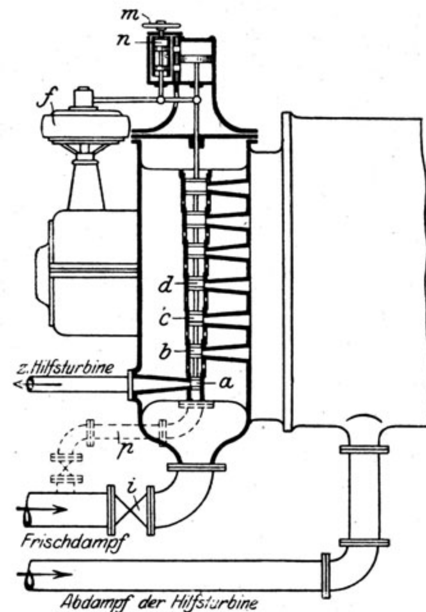
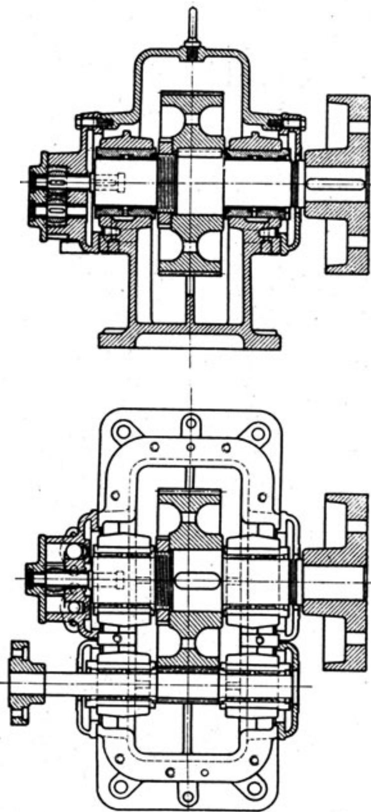


Abb. 887b. Hilfsturbinensteuerung von Bergmann.



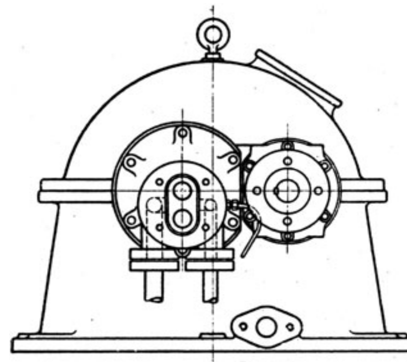


Abb. 888a. Getriebe zu Abb. 888.

Abb. 888b. Seitenriß zu Abb. 888a.

weicht, wodurch die Hauptturbine, und da die Abzweigung L zur Hilfsturbine hinter dem Hauptventil liegt, auch diese stillgesetzt werden. Schieber M dient zur Umschaltung von B von Hand; Ventil N erlaubt den Hilfsdampf unmittelbar in die Radkammer zu leiten, wenn der Druck in dieser so hoch werden sollte, daß der Gegendruck der Hilfsturbine über 5 at steigt, was bei Überlastung und starkem Sinken des Kesseldruckes möglich wäre.

Die Bergmann Elektrizitäts-Werke A.-G., Berlin, ordnet gemäß Abb. 887b[1]) die Dampfzuführung der Hilfsturbine im Hauptsteuergehäuse bei a an. Der Drehzahlregler f öffnet der Reihe nach die Ventile $a, b, c \ldots$ usw. Das Hauptventil i ist mit Schnellschluß versehen.

[1]) D. R.-P. Nr. 289275 v. J. 1914.

Der Zufluß zu *a* soll unter Umständen vor *i* entnommen werden, wie die punktierte Leitung *p* andeutet, in der Meinung, daß wenn eines der Organe *b*, *c* . . . klemmt und die Drehzahlsteigerung den Schnellschluß auslöst, durch *a*, wenn die normale Drehzahl erreicht ist, genügend Dampf nachströmt, um die Hilfs- und Hauptturbine in Bewegung zu erhalten, worauf durch Drosselung der Hauptabschließung der Betrieb (mit Handregelung?) wieder aufgenommen und die Störung zu geeigneter späterer Zeit beseitigt werden kann. Die Wahrscheinlichkeit, daß gelegentlich auch *a* selbst klemmen wird, kann freilich nicht ganz von der Hand gewiesen werden.

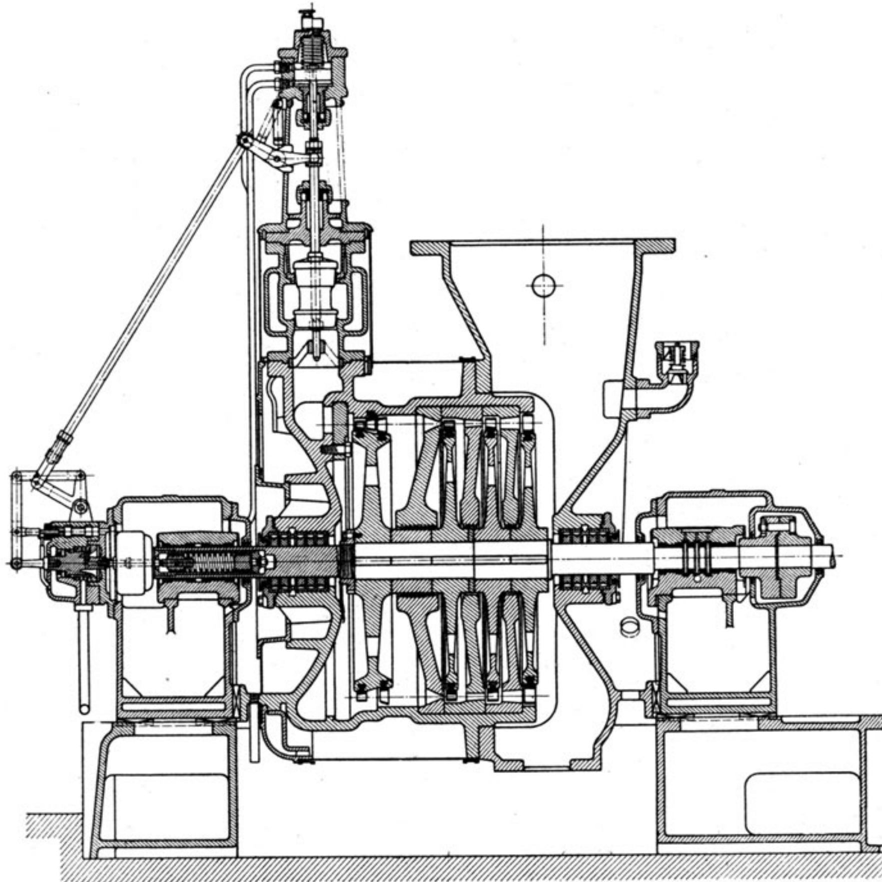


Abb. 888. Kleinturbine von Escher, Wyss & Cie. mit Zahnradübersetzung.

Beachtung verdient die 350 PS-Turbine von Escher, Wyss & Cie., Abb. 888, als der Beginn der Einführung von Zahnradgetrieben im Gebiete kleiner Leistungen. Bei nur 530 mm Durchmesser der Laufräder beträgt die Umfangsgeschwindigkeit infolge der gewählten hohen Drehzahl von 6000/min doch rd. 170 m/sek und man erreicht einen guten Wirkungsgrad. Die Regelung arbeitet mit der in Abb. 508—510 beschriebenen Vorsteuerung. Das zugehörige Zahnradgetriebe Abb. 888 a u. b mit dem Übersetzungsverhältnis 6 : 1 betätigt auch die Ölpumpe für die Turbine. Die Maagschen Stirnräder (s. Abschn. 134) werden durch das aus den Lagern rinnende Öl genügend geschmiert. Die Schaltungsart der Turbine bei Kondensation wird in Abschn. 155 besprochen.

IX. Die Kondensation.

Wir unterscheiden Misch- oder Einspritz- und Oberflächenkondensation, je nachdem Kühlwasser und Dampf unmittelbar zusammentreffen oder durch Kühlflächen getrennt werden, ferner Gleich- und Gegenstromkondensation, je nachdem die Strömungsrichtung von Dampf- und Kühlwasser gleich oder entgegengesetzt sind.

Die Mischkondensation ist billiger, verbraucht weniger Kraft und verträgt auch schlammiges Wasser. Die Oberflächenkondensation liefert demgegenüber eine höhere Luftleere, und man kann das (ölfreie) Kondensat unmittelbar zur Kesselspeisung verwenden, was bei schlechtem Speisewasser von besonderer Wichtigkeit ist.

148. Das theoretische Vakuum; der vollkommene Kondensator.

Hätten wir eine unendlich große Kühlwassermenge zur Verfügung, so wäre der absolute **Sättigungsdruck**, der **der Kühlwassertemperatur** entspricht, das **„theoretische Vakuum"**.

Bei vorgeschriebener Kühlwassermenge von G_w kg für G_d kg Dampf bestimmt sich die Erwärmung desselben im idealen Kondensator mittels der Gleichung

$$G_w (t_2 - t_1) = G_d (i - t_e) \quad \quad (1)$$

wobei t_1 die anfängliche Temperatur,
t_2 die Ablauftemperatur des Kühlwassers,
i den Wärmeinhalt des Abdampfes (aus der Zustandskurve der Turbine zu bestimmen),
t_e die Endtemperatur des Kondensates bedeuten.

Von diesen Größen sind G_d, i, t_1 durch die Umstände der Anlage vorgeschrieben. In einem vollkommenen Gegenstromkondensator könnten wir das Kondensat bis auf die Temperatur des eintretenden Kühlwassers abkühlen, d. h. $t_e = t_1$ machen. Anderseits könnte das Kühlwasser bis auf die Temperatur t_d des eintretenden Dampfes erwärmt werden, also $t_2 = t_d$ werden. Unter t_d können wir die Sättigungstemperatur des eintretenden Dampfes verstehen, da Überhitzung selten ist und eine geringe Erhöhung des Wärmeinhaltes bedeutet. Hiernach ist der **zur Ablauftemperatur des Kühlwassers gehörende Sättigungsdruck das Vakuum des vollkommenen Kondensators.**

Der **Kühlwasserverbrauch** des vollkommenen Kondensators mit vorgeschriebenem Vakuum p_d wäre hiernach mit $t_2 = t_d$ und $t_e = t_1$

$$G_{w0} = \frac{i - t_d}{t_d - t_1} G_d \quad \quad (1a)$$

Beim wirklichen Kondensator wird für das gleiche Vakuum im allgemeinen $t_2 < t_d$; $t_e > t_1$ und die nach (1) berechnete Kühlwassermenge ist größer als die theoretische. Das Verhältnis G_{w0}/G_w können wir als den **Gütegrad des Kondensators** bezeichnen.

149. Einfluß der eindringenden Luft auf die Vorgänge im Mischkondensator.

Die Vorgänge im Kondensator sind in ausschlaggebender Weise von der **mitgeführten Luft** beeinflußt, wie zuerst wohl Weiss[1]) klar erkannt hat.

---

[1]) Die Kondensation, Berlin 1901, und schon früher in der grundlegenden Abhandlung Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1888.

Der Rauminhalt der im Einspritzwasser enthaltenen Luftmenge auf atm Druck und 15^0 C bezogen beträgt nach Bunsen bis zu 2 v. H. des Wasservolumens.

Über die bei Dampfturbinen durch Undichtheit eindringende Luftmenge liegen nur wenige Beobachtungen vor. Ich habe an einer sich sonst in gutem Zustande befindlichen 2000 kW-Anlage bis zu 35 kg Luft in der Stunde feststellen können. Anderseits kann durch sorgfältigste Abdichtung der Betrag außerordentlich herabgesetzt werden; vieles kommt auf die Konstruktion und die Handhabung der Stopfbüchsen an. So konnte ich an einer 4000 kW-Turbine, obwohl alle Luftausgänge mit Meßdüsen versehen waren, überhaupt keine Luftlieferung nachweisen. Freilich entströmte dabei den Stopfbüchsen die bekannte Dampfwolke, die der Turbinenkonstrukteur sich so ungern auf das Verbrauchskonto schreiben läßt. Auch Josse fand bei einer 300 kW-Parsonsturbine bloß 0,25 kg Luft in der Stunde bei 3000 kg Dampfverbrauch, was bei Atmosphärenzustand 6 bis 7 v. H. des Rauminhaltes des Speisewassers ausmacht. Der Kondensator war unmittelbar an die Turbine angeschlossen.

Praktisch wird man **auf je 1000 kg Dampfniederschlag 1,0 bis 0,5 kg Luft rechnen** dürfen, der größere Wert gilt für kleine, der kleinere für große Anlagen.

a) Der Mischkondensator.

Beim **Gegenstrom-Mischkondensator** (Abb. 889) ist die Strömungsrichtung von Dampf- und Kühlwasser entgegengesetzt. Letzteres verläßt den Kondensator an der Stelle, wo der frische Dampf eintritt, und kann daher (muß aber nicht) bis auf die Sättigungstemperatur des Dampfes erwärmt werden. Nach Maßgabe als der Dampf kondensiert, wird der Teildruck der Luft größer, und ist am größten beim Austritt, wo die Temperatur des Gemisches nach Weiß bloß um 4 bis 5^0 C höher zu sein pflegt

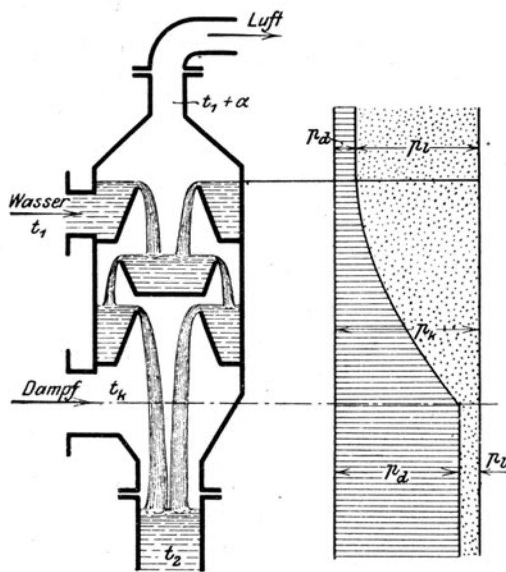


Abb. 889. Gegenstrom-Mischkondensator.

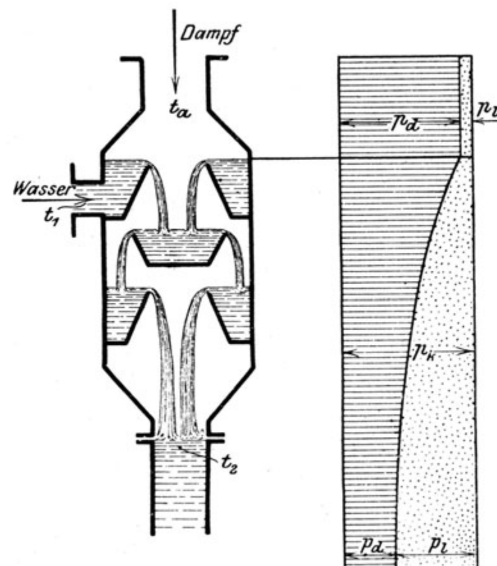


Abb. 890. Gleichstrom-Mischkondensator.

als die des eintretenden Kühlwassers. Da an der Eintrittsstelle des Dampfes der Teildruck der Luft im allgemeinen vernachlässigbar klein ist, wird der **Kondensatordruck** mit dem **zur Temperatur t_2 gehörenden Sättigungsdruck** nahezu identisch sein. Wir nähern uns den Verhältnissen des vollkommenen Kondensators.

Anders beim **Gleichstromkondensator** (Abb. 890), wo das Einspritzwasser und die Dampfluftreste miteinander vermengt abgesaugt werden. Überall im Innern des Kondensators ist nach Daltons Gesetz der angenähert konstante **Gesamtdruck p_k gleich der Summe des Dampfdruckes p_d und des Teildruckes der Luft p_l**

$$p_k = p_d + p_l .$$

Jede Raumeinheit Luft nimmt einen gleich großen Rauminhalt an Dampf mit sich. Je kleiner p_l ist, desto mehr dehnt sich die **dem Gewichte nach gegebene Luft** im Kondensator aus, desto größer muß daher das Ansaugvolumen der Luftpumpe sein. Wäre an der Absaugestelle $p_d = p_k$, so müßte p_l unendlich klein, also das Pumpenvolumen unendlich groß werden. Da also p_d kleiner sein muß als p_k, so muß auch die Ablauftemperatur des Kühlwassers t_2 kleiner sein als die zu p_k gehörende Sättigungstemperatur t_k. Im Mittel darf man

$$t_a = t_k - 5 \text{ bis } 10^0 \text{ C}$$

setzen. Hieraus folgt, daß für gleiche Luftleere, d. h. gleiches t_h, die **Kühlwassermenge bei Gegenstrom erheblich kleiner ist als beim Gleichstrom,** insbesondere bei tiefer Luftleere, wo das Kühlwasser im ganzen nur wenig erwärmt werden darf. Wenn beispielsweise im Gegenstrom die Temperatur von 10^0 auf 20^0 steigt, beim Gleichstrom aber von 10^0 nur auf 15^0 erhöht werden darf, so haben wir im letzteren Fall doppelt soviel Kühlwasser aufzuwenden.

Aber auch das **Fördervolumen der Luftpumpe** wird bei Gegenstrom wesentlich **kleiner** als bei Parallelstrom, indem die Luft bei ersterem auf eine tiefere Temperatur abgekühlt werden kann, während sie bei Gleichstrom mit der Temperatur des Ablaufes gleich ist. Diese Erniedrigung der Temperatur wäre zwar an sich für das Luftvolumen ohne Bedeutung; allein sie bedingt Herabsetzung des Teildruckes von Dampf und Erhöhung des Teildruckes der Luft, also Verdichtung derselben, wodurch eine wesentliche Verkleinerung des Pumpenvolumens bewirkt wird.

Beispiel: Es sei der Kondensatordruck 0,1 at, und die Temperatur des abgesaugten Gemisches bei Gleichstrom 36⁰, dann ist der Teildruck des Dampfes 0,06 at, derjenige der Luft 0,04 at. Arbeiten wir im Gegenstrom und erreichen wir z. B 20⁰, so sind die Teildrucke für Dampf 0,024 at, für Luft 0,076 at. Die Rauminhalte verhalten sich, vom kleinen Temperaturunterschied abgesehen, umgekehrt wie die Pressungen, also brauchen wir im zweiten Fall nur $0{,}04 : 0{,}076 \sim 0{,}53$, d. h. fast nur halb soviel Fördervolumen als mit Gleichstrom.

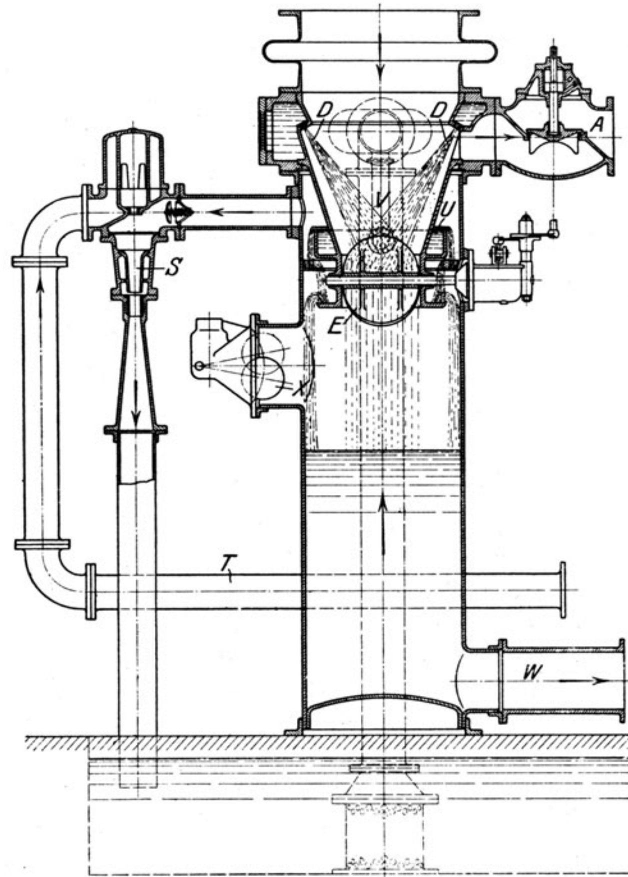


Abb. 891. Mischkondensator von Brown, Boveri & Cie.

Regelung der Einspritzwassermenge.

Um bei kleiner Belastung am Einspritzwasser zu sparen, wird beispielsweise nach dem D. R.-P. 210095 von der A.-G. Brown, Boveri & Cie. in die Einspritzleitung ein Abschlußorgan eingebaut, welches von einem Kolben betätigt wird, auf dessen eine Seite der Druck einer Turbinenzwischenstufe wirkt, während die andere dem Kondensatordruck und der Pressung einer Feder ausgesetzt ist. Bei sinkender Belastung erhält die Feder das Übergewicht, und der Wasserzufluß wird gedrosselt.

Eine **Sicherheitsabstellung** des Einspritzwassers ist erforderlich, wenn die Pumpe versagt, damit die Turbine nicht mit Wasser überschwemmt wird. Meist findet man einen Schwimmer vor, der bei zu hohem Wasserstand ein Luftventil öffnet und hierdurch das Vakuum vernichtet.

Übergang zu einem anderen Beharrungszustand.

Wir nehmen an, es dringe in einen Gegenstromkondensator nicht viel Luft ein, so daß die Temperatur t_2 des abziehenden Wassers fast ganz durch das Mengenverhältnis von Wasser und Dampf und nur in geringem Maße durch die Tiefe des Vakuums bestimmt ist. Wenn wir also an einer in Betrieb befindlichen Anlage die Kühlwassermenge verdoppeln, ohne die Dampfmenge zu ändern, so muß $t_2 - t_1$ rund auf die Hälfte seines Betrages sinken. Nun kann man fragen, wie es dann kommt, daß das Kühlwasser, obwohl nach wie vor dem Stoße des heißen Dampfes ausgesetzt, nicht mehr die Dampftemperatur annimmt? Die Antwort hierauf nötigt uns, auf den **Wärmezustand des ganzen Kondensators** einzugehen. Im ersten Augenblick nach der plötzlich eintretenden Vermehrung des Wasserzuflusses wird sicher die Temperatur des Wassers infolge des ungemein leichten Wärmeaustausches der des Dampfes fast gleich werden, also wird auch fast die doppelte Dampfmenge kondensiert, was nur möglich ist, wenn mehr Dampf aus der Abdampfleitung in den Kondenser nachströmt. Der Rohrinhalt **dehnt sich auf tieferen Druck aus,** wodurch die Temperatur bis nahe auf die des austretenden Wassers gebracht wird. Gleichzeitig wird die Kondensierungszone etwas herabgedrückt, indem in der ersten Zeit zuviel Luft frei wurde, die von der gleichmäßig weiterlaufenden Pumpe nicht aufgenommen werden kann und den

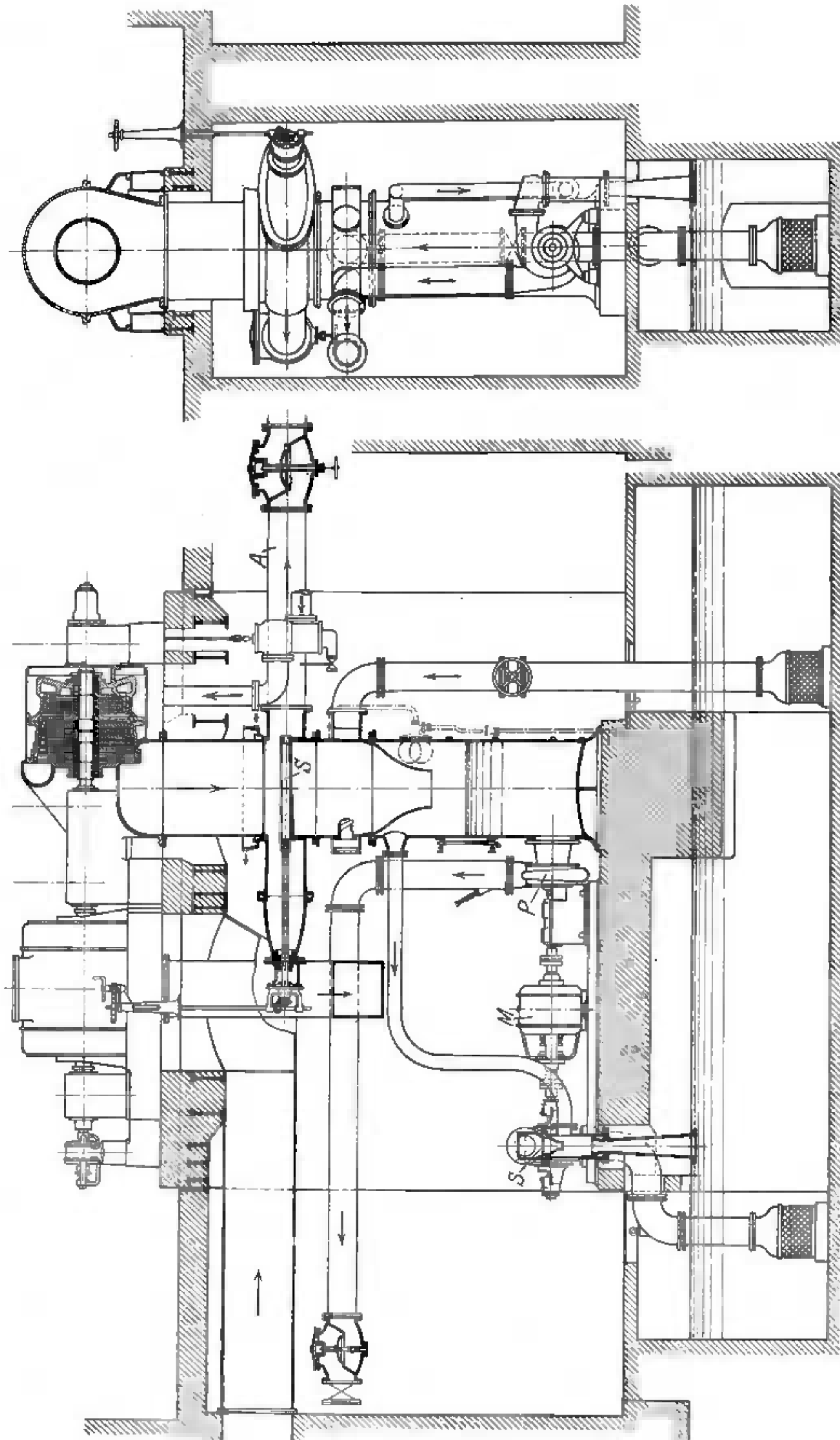


Abb. 892. Mischkondensationsanlage der Maschinenfabrik Oerlikon.

Kondenser teilweise anfüllt. Dadurch wird die Zeitdauer der Berührung zwischen Dampf und Wasser verkleinert, und es werden die Wassertröpfchen in ihrem Kern kälter bleiben. Die schließliche Beharrungstemperatur hängt dann vor allem von der Aufnahmefähigkeit der Luftpumpe ab, wie wir in Abschn. 151 erläutern.

Ausführungsbeispiele von Mischkondensatoren.

Die **A.-G. Brown, Boveri & Cie.** läßt das Einspritzwasser nach Abb. 891 durch zahlreiche im Umkreise aufgestellte Düsen *D* eintreten. Die eintretende Raumverminderung des Dampfes erlaubt eine Einschnürung, in der zugleich die Abschlußklappe für Betrieb mit Auspuff untergebracht ist. Die frei-



Abb. 892 a. Nach abwärts gekehrte Einspritzdüsen.

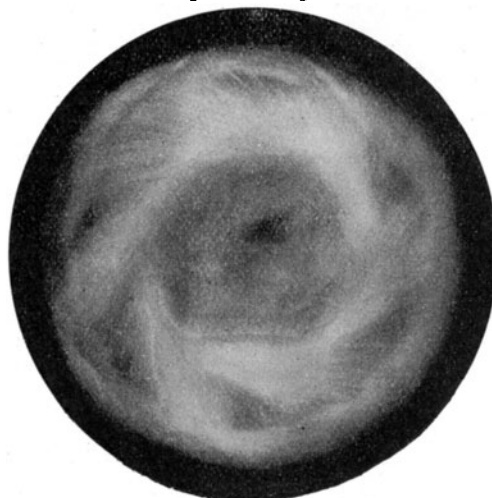


Abb. 892 b. Nach aufwärts gekehrte Einspritzdüsen.

gewordene Luft muß durch den Sprühregen hindurch, den die Überfälle *U* erzeugen, denen frisches Kühlwasser durch Rohr *V* zugeführt wird. Die auf diese Weise im Gegenstrom scharf abgekühlte Luft wird durch die (weiter unten besprochene) Wasserstrahlpumpe *S* abgesaugt, die von Leitung *T* her Druckwasser erhält. Das verbrauchte Einspritzwasser wird bei *W* durch eine Kreiselpumpe abgesaugt. *X* ist ein Schwimmer, der beim Versagen der Kreiselpumpe ein unzulässiges Emporsteigen des Wasserspiegels in die Turbine hinein durch Öffnen eines Lufthahnes und Vernichtung der Luftleere verhindert.

Abb. 892 stellt die vollständige Anlage einer Einspritzkondensation der **Maschinenfabrik Oerlikon** dar. Schieber *S* wird geschlossen, wenn die Turbine mit freiem Auspuff arbeiten soll. *M* ist der Elektromotor, der die Abwasserpumpe *P* und zugleich die zum Strahlentlüfter gehörende Kreiselpumpe treibt. An einer Anlage ähnlicher Art wurde durch ein Glasfenster bei innerer Beleuchtung das Lichtbild 892a aufgenommen, wobei die Einspritzdüsen wie in der Zeichnung schräg nach abwärts gerichtet waren Nachdem man die Düsen unter einem Winkel von 30° schräg nach aufwärts gerichtet hatte, ergab sich das Lichtbild 892b, das eine weit bessere Zersplitterung der Wasserstrahlen erkennen läßt.

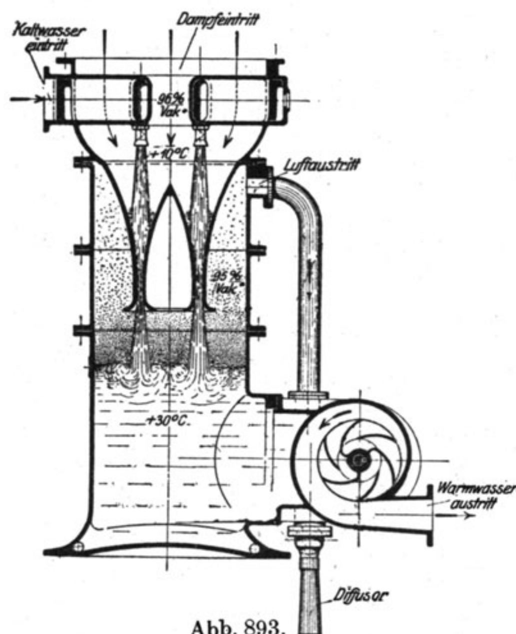


Abb. 893.
Mischkondenser Balcke-Westinghouse-Leblanc.

Die **M.-B.-A.-G. Balcke** in Bochum baut Mischkondensatoren der Westinghouse-Leblancschen Art, Abb. 893, die in Anbetracht der starken Einschnürung des Wasserstromes nach erfolgtem Niederschlag schon einen Übergang zum eigentlichen Strahlkondensator bildet. Durch die Einschnürung wird ein Teil der kinetischen Strahlenergie nutzbar gemacht, so daß im untern Teil des Kondensators die Luftleere 1 v. H. besser zu sein pflegt als im Oberteil. Das Wasser strömt zur im Schnitt kenntlichen Kreiselpumpe, die Luft wird durch die unten besprochene Leblancsche Umlaufpumpe abgesaugt. Die nachfolgende Zahlentafel enthält die Ergebnisse einer von der Erstellerin vorgenommenen Versuchsreihe an einem Mischkondensator für 480 m³ Kühlwassermenge i. d. St., mit 62 Pferdestärken Kraftbedarf und 480 Umdr./min der Pumpe. Bei Versuch Nr. 2, 3 wurde, wie angemerkt, Luft durch Düsen von 6 bzw. 8 mm Durchm. in den Kondensator gelassen.

Mischkondenser Westinghouse-Leblanc.

Nr.	Dampfmenge in kg i. d. St.	Temperatur in °C		Wassermenge in kg für 1 kg Dampf	Barometerstand in mm Q. S.	Erreichtes Vakuum in mm Q. S.	Theor. Vakuum entspr. d. Temp. des Warmwassers	Erreichtes Vakuum in Prozenten des		
		Einspritzwasser	Warmwasser					Barometerstandes	theoret. Vakuums	
1	0	11	11	∞	770	756	760	98,2	99,5	Normalbetrieb
	9000	11	20	53,3	770	748	750	97,2	99,7	
	15800	11	30	30,5	770	739	738	96	100,2	
2	0	11	11	∞	770	717	760	93,3	94,3	Offene Luftdüse von 6 mm Durchm.
	7500	11	20	64,5	770	726	750	94,5	96,5	
	15400	11	30	30,5	770	723	738	94	98	
3	0	11	11	∞	770	680	760	88,5	89,5	Offene Luftdüse von 8 mm Durchm.
	7500	11	20	64,5	770	690	750	89,6	92	
	15400	11	30	30,5	770	687	738	89,3	93	
4	154800	11	43	18	770	711	706	92,5	100,7	Die Kühlwassermenge auf 290 m³ i. d. St. vermindert

150. Oberflächenkondensation.

Das Kühlwasser wird meist durch Messingröhren geleitet, die vom Dampf umspült werden. Die Größe der erforderlichen Kühlfläche hängt von der abzugebenden Wärmemenge, von der Wärmeleitzahl k und dem zulässigen Temperaturunterschied ab. Solange keine größere Luftmenge in den Kondensator dringt, kann die Temperatur im Inneren als unveränderlich angesehen werden, während diejenige des Kühlwassers nach Maßgabe der bestrichenen Kühlfläche zunimmt.

Für ein Element dF der Kühlfläche ist die in der Stunde übertragene Wärme

$$dQ = k\,dF\,(t_d - t_w) \quad \ldots \quad (1)$$

worin t_d, t_w die Temperatur des Dampfes bzw. des Wassers bedeuten und die Wärmeleitzahl k in erster Annäherung als unveränderlich angesehen werden darf. Ist nun G_w die stündliche Kühlwassermenge, so wird

$$dQ = G_w\,dt_w \quad \ldots \quad (2)$$

sein müssen, und aus (1) und (2) folgt

$$F = \frac{G_w}{k} \lg n \frac{t_d - t_1}{t_d - t_2} \quad \ldots \quad (3)$$

woraus man zu vorgeschriebenen Ein- und Austrittstemperaturen F berechnet. Die ganze übergehende Wärmemenge ist durch die Erwärmung des Kühlwassers ausgedrückt

$$Q = G_w\,(t_2 - t_1) \quad \ldots \quad (4)$$

oder durch den Dampfniederschlag G_d

$$Q = G_d\,(i - t_d) \quad \ldots \quad (4a)$$

Wir werden weiter unten sehen, daß bei größeren Luftmengen weder t_d noch k unveränderlich sind und die entwickelten einfachen Formeln nicht mehr gelten. Unter solchen Umständen wird praktisch mit dem Mittelwerte der Temperaturen t_1, t_2, d. h. $t_m = (t_1 + t_2)/2$ gerechnet, und die übertragene Wärme

$$Q = F\,k\,(t_d - t_m) \quad \ldots \quad (4b)$$

gesetzt, wobei k eine rein erfahrungsgemäß festzusetzende Zahl ist und etwa 1200 bis 2000 kcal/qm/st °C beträgt.

Man hat früher das Dampfluftgemisch zum Schluß auf eine tiefere Temperatur auch durch eine Art von nachträglicher **teilweiser Mischkondensation** abgekühlt. Zu diesem Behufe wurde das flüssige Kondensat stärker unterkühlt, was noch mit relativ guten Werten von k möglich ist, und nachher

mit der abziehenden Luft gemischt, wobei sich die Temperaturen gut ausgleichen. Für diese Unterkühlung wurde derjenige Teil der Kühlfläche herangezogen, der von dem kältesten Wasser im Gegenstrome bespült wird. Obwohl wegen der naturgemäß kleinen Geschwindigkeit des Kondensates (da kein weiterer Druckabfall zugelassen werden kann) die Wärmeleitzahl bis auf $^1/_{10}$ desjenigen Wertes, der für die kondensierenden Flächen gilt, sinken kann, ist er noch immer ein Vielfaches desjenigen, der bei luftberührten Kühlflächen auftritt. Die Größe der Unterkühlungsfläche kann mit Hilfe von Formel (3) bestimmt werden, indem man darin die entsprechenden Temperaturen einsetzt und die Temperatur des Kühlwassers infolge der sehr kleinen Änderung mit einem Mittelwerte einführt.

Theorie des Wärmeüberganges und Versuche.

Die grundlegende physikalische Theorie des Wärmeüberganges von kondensierendem Dampf an die Kühlfläche stammt von Nusselt[1]), ist indessen vorläufig nur auf luftfreien Dampf anwendbar. Infolge des Niederschlages wird zwischen Dampf und Wand eine Schichte flüssigen Wassers eingeschaltet, die an geneigten oder lotrechten Flächen alsbald abzufließen beginnen wird und den Vorgang ungemein verwickelt macht. Für den ersten Augenblick des Kondensierens, solange die Schichte infolge sehr geringer Höhe noch nicht merklich fließen kann, kann man die sich niederschlagende Menge leicht berechnen.

Es sei nach Abb. 894

t_d, t_r die Temperatur des Dampfes und der äußersten Wandschicht,
$\lambda = 0{,}00014$ die Leitungszahl der Wasser in kcal für m/qm/sek °C,
y die augenblickliche Schichtendicke in m,
dy der Zuwachs in Zeitelement dz,
q_v die (äußere) Verdampfungswärme kcal/kg, die zur Temperatur t_d gehört,
γ das spezifische Gewicht in kg/cbm.

Abb. 894. Zur Kondensation des Dampfes.

Die auf dem Quadratmeter abgegebene Wärme dQ im Zeitelement dz ist dann durch die Leitfähigkeit und die Verdampfungswärme ausgedrückt

$$dQ = \frac{\lambda}{y}(t_d - t_r)\,dz = \gamma\,dy\,q_v \quad \ldots \quad (5)$$

Hieraus folgt durch Integration, mit $z = 0$ $y = 0$ anfangend,

$$y = \sqrt{\frac{2\lambda(t_d - t_r)z}{\gamma q_v}} \quad \ldots \quad (6)$$

Es ergibt sich eine Verlangsamung mit der Quadratwurzel der Zeit. Für $t_d = 100\,°$C, $t_r = 90\,°$C erhält man die in 1 sek sich bildende Schichtendicke $y_1 = 0{,}072$ mm. Die Oberflächenübergangszahl α ist aus der Beziehung $dQ = \alpha(t_d - t_r)\,dz$ zu rechnen und ergibt $\alpha = \sqrt{\lambda q_v \gamma : 2(t_d - t_r)z}$, also für $t_d - t_r = 0$ einen unendlich großen Wert, der aber nichts nützt, da dQ doch $= 0$ wird.

Für fließende Niederschlagsschichten kommt **Nusselt** zu folgenden Ergebnissen: Die mittlere Übergangszahl ist, wenn η die Zähigkeit des Kondensates bedeutet, für lotrechte Wände von der Höhe h:

$$\alpha = \frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{\Phi}{4h}}\text{; für wagerechte Rohre vom Durchm. } d\text{:}\quad \alpha = 0{,}802\sqrt[4]{\frac{2\Phi}{3d}} \quad \ldots \quad (7)$$

wobei

$$\Phi = \frac{q_v\gamma^2\lambda^3}{\eta(t_d - t_r)} \quad \ldots \quad (8)$$

bedeutet. Die Zähigkeit η besitzt für Wasser folgende Werte:

t in °C	0	10	20	30	50
η in kg sek/qm	183,3	133,3	102,4	81,7	56,2.

Ein wichtiges Ergebnis der Theorie ist, daß **wagerechte Kühlrohre erheblich besser kondensieren als lotrechte Rohre (oder Wände).** So erhält man beispielsweise für $h = 3$ m; $d = 0{,}02$ m das Verhältnis

$$\frac{\alpha\,\text{wager.}}{\alpha\,\text{lotr.}} = 2{,}68.$$

Der **Einfluß der Dampfgeschwindigkeit** wurde von Nusselt nur für lotrechte Aufstellung untersucht. Nach abwärts gerichtete Strömung unterstützt den Wärmedurchgang wie nachstehende Zahlentafel zeigt.

Dampfgeschwindigkeit m/sek	0	50	100
bei 0,1 at abs. Druck ist α Cal/m sek °C . . .	1,2	1,3	1,7
„ 1 „ „ „ „ „ . . .	1,3	2,5	3,8
„ 5 „ „ „ „ „ . . .	1,4	4,5	7,0

[1]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1916, S. 541.

Nach oben gerichtete Strömung hemmt den Durchgang bei 0,1 at abs. bis zu 75 m/sek, bei 1 at abs. bis zu 25 m/sek Geschwindigkeit; darüber hinaus vermag der Dampf den Niederschlag durch Reibung nach oben mitzunehmen, und α erreicht bald nahezu die oben angegebenen Werte.

Bei wagerechten Rohren wird die Übertragung **stark beeinträchtigt,** wenn die Rohre übereinander liegen und **der Niederschlag von einem zum anderen heruntertropft.** So findet Nusselt, daß das Rohr der zweitobersten Reihe nur das 0,68fache der Wärmemenge der obersten Reihe überträgt.

Eine noch größere Beeinträchtigung bedeutet der **Luftgehalt des Dampfes.** Nach Maßgabe der Kondensierung scheidet sich die Luft aus, bis nur so viel Dampf übrig bleibt, als der betreffenden Wandtemperatur als Sättigungsdruck entspricht. Diese isolierende Schicht bedingt einen weiteren Temperaturanstieg gegen die benachbarten heißen Dampfteile, die wohl, bei sonst ungestörtem Verlauf, nur in geringerem Maße durch Diffusion vordringen werden.

Förderlich wirkt auf den Niederschlag die **Strömung und Wirbelung** des Dampfinhaltes, da hierdurch der Abfluß des Kondensates erleichtert wird und die anhaftenden Luftschichten weggefegt werden. So ist die bessere Wirksamkeit der am Dampfeintritt liegenden Rohrreihen und die **ungewöhnlich geringe Wärmeaufnahme der letzten Rohrreihen,** die in dem schwachbewegten luftreichen Ende der Strömung liegen, begreiflich.

Der gesamte Wärmedurchgang ist im übrigen von der Gesamtleitzahl k abhängig, die bekanntlich durch die Formel

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{e}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}$$

bestimmt wird, in der

α_1 die oben erläuterte Übergangszahl zwischen Dampf und Wandfläche,
e die Wandstärke (in m),
λ die Leitfähigkeit des Rohrwandbaustoffes,
α_2 die Übergangszahl von der Rohrwand an das Kühlwasser

bedeuten.

Wir **beziehen** von jetzt an den **Wärmedurchgang auf die Stunde.** Über α_1 liegen Beobachtungen von English und Donkin an lotrechten Zylindern von 69 m/m Höhe vor, die

$$\alpha_1 = 5000 - 15\,000 \text{ k cal/m qm st. }^0\text{C}$$

ergaben, was, wie Nusselt nachweist, mit seinen Formeln gut übereinstimmt. Man kann $\alpha_1 =$ rd. 10 000 setzen.

Die **Leitfähigkeit** für Messing ist

$$\lambda = 90 \text{ k cal/qm st. }^0\text{C.}$$

Die Wandstärke ist bei engen Rohren mit $d = 16 - 20$ mm etwa 0,7—1 mm bei weiten Rohren mit $d = 25$—32 mm etwa 1—1,3 mm.

Der **Übergang an das Kühlwasser** nimmt mit der Strömungsgeschwindigkeit erheblich zu. Die ältere Formel von Ser lautet $\alpha_2 = 4500\sqrt{w} + 300$; nach Sonnecken ist

$$\alpha_2 = 2020\,\frac{w^{0,9}}{d^{0,1}}\,(1 + 0,014\,t_i) \text{ k cal/qm st }^0\text{C.}$$

Hierin ist

w die mittlere Wassergeschwindigkeit in m/sek,
d der innere Rohrdurchmesser in m,
t_i die Temperatur der inneren Rohrwand in ^{0}C.

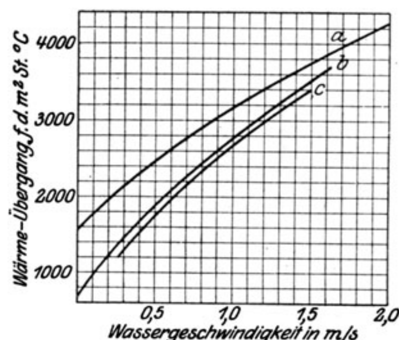


Abb. 895. Gesamtleitzahl nach Josse und Hoefer.

Versuche über die Gesamtübergangszahl k führten Orrok zum Vorschlag für die übergehende Wärme den Ansatz

$$Q = k'\,F\,(t_d - t_w)x$$

zu empfehlen, wobei t_w die mittlere Wassertemperatur ist und $x = 7/8$ sein sollte. Josse[1]) und Hoefer fanden an einem wagerecht aufgestellten Rohr von 20/25 mm Durchmesser, das außen mit strömendem Dampf geheizt wurde, daß man, wenn die Wassergeschwindigkeit größer als 0,4 m/sek ist, unbedenklich $x = 1$ und bei at Druck

$$k = 1600 + 1743\,w^{0,82}$$

bei 0,2 at abs. Druck

$$k = 650 + 2090\,w^{0,82}$$

[1]) Mitteil. a. d. Masch.-Lab. d. kgl. Techn. Hochsch. Berlin, Heft V, und Z. f. d. gesamte Turbinenwesen 1914, S. 113.

in k cal/qm st °C setzen kann. Diese Werte sind in Abb. 895 graphisch als Schaulinien *a* und *b*, *c* dargestellt. Unterhalb $w = 0{,}4$ m/sek ist x in verwickelter Weise von w und der Temperatur abhängig.

Durch den Einbau spiralig gewundener Flacheisen, den „Wirbelstreifen" nach Pappe & Henneberg, kann bei $w = 1$ m/sek der Wert k im Verhältnis von $1:1{,}5$ erhöht werden; doch wird selbstverständlich der Strömungswiderstand vergrößert, und die Streifen können nur bei reinem Kühlwasser verwendet werden.

Wärmeübergang von Luft an das Kühlwasser.

Sobald der Dampf im wesentlichen niedergeschlagen ist, muß die Wärme von der verbleibenden

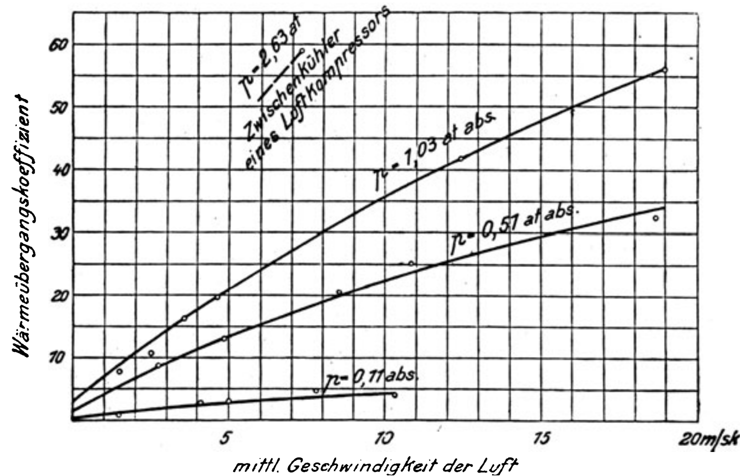


Abb. 895a. Übergangszahl α_2 für feuchte Luft nach Josse.

feuchten Luft an die Rohrwand abgegeben werden. Die Übergangszahl hierfür ist so klein, daß man für den Gesamtübergang

$$k = \alpha_2$$

setzen darf. In der Tat ist für **ruhende Luft** und **wagerechte** Rohre (nach der Hütte, 1915)

$$\alpha_2 = 1{,}02 \sqrt[4]{\frac{\Delta}{D}}$$

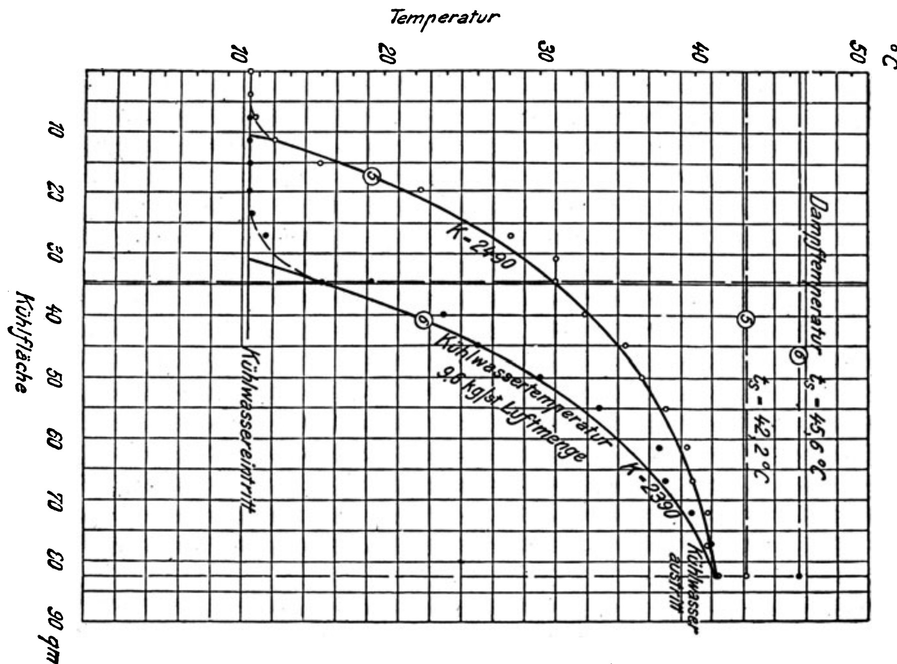


Abb. 896. Temperaturverteilung bei wachsender Luftmenge im Kondenser.

wo Δ der Unterschied zwischen der mittleren Luft- und der Wandtemperatur, D der Rohrdurchmesser in m ist.

Wie groß der Einfluß der strömenden Bewegung der Luft quer zum Rohre ist, wissen wir nicht. Ausführliche Versuche liegen hierüber für den Fall vor, daß die Luft **im Inneren der Rohre** strömt. Dann gilt

$$\alpha_2 = F(t_l\, t_w\, D, L, \lambda)\cdot(w\,\gamma)^n,$$

wo L die Rohrlänge, λ die Leitfähigkeit des Gases, w, γ dessen Geschwindigkeit und spezifisches Gewicht bedeuten. Nach Nusselt[1]) ist $n = 0{,}786$; nach Gröber[2]) ist $n = 0{,}81$.

Übereinstimmend geht hieraus hervor, daß bei sinkender Luftleere, d. h. kleinerem γ der Wärmeübergang für die Flächeneinheit in fast gleichem Verhältnis sinkt. Nach Versuchen von Josse[3]), deren Ergebnisse für ein mit Dampf von 100° C von außen geheiztes Rohr in Abb. 895a dargestellt sind, würde n, was γ anbelangt, geradezu bis auf 1 hinaufrücken.

Es ist anzunehmen, daß, wenn die Luft das Rohr umgibt und quer zu dessen Achse strömt, ähnliche Verhältnisse vorliegen werden.

Wollen wir die Luft noch im Kondenser tiefer abkühlen, so müssen wir sehr große Kühlflächen einbauen. Ist der Kondensator fehlerhaft gebaut, so daß **größere Luftmengen darin unbeweglich verharren können, so wird der entsprechende Teil der Kühlfläche ausgeschaltet.**

Sehr anschaulich kommt der Einfluß eingeführter Luft in der Abb. 896 zum Vorschein, in der von Josse die Kühlwassertemperatur des Kondensators als Abhängige der Kühlfläche für eine kleinere und eine größere Luftmenge eingetragen ist. In letzterem Falle sind nahezu 40 v. H. der Kühlfläche lahmgelegt, werden nur zur Luftkühlung verwendet.

Versuche an Oberflächenkondensatoren

verdanken wir vor allem Josse (a. a. O.), dessen wagerecht aufgestellter zylindrischer Kondensator aus einer oberen Abteilung mit 346 und einer unteren mit 342 Röhren von je 18 mm innerem, 20 mm Außendurchmesser, 2300 mm Länge, daher einer wasserberührten Kühlfläche von 44,9 qm oben, 44,4 qm unten = 89,3 qm insgesamt bestand.

Die eindringende Luftmenge betrug gewöhnlich 0,15 bis 0,2 cbm/st bei atm. Druck, was als sehr gering bezeichnet werden muß.

Die Ergebnisse einer Versuchsreihe mit unveränderlicher Dampfmenge und abnehmender Kühlwassermenge sind in nachstehender Zahlentafel vereinigt.

Versuch Nr.		1	2	3	4
Absolute Kondensatorspannung	kg/qcm	0,0379	0,0525	0,0705	0,100
Dampfmenge	kg/st	3113	3120	3120	3230
Kühlwassermenge	„	122100	90 500	69 050	56 250
Temperaturen:					
Sättigungstemperatur t_s zu p_k	°C	27,9	33,5	39,0	45,6
Dampfeintritt t_{d1}	„	39,8	40,3	44,8	49,0
Dampfluftgemischaustritt t_{d2}	„	23,0	25,4	30,1	36,8
Kondensat t_c	„	18,0	20,6	25,4	30,8
Kühlwassereintritt t_{w1}	„	10,30	10,30	10,40	10,30
Kühlwasser mitte Kondens. t_w	„	16,16	20,37	26,38	34,30
Kühlwasseraustritt t_{w2}	„	25,43	31,25	37,08	43,90
Unterschied zw. Dampf- und Kühlwasseraustritt $t_s - t_{d2}$	„	2,47	2,25	1,92	1,69
Unterkühlung des Kondensates $t_s - t_c$	„	9,9	12,6	13,6	14,8
Übertragene Wärmemenge	Mill. k cal-st	1,848	1,895	1,842	1,891
Übertragene Wärmemenge auf 1 qm Kühlfläche	„	20 700	21 200	20 650	21 200
Dampfmenge auf 1 qm Kühlfläche	kg	34,9	35,6	35	36,2
Kühlwassermenge auf 1 kg Dampf	„	39,3	28,5	22,15	17,4
Mehrverbrauch gegen idealen Kondensator	v. H.	16,6	10,9	7,1	5,0
Geschwindigkeit des Kühlwassers in den oberen Röhren	m/sek	0,386	0,286	0,218	0,178
Geschwindigkeit des Kühlwassers in den unteren Röhren	„	0,391	0,289	0,220	0,180
Wärmedurchgangszahl k im oberen Teil	k cal/qm/st °C	4270	3560	2900	2380
Wärmedurchgangszahl im unteren Teil (einschl. Unterkühlung)	„ „	1120	1170	1290	1400
Wärmedurchgangszahl im Durchschnitt (einschl. Unterkühlung)	„ „	2700	2380	2100	1925

Die große Verschiedenheit der Wärmedurchgangszahl für die obere und untere Kondensatorhälfte veranlaßte mich zu einer Anfrage bei Herrn Prof. Josse, der mir zur Aufklärung des Sachverhaltes

[1]) Hütte 1915, Mitteilungen über Forschungsarbeiten, Heft 89.

[2]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1912.

[3]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1909, S. 322.

folgendes mitteilte: In der unteren Kondensatorhälfte waren von 44,4 qm etwa 7 qm vom Kondensate zwecks Unterkühlung desselben bespült. Die Kühlwassermenge, die durch die entsprechenden Rohrreihen strömt, beträgt für die obigen Versuche etwa 3113, 3180, 3120, 3230 kg/st und wird nur um etwa 1,6, 2,8, 3,9, 5,3° C erwärmt. Der andere Teil muß daher eine höhere Temperatur, und zwar etwa 17,0, 21,8, 28,6, 37,8° C annehmen, damit die in der zweiten Kammer erfolgende Mischung die mit dem Thermometer beobachtete, in der Zahlentafel mit t_w bezeichnete Ausgleichstemperatur ergibt. Die Wärmeübergangszahlen müssen dann für den unteren und den oberen Kondensatorteil getrennt mit diesen genaueren Temperaturen gerechnet werden, und führen auf die in Abb. 896a dargestellten Ergebnisse, die als Ersatz von Abb. 896 zu dienen haben. Die gebrochenen Linien sind die beobachteten Temperaturen, und es zeigt sich, daß für jede Hälfte die Annahme einer Konstanz von k leidlich zutrifft, allein die Werte für den unteren Teil sind wieder wesentlich tiefer als für den oberen Teil. Die mit gleichem k fortgesetzten Linien 1, 2, 3, 4 zeigen unzulässige Abweichungen, die durch die seither über den Temperaturexponenten „x" gemachten Untersuchungen als erklärt angesehen werden können, da die Wassergeschwindigkeit unter dem kritischen Wert von 0,4 m/sek lag.

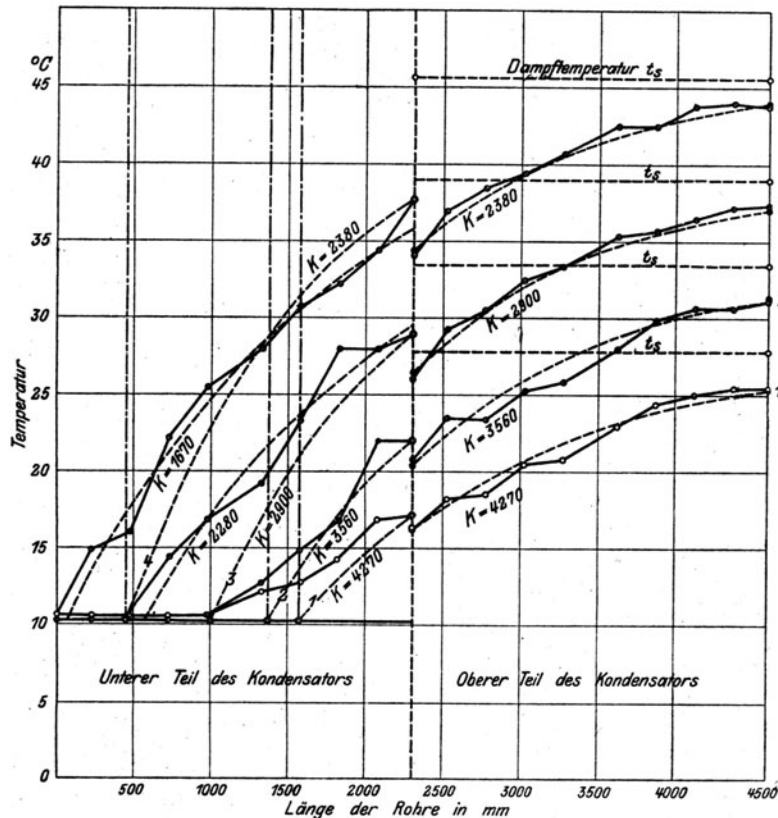


Abb. 896a. **Durchgangszahlen** zu Abb. 896.

Der durchschlagende **Einfluß der Wassergeschwindigkeit** und der eingebauten Wirbelstreifen kommt in den Mittelwerten der Wärmedurchgangszahl zum Ausdruck, für die man als Mittel aus weiteren Versuchsreihen folgende Werte ansetzen kann:

Kühlwassergeschwindigkeit	m/sek	0,2	0,3	0,4
Wärmeübergangszahl der oberen Rohrreihe	kcal/qm/st °C $k =$	2700	3700	4300—4700
Desgl. im Mittel für den ganzen Kondensator	„ „	2000	2400	2700

Sobald erhebliche Luftmengen (künstlich) eingeführt wurden, sinkt k herab, und zwar bei 0,2 m/sek Wassergeschwindigkeit wie folgt:

Stündliches Luftvolumen auf atm. Druck bezogen .	cbm/st	0,20	7,95	13,50
k für die obere Rohrreihe	kcal/qm/st °C	2720	2440	2120
k für die untere Rohrreihe	„ „	1340	300	80

Die ganz kleinen Werte der unteren Reihe sind verursacht durch die Unwirksamkeit eines Teiles der Kühlfläche, sind aber mit der ganzen Kühlfläche berechnet.

Aus der übergehenden Wärmemenge und der Wärmeleitzahl läßt sich mit Hilfe der logarithmischen Beziehung zwischen F, G_w und den Temperaturen der „Gütegrad" des

Kondensators, d. h. das Verhältnis der theoretischen Kühlwassermenge (die der Annahme $t_2 = t_d$ entspricht) und der effektiven berechnen. Dies Verhältnis hängt ab von der Belastung des Kondensators und von der geforderten Luftleere, d. h. der Dampftemperatur. Bei Josse schwankte es zwischen 85 und 95 v. H. bei 35 bis 16 kg Dampfniederschlag auf 1 qm Kühlfläche. Die Sättigungs-Dampftemperatur war nur 2—3° C höher als die Kühlwassertemperatur am Austritt.

Der zweite wichtige Faktor ist die Temperatur der abgesaugten Luft, die bei vollkommenem Gegenstrom der Eintrittstemperatur des Kühlwassers gleich sein müßte. Sofern wir hierfür bei Josse die Temperatur des Kondensats setzen, ergeben sich Unterschiede von 5 bis 20° C, also wie zu erwarten war, ungünstigere Verhältnisse als beim Gegenstrom-Mischkondensator.

In einem zweiten Kondensator von 28,5 qm Kühlfläche wurde die Kühlwassergeschwindigkeit im letzten Teil der Rohre bis auf 1,7 m/sek gesteigert, was für diese Rohre $k = 7420$ und für den ganzen Kondensator $k = 3480$ ergab, bei rd. 63 kg Dampf für 1 qm/st. Eigentümlicherweise sinken die Werte von k auf 4840 bzw. 1760 bei 39 kg Dampf für 1 qm/st und sonst gleichbleibenden Umständen, insbesondere gleicher Kühlwassergeschwindigkeit, eine nicht näher erklärte Abweichung gegen den ersten Kondensator. Im übrigen nimmt die Zahl k mit Verringerung der Kühlwassermenge, d. h. ihrer Strömungsgeschwindigkeit, ungefähr im gleichen Maße ab wie im vorigen Beispiel.

Was die zu überwindende **Reibungshöhe,** die mit dem Quadrat der Geschwindigkeit wächst, anbelangt, so ermittelte Josse diese beim ersten Kondensator zu 1,45 m Wassersäule bei 0,4 m/sek Wassergeschwindigkeit. Benützen wir den hydraulischen Ansatz

$$h_z = \zeta\, l\, w^2 / 2\, g\, d,$$

so berechnet sich nach den mitgeteilten Rohrabmessungen (mit doppeltem Wasserweg) die Reibungszahl

$$\zeta = \text{rd. } 0{,}70.$$

Dieser hohe Wert, der mehr als das 20fache des normalen ausmacht, findet seine Erklärung in den durch die Wirbelstreifen verursachten bedeutenden Widerständen.

Josse konstruiert seine Kondensatoren mit $k = 2700$ und erreicht bei (rückgekühltem) Wasser von 25° Eintrittstemperatur und 60facher Wassermenge eine Luftleere von 93 v. H.

Wasserreinigung.

Der Wärmeübergang eines Kondensers wird durch Steinansatz in den Rohren sehr beeinträchtigt. Die Firma Balcke & Co. pflegt daher derartige Kühlwässer mittels Salzsäure, wie sie sich äußert, zu „impfen", wodurch die steinbildenden Ca- und Mg-Karbonate in die leichtlöslichen Chloride übergehen. Die Säuremenge wird so bemessen, daß ein kleiner Teil der Karbonate unzersetzt bleibt. Das Verfahren kann mit Rücksicht auf die Kosten nur bei Rückkühlanlagen verwendet werden, wo lediglich das Zusatzwasser auf diese Weise behandelt zu werden braucht. Indem man 2,5 v. H. frisches Wasser der umlaufenden Menge zusetzt und 1 v. H. ständig ablaufen läßt, wird eine zu starke Anreicherung durch die Chloride vermieden. Um bei Fahrlässigkeit das Auftreten von freier Säure sofort aufzudecken, sind Sicherheitsvorrichtungen eingebaut, die darauf beruhen, daß säurehaltige Wässer elektrische Ströme außerordentlich gut leiten. Sobald diese Leitungsfähigkeit eine bestimmte Grenze überschreitet, ertönt im Wärterhaus ein Glockensignal. Eine zweite ähnliche Vorrichtung tritt in Wirksamkeit, sobald der Salz- und Chloridinhalt bestimmte Grenzen überschreitet.

Druckverluste im Abdampfrohr und Kondensator.

Die Geschwindigkeit im Abdampfrohr der Turbine pflegt 80 bis 100 m/sek und darüber hinaus zu betragen. Zur Erzeugung dieser Geschwindigkeit ist bei 0,05 at Luftleere ein Druckunterschied von rd. 0,002 at erforderlich. Die Rohrreibung macht bei 1 m Rohrdurchmesser etwa 0,0015 at auf den laufenden Meter aus, und so sollte bei dem üblichen gedrängten Zusammenbau von Turbine und Kondensator nur ein verschwindend kleiner Druckverlust auftreten.

Bei unzweckmäßiger Anlage ist dies anders. Beispielsweise wurde an einer 2000pferdigen älteren Anlage folgender Druckverlauf beobachtet:

	Halbe Leistung kg/qcm	Normale Leistung kg/qcm	Maximale Leistung kg/qcm
Abs. Druck im Abdampfrohr am Austritt der Turbine	0,0515	0,0763	0,0937
Desgleichen vor dem Kondensator	0,0466	0,0664	0,0794
Desgleichen am Austritt aus dem Kondensator	0,0415	0,0442	0,0447
Gesamter Druckverlust	0,0100	0,0321	0,0490

Dies bedeutet eine Erhöhung des Dampfverbrauches bei maximaler Leistung um etwa 7 bis 10 v. H., was bei richtiger Anordnung zum großen Teile vermieden werden könnte.

Rechnet man mit dem üblichen Ansatz

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = \zeta \frac{U}{4F} \frac{w^2}{2g} l,$$

wobei U den Umfang, F den Querschnitt, l die Länge des die Kühlröhren umspülenden Dampfstromes bedeutet, so kommt mit dem Werte $\zeta = 0{,}03$ ein 20 bis 50mal geringerer Druckabfall heraus, als beobachtet wurde. Ob der Fehler im Übergang von einer Abteilung zur anderen lag, oder ob die herabfallenden Wassertropfen ein wesentlich höheres ζ bedingen, konnte nicht festgestellt werden. Es sei übrigens die fast unglaubliche und doch wahre Tatsache erwähnt, daß in einer Anlage die Einmündung in den Kondensator aus sonst löblicher Rücksicht auf die Festigkeit mit durchlochtem Blech abgeschlossen wurde, in welchem Falle man sich über den Druckabfall nicht zu verwundern brauchte. Allein im oben angeführten Beispiel war der Durchgang frei.

Änderung des Wärmeüberganges mit zu- und abnehmender Belastung.

Die A.-G. Brown, Boveri & Cie. hat durch Versuche zahlenmäßig festgestellt, um wieviel der Wärmeübergang bei verringerter oder vermehrter Beanspruchung des Kondensers sich ändert. In Abb. 897 ist bei der normalen (100 v. H.) Belastung die Wärmeleitzahl mit 100 angesetzt; die Wärmeleitzahl bei halber Belastung ist nur noch etwa 75 v. H. Bei Überbelastung steigt sie in geringerem Maß. Die starke Abnahme bei sinkender Beanspruchung wird mit Recht darauf zurückgeführt, daß die Kondensierungszone stark zusammenschrumpft und der Rest der Kühlfläche von den schwach oder gar nicht bewegten Luftresten umspült und daher lahmgelegt wird. Diese Ansicht wird bestätigt durch die Beobachtung am Kondenser einer 7500 kW-Maschine, deren Kühlwasser in dreifachem Zickzack strömte und bei Vollbelastung folgende Temperaturzunahme aufwies. 1. Strom 0,2° C, 2. Strom 2,2° C, 3. Strom 6,5° C. Daher ist die übertragene Wärmemenge = 2,3; 24,7; 73 v. H. des Ganzen. Da die Kühlflächen angenähert gleich groß waren, stehen auch die Wärmedurchgangszahlen im gleichen Verhältnis. Bei dieser älteren Kondenserart war mithin selbst bei Vollast $^1/_3$ der Rohre sozusagen außer Gefecht gesetzt, und dies, obwohl die eindringende Luftmenge nur einer freien Bohrung von 3,5 mm Durchm. entsprach.

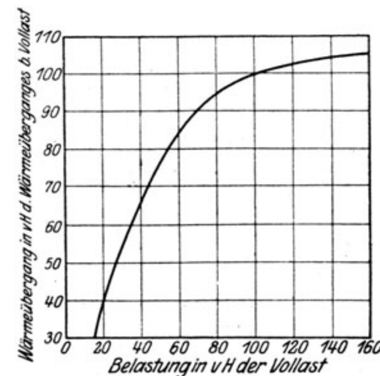


Abb. 897. Beobachtungen von Brown, Boveri & Cie.

Ausführungsformen von Oberflächenkondensern.

Aus den vorstehenden Erörterungen über den Wärmeaustausch ergeben sich folgende Forderungen für die Konstruktion des Oberflächenkondensers.

1. Es ist (selbstverständlich) die eindringende Luftmenge auf das erreichbare Mindestmaß zu verringern, was durch richtige Ausbildung der Stopfbüchsen und sorgfältigste Abdichtung erzielt wird.

2. Die Strömungsgeschwindigkeit des Dampfes und die des Kühlwassers sind so weit zu steigern, als die Rücksicht auf den Druckabfall im Kondenser und die wachsende Reibungshöhe des Kühlwassers es zuläßt. Insbesondere soll die Strömungsgeschwindigkeit im unteren Teile des Kondensers, wo die Dampfluftreste sich sammeln, nicht zu klein sein.

3. Die Kühlfläche wird am besten durch wagerechte dünne Rohre gebildet, die die Wärme wirksamer ableiten als stehende. Die Dampfströmung soll nach Tunlichkeit senkrecht gegen die Rohre gerichtet sein. Der Ableitung des Tropfwassers ist größte Sorgfalt zu widmen. Je weniger Rohre übereinander angeordnet sind, desto geringer ist die Schädigung durch das von Rohr zu Rohr herabtropfende Wasser.

4. Tunlichste Abkühlung der Luft-, insbesondere bei Kolbenluftpumpen, geringe Abkühlung des Kondensates mit Rücksicht auf die Wärmerückgewinnung.

Nachfolgend besprechen wir moderne Ausführungen, die jenen Forderungen in hohem Maße gerecht werden.

Die **M. B. A.-G. Balcke** in Bochum führt Querstromkondensatoren nach Abb. 898 aus, wobei schon die Benennung andeutet, daß der Dampf quer und nicht längs der Kühlröhre strömt. Um diese Forderung nach Tunlichkeit zu verwirklichen, wird in den Dampfeintritt der Ablenker A eingebaut und das Innere von Scheidewänden frei gehalten.

Zur Versteifung der Rohrwand dient das Zentralrohr B und vier kräftige Anker. Die Luftabsaugung erfolgt in der Nähe des tiefsten Punktes durch gleichmäßig verteilte Luftabsaugerohre C. Das Kondensat sammelt sich selbstverständlich im tiefsten Punkt. Die Teilung der Kühlrohre ist groß

an der Einströmungsseite und eng im Unterteile, um hier die Strömungsgeschwindigkeit zu erhöhen. Durch die gleichmäßige Verteilung der Luftabsaugeröhren wird die Ausbildung von toten Räumen verhindert. Im untern, kältern Teile des Kondensers sind die Rohre beidseitig eingewalzt. Die Wasserführung ist infolge eines Führungsbleches D und infolge bloß zweifachen Wasserweges günstig, und soll gegenüber früheren Anordnungen die Widerstandshöhe um 2 bis 3 m verringert haben. Die Anschlüsse sind so angeordnet, daß nur je eine Flanschverbindung zu lösen ist, um den Deckel entfernen zu können.

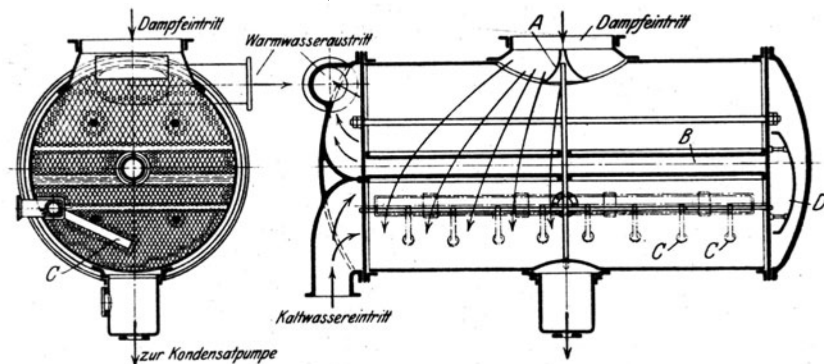


Abb. 898. Oberflächenkondenser von Balcke.

Die **A.-G. Brown, Boveri & Cie.** teilt gemäß Abb. 899 das Rohrbündel in zwei symmetrische Hälften, die einen **V-förmigen Zwischenraum frei lassen**, durch den der Dampf mit großem Querschnitt allseitig in die Rohrreihen eindringen kann. Er bewegt sich, wie die einzelnen Pfeile andeuten, in der Hauptsache quer zu den Rohren, und hat infolgedessen weniger als die Hälfte der sonst üblichen Wegestrecke zurückzulegen. Die Absaugestellen der nicht kondensierten Reste sind L_1 L_2.

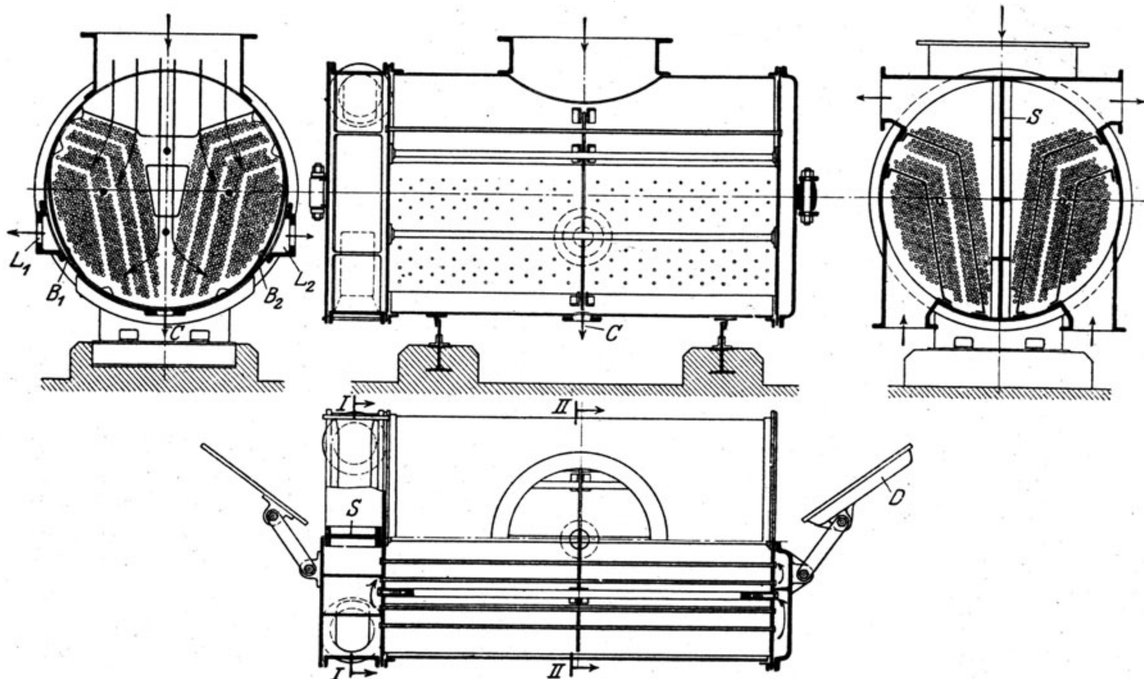


Abb. 899. Oberflächenkondenser von Brown, Boveri & Cie.

Damit diese Absaugung möglichst gleichmäßig erfolgt, sind die durchlochten Bleche B_1 B_2 der ganzen Länge des Kondensers nach durchgelegt. Die Bildung von Luftsäcken wird auf diese Weise vermieden. Das sich bildende Kondensat fließt in der Hauptsache an Rohren von gleicher Temperatur bis zur Entnahmestelle C hinab, wird somit in geringerem Maße abgekühlt als sonst. Der geringe Strömungswiderstand erlaubt die Rohrteilung so weit zu verkleinern, daß im gleichen Zylindermantel gleich große Oberflächen wie bei der alten Anordnung untergebracht werden können. Versuche sollen ergeben haben, daß hierbei infolge der günstigen Wärmeübertragung die Beanspruchung um 20 bis 30 v. H. größer sein darf als früher. Außerdem liefert der Kondenser ein um 5^0 wärmeres Kondensat.

Die senkrechte Scheidewand S in der Wasserkammer ermöglicht das **Ausschalten und Reinigen der einen Rohrhälfte während des Betriebes.** Zu diesem Behufe wird die Hälfte des Kühlwasserzuflusses abgestellt und der entsprechende Deckel D geöffnet. Die Befürchtung, daß hierbei das Vakuum wesentlich zurückgehen würde, wurde durch die Erfahrung entkräftet, was auch **theoretisch begründet werden**[1]) **kann.** In der Hauptsache liegt dies daran, daß die Wassermenge nicht auf die Hälfte herabsinkt, wie bei unveränderlicher Druckhöhe der Fall wäre. Die liefernde Kreiselpumpe wird vielmehr etwa eine Kennlinie h nach Abb. 900 aufweisen, und bei normalem Betrieb mit einer „statischen“ Förderhöhe OA_0, einer Reibungshöhe der Rohrleitung nach Parabel b, und einer solchen im Kondenser nach Parabel c, also im Punkte C der Kennlinie arbeiten. Durch die Halbierung des Rohrdurchflußquerschnittes würde bei unveränderter Wassermenge der Widerstand im Kondenser auf das Vierfache steigen. Die Abschnitte h_k müßten vervierfacht werden, was auf Parabel d und Punkt D führen würde. In Wirklichkeit wird jedoch die Menge kleiner, und wenn Q_x als Betrag vorläufig angenommen wird, so muß man den Druckverlust h_r in der Zu- und Ableitung auf $h_r' = h_r\,(Q_x/Q_0)^2$ herabsetzen, und im Kondenser auf $h_k' = h_k\,(2\,Q_x/Q_0)^2$ erhöhen. Die Summe ergibt $h_x = h_r' + h_k'$, die für einige Punkte berechnet die festgezogene Linie e ergibt; deren Schnitt E grenzt die tatsächlich durchfließende Menge Q_e ab. Wie ersichtlich, beträgt diese fast 90 v. H. des ursprünglichen Q_0, so daß die Erwärmung durch die ursprüngliche Dampfmenge nur unwesentlich höher wird. Bedenkt man, daß infolge der erhöhten Wassergeschwindigkeit und größerer Kühlflächenbeanspruchung die Wärmedurchgangszahl steigt, so versteht man, daß Brown, Boveri & Co. **bei abgeschalteter Kondenserhälfte eine Vakuumeinbuße von bloß 1 bis 3,0 v. H. erfahrungsmäßig feststellen konnten.**

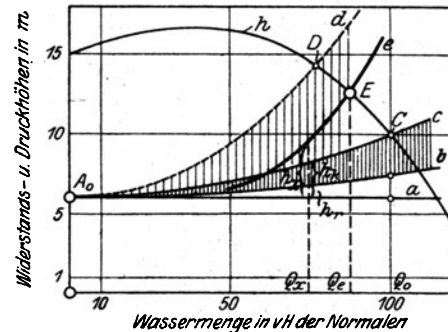


Abb. 900. Wasserlieferung bei abgeschalteter Kondensatorhälfte.

Als Beispiel eines **Schiffskondensators** größter Abmessungen führen wir in Abb. 901 und 901a den von **Blohm & Voß** für den Dampfer „Vaterland“ gebauten an, der eine

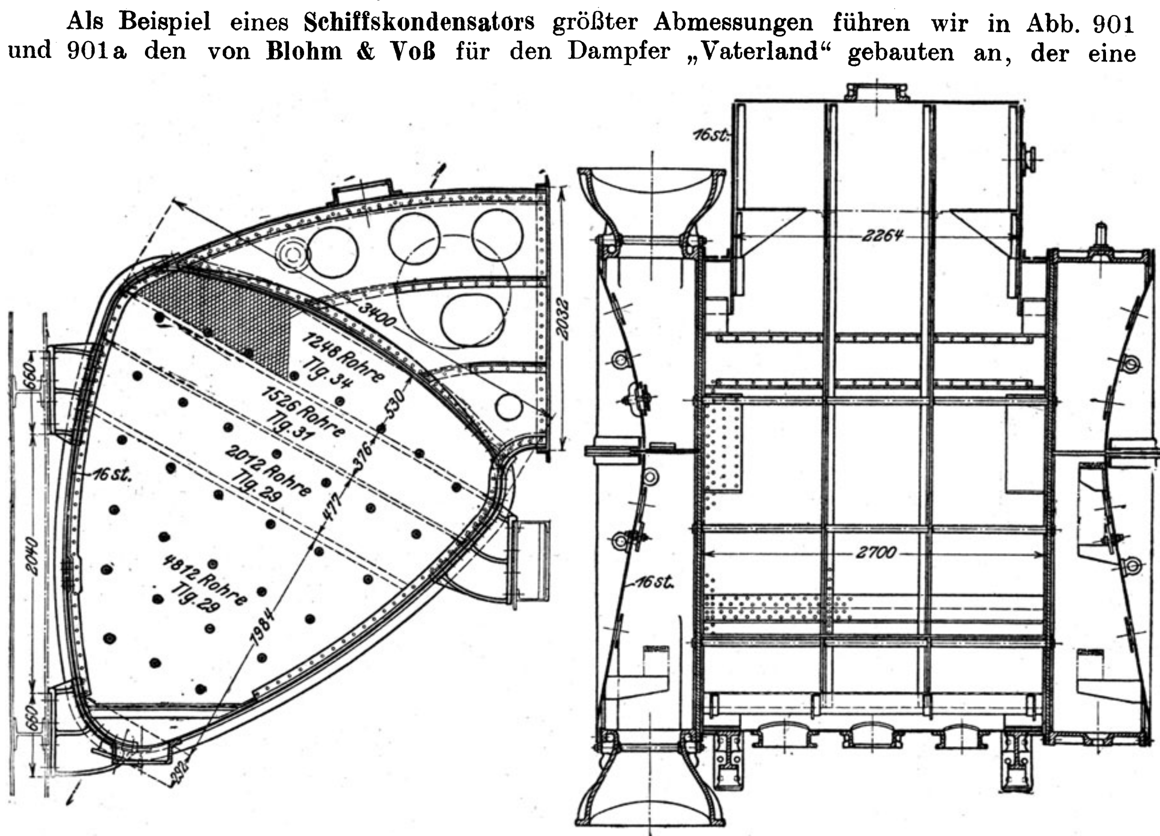


Abb. 901 u. 901a. Oberflächenkondensator des Dampfers „Vaterland“.

Kühlfläche von 1546 qm besitzt und nach der Weirschen Bauart durch den eiförmigen Unterteil, d. h. Einschnürung des Querschnittes, die Strömungsgeschwindigkeit auf ange-

[1]) B. B. C. Mitteilungen, Sonderabdruck 575 D_2.

messener Höhe zu halten vermag. Die gleiche Absicht liegt der Verkleinerung der Rohrteilung von 34 mm in der obersten Reihe, auf 29 mm in der unteren zugrunde. Vier

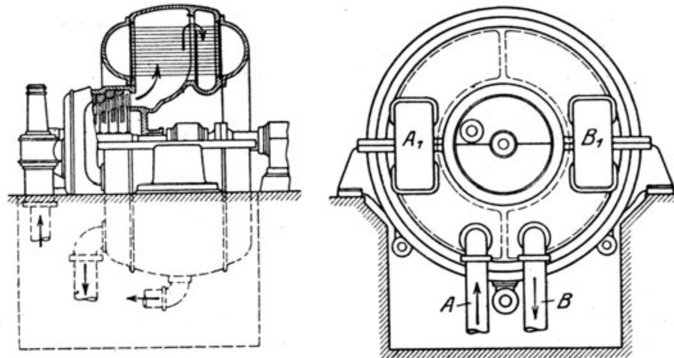


Abb. 901 b. Mit der Turbine zusammengebauter Kondenser.

derartige Kondenser nehmen den Dampf der 61000 PS entwickelnden Antriebsturbinen auf. Man wird die Dampfmenge für je einen davon auf 80000 kg/st veranschlagen dürfen.

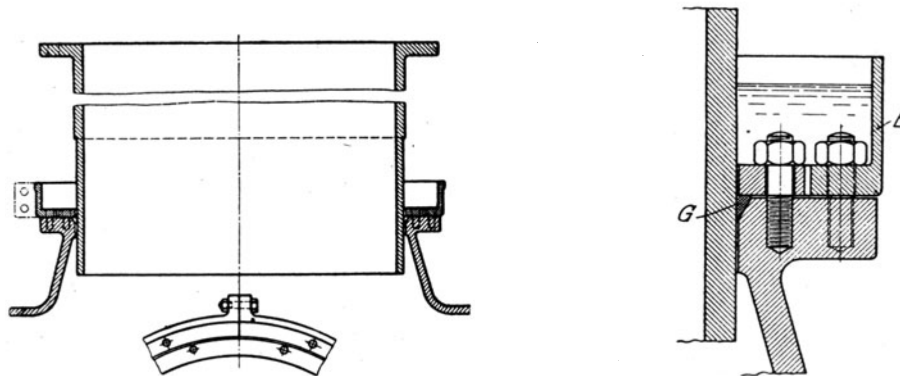


Abb. 902. A.E.G.-Wasserstopfbüchse zum Abdampfrohr.

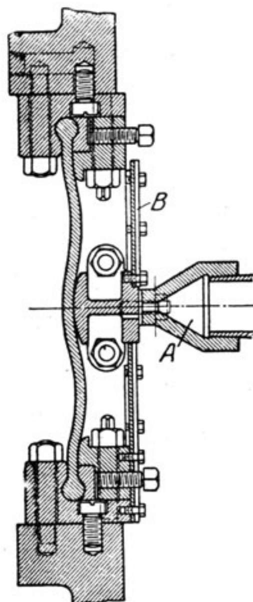


Abb. 902a. Kautschukausdehnungsrohr.

Zusammenbau des Kondensers mit der Turbine.

Das Bestreben, den Druckverlust zwischen Turbine und Kondenser tunlichst herabzusetzen, hat zu Vorschlägen wie Abb. 901b geführt[1]), wo der Kondenser als ein Ringkörper mit zur Achse parallelen Rohren die Turbine umgibt, und der Dampfweg auf ein Mindestmaß herabgesetzt ist. *AB* sind Kühlwasser-Ein- und -Auslauf, A_1 B_1 abnehmbare Überströmungen, um den Oberteil des Kondensers abheben zu können. Ähnlich war der Kondenser der stehenden Turbinen der General Electric Co. in das Turbinengestell eingebaut.

Nachgiebige Verbindung zwischen Turbine und Kondenser.

In der Mehrzahl der Fälle wird in die Abdampfleitung zwischen Turbine und Kondenser eine nachgiebige Verbindung eingebaut, die entweder als „Ausdehnungsstück" mit elastischen Wänden, oder als „Stopfbüchse" ausgeführt ist. Ein Beispiel für die letzte ist die **„Wasserstopfbüchse"** der **Allgemeinen Elektrizitäts-Gesellschaft,** Abb. 902, mit eingelegter weicher Gummischnur *G* und Wasserüberflutung im Becherrand *B*.

Eine Ausdehnungseinlage ist auf Abb. 892 angedeutet.

Eigenartig ist **das Kautschukausdehnungsrohr** der **amerikanischen Westinghouse-Gesellschaft,** Abb. 902a, das zur 60000 kW-Turbine, Abschn. 117a, mit einem aus zwei Halbkreisen mit geraden Zwischenwänden bestehenden Auspuffrohr von rd. 2500 × 3800 mm Weite gehört. *A* bedeutet ein querliegendes Versteifungsrohr, *B* ist eine ringsum gehende Blechwand. Der Zwischenraum zwischen dieser und der Kautschukplatte füllt sich mit Dampfkondensat, wodurch der Wärmeübergang zum Kautschuk vermindert wird. Die Platte wird, da frei biegsam, von innen eingebaut.

[1]) D. R.-P. Nr. 305925 von Escher, Wyß & Cie.

Kondensatorstützung.

Bei nachgiebiger Verbindung ist der Kondenser einer Auftriebskraft und die Turbine einer lotrechten Belastung, entsprechend dem Überdruck der Atmosphäre und dem Abdampfrohrquerschnitt, ausgesetzt, auf die bei der Stützung und Formänderung des Gehäuses Rücksicht zu nehmen ist.

Neuerdings werden **Turbine und Kondenser häufig fest verschraubt,** und das **Gewicht der letzteren durch Federn abgefangen.** Man vergleiche die Parsonsturbine Abb. 687.

151. Die Kolbenluftpumpe.

Kolbenluftpumpen werden bei Dampfturbinen in neuerer Zeit nur noch selten ausgeführt. Nachfolgende aus der IV. Auflage übernommene Mitteilungen werden vielleicht trotzdem manchem Leser willkommen sein.

Man unterscheidet die nasse und die trockene Luftpumpe. Die erstere saugt die Luft und das Einspritzwasser oder das Kondensat miteinander vermengt ab, die letztere nur die Luft allein.

Die Größe der trockenen Luftpumpe hängt von der Luftmenge und Temperatur und dem gewünschten Vakuum ab, und umgekehrt. Folgendes ist der einfache Zahlenzusammenhang dieser Größen: Ist G_l das stündliche Luftgewicht, t_d die Gemischtemperatur an der Absaugestelle, p_d der zu t_d gehörende Sättigungsdruck, p_k der Kondensatordruck, t_k die zugehörige Sättigungstemperatur, $p_l = p_k - p_d$ der Teildruck der Luft, so ist $v_l = BT_d/p_l$ mit B als Gaskonstante der spezifische Rauminhalt und

$$V_l = G_l v_l$$

der auf Kondensatordruck bezogene gesamte stündliche Luftrauminhalt, woraus sich durch Teilung mit dem Lieferungsgrad der Förderinhalt der Pumpe ergibt. Bei nassen Pumpen kommt noch der Rauminhalt des Kondensates, bzw. des Einspritzwassers dazu.

Über das Luftgewicht haben wir oben Angaben gemacht; was die Temperaturen anbelangt, so folgt aus den mitgeteilten Versuchen, daß beim Parallelstrom-Mischkondensator t_d um 5 bis 10° unter t_k liegt, beim Gegenstrom-Mischkondensator ist t_d = der Eintrittstemperatur des Kühlwassers + etwa 5°. Bei Oberflächenkondensatoren sind die Verhältnisse noch sehr schwankend, und man findet t_d = Eintrittstemperatur des Kühlwassers + 5 bis 15°, oder es ist eine „Unterkühlung" $t_k - t_d$ von 0 — 10 — 15° festzustellen. Über die in der Praxis übliche Bemessung der Luftpumpen vergleiche man die Angaben im „Zahlenbeispiel".

Der Lieferungsgrad (oder „volumetrische Gütegrad") hängt bei trockenen Pumpen vom schädlichen Raum ab und wird in bekannter Weise durch das „Überströmen" im Totpunkt vergrößert, allerdings auf Kosten des Arbeitsverbrauches. Nach den Rechnungen von Schmidt[1]) ist für ausgeführte gute Schieberpumpen der theoretische Lieferungsgrad von der absoluten Saugspannung wie folgt abhängig:

Saugspannung kg/qcm abs.	0,02	0,03	0,05	0,10
Theoret. Lieferungsgrad .	0,87	0,91	0,935	0,955

Mit einer Luftpumpe dieser Art von Pokorny & Wittekind sei bei geschlossenen Saugstutzen ein Vakuum von 1 bis 2 mm Quecksilbersäule erreicht worden.

Bei **nassen Luftpumpen** wird der schädliche Raum durch Wasser ganz ausgefüllt und ein „Überströmen" ist nicht erforderlich. Freilich würde bei einstufiger Anordnung die „Rückausdehnung" der im schädlichen Raum eingeschlossen gebliebenen Luftbläschen[2]) den Lieferungsgrad stark herabsetzen. Dieser beträgt bei 0,12 at Saugspannung häufig 0,7, und Pumpen dieser Art würden bei rd. 0,04 at Saugdruck überhaupt zu liefern aufhören. Doch hat man diesem Übelstande in vorzüglicher Weise durch die Anwendung der **Verbundwirkung,** d. h. zweistufiger Verdichtung, abgeholfen.

Ein Punkt von Wichtigkeit für die nasse Luftpumpe ist die Herabsetzung der Saugwiderstände. Wäre der zum Öffnen einer Kautschukklappe nötige Überdruck, wie Schmidt (a. a. O.) annimmt, 0,03 at, so würde bei 0,06 at Kondensatordruck der Pumpensaugdruck 0,03 at betragen, und der auf die Kondensatorpressung bezogene Lieferungsgrad wäre auf die Hälfte herabgesetzt. Leblanc nimmt ohne Herkunftsangabe 0,01 at an. Einen Fortschritt bedeuten in dieser Hinsicht die Schlitzpumpen, die bei zweistufiger Anordnung wohl Lieferungsgrade von bis zu 90 v. H. auf das nutzbare Volumen und Kondensatordruck bezogen gewährleisten dürften.

---

[1]) Die Berechnung der Luftpumpen für Oberflächenkondensationen, Berlin 1909, S. 51.

[2]) Es ist auch die Meinung ausgesprochen worden, daß die Luft vom Wasser während der Druckperiode absorbiert und während des Saugens frei wird, was in der Wirkung auf das gleiche herauskäme, aber zunächst nur eine Vermutung bleibt.

Zahlenbeispiele.

Ein Vergleich von Kondensatoranlagen für Dampfturbinen zeigt, daß man als ungefähre Regel für Mitteleuropa **200 bis 250 Liter sekundlichen Brutto-Förderinhalt der Luftpumpe auf je 1000 kW Turbinenleistung** annehmen darf, und zwar gleicherweise für trockene wie für nasse Pumpen. Die Berechnung aus den bekannt vorausgesetzten physikalischen Daten wird folgenden Weg einschlagen:

Beispiel 1. Zu einer Dampfturbine von 2500 kW Leistung und Oberflächenkondensation soll die nasse Luftpumpe berechnet werden. Bei 0,95 Dynamo-Wirkungsgrad ist die effektive Leistung $= 3575$ PS und bei 13,5 at abs. Druck 320° C Temperatur vor der Turbine der anfängliche Wärmeinhalt 738 kcal. Wir fordern an der Luftabsaugestelle einen Druck von 0,05 at abs., was ein adiabatisches Wärmegefälle von rd. 222 kcal ergibt. Setzen wir voraus, daß die Turbine mit 0,65 eff. Wirkungsgrad arbeitet, so werden $222 \cdot 0{,}65 \cong 144$ kcal in Arbeit verwandelt und der Dampfverbrauch wird $622/144 \cong 4{,}4$ kg/PS-st betragen. Der Kondensator hat daher $3575 \cdot 4{,}4 = 15700$ kg Dampf in der Stunde mit dem Wärmeinhalt $i = 738 - 144 = 594$ kcal aufzunehmen.

Die Sättigungstemperatur zu 0,05 at Druck ist 32,6° C, und wir nehmen an, daß eine Unterkühlung des Kondensates um 4,6° erreichbar ist, so daß die Temperatur des Gemisches beim Eintritt in die Luftpumpe 28° beträgt, während die Ablauftemperatur des Kühlwassers sich um 2,6° C von der Sättigungstemperatur unterscheidet, also $t_2 = 30°$ wird. Hieraus ergibt sich bei 50facher Kühlwassermenge diejenige Eintrittstemperatur desselben, bei der das geforderte Vakuum noch erreicht werden kann, aus Gleichung $(i - 28) = 50\,(30 - t_1)$ zu $t_1 = 18{,}7°$, und auf Grund dieser Temperaturen müßte der Oberflächenkondensator berechnet werden.

Nun nehmen wir an, daß die gesamte Luftmenge 10 kg/st auf je 1000 kW, im ganzen also 25 kg/st ausmacht. Der Teildruck des abziehenden Dampfes bei 28° ist 0,0383 kg/qcm, und es bleibt für die Luft $p_l = 0{,}0117$ kg/qcm; das stündliche Gesamtvolumen ist mit $T_l = 273 + 28 = 301$; $B = 29{,}3$ kgm/° C, $V_l = 25 \cdot 29{,}3 \cdot 301/117 = 1885$ cbm/st oder $1885 \cdot 1000/2{,}5 \cdot 3600 = 209$ Liter in der Sekunde auf 1000 kW bezogen. Wird das Volumen des Kondensates $= 15{,}7$ cbm zugeschlagen und 0,8 als Lieferungsgrad angenommen, so erhält man 2375 cbm/st Gesamt-Förderinhalt, das bei 200 Umdr./min von zwei einfachwirkenden Kolben mit rd. 760 mm Durchmesser 220 mm Hub bewältigt werden kann.

Beispiel 2. Wir wollen untersuchen, welche Luftleere bei obiger Anlage erreichbar ist, wenn die Temperatur des Kühlwassers (bei gleichbleibender Menge) auf $t_1 = 5°$ C sinkt. Wir berechnen die Endtemperatur des Kühlwassers aus Gl. $(i - t_2) = 50\,(t_2 - t_1)$ mit angenähert gleichem i wie vorhin und erhalten $t_2 = 16{,}55°$. Der Temperaturunterschied des Kondensates gegen die Eintrittstemperatur des Kühlwassers sei gleich groß wie oben, d. h. $28 - 18{,}7 = 9{,}3°$, daher ist die Temperatur des abziehenden Luftgemisches $t_l = 5 + 9{,}3 = 14{,}3°$, mit $p_d = 0{,}0166$ kg/qcm als Sättigungsdampfdruck. Nun wird unter sonst gleichen Umständen das gleiche Luftgewicht in der Stunde eindringen wie vorhin, und da auch das Fördervolumen der Pumpe unverändert bleibt, dehnt sich die Luft, von dem Einfluß der geringen Temperaturdifferenz abgesehen, auf denselben Teildruck aus wie oben. Der Kondensatordruck wird also rd. $p_k = 0{,}0166 + 0{,}0117 = 0{,}0283$ kg/qcm betragen.

Die praktisch übliche und wirtschaftlich erreichbare Luftleere wird von Fr. Tosi gemäß nachfolgender Tabelle gewährleistet:

Absolute Drucke beim Eintritt in den Kondensator in Zentimetern Quecksilbersäule.
Oberflächenkondensatoren und Gegenstrom-Mischkondensatoren.

Kühlwasser-Temperatur °C		5	10	15	20	25	30	35	40	45
Verhältnis: Kühlwasser/Dampf	30	2,80	3,70	4,75	6,10	7,90	10,15	12,70	—	—
	50	2,—	2,42	3,15	4,18	5,49	6,90	8,90	11,45	—
	70	—	—	2,77	3,48	4,52	5,90	7,70	9,66	12,40

Parallelstrom-Mischkondensatoren.

Kühlwasser-Temperatur °C		5	10	15	20	25	30	35
Verhältnis: Kühlwasser/Dampf	20	5,68	6,99	8,64	10,69	13,24	—	—
	25	4,48	5,46	6,70	8,27	10,24	12,80	15,80
	30	3,85	4,65	5,68	6,99	8,64	10,69	13,24

Ausführungsbeispiele von Luftpumpen.

Die in Abb. 903 dargestellte Verbundpumpe von Franco Tosi ist eine Verbesserung der „Schlitzpumpe"; der Kolben gibt in der oberen Lage für das Ansaugen der unteren Seite einen durch keine Rippe unterbrochenen Ringquerschnitt frei. Die Wölbung erleichtert das Abfließen der Luft im höchsten Punkt. Tosi zählt unter den Vorteilen der Verbundpumpe auch den auf, daß die zweite Stufe der Pumpe ohne Schädigung des Vakuums Luft aus dem höchsten Punkte der Kühlwasserleitung absaugen kann, welche Leitung man zweckmäßig als Heber konstruiert, um nur die Reibungsarbeit überwinden zu müssen.

Die A.-G. Brown, Boveri & Cie. benützte früher Verbundpumpen nach Abb. 903a mit Saugschlitzen in der ersten Stufe und Tauchkolben in der zweiten Stufe, dessen Durchmesser das Druckverhältnis bestimmt.

Luftpumpengröße für beste Arbeitsausbeute.

Je größer wir das Fördervolumen der Luftpumpe etwa durch Beschleunigung ihres Ganges machen, um so mehr wird sich die Luft ausdehnen, so daß ihr Teildruck und mit diesem gleichsinnig der Kondensatordruck sinken muß. Indem dann die Temperatur des Eintrittsdampfes kleiner wird, muß auch

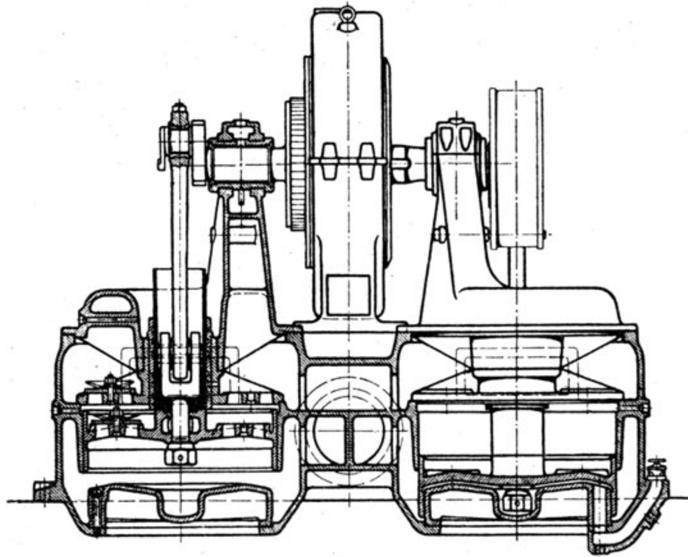


Abb. 903. Luftpumpe von Tosi.

diejenige des abfließenden Kühlwassers etwas fallen, was eine weitere, doch unbedeutende Verbesserung des Vakuums ergibt. Es frägt sich nun, wie das Luftförderungsvolumen und das Vakuum zahlenmäßig zusammenhängen und bis zu welcher Grenze tiefere Luftleere einen Arbeitsgewinn bringt? Offenbar nur so lange, bis die Mehrleistung der Turbine durch die Vergrößerung des Kraftverbrauches der Kondensation aufgehoben wird.

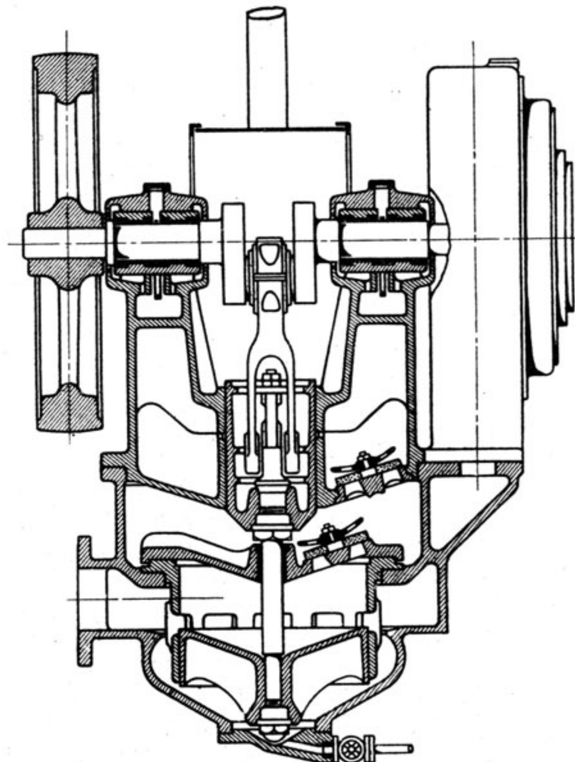


Abb. 903a. Verbundluftpumpe von Brown, Boveri & Cie.

Wir teilen die Ergebnisse der Rechnung für ein bestimmtes **Beispiel** nachfolgend mit.

Eine Turbine mit 10 at abs. Eintrittsspannung, 300° Anfangstemperatur habe einen inneren Wirkungsgrad von 65 v. H. und einen mechanischen Wirkungsgrad von 90 v. H. Das Einspritzwasser habe die Anfangstemperatur $t_1 = 10°$ C, das Gewicht sei das 50fache des Dampfgewichtes. Die Austrittstemperatur des Kühlwassers ergibt sich mit der Luftleere etwas veränderlich im Mittel zu etwa 21,5° C, das entsprechende theoretische Vakuum wäre rund 0,026 kg/qcm abs. Wir setzen als Volumen der eindringenden Luft bei atmosphärischem Druck gemessen der Reihe nach 2, 4, 10, 30 und 60 v. H. des Einspritzwasservolumens an, oder rund 10, 20, 50, 150, 300 kg Luft in der Stunde bei einer 1000 kW-Maschine, und erhalten die in Abb. 904 in gleicher Reihenfolge mit *a*, *b*, *c*, *d*, *e* bezeichneten Kurven. Der Wirkungsgrad der Luftpumpe ist mit 0,5 angenommen worden. Die Abszisse stellt den absoluten Kondensatordruck, die Ordinate die effektive Leistung der Turbine in kcal für 1 kg Dampf dar. Die oberste Kurve bedeutet die effektive Leistung der Turbine ohne Abzug der Luftpumpenarbeit.

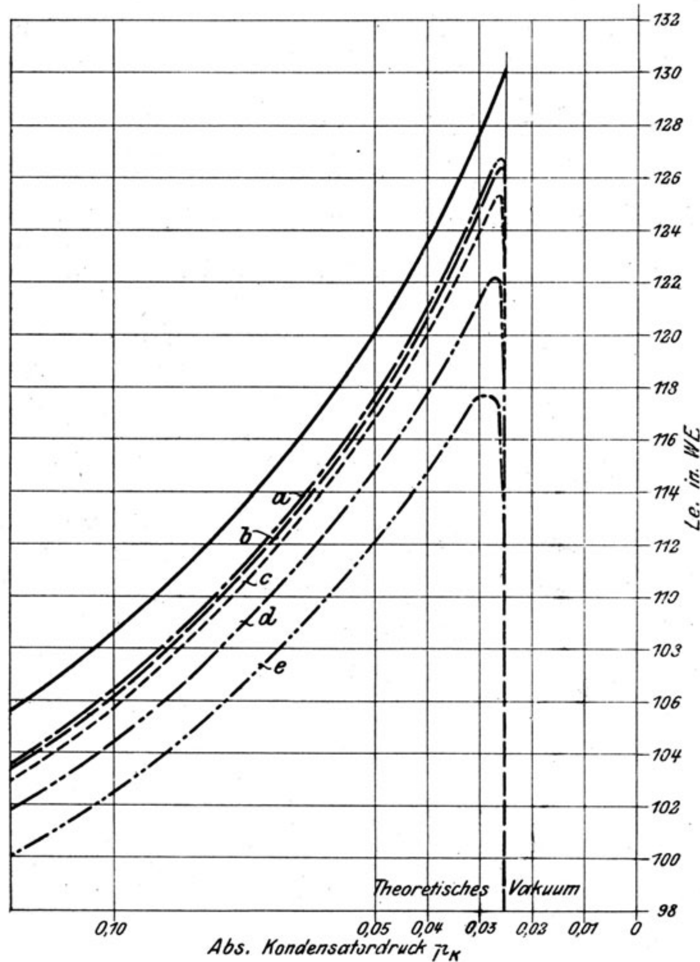


Abb. 904. Günstigste Luftpumpengröße.

Das gemeinsame Merkmal der Kurven ist, **daß die Steigerung der Luftleere einen Gewinn an effektiver Arbeit liefert bis knapp an das theoretische Vakuum heran.** Der Hauptteil der Luftpumpenarbeit stammt von der Wasserförderung. Ist der Rauminhalt der Luft kleiner als 2 v. H. der Einspritzwassermenge, so kann die Luftverdichtungsarbeit füglich vernachlässigt werden.

Das Bestreben, hohes Vakuum zu erzielen, kann daher kaum übertrieben werden, findet jedoch seine Grenze an der Größe der Luftpumpe, die mit steigender Luftleere wächst. Die Abbildung gestattet im übrigen den Arbeitsverbrauch der Luftpumpe in absolutem Maß (kcal/1 kg Dampf) abzulesen, und liefert Werte, die mit den praktischen Ergebnissen gut übereinstimmen.

152. Strahl-Luftpumpen und -Kondensatoren.

Die Luft wird von einem geschlossenen Wasserstrahl mit rundem (Körting) oder sternförmigem Querschnitt (Rateau) mitgerissen und vermöge der lebendigen Kraft des Strahles in einer kegelig erweiterten Düse (Abb. 905) auf den Atmosphärendruck verdichtet. Läßt man in die Vorrichtung den gesamten Abdampf eintreten, so wird dieser am kalten Strahl niedergeschlagen, es liegt Strahlkondensation vor, die indes heute seltener benützt wird.

„Theorie"[1]) der Gasverdichtung mittels Flüssigkeitsstrahlen. Die Erfahrung lehrt, daß der Vorgang im **Mischungsraum** sich bis jetzt jeder rechnerischen Behandlung entzieht, und doch einen **Hauptteil der Verluste verursacht.** Daß der Strahl, der mit der Geschwindigkeit w_0 in den Vakuumraum dringt, sich in Tropfen auflöst und mit den Gasteilchen zum „Stoß" gelangt, hat bei dem ungemein kleinen Verhältnis der Masse des Gases zu der der Flüssigkeit **keine Bedeutung,** man kann w_0 als gemeinsame Geschwindigkeit der beiden be-

[1]) Der unvollkommene Zustand unserer Kenntnisse über diesen Gegenstand rechtfertigt das Anbringen der Anführungszeichen.

trachten. Es scheint jedoch als ob infolge der Zersplitterung ein erheblicher Teil des Strahles gegen die Wand geschleudert, dort seine Geschwindigkeit verlieren würde, vielleicht, wie angedeutet, einen Stau bildet, durch den der Kern mit hohem Stoßverlust durchdringen muß.

Von dem Querschnitt an, der durch das Gemisch mit geordneter Strömung als gut ausgefüllt angenommen werden kann, bis zu einem Zwischenquerschnitt liefert der Satz von der kinetischen Energie folgende Beziehungen:

Es bedeute $G = G_w + G_d + G_l$ das sekundliche Gesamtgewicht von Wasser, Dampfrest und Luft, h die Fallhöhe. Die Abnahme der kinetischen Energie zuzüglich der Arbeit der Schwere ist

$$E = \frac{G}{g}\frac{w_1^2 - w^2}{2} + Gh \quad \ldots \quad (1)$$

Diese Energie wird erstens verwendet, um die Wassermenge $G_w + G_d$ (da G_d kondensiert wird) aus dem Raum mit dem Drucke p_k in den Querschnitt mit dem Drucke p zu schaffen, wobei die Verdrängungsarbeit

$$E_w = (G_w + G_d)\, v_w\, (p - p_k) \quad \ldots \quad (2)$$

geleistet wird. Zweitens muß das Luftvolumen $G_l v_l$ einschließlich des darin mit Sättigungsdichte enthaltenen Wasserdampfes vom Kondensatordruck p_k auf den Druck p verdichtet und hingeschoben werden, was den Arbeitsaufwand

$$E_l = -\int V_l\, dp = -\int_{p_k}^{p} G_l v_l\, dp \quad \ldots \quad (3)$$

erheischt. Setzen wir isothermische Verdichtung, d. h.

$$p_l v_l = (p - p_d)\, v_l = BT = \text{konst.} \quad \ldots \quad (4)$$

voraus, so daß auch der Sättigungsdruck zur Wassertemperatur T, p_d unverändert bleibt. Dann wird die

$$E_l = G_l BT \,\lg n\, \frac{p - p_d}{p_k - p_d} \quad \ldots \quad (5)$$

Endlich wird durch Reibung und Wirbelung die Arbeit GR aufgezehrt, und wir erhalten die Energiegleichung $E = E_w + E_l + GR$ oder

$$G\left(h + \frac{w_1^2 - w^2}{2g}\right) = (G_w + G_d) v_w (p - p_k) + G_l BT \,\lg n\, \frac{p - p_d}{p_k - p_d} + GR \quad \ldots \quad (6)$$

Setzen wir die Reibungsarbeit einem bestimmten Bruchteil, etwa 20 bis 30 v. H., der auf der linken Seite von Gl. (6) stehenden verfügbaren Arbeit gleich, so kann aus (6) die Geschwindigkeit w berechnet werden. Wollte man den Teildruck des Dampfes p_d bis auf den Kondensatordruck p_k hinauftreiben, so ergäbe sich auch hier eine unendlich große Verdichtungsarbeit.

Die Gleichung der Stetigkeit lautet

$$(G_w + G_d) v_w + G_l v_l = f w \quad \ldots \quad (7)$$

und dient zur Bestimmung des Querschnittes f. Liegen Versuchsergebnisse vor, so liefert die Beobachtung p, T in irgendeinem Querschnitt, worauf v_l aus Gl. (4), w aus Gl. (7) und die Reibungsarbeit R aus Gl. (6) ermittelt werden. Man kann Gl. (7) nach f auflösen und nach Ersatz von v_l mittels (4) und von w mittels (6) durch Bildung von df/dp den „kritischen" Druck bestimmen, wo f ein Mindestwert ist[1]). Im allgemeinen wird sich eine stetige Erweiterung ergeben.

Der **Zusammenhang zwischen Leistung, Vakuum und Luftmenge ist nach Versuchen von Grunwald**[2]) an einem Vierstrahlkondensator, der zum Schöpfen von Luft benutzt wurde, der folgende:

Wassertemperatur 10,2° C

Versuch-Nr.		1	2	3	4	5	7	10
Wasserüberdruck vor der Düse	at	0,63	0,63	0,64	0,66	0,68	0,78	0,95
Geförderte Wassermenge . .	cbm/st	98	98	97	96	95	90	82
Absoluter Kondensatordruck	mm/QS	16,5	26,5	74,5	116,5	191	361	570
Luftgewicht	g/sek	0	0,181	0,724	1,63	2,90	6,52	—
An die Pumpenwelle abgegeben	PS_e	9,4	9,4	9,4	9,4	9,2	9,1	9,5
Rauminhalt der Luft beim Kondensatorzustand . . .	l/PS-sek	0	0,641	0,720	0,983	1,055	1,24	—
$\eta = \frac{\textbf{Verdichtungsarbeit}}{\textbf{Pumpenarbeit}}$ . .	in v. H.	**0**	**0,79**	**2,05**	**3,68**	**4,85**	**5,82**	—

[1]) Dies wurde von Pfleiderer in Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1914, S. 965, durchgeführt, indessen mit Vernachlässigung von p_d, was bei tiefen Luftleeren kaum mehr zulässig sein dürfte.

[2]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1912, S. 1978, Versuch B.

Das Einspritzwasser wurde durch eine Kreiselpumpe geliefert; das Verhältnis der (isothermischen) Luftverdichtungsarbeit zur von der Pumpe aufgenommenen Arbeit ist der **„Wirkungsgrad“,** dessen Werte, wie ersichtlich, sehr niedrig sind.

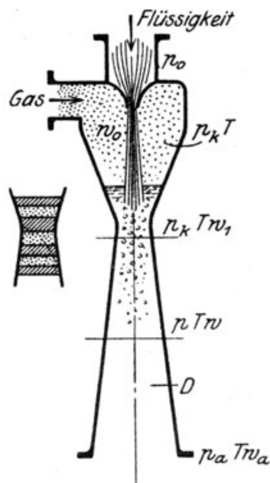


Abb. 905. Strahl-Luftpumpe.

Eine wichtige Folgerung kann aus der Betrachtung der Stetigkeitsbedingung gezogen werden. In einer gegebenen Pumpe wird eine gegebene Wassermenge den Diffusor, von großen Vakuumänderungen abgesehen, mit fast unveränderlicher Geschwindigkeit durchströmen, daher im oberen Teil, bildlich gesprochen, wie in Abb. 905 angedeutet, Schichten bestimmter Dicke mit bestimmten Zwischenräumen bilden. Diese müssen von der Luft eingenommen werden, deren Spannung sich dem veränderlichen Gewicht entsprechend selbsttätig so einstellt, bis das gegebene Luftgewicht den dargebotenen Rauminhalt ausfüllt.

Eine **gegebene Pumpe** würde hiernach **bei gegebener Wassermenge unabhängig vom Vakuum, stets ein — auf den Kondensatorzustand bezogen — gleich großes Luftvolumen fördern.**

Diese Folgerung wurde von Pfleiderer (a. a. O.) durch Versuche bestätigt, der ein eigenes Berechnungsverfahren hierauf gründet.

Die Verdichtungsarbeit für 1 cbm Luft ist nach Gl. (5), wenn man v_l aus (4) einsetzt, und $G_l v_l =$ Rauminhalt bei Kondensatorzustand $= 1$ cbm fordert, mit $p_l = p_k - p_d$

$$L_{l_1} = p_l \lg n \frac{p_a - p_d}{p_l} = \text{rd. } p_l \lg n \frac{p_a}{p_l} \quad \ldots \quad (8)$$

Man muß wohl beachten, daß L_{l_1} mit dem Ansaugedruck nicht **stetig abnimmt,** sondern einen **Höchstwert erreicht,** wo $dL/dp_l = 0$ ist; dies findet statt bei $p_l = p_a/e$ mit $e = 2{,}718$. Es wird $L_{1\,max} = p_a/e$ $= 3680$ mkg/cbm, falls p_a der atmosphärische Druck ist.

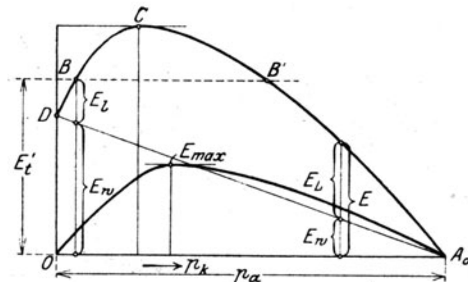


Abb. 906. Arbeitsbedarf beim Anfahren.

Bei einem Neuentwurf wäre G_l erfahrungsgemäß gegeben; der gewünschte Kondensatordruck bestimmt v_l, so daß $V_l = G_l v_l$ den unveränderlichen zu schluckenden Rauminhalt und $E_l = V_l L_{l_1}$ die aufzuwendende Verdichtungsarbeit ergibt. In der Energiegleichung (6), die man vereinfacht mit $G_d \simeq 0$, $G \simeq G_w$ als

$$(1 - \zeta)\, G_w \left(h_a + \frac{w_1^2 - w_a^2}{2g}\right) - G_w v_w (p_a - p_k) = E_l \quad . \quad (6a)$$

schreibt, müßte G_w gewählt, w_1 berechnet werden. Es scheint, daß man den **Rauminhalt des Wassers bis auf den der Luft herabdrücken,** d. h. $G_w v_w = G_l v_l = V_l$ setzen darf. Beim Anfahren wächst der Energiebedarf nach Abb. 906 bis zu einem Höchstwert (bei einem kleineren Drucke als der oben gefundene Wert p_a/e), der erheblich größer sein kann als der normale Bedarf, z. B. E_t'. **Die Pumpe würde,** wenn sie nur E_t' zu leisten vermag, bis zum Punkte B' gelangen und hier **„abschnappen“, was verhindert werden muß.** Man wird daher nicht mit E_t', sondern mit Punkt C zu rechnen haben. Ein weiteres Ausfeilen des Rechnungsganges ist vorläufig ohne Wert, da die Erfahrungsgrundlagen, wie angeführt, mangelhaft sind[1]).

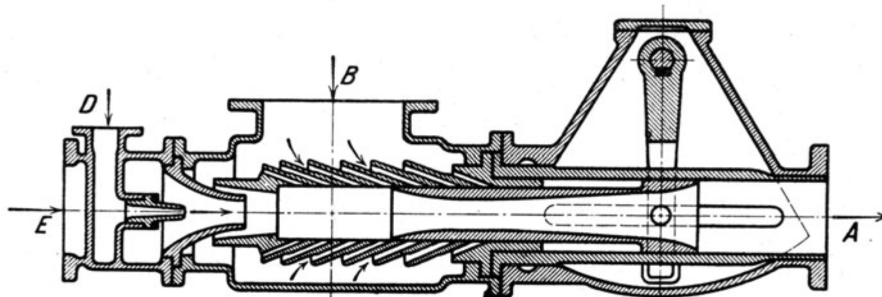


Abb. 907. Strahlkondenser von Körting.

[1]) Man vergleiche auch die Versuchsergebnisse der Leblanc-Luftpumpe im nächsten Abschnitt.

Dem **Strahlkondensator** führt man bei der Bauart von Körting, Abb. 907, den Dampf durch eine größere Zahl von Düsen zu, in denen er durch Ausdehnung beschleunigt wird.

Durch das Anprallen des gebildeten Tropfens an den Wasserstrahl wird die Geschwindigkeit desselben durch Stoßwirkung gesteigert. Ist die Dampfgeschwindigkeit in der Achsenrichtung w_d und die Wassergeschwindigkeit beim Eintritt w_0, so gilt die bekannte Stoßgleichung

$$G_w w_0 + G_d w_d = (G_w + G_d)\, w_0' \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

Von w_0' geht wieder ein beträchtlicher Teil bis zum Eintritt in den Diffusor verloren.

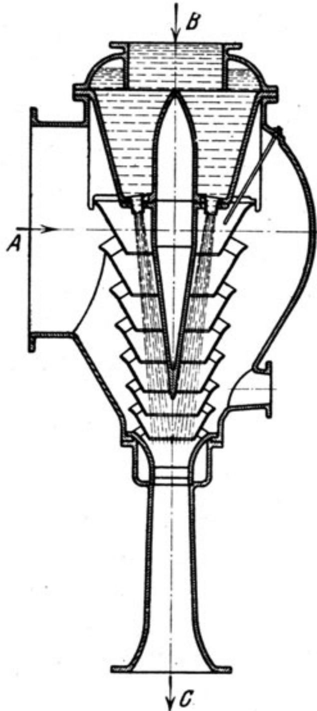


Abb. 908. Körtingscher Vielstrahl-Kondensator.

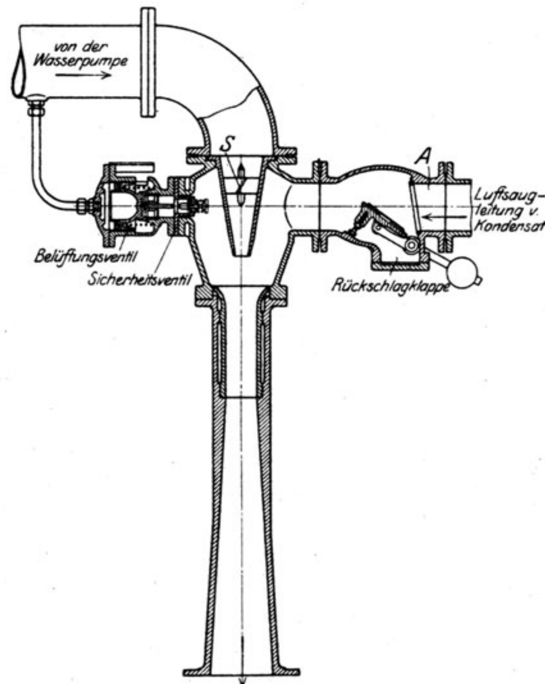


Abb. 909. Strahl Luftpumpe der M.A.N.

Muß der Kondensator sein Wasses selbst ansaugen (unter Umständen aus tieferem Horizont), so ist w_0 durch den atmosphärischen Überdruck bestimmt, und wir können aus Gl. (9) w_d berechnen, wenn wir vorher w_0' festgesetzt haben. Zur Erzeugung von w_d gehört ein Druckgefälle des Dampfes, es wird daher das Vakuum geringer als wenn wir auf die Stoßwirkung verzichten.

Ausführungsbeispiele.

Gebr. Körting A.-G. Körtingsdorf bei Hannover, die sich seit Jahren mit bestem Erfolg der Durchbildung der Strahlapparate gewidmet haben, bringen neben Abb. 907 als „Vielstrahl-Kondensatoren" die in Abb. 908 dargestellte Bauart auf den Markt. In der ersten wird der Wasserstrahl auch durch Frischdampf (D) beschleunigt. Bei der zweiten wird das Wasser in mehrere Strahlen geteilt, die eine große Kondensierungsoberfläche darbieten, auf die Stoßwirkung wird verzichtet.

Die Firma **I. Schwarz A.-G.** in Dortmund läßt die Luft durch eine im unteren Teil des Kondensers wagerecht aufgestellte Strahlpumpe absaugen, der das gesamte frische Kühlwasser zufließt, um erst dann durch die Kühlröhren geleitet zu werden, was eine intensive Abkühlung der Luftreste gewährleisten dürfte. Nach Versuchen von Josse wurde bei $t_1 = 10{,}4$; $t_2 = 19{,}5^0$ C eine Luftleere von 0,049 at abs. erreicht und eine Arbeit von 3 v. H. der Turbinenleistung verbraucht. Die geförderte Luftmenge ist nicht angegeben.

Die **Maschinenfabrik Augsburg-Nürnberg A.-G.** benützt für Luftabsaugung Strahlpumpen nach der Bauart von P. H. Müller, Abb. 909. Das Kennzeichnende derselben ist der Einbau von Schraubenschaufeln S in die Wasserdüse, durch die dem **Strahl eine Drehungsbewegung erteilt** wird, die für die Zersplitterung und Mitnahme der Luftreste von Vorteil ist. A ist die Luftabsaugeleitung. Sollte der Druck vor der Düse infolge Versagens der Pumpe oder aus einem andern Grunde so weit zurückgehen, daß die Strahlvorrichtung nicht zu fördern vermag, dann wird das **„Belüftungsventil"** durch die Feder, die gegenüber dem Wasserdruck das Übergewicht erhält, geöffnet. Die einströmende Luft schließt die

Rückschlagklappe und verhindert die Zerstörung des Vakuums im Kondenser. Steigender Wasserdruck schließt das Belüftungsventil.

Escher, Wyß & Cie. benützen nach Abb. 910 eingeschnürte Düsen mit einem kegelförmigen Reglerstift. Der Strahl dürfte wie bei der bekannten Nadelregelung sich zu einem axialen Zylinder zusammen-

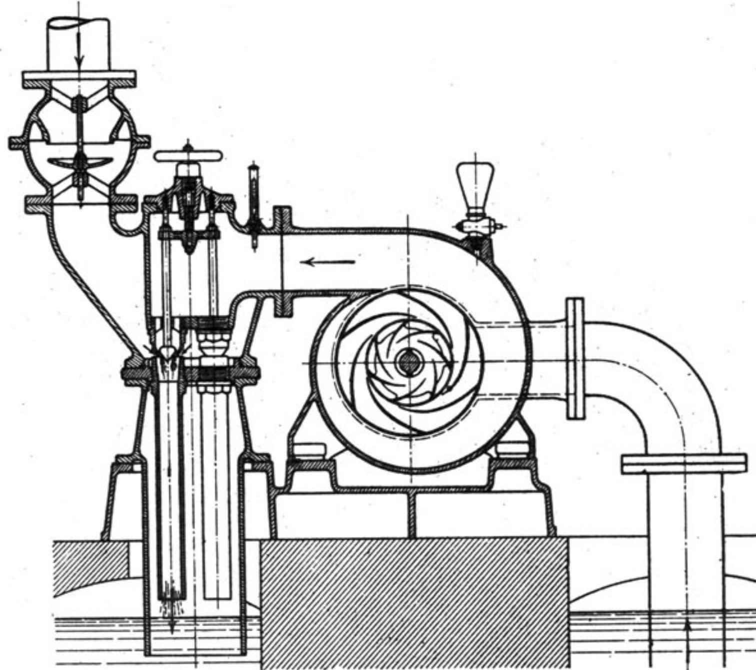


Abb. 910. Strahl-Luftpumpe von Escher, Wyß & Cie.

schließen. Der Diffusor besitzt selbstverständlich eine in der Zeichnung nicht genügend hervorgehobene Erweiterung. Die Abmessungen der Düse im Verhältnis zum Diffusor sind das Ergebnis ausgedehnter

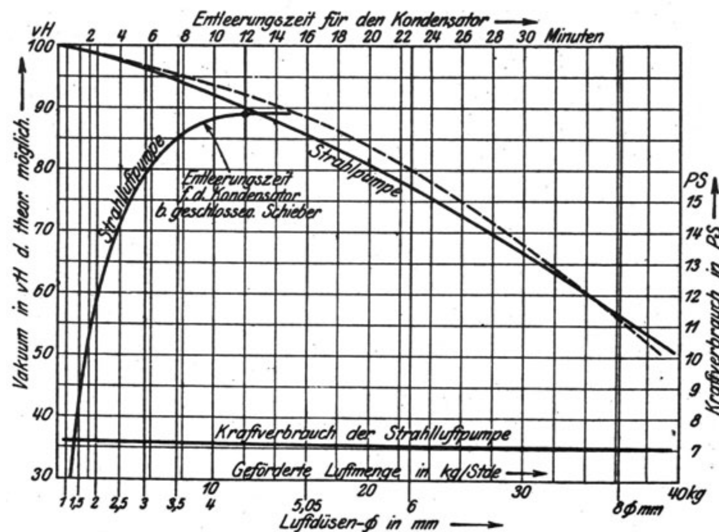


Abb. 910a. Versuchsergebnisse zu Abb. 910.

Versuche auf dem Versuchsstand der Firma, wobei die in Abb. 910a aufgetragenen Leistungen erzielt wurden. Die Strahlpumpe arbeitet für je eine bestimmte Düsenweite am günstigsten bei einem bestimmten Wert der Wasserpressung vor der Düse; und es zeigte sich, daß eine bestimmte Düsenweite die absolut genommen besten Ergebnisse liefert.

153. Die umlaufende oder Kreisel-Luftpumpe.

a) Mit Verdichtung in ruhenden Diffusoren.

Die umlaufende Luftpumpe bezweckt den Ersatz der nassen Luftpumpe durch eine Vorrichtung mit rein drehender Bewegung. Die hier zu besprechende erste Abart derselben ist im allgemeinen die Verbindung einer Kreiselwasserpumpe, die das Förderwasser liefert mit einem im Kreise angeordneten Diffusor, der entweder aus einzelnen Kanälen besteht, oder einen zusammenhängenden Ringraum bildet.

Auf **Stumpf** geht die planmäßige Bildung von sogenannten **„Wasserkolben“,** Abb. 911, zurück (D. R.-P. Nr. 136235 v. J. 1901 wie auch Nr. 142053). Das Förderwasser wird im Kreiselrad durch bloß teil-

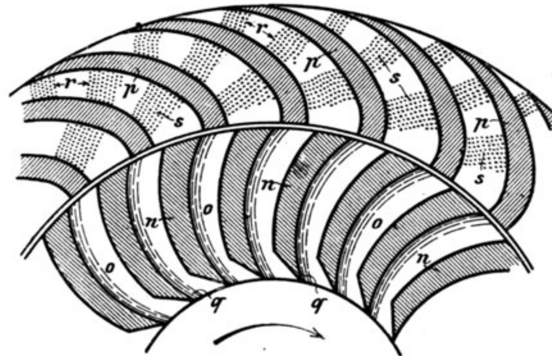


Abb. 911. Stumpfsche „Wasserkolben“.

weises Auffüllen der Zellen in einzelne Strahlen unterteilt. Der aus Wasser und Luft bestehende Doppelstrahl wird durch die Kanalwände des ruhenden Diffusors zerschnitten (wobei die Kantenenden in Wirklichkeit selbstverständlich zugeschärft sein werden), so daß abwechselnde Luft- und Wasserschichten, die „Wasserkolben“, entstehen, deren kinetische Energie die Luft auf atmosphärischen Druck verdichtet.

In der **Leblanc-Pumpe,** die von der französischen und britischen Westinghouse-Gesellschaft hergestellt wird, läßt man nach Abb. 912[1]) das Wasser bei B durch Kanal C in ein Kreiselrad eintreten, in dem es beschleunigt wird und in Form des angedeuteten Schleiers E austritt, dessen einzelne Strahlen

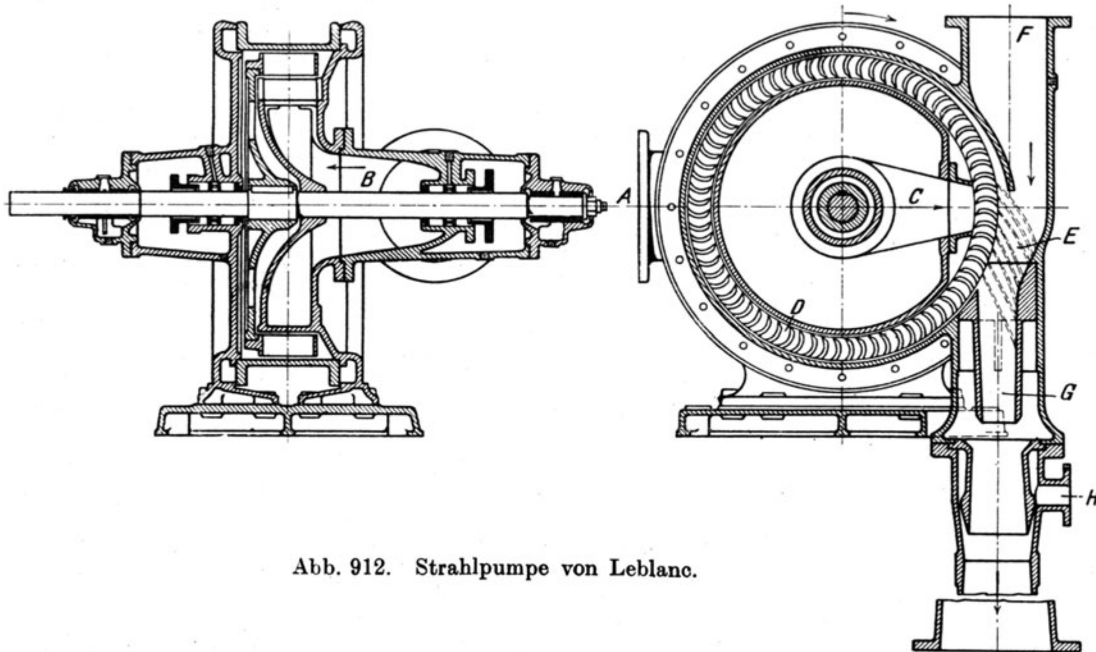


Abb. 912. Strahlpumpe von Leblanc.

je einen Raumteil Luft abschließen und nach abwärts fördern (in Wirklichkeit unter weniger stumpfem Winkel wie in der Abbildung auf die gegenüberliegende Wand aufprallen dürfen, da sonst zu viel

[1]) Engineering 1909, I, S. 622.

kinetische Energie verloren ginge). Das bei F eintretende Luftgemisch wird in der sich anschließenden erweiterten Düse verdichtet und ausgestoßen. Zum Zwecke sicheren Anlassens ist am Eintritt in die Hauptdüse eine Ejektor-Hilfsdüse mit Frischdampfzuleitung angeordnet.

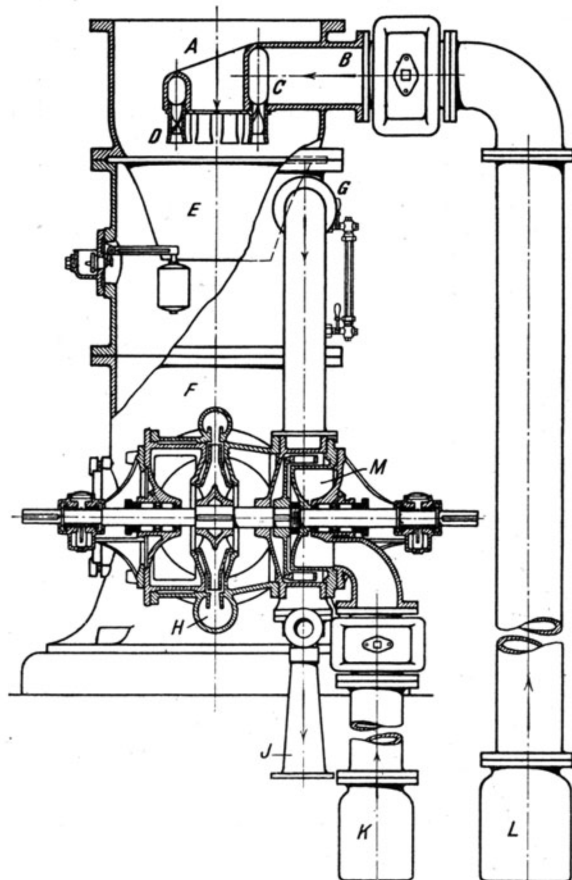


Abb. 913.
Anordnung der Pumpen bei Mischkondensation.

Abb. 913 stellt die Pumpenanordnung des Mischkondensators Abb. 894 dar. H schöpft das Ausspritzwasser heraus, M ist das Leblancsche Kreiselrad. In die Strahldüsen waren bei dieser älteren Anordnung gewundene Streuplatten eingebaut. Bei neueren Ausführungen von Balcke & Co. werden die Pumpen in das Innere des Kondensators verlegt.

Versuche an Leblanc-Westinghouse-Kreisel-Strahlluftpumpen[1]).

Die Ergebnisse einiger von Leblanc selbst an seiner Luftpumpe veranstalteten Versuche sind in der nachfolgenden Zahlentafel vereinigt. Die Luft wurde durch geeichte Düsen zugeführt. Wir haben angenommen, daß das Förderwasser noch 2 Volumenprozente Luft (bei atm. Zustand) abgeschieden hat, und berechneten die Wasserverdrängungs-, die Luftverdrängungsarbeit und den kinetischen Auslaßverlust. Der Unterschied gegen die eingeführte Arbeit ergibt dann in der letzten Rubrik den Reibungsverlust.

Dieser macht, wie ersichtlich, 60 bis 80 v. H. der eingeführten Arbeit aus. Setzt man das Einspritzwasser luftfrei voraus, so ist der Verlust noch etwas höher. Wir haben einen kleineren Strahlkondensator für 2000 kg Dampf i. d. St. im Maschinenlaboratorium der Eidg. Techn. Hochschule untersucht und festgestellt, daß der Wirkungsgrad der eigentlichen Verdichtungsdüse verhältnismäßig hoch gelegen ist. Weitaus der Hauptteil der Reibungsverluste ist demnach auf dem Wege vom Schleuderrad in den Diffusor zu suchen, worauf wir schon oben hingewiesen haben. Der Wirkungsgrad erreicht für obige Versuche höchstens den Betrag von 7 v. H. Seither sind Versuche von Grunewald (a. a. O.) veröffentlicht worden, die Wirkungsgrade bis zu 13,4 v. H. ergeben haben, wodurch die Leblancpumpe an die Spitze der Strahlvorrichtungen tritt.

	Nr.	Durchfließ. Wassermenge	Luftzufuhr durch Düse	Luftmenge aus Düse u. aus dem Wasser	Kondensatordruck		Wasserverdrängungsarbeit	Luftverdichtungsarbeit	Auslaßverlust	Eingeführte Leistung		Reibungsverlust	
		l/sek	gr/sek	gr/sek	mm Hg	at abs.	mkg	mkg	mkg	PS	mkg/sek	mkg/sek	in v. H. d.eingef. Leistg.
40 PS-Pumpe $n = 480$ Umdr. i. d. Min. Wassertemp. $t = 8{,}5^0$ C	1	16,0	0	0,39	9	0,0122	154,9	20,1	36,8	22	1650	1438,2	87,2
	2	27,0	0,75	1,408	11	0,01499	261	35,7	185	28	2100	1618,3	77,0
	3	35,5	2,87	3,735	18	0,0245	339	130,5	456	36,5	2740	1814,5	66,2
	4	34,0	6,16	6,988	24	0,0327	327	217,5	466	36,5	2740	1729,5	63,2
20 PS-Pumpe $n = 720$ Umdr. i. d. Min. Wassertemp. $t = 9{,}5^0$ C	1	11,5	0	0,28	9	0,0122	113	15,9	13,7	11,3	848	705,4	83,2
	2	12,4	0,72	1,022	15	0,0204	118,9	40,4	18,8	11,3	848	669,9	78,9
	3	16,8	2,87	3,279	32	0,0435	157,5	93,2	54,8	15,7	1177	872,0	74,0
	4	21,0	6,46	6,971	60	0,0816	189,0	152,5	131,0	19,6	1470	997,5	67,8
	5	22,5	11,50	12,048	109	0,1484	187,6	197,0	204	20,5	1538	949,4	61,5

Die Allgemeine Elektrizitäts-Gesellschaft Berlin vereinigt die Kühlwasserpumpe C (Abb. 914) mit der Kreiselpumpe D_2 für flüssiges Kondensat und der Kreisel-Luftpumpe D_1 zu einer Einheit mit der Antriebsturbine A. Man wird auf vorteilhafte Weise vom elektrischen Strom unabhängig, muß aber die

[1]) Engineering 1908, Bd. II S. 287.

Pumpen mit hohen Umlaufzahlen konstruieren, damit die Dampfturbine hinlänglich einfach, z. B. als einstufige Curtisturbine, ausgeführt werden kann. Der Schnitt der Luftpumpe (Abb. 915) läßt erkennen, daß das Förderwasser in einem Kreiselrade beschleunigt in isolierten Strahlen einen breiten Spalt durch-

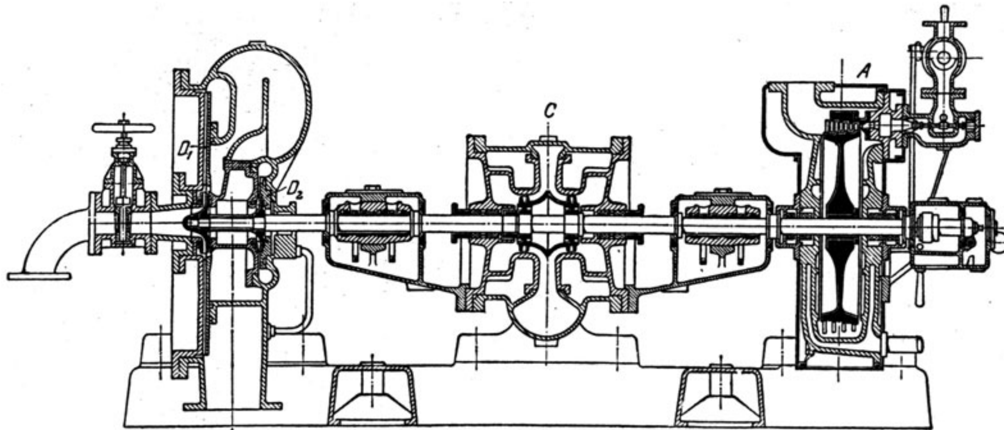


Abb. 914. Pumpenanordnung der Allgemeinen Elektrizitäts-Gesellschaft.

dringt, der auch der Luft den Zutritt zu dem anschließenden mit geradlinigen Schaufeln versehenen „Verteiler“, d. h. Diffusor, gewährt, in dem die Verdichtung vor sich geht.

Die umlaufende Luftpumpe mit scheibenförmigem Förderstrahl von **Thyssen-Pfleiderer** besteht nach Abb. 916 aus zwei fest aufgekeilten Kreiselrädern, die einen scheibenförmigen Strahl in die mit entsprechender Ausrundung versehenen Fangdüsen senden. Das zwischen den Kreiselrädern be-

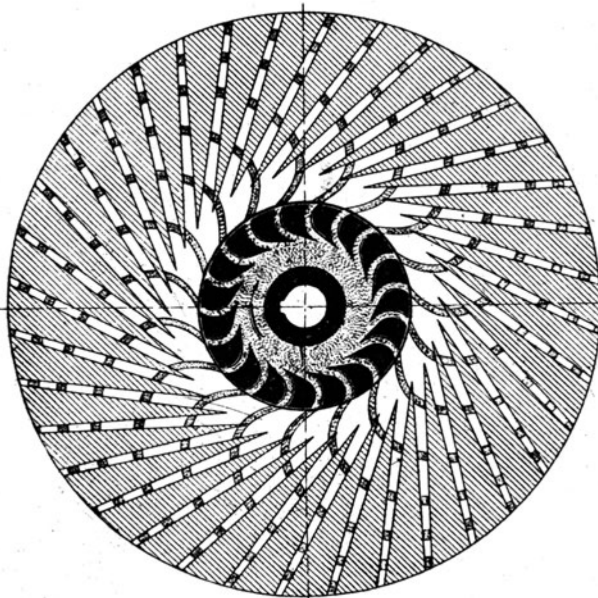


Abb. 915. Ruhender Diffusor zu Abb. 914.

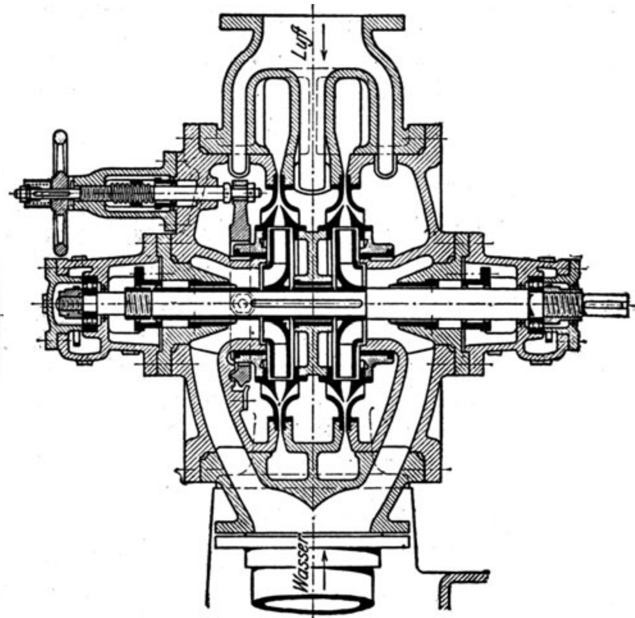


Abb. 916. Umlaufende Luftpumpe von Thyssen-Pfleiderer.

festigte Rad ist auf der Welle lose und trägt je eine den Ausfluß begrenzende Scheibe. Die dazu gehörende Gegenscheibe ist im Raume fest. Das lose Rad wird vermöge der Wasserreibung mitgenommen und ermöglicht hierdurch das Herausschaffen von in der Rundung etwa steckenbleibenden Verunreinigungen. Es sollen sogar **Holzspäne von 4 mm Dicke ohne Schaden zerkleinert** und herausbefördert worden sein. Das Handrad mit Spindel dient zum Verstellen der Ausflußweite. Der beidseitige Druck auf das mittlere Rad verschiebt dieses so, daß beide Ausflußweiten stets gleich groß bleiben. Die dem Wasser durch die Reibung erteilte Umfangsgeschwindigkeit soll eine Auflösung desselben in Strahlen bewirken, was die Saugwirkung erhöht. Eine Luftpumpe für die Luftreste von 30000 kg/st Dampf soll 99—100 v. H. der theoretischen Luftleere liefern und 20 Pferdestärken Leistung erfordern. Über die Berechnnng der Pumpe vergleiche man die Abhandlung von Pfleiderer, Z. d. V. deutsch. Ing. 1914, S. 965.

b) Umlaufende Luftpumpen mit Verdichtung im Laufrade.

Bei diesen Pumpen wird das Wasser- und Dampfluftgemisch in das Laufrad einer Kreiselpumpe eingeführt, darin ganz oder teilweise verdichtet und hinausgeschafft. Die Energiegleichung der Strömung im Laufrade muß daher die Arbeit der Fliehkraft berücksichtigen. Es ergibt sich, wenn wir den relativen Eintritts- und Austrittszustand vergleichen, im Anschluß an Gleichung (6) des vorigen Abschnittes, die Beziehung,

$$G\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} + (G_w + G_d)\,v_w\,(p_2 - p_1) + G_l B T \lg n\left(\frac{p_2 - p_d}{p_1 - p_d}\right) + R = G\frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} \qquad (1)$$

worin $w_1\, u_1\, p_1$ die relative Misch-, die Umfangsgeschwindigkeit und den Druck beim Eintritt in das Rad. $w_2\, u_2\, p_2$ dasselbe am Austritt bedeuten. Die Durchflußgleichung

$$(G_w + G_d)\,v_w + G_l v_l = f w \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

dient zur Berechnung der Querschnitte. Der Satz vom Antriebe liefert mit den Umfangskomponenten w_{2u}, w_{1u} das aufzuwendende Drehmoment

$$\mathfrak{M} = \frac{G}{g}\,(w_{2u}\,r_2 - w_{1u}\,r_1) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

woraus sich die aufzuwendende effektive Leistung

$$N_e = \frac{\mathfrak{M}\,\omega}{\eta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

mit η als Wirkungsgrad und ω als Winkelgeschwindigkeit ergibt.

Einer der ersten Vorschläge dieser Art stammt von **Reuter,** D. R.-P. 157275, nach dem mehrere Verdichtungskreiselräder hintereinander geschaltet werden sollen. Die Anordnung wurde dem Vernehmen nach erprobt. Von weiteren Ausführungen ist nichts in die Öffentlichkeit gedrungen.

Im D. R.-P. 289127 vom Jahre 1914 wird der **Allg. Elektrizitäts-Gesellschaft** ein Verfahren geschützt, gemäß dem nach Abb. 917 bie Luftreste zunächst durch einen Dampfstrahl mittels Düse *b* in die Längs-

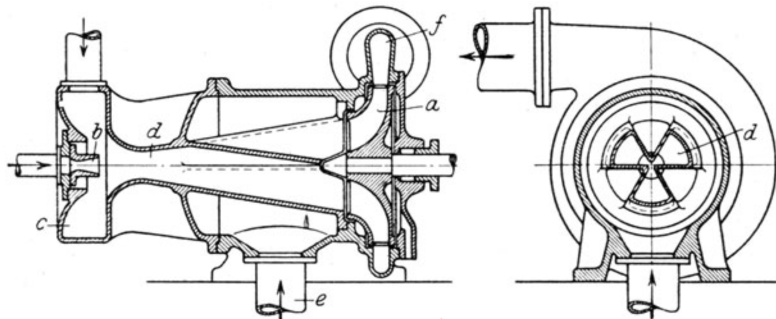


Abb. 917. Verdichtung mittels Kreiselpumpe.

düse *d* befördert werden. Diese besitzt einen sternförmigen Querschnitt, durch dessen Außenabteilungen bei *e* Wasser zufließt. Beide werden durch das Kreiselrad *a* aufgenommen, in dessen Kanälen sich infolge der raschen Drehung wechselweise Luft- und Wasserschichten bilden und so durch „Kolbenwirkung“ nach außen befördert werden.

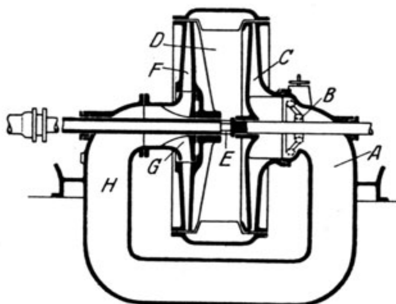


Abb. 918. Energierückgewinnung.

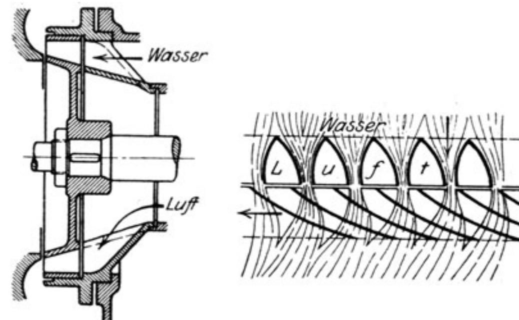


Abb. 919. Axiale Luftpumpe von Feichtinger.

Das D. R.-P. 283704 vom Jahre 1912 von **Felber** bezweckt die teilweise Rückgewinnung der von der Hilfsflüssigkeit aufgenommenen Energie durch eine Turbine. Gemäß Abb. 918 tritt das Triebwasser bei A ein. B ist der Luftzutritt (durchlochte Röhre), C ist das Schleuderrad. Im Raume D wird das Wasser durch die Fliehkraft nach außen gedrängt, die Luft abgeschieden und durch die Ausschnitte der hohlen Welle bei E nach außen befördert. Das Wasser tritt hierauf in die Turbine F, in der es unter Abnahme der Pressung einen Teil der aufgewendeten Antriebsarbeit an die Welle zurückgibt. Durch G und H schließt sich der Kreislauf. Versuche mit einem ähnlich gebauten Verdichter endigten mit einem Mißerfolg.

Die **M. A. G. Breitfeld, Danek & Co.** benützt eine **axiale Pumpe** mit Verdichtung im Rade nach dem D. R.-P. Nr. 252292 vom Jahre 1912 von Feichtinger. Nach Abb. 919 erhält das Leitrad abwechselnde Luft- und Wasserkanäle. Das Gemisch wird in Luft- und Wasserschichten zerschnitten und im Laufrad verdichtet.

154. Die Dampfstrahl-Luftpumpe.

Die Dampfstrahlpumpe ist eine unter dem Namen „Ejektor" seit langer Zeit bekannte Vorrichtung, die Parsons im Jahre 1902 als „Vakuum-Vermehrer" in den Dampfturbinenbetrieb einführte. Später ging man zu zweistufiger Verdichtung in hintereinandergeschalteten Strahlpumpen über. Aber erst in der Ausbildung von Leblanc wurde der Grad von Betriebssicherheit und Wirtschaftlichkeit erreicht, der die Vorrichtung praktisch verwendbar macht.

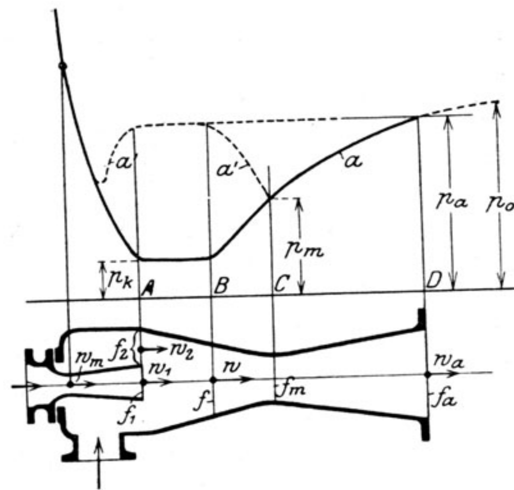


Abb. 920. Dampfstrahl-Verdichter.

Theorie des idealisierten Strahlverdichters.

Wir nehmen an, das treibende und das geförderte Gas habe gleiche physikalische Eigenschaften so daß auch das Gemisch von der gleichen Art sein würde. Am Ende der Dampfdüse, Abb. 920, habe man auf Kondensatordruck expandiert, und die beiden Gasarten mögen sich auf dem Wege A bis B vollständig bei unveränderlichem Druck vermischt haben. Bei B, wo der Druck zu steigen beginnt, sei die Geschwindigkeit im Querschnitt überall gleich. Ist ihr Betrag kleiner als der **„kritische" Wert,** d. h. als die **Schallgeschwindigkeit,** so muß die Verdichtung nach Abschn. 35 in einer sich erweiternden Düse vorgenommen werden; **ist sie größer, in einer sich verengenden,** die bei C ihren kleinsten Querschnitt erreicht, um sich dann zu erweitern. Wenn man schließlich von der Wandreibung absieht, so wird die „Theorie" des Vorganges sehr einfach. Es bedeute

$G_1\, w_1\, v_1$ das sekundliche Gewicht, die Geschwindigkeit und spezifisches Volumen des treibenden Gases im Querschnitt f_1 bei A;
$G_2\, w_2\, v_2$ desgleichen für das geförderte in f_2 bei A;
$p_k\, p_m\, p_a$ der absolute Druck im Mischraum, an der engsten Stelle und am Ende der Fangdüse;
$w\, v\, f$ Geschwindigkeit, spezifisches Volumen, Querschnitt im Punkt B;
$w_m\, v_m\, f_m$ Geschwindigkeit, spezifisches Volumen, Querschnitt im Punkt C;
$w_a\, v_a\, f_a$ Geschwindigkeit, spezifisches Volumen, Querschnitt im Punkt D;
$G = G_1 + G_2$ das Gesamtgesicht.

Dann bestehen die **Durchflußgleichungen**

$$G_1 v_1 = f_1 w_1\,; \qquad G_2 v_2 = f_2 w_2\,; \qquad G v = f w \quad \text{usf.} \qquad (1)$$

Die Mischung geht infolge des überall als gleich vorausgesetzten Druckes so vor sich, daß die **Bewegungsgröße** $m_1 w_1 + m_2 w_2$ **nicht geändert wird;** oder es ist nach Vermehrung mit g

$$G_1 w_1 + G_2 w_2 = G w \qquad (2)$$

Die **Gleichung der Gesamtenergie** lautet

$$G_1 \left(i_1 + A \frac{w_1^2}{2g}\right) + G_2 \left(i_2 + A \frac{w_2^2}{2g}\right) = G \left(i + A \frac{w^2}{2g}\right) \qquad (3)$$

Dabei ist für vollkommene Gase (da nach unserer Voraussetzung k für beide Gase gleich groß ist):

$$i_1 = \frac{A k}{k-1} p_k v_1\,; \qquad i_2 = \frac{A k}{k-1} p_k v_2\,; \qquad i = \frac{A k}{k-1} p_k v \qquad (3a)$$

Die **Verdichtung** ist nichts anderes als die **bei reibungsfreier Strömung thermodynamisch zulässige Umkehrung der Ausdehnung.** Bedeutet p_0 die Pressung von der aus mittels adiabatischer Ausdehnung p_k mit der Endgeschwindigkeit w erreicht würde, so ergibt die Ableitung in Abschnitt 19 etwas umgeformt

$$\frac{w^2}{2g} = \frac{k}{k-1} p_k v \left[\left(\frac{p_0}{p_k}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1\right] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

aus welcher Gleichung wir p_0, **d. h. die bei einer adiabatischen Verdichtung bis auf die Geschwindigkeit Null erreichbare Pressung** berechnen. Von dieser wird p_a um den Betrag der verbleibenden kinetischen Energie abweichen, was wir vernachlässigen, und

$$p_a \cong p_0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

setzen wollen. Für unsere Aufgabe sind $p_k\, p_a\, G_2\, v_2\, w_2\, f_2$ als vorgeschrieben anzusehen. Im allgemeinen wird die verfügbare Dampfspannung auch gegeben sein; aus ihr ermittelt sich $w_1\, v_1$. Es bleiben als Unbekannte G_1, w, v, die man aus Gl. (2) bis (4) (allerdings nur durch Probieren) berechnen kann. Um die **Querschnitte zu ermitteln,** berechnen wir mit p_0 nach Gl. (13) und (14) Abschn. (19) p_m und w_m für die engste Stelle. Ferner aus der Gleichheit $p_m v_m^k = p_k v^k$ den Rauminhalt v_m, so daß die Durchflußgleichung den Querschnitt

$$f_m = \frac{G\, v_m}{w_m} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

ergibt. Für das Düsenende nimmt man ein angemessenes w_a an und rechnet ähnlich f_a.

In einer $J - S$-Tafel, die für beide Gasarten die gleiche sein müßte, Abb. 921, stellt EA die Ausdehnung des treibenden Gases, AB den Mischungsvorgang, BD die Verdichtung dar, bei der es keine Schwierigkeiten macht, auch die Reibung zu berücksichtigen. Da man sowieso auf „Probieren" angewiesen ist, würde man G_1 versuchsweise annehmen, daraus gemäß Gl. (2) und (3) den Zustand B, aus diesem durch den Energiesatz (mit angenommene w_a) und Einschätzung der Reibung gemäß

$$A\,\frac{w^2 - w_a^2}{2g} = i_D - i_B = H \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

das Gefälle H, also auf der Zustandslinie den Endpunkt D bestimmen und die Annahme abändern, bis die verlangte Pressung p_a erreicht ist. Die Düsenform könnte graphisch aus der Zustandslinie BD ermittelt werden.

Abb. 921. Entropieschaubild zu Abb. 920.

Diese Rechnung ist für die Bestimmung praktisch brauchbarer Maße ohne Wert aus folgenden Gründen:

1. Wir wissen nicht, welche Weglänge für eine gute Vermischung erforderlich ist, bzw. wie weit die Geschwindigkeiten in einem Querschnitt ausgeglichen sind. Mithin kann weder eine genaue Energie noch eine Stetigkeitsgleichung aufgestellt werden.

2. In den praktisch wichtigen Fällen sind die Gase von verschiedener Art (Dampf und Luft) und die zeichnerische Verfolgung der Zustandsänderung führt auf unabsehbare Weitschweifigkeiten.

Es bleibt daher praktisch nur der Weg des planmäßigen Versuches übrig, wobei jedoch die Theorie als Wegweiserin dennoch gute Dienste leistet.

Der dargestellte Verdichter leidet unter dem Übelstande, nicht von selbst beim Anlassen einer Turbine anspringen zu können. Im Anfang herrscht im Kondenser Atmosphärendruck; in einer idealen Düse wäre nun bei gleichem sekundlichen Gewicht die Ausdehnungslinie a' Abb. 920 bis auf p_m hinab, darauf die Verdichtungslinie a denkbar, — in der Wirklichkeit, wegen der Reibung nicht. Noch weniger ist eine Strömung möglich wenn der Kondenserdruck unter p_a gesunken ist, aber über p_k steht. Denn bei einer Strömung in der Richtung von D gegen B wäre der Übergang von p_a zu einem Zwischendruck bei B auch bei Reibungsfreiheit nur mit Hilfe des Verdichtungsstoßes möglich, die Strömung in Richtung $D - B$ ist in diesem Fall ein nicht umkehrbarer Vorgang, es kann also die Strömung in Richtung $B - D$ mit dem gleichen Gewicht nicht vor sich gehen. Das gleiche Gewicht stellt sich aber von selbst ein, sobald man auf die Verdichtungslinie a kommen will. Nun liegen beim Anfahren die Geschwindigkeiten unter der Schallgrenze; mithin sollte vom Querschnitt, wo der Strahl sich anlegt, die Düse sich stetig erweitern. Der vorhandene engste Querschnitt ist zu eng, und zwar um so mehr als in der Dampfdüse ein Stoß auftritt, der die Endgeschwindigkeit w_1 herabsetzt. Die Notwendigkeit, den engsten Querschnitt während des Anlassens zu vergrößern, hat zuerst **Leblanc** erkannt und unter anderem eine selbsttätig nachgiebige Düse nach Abb. 922[1]) vorgeschlagen.

[1]) Schweiz. Pat. Nr. 42590 v. J. 1908.

Der Diffusor soll durch ausweichende Zungen Z gebildet werden, deren Stützfedern F beim Anlassen durch den größeren Anfangsdruck zusammengedrückt werden und so den Querschnitt stetig zunehmen lassen. (P ist ein Puffer zum Verhüten von Schwingungen.)

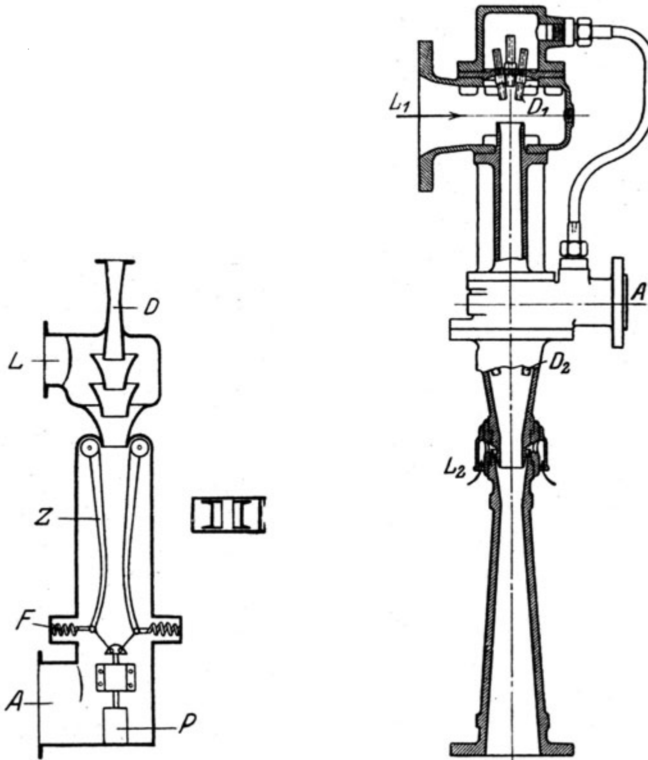


Abb. 922. Selbsttätige Einstellung des Mindestquerschnittes nach Leblanc.

Abb. 923. Leblancsche Dampfstrahl-Luftpumpe.

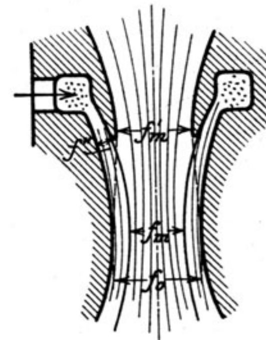


Abb. 923a. Regelung des engsten Querschnittes mittels Luftzufuhr.

Die Erfahrung hat indessen gezeigt, daß einstufige Verdichtung bei hohen Luftleeren in wirtschaftlicher Weise nicht gelingt. Es wurde daher zweistufige Verdichtung versucht, derart, daß der in der ersten Stufe verbrauchte Dampf in einem nachgeschalteten Zwischenkondenser niedergeschlagen wurde und die zweite Stufe wieder nur Luft zu fördern hatte. In dieser traten beim Anlassen dieselben Schwierigkeiten auf wie oben geschildert, auch kam es vor, daß sie im Normalbetriebe bei Schwankungen der Luftleere und der Luftmenge leicht abschnappte. Man half sich durch künstliche Belüftung, bis abermals **Leblanc** mit einer neuen glänzenden Lösung hervortrat.

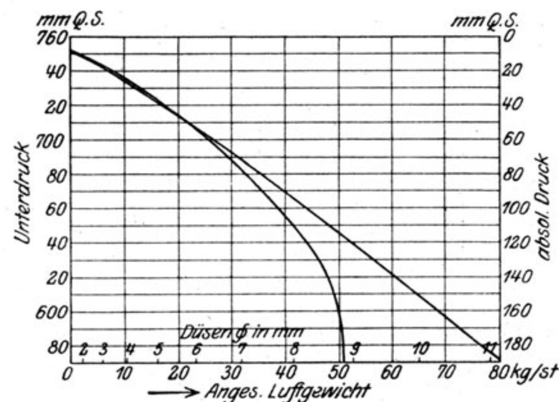


Abb. 924. Schaulinien Leblancscher Pumpen (gerade: Strahlpumpe, gekrümmt: umlaufende Pumpe).

Zunächst schaltete er beide Verdichter axial hintereinander, so daß die vom ersten mitgenommene Austrittsenergie dem zweiten zugute kommt, Abb. 923. Sodann wurde eine selbsttätige Anpassung des engsten Querschnittes der zweiten Stufe durch Zufuhr frischer Luft bei L_2 erzielt, indem, wie Abb. 923a deutlicher zeigt, bei Normalbetrieb für die eindringende Luft eine solche Einlaßweite vorgesehen wird, daß sie bei f_0 den Querschnitt auf das dem Kondenserdruck und der Nutz-Fördermenge entsprechende Maß f_m verengt. Während des Anlassens hingegen herrscht bei f_m' und f'' atmosphärischer Druck, es wird keine oder nur wenig Luft angesaugt, so daß dem Strahl der große Querschnitt f_m' zur Verfügung steht und die Erweiterung auf den noch größeren Querschnitt f_0, also eine Verdichtung in divergenten Bahnen ermöglicht wird.

Die Dampfzufuhr erfolgt von A aus durch im Kreise angeordnete Einzeldüsen D_1 und D_2. Über die **Leistungsfähigkeit** gibt Abb. 924 Aufschluß; die gerade Schaulinie stellt die Luftleere des Strahlverdichters in Abhängigkeit von der stündlich verdichteten Luftmenge dar. Die aufgewendete Dampfmenge betrug 400 kg/st. (Der Dampfdruck ist nicht angegeben, dürfte wohl 8—10 at betragen haben.) Die gekrümmte Schaulinie bezieht sich auf eine umlaufende Leblancpumpe von 20 PS Kraftbedarf. Bei einer Luftleere von 35 mm Q. S. saugt der Verdichter rd. 15 kg/st Luft an, was einer zu kondensierenden Dampfmenge von etwa 30000 kg/st entsprechen kann, von der somit der Verdichter etwa $1^1/_3$ v. H. verbraucht. Die in diesem noch enthaltene **latente Wärme wird nicht preisgegeben,** sondern **dem Speisewasser einverleibt.** Zu diesem Zwecke wird das Dampfluftgemisch entweder in einem offenen Gefäß unmittelbar in das Speisewasser geleitet, wobei die Luft emporsteigt, oder nach der Ausführung von Balcke & Co. gemäß Abb. 925 in einem Oberflächen-Wärmeaustauscher im Gegenstrom mit dem Kondensat niedergeschlagen.

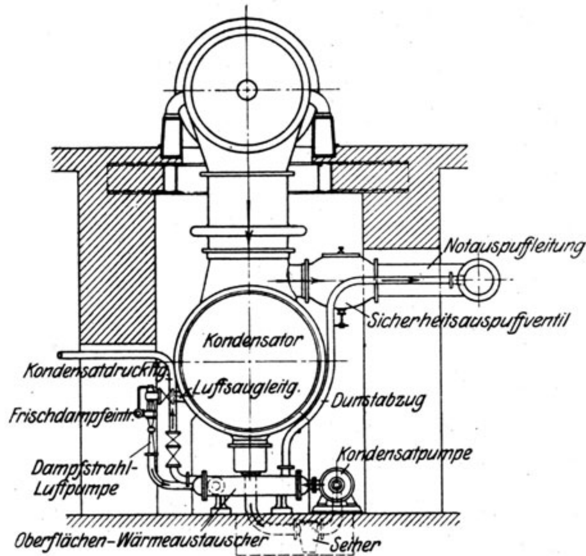


Abb. 925. Strahlsauger mit Speisewasservorwärmung.

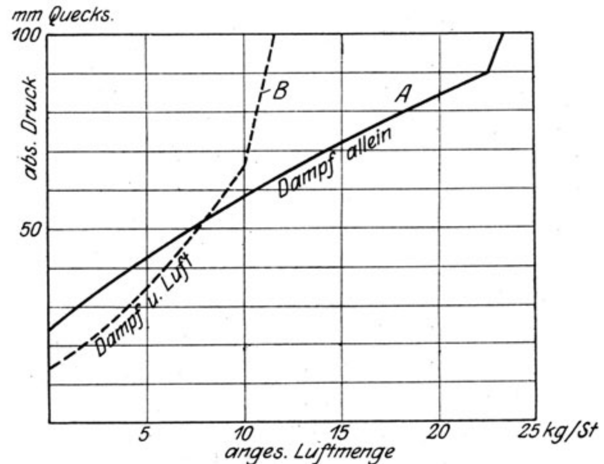


Abb. 926. Dampfstrahl-Luftpumpe von Brown, Boveri & Cie.

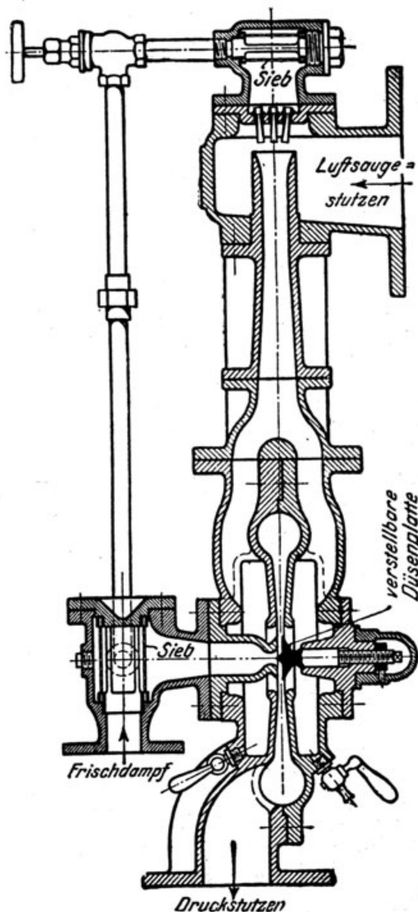


Abb. 926 a. „Radojet"-Strahlsauger.

Die Dampfstrahlluftpumpe von Brown, Boveri & Cie. benutzt zweistufige Verdichtung durch zwei hintereinander geschaltete Strahlsauger. Die Treibflüssigkeit des ersten bildet eigentümlicherweise atmosphärische Luft, die der ersten Düse frei aus der Umgebung zufließt. Das so entstehende Gemisch von Dampf und Luft wird in der zweiten Stufe durch einen Dampfstrahl vollends verdichtet. Abb. 926 zeigt die Ergebnisse der Type II, bei der der engste und der Austrittsdurchmesser der Luftdüse $4^1/_2$ bzw. 7 mm beträgt. Die Durchmesser der Dampfdüse sind 5,9 bzw. 20 mm. Schaulinie A zeigt die durch Dampf allein erzeugte Luftleere in Abhängigkeit vom stündlich angesaugten Luftgewicht, Schaulinie B, die vereinte Wirkung von Dampf- und Luftstrahl, beides bei 8 at Überdruck und 120 kg Dampfverbrauch i. d. Stunde. Wie ersichtlich ist die Luftdüse erst von einer abs. Luftleere unterhalb 50 mm Quecksilber vorteilhaft. Bei 30 mm Quecksilber abs. ist jedoch die Zunahme der Luftleere eine bedeutende, diese beträgt $^2/_3$ derjenigen des Dampfstrahles allein. Im übrigen soll die aus der Luftdüse stammende Betriebsluft, die ungefähr das 3 bis $3^1/_2$-fache des nutzbar geförderten Luftgewichtes beträgt, eine Stabilisierung der Funktion der Vorrichtung bewirken, die sonst bei hoher Luftleere zum Pendeln neigt.

Der amerikanische **Radojet-Strahlsauger**[1]) weist gemäß Abb. 926a eine Niederdruckstufe mit Düsenabsaugung auf, an die sich eine mit Frischdampf beschickte Hochdruckstufe mit ringförmiger Dampfdüse anschließt. Der Zweck der letzteren ist Vergrößerung der wirkenden Dampfoberfläche. Dabei wird indessen die in der ersten Stufe erzeugte kinetische Energie nur zum geringsten Teil verwertet. Ohne die manchmal angewendete Zwischenkühlung werden folgende Leistungen erzielt:

Abgesaugtes Luftgewicht . . kg/Std.	0	20	40	60
Luftleere bei trockener Luft . v. H.	99,5	97,0	94,6	92,5
„ „ mit Wasserdampf gesättigter Luft von 18° C . . . v. H.	98,0	95,8	93,5	91,0
Luftleere bei mit Wasserdampf gesättigter Luft von 43,3° C . v. H.	91,2	89,3	87,0	84,3

Der Dampfverbrauch beträgt bei 7,1 bzw. 8,1 at abs. 880 bzw. 780 kg/Std. bei 1,02 bis 1,12 at abs. Gegendruck.

Parsons Vakuumvermehrer. Um bei Schiffsmaschinen trotz tiefer Luftleere kleinere Luftpumpen anwenden zu können, also an Raum und Gewicht zu sparen, läßt Parsons einen Teil der Luftverdichtungsarbeit durch ein Dampfstrahlgebläse verrichten. Die Luft-

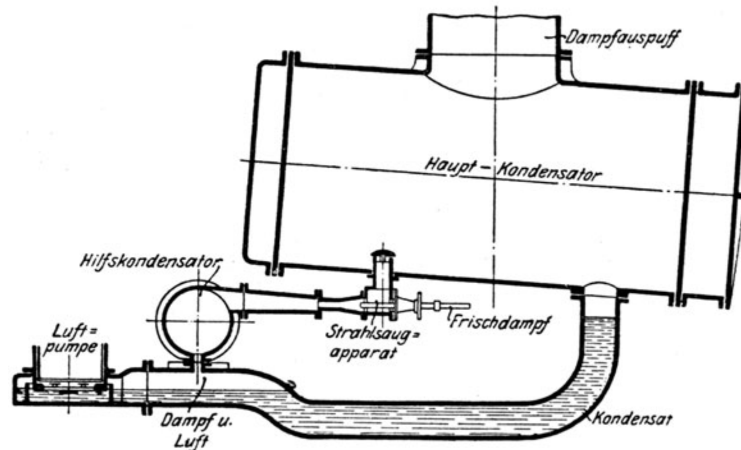


Abb. 927. Parsons Vakuumvermehrer.

pumpe wird, wie aus Abb. 927 ersichtlich, vertieft aufgestellt, so daß hydrostatischer Überdruck entsteht. Auf den Betrag dieses Überdruckes wird auch die an anderer Stelle abgesaugte Luft durch das Strahlgebläse verdichtet und zur tunlichsten Befreiung von Dampf in einem Hilfskondensator abgekühlt. Nach einer Mitteilung im „Engineering", Okt. 1904, S. 501 wurde für eine Verdichtung von etwa 0,07 auf 0,14 at abs. 1,5 v. H. der Gesamtdampfmenge verbraucht. Zweifelsohne wird man heute das gleiche Ergebnis mit weit geringerem Dampfverbrauch erreichen.

155. Der Antrieb der Kondensationspumpen und seine konstruktive Anordnung.

Der Antrieb der Kondensationspumpen, d. h. der Kühlwasser — der Schleuderwasser — und der Kondensatpumpe erfolgt entweder elektrisch oder durch Dampfturbine oder gemischt.

Beim Antrieb durch eine Hilfs-Dampfturbine sind drei Abarten zu unterscheiden:

1. Die Hilfsturbine erhält Frischdampf, der sich auf den Druck einer Zwischenstufe ausdehnt und in die Hauptturbine geleitet wird.

2. Die Hilfsturbine läßt den Frischdampf mit so hohem Gegendruck entweichen, daß er mit noch gutem Wirkungsgrad ein zweistufiges Curtisrad beaufschlagen kann, welches die erste Stufe der Hauptturbine bildet. (Verfahren von Breitfeld, Danek & Cie., siehe Abschn. 146.)

3. Die Hilfsturbine erhält Dampf aus einer Zwischenstufe und dehnt sich bis auf Kondensatordruck. (Verfahren von Escher, Wyß & Cie.) Sie wird als ein- oder mehr-

[1]) Hoefer, Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1921, S. 199.

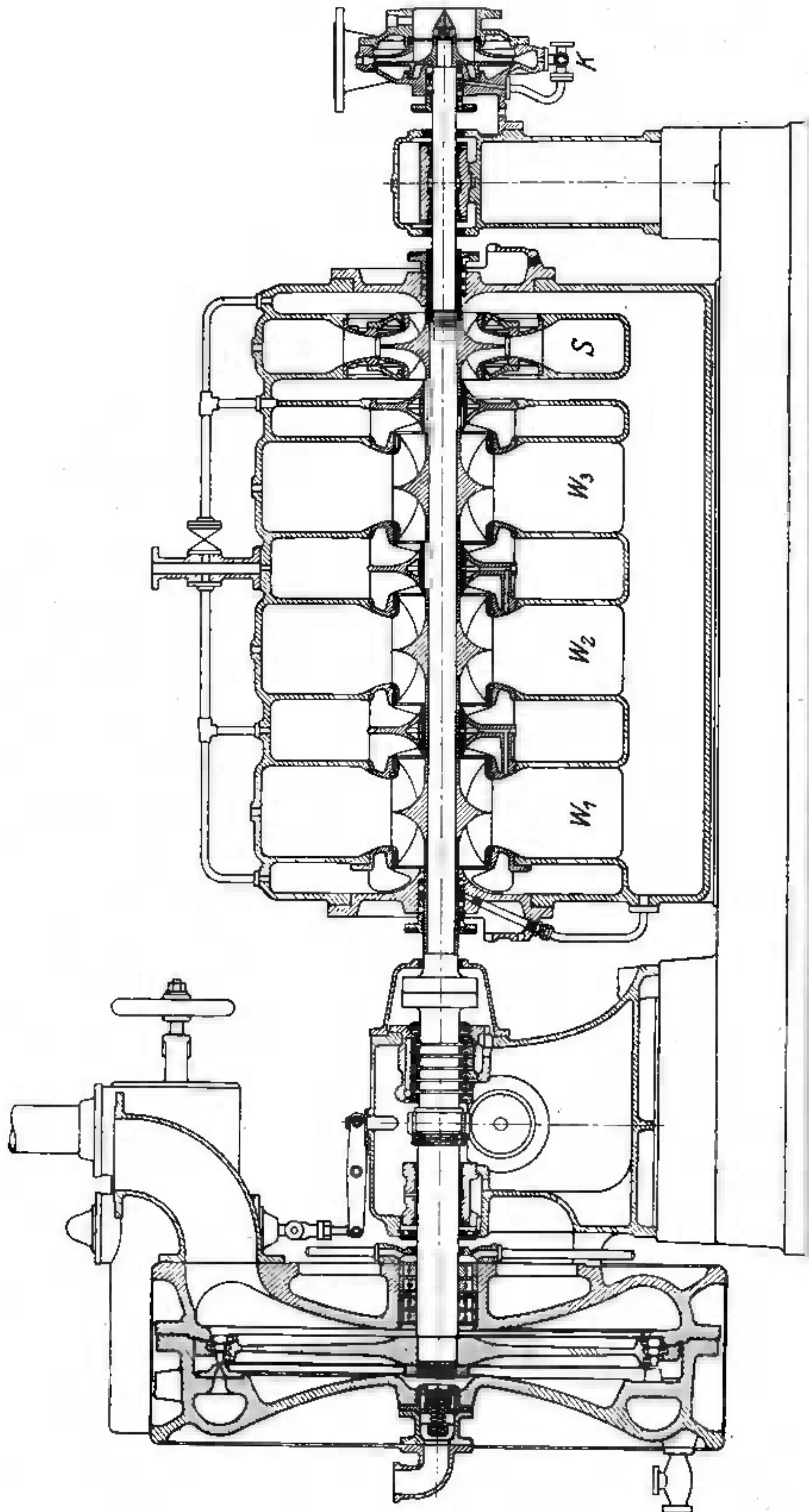


Abb. 928. Kondensationshilfsmaschinen der M.A.N.

stufige Gleichdruckturbine mit Zahnradübersetzung gebaut (siehe Abschn. 146), mit so hoher Umfangsgeschwindigkeit, daß die Dampfausnutzung ebenso gut ist wie in der Hauptturbine. Bei steigender Belastung steigt mit dem Druck in der Zwischenstufe die Drehzahl der Hilfsturbine, so daß der Kondenser mehr Kühlwasser zugeführt bekommt. Sinkt die Belastung unter eine gewisse Grenze, so wird die Zwischendampfzufuhr abgestellt und Frischdampf zugeleitet. Oder die Turbine wird mit einem Elektromotor verbunden, der bei hohem Zwischendruck als Erzeuger Strom an das Netz liefert.

Ist der Energieverbrauch des Antriebes 3 v. H., so darf man nicht voreilig schließen, daß nur 3 v. H. der Dampfmenge abzuzweigen sind, also die Schaufeln des Niederdruckteiles der Hochdruckturbine nur um 3 v. H. kürzer werden. Würde man den Dampf der letzten Stufe entnehmen, so betrüge das verfügbare Gefälle höchstens 20 v. H. des gesamten, und man müßte rd. 15 v. H. der Dampfmenge abspalten.

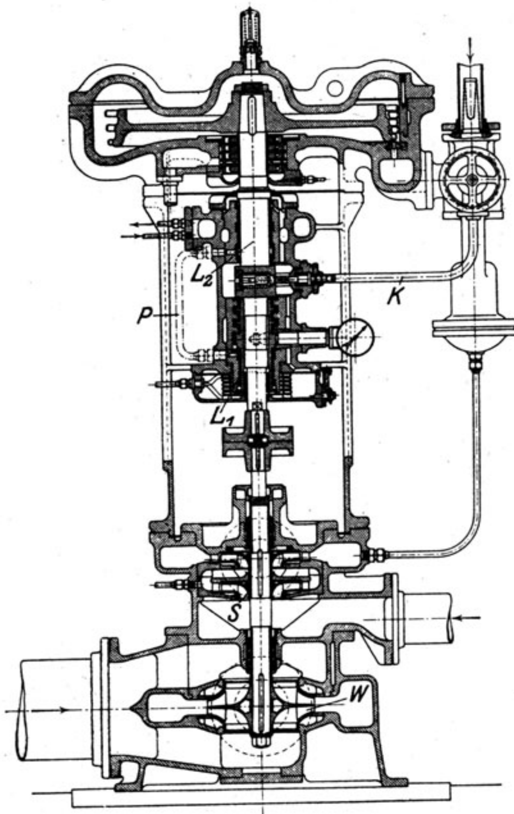


Abb. 929. Stehende Pumpenanordnung von Brown, Boveri & Cie.

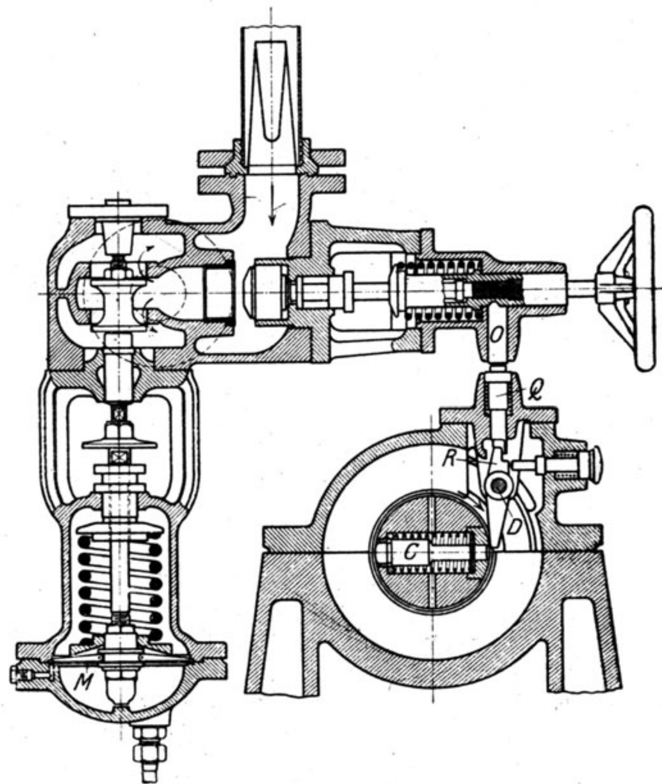


Abb. 929 a. Wasserdrucksteuerung und Sicherheitsauslösung zu Abb. 929.

Der gemischte Antrieb verbindet die unbedingte Zuverlässigkeit der Dampfturbine mit der gegenüber Fall (1) größeren Wirtschaftlichkeit des Elektromotors. Brown, Boveri & Cie. verwenden hierfür eine selbsttätige Umschaltung, indem Motor und Turbine ständig gekuppelt bleiben, aber die Drehzahl der Turbine um so viel kleiner als die des Motors gewählt wird, daß bei elektrischem Antrieb der Regler den Dampfzufluß gänzlich schließt. Versagt der Motor, so sinkt die Drehzahl ein wenig, bis der Dampfzutritt zur Turbine genügend geöffnet ist. Der Leerlauf der Turbine soll bei einer Anlage von 10000 kW Leistung nur 5 kW ausmachen, was nicht in Betracht kommt.

Diese Antriebsart besitzt einen besonderen Vorteil in Anlagen mit stark schwankendem Dampfdruck. Sinkt dieser, so geht die Drehzahl einer Turbopumpe, also die Luftleere, zurück, der Dampfverbrauch nimmt zu; die Kesselspannung würde weiter abnehmen, so daß es bei schlechter Wartung zu vollständigem Betriebsunterbruch kommen kann. Der Motorantrieb verhindert dies.

Als Beispiel der konstruktiven Ausführung kann bei liegender Aufstellung Abb. 914 nach der Allgem. Elektriz.-Ges. dienen. Ein anderes Beispiel ist Abb. 928 der Maschinenfabrik Augsburg-Nürnberg mit dreifach geteilter Kühlwasserpumpe W, den

Schleuder- und Kondensatpumpen S und K für eine Anlage von rd. 14000 PS Leistung. Die stehende Anordnung der Allgem. Elektriz.-Ges. ist durch Abb. 816 veranschaulicht. Eine verwandte Ausführung von Brown, Boveri & Cie. für Einspritzkondensation Abb. 929, zu Abb. 892 gehörend, zeigt die einstufige Kühlwasserpumpe W, das zweistufige Kreiselrad S für die Strahlluftpumpe, die durch eine Membrane M, Abb. 929a, den Dampfzufluß zur Turbine beeinflußt. Die Sicherheitsauslösung $CDRQO$ in Abb. 929a wird in Abb. 929 durch die Kugelübertragung in Rohr K vermittelt. Das durch Wasserschlange gekühlte Öl wird durch eine Spiralnute in Lager L_1 und Leitung P nach dem oberen nochmals gekühlten Lager L_2 gedrückt.

Der Kraftbedarf des Kondensationsantriebes.

Bei Oberflächenkondensation ohne Rückkühlung wird ausnahmslos von der **„Syphonwirkung“** Gebrauch gemacht, d. h. das einem Flußlauf oder anderen Quellen entnommene Kühlwasser wird in **geschlossener Rohrleitung** (stromabwärts) abgeführt, so daß die zum Heben erforderliche Arbeit durch die Saugwirkung der hängenden Wassersäule wieder eingebracht wird und nur die Reibungswiderstände der Leitung und des Kondensers überwunden werden müssen. In diesem Falle rechnet man als **Kraftbedarf aller Pumpen 2 v. H. der Turbinenleistung** und kommt auch noch mit weniger aus.

Bei Einspritzkondensation ist die zu überwindende Förderhöhe gegeben durch den Unterschied zwischen der Saughöhe, die der Luftleere entspricht, und dem Spiegelabstand + Widerstandshöhe. Man hat vorgeschlagen, bei kleinem Spiegelabstand den Überschuß der Luftdruckarbeit in einer kleinen, dem Mischkondenser vorgeschalteten Turbine auszunutzen.

Bei **Rückkühlanlagen** ist eine Förderhöhe von etwa mindestens 6 m zu überwinden. In diesem Fall **steigt der Arbeitsbedarf der Pumpen auf 3 v. H. und mehr.**

156. Fundamente, Rohrleitung.

Infolge der Vollkommenheit, die die Auswuchtung der Dampfturbine heute zu erreichen vermag, können ihre Fundamente unvergleichlich leichter ausgeführt werden als diejenigen einer gleichwertigen Kolbenmaschine oder Gasmaschine. Meist bestehen die Fundamente aus zwei Längsblöcken, die durch ein Gerüst von Schmiedeisenträgern überbrückt werden, auf die man die Turbine und den Stromerzeuger setzt. Der Kondensator liegt unmittelbar darunter, parallel oder quer zur Turbinenachse. Die Beanspruchung des Trägergerüstes pflegt ungemein klein zu sein, da es darauf ankommt, seine Federung auf Bruchteile eines Millimeters herabzusetzen. Die Zwischenräume der Träger werden obendrein mit Beton ausgefüllt, was die Steifheit nicht unwesentlich erhöht und die Geräuschbildung hemmt.

Abb. 930 zeigt die Trägerkonstruktion der **Allgem. Elektriz.-Ges.** für eine Turbine mit einer der Größenordnung nach auf 10000 PS einzuschätzenden Leistung. Die Träger sind, wie ersichtlich, mit den etwa 1500 mm dicken Längsblöcken durch Anker verbunden. Sie tragen vorne die ebenfalls durch Anker verbundene Grundplatte A; hinten ist zur Aufnahme des Rahmens B ein rechteckiger Rost durch Nietung hergestellt. Die Turbine stützt sich auf diese Rahmen bloß mit den schmalen Füßen $F_1 F_2$ Im Schnitt CD ist der nach der Aufstellung einzubringende Zementunterguß X durch besondere Schraffur hervorgehoben.

Abb. 931, 932 stellen den Gesamtplan einer Anlage von 15000 PS Leistung bei 1500 Umdr./min von **Escher, Wyß & Cie.** dar. Bei einer lichten Weite von 4200 mm zwischen den Fundamentblöcken sind sowohl für die Turbine wie für den Stromerzeuger zum Tragen des Rahmens Quer- und eingenietete Längsträger erforderlich. Die Hauptträger sind ohne weitere Verankerung in die Fundamentblöcke einbetoniert. Die Kondenserpumpenanlage ist in einem besonderen Nebenraum aufgestellt. Es bedeutet

A die Hauptdampfleitung
B die Notauspuffleitung
C die Kühlwasserzuleitung
D die Kühlwasserableitung
E die zweiseitig an vier Punkten des Kondensers zur Strahlpumpe S Luft absaugende Leitung
F Kondensatleitung zur Kreiselpumpe
G Frischdampfleitung zur Hilfsturbine
H Auspuffleitung von der Hilfsturbine zum Kondenser
J der Ölkühler
K Öldruckleitungen zu den Dynamolagern
L Ölrückleitungen zum Behälter M
N Dampfzuleitung zur Turboölpumpe
O Ölpumpe
P Auspuffleitung der Turboölpumpe
K_1 Öldruckleitung zum Hochdrucklager
K_2 Öldruckleitung der Turboölpumpe
R Wasserstandszeiger am Kondenser
T Entwässerung der Hochdruckstopfbüchse.

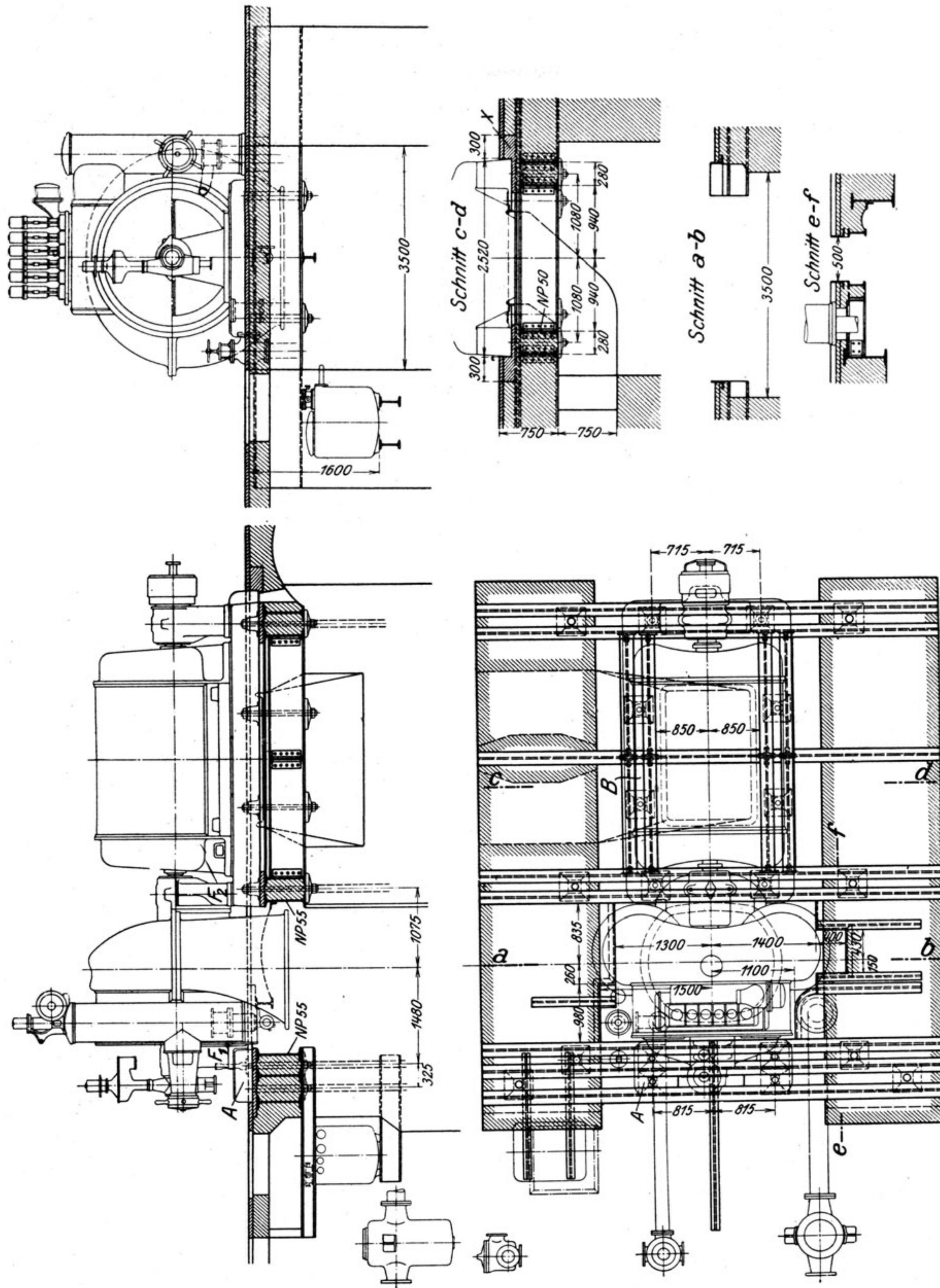


Abb. 930. Trägergerüst und Fundamente einer 10000 PS-Anlage der Allgemeinen Elektrizitätsgesellschaft.

Abb. 933 stellt eine Gesamtanlage von 5200 PS bei 3000 Umdr./min mit Dampfentnahme der **Maschinenfabrik Augsburg-Nürnberg** dar. Die Fundamente sind in eisenbewehrtem Beton erstellt, so daß die Stützung durch je drei verhältnismäßig schwache Säulen M_1 M_2 M_3 bewerkstelligt werden kann, wodurch das Untergeschoß allseitig zugänglich wird. Es bedeutet

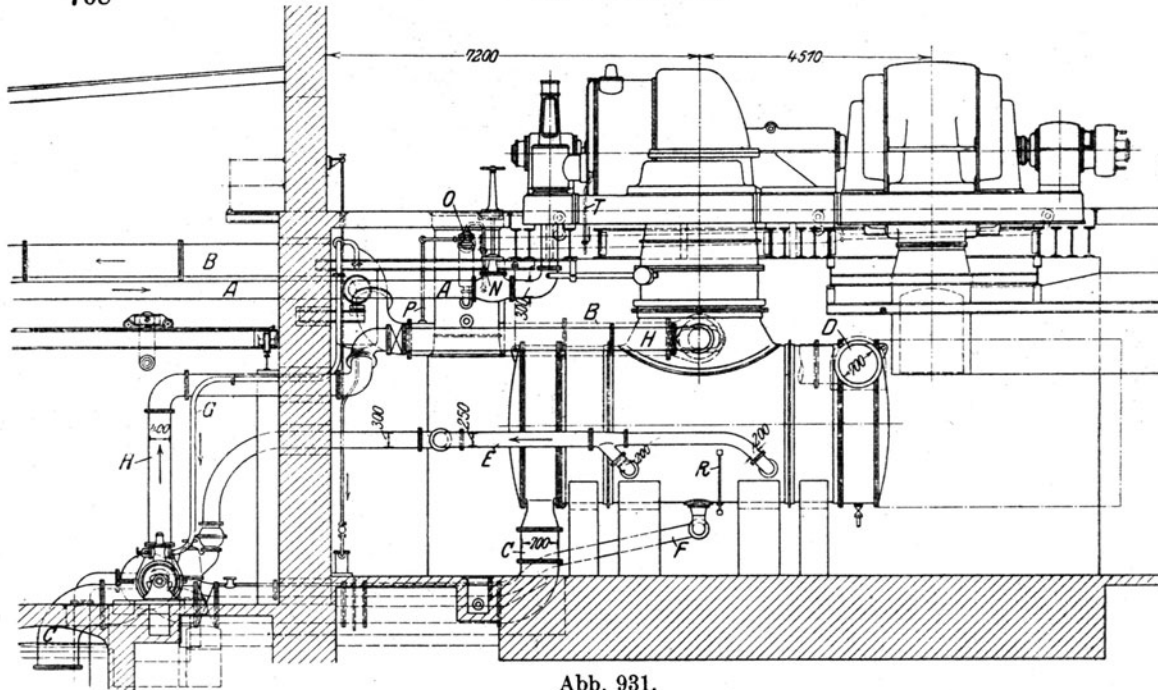


Abb. 931.

Abb. 932.

Fundament und Rohrplan einer 15000 PS Anlage von Escher, Wyß & Cie.

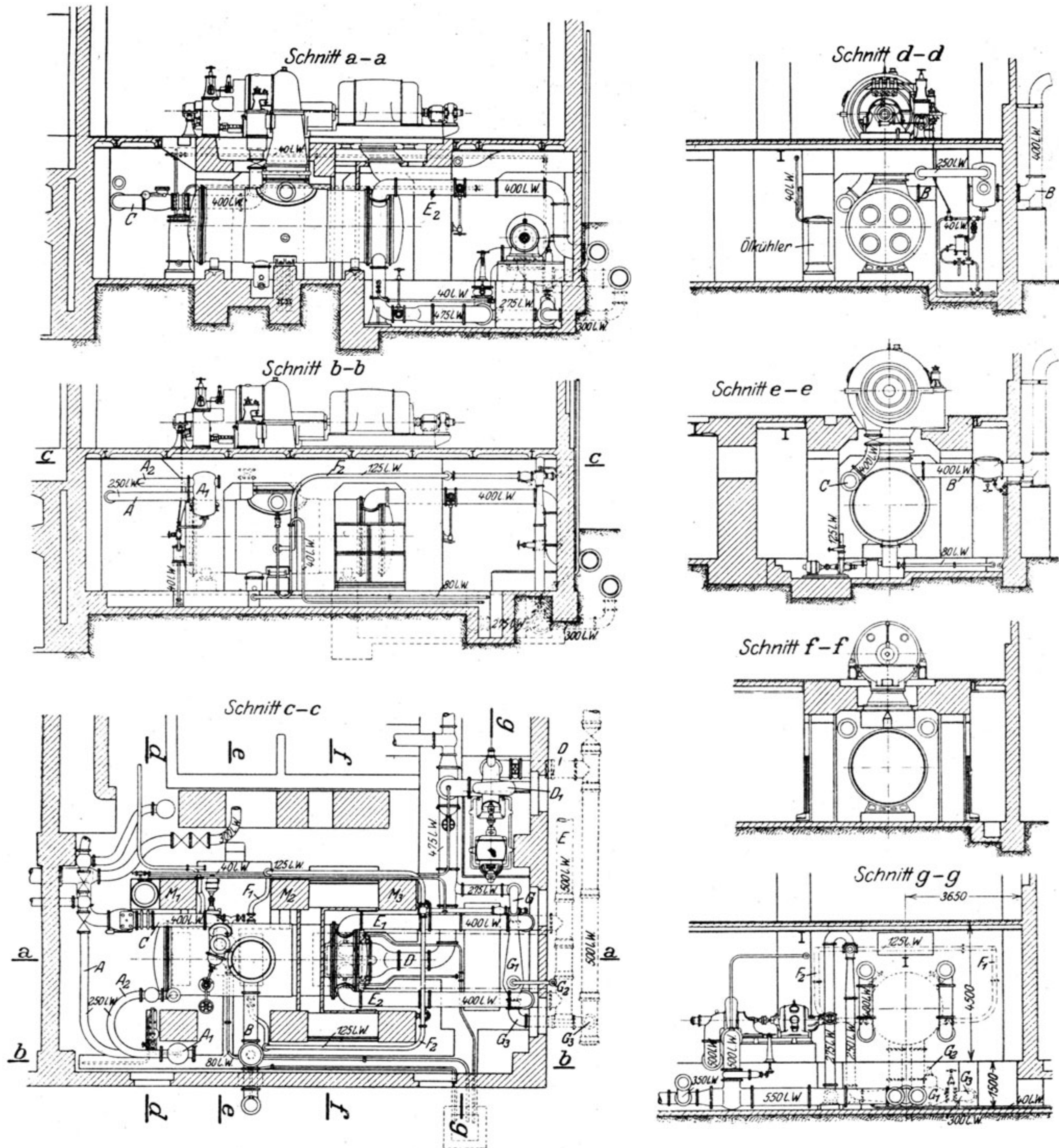


Abb. 933. Fundament und Rohrleitungsplan einer 5200 PS-Anlage der Maschinenfabrik Augsburg-Nürnberg.

- A die Dampfzuleitung, die vom Wasserabscheider A_1 mittels elastisch nachgiebigen Bogens A_2 zur Turbine führt,
- B der Hilfsauspuff,
- C die Dampfentnahmeleitung,
- D Kühlwasserzuführung,
- D_1 Kühlwasserpumpe,
- E_1 E_2 doppelte Kühlwasserableitung vom Kondenser zum Zwecke der Abschaltungsmöglichkeit bei innerer Reinigung,
- E gemeinsamer Wasserabfluß,
- F_1 F_2 Luftabsaugeleitungen,
- G Strahlluftpumpe,
- G_1 Luftabscheider in Form einer Rohrerweiterung mit der Luftabfuhr G_2 im obersten Punkte,
- G_3 Rückfluß des Strahlpumpentriebwassers in die Kühlwasserzuleitung D.

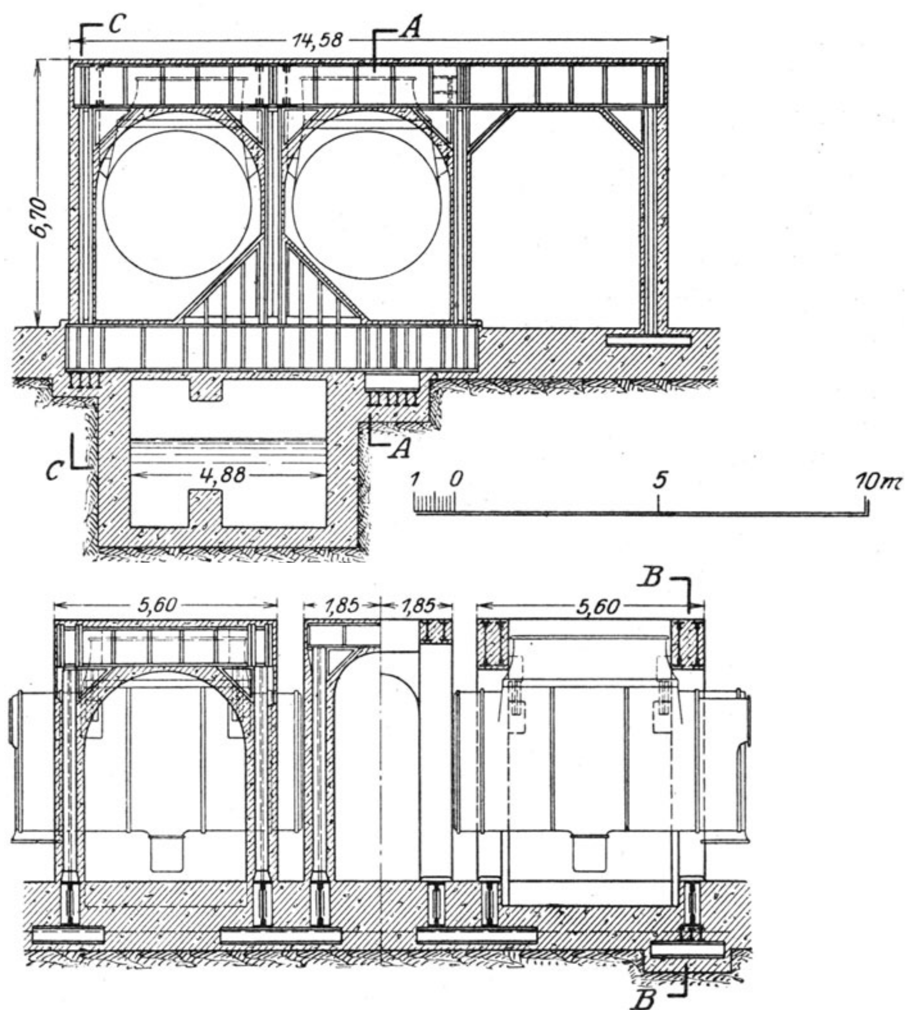


Abb. 934. Trägergerüst zur 60000 kW-Anlage der Rapid-Transit Co. New York.

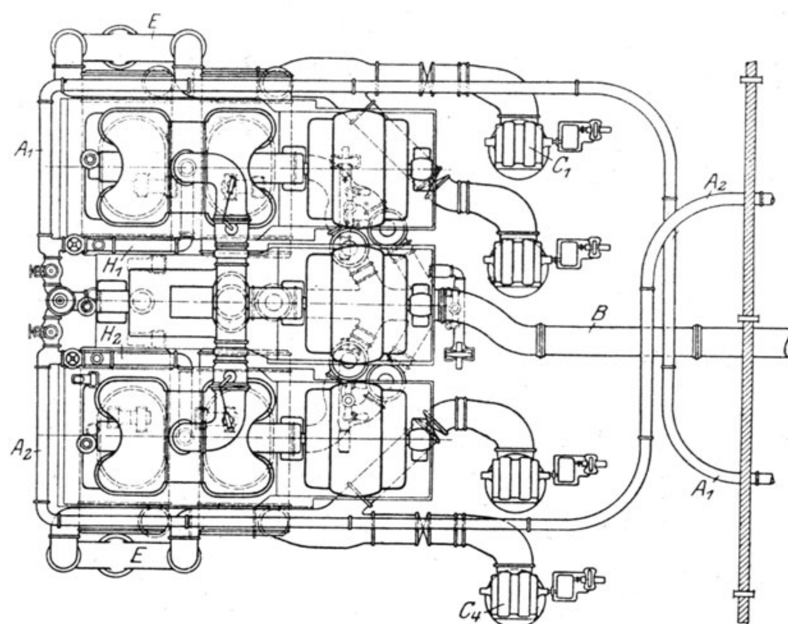


Abb. 935. Grundriß der 60000 kW-Anlage der Rapid Transit Co.

Für die Bemessung der Rohrleitungen können schätzungsweise folgende **Strömungsgeschwindigkeiten** gewählt werden:

Hauptdampfleitung	40 bis 50 m/sek,	
Abdampfleitung	80 „ 100 — (120) m/sek,	
Kühlwasserzufuhr	1,5 „ 1,7 m/sek bei etwa 200 mm Durchm.,	
„	2,0 „ 2,4 „ „ „ 1000 „ „	
Kühlwasserableitung	2,0 „ 2,3 „ „ „ 200 „ „	
„	3,0 „ 3,3 „ „ „ 1000 „ „	
Ölleitung: Zufluß	0,8 „ 1,2 „	
„ Abfluß	0,2 „ 0,3 „ (damit auch der Ölschaum gut abfließen kann).	

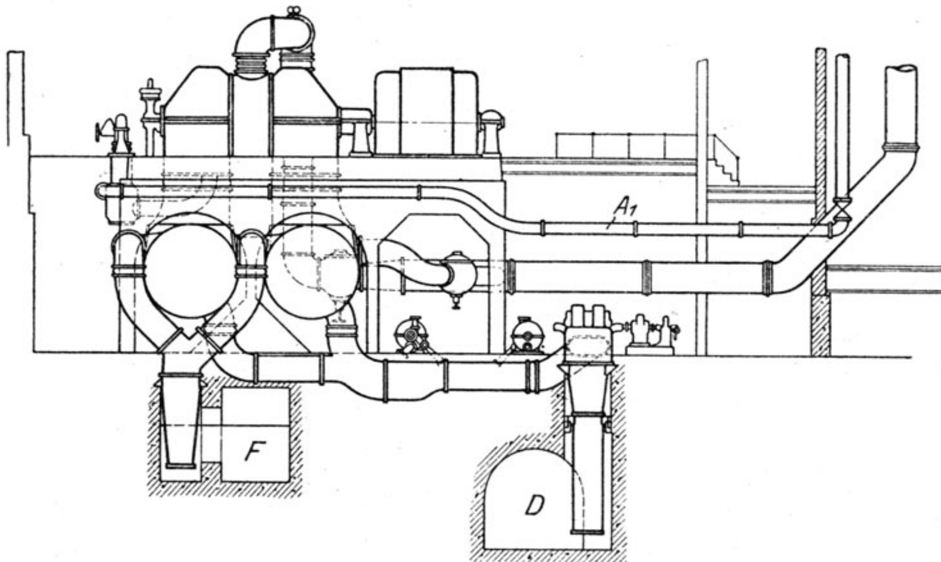


Abb. 935a. Längenschnitt zu Abb. 935.

Als Beispiel **amerikanischen Fundierungsverfahrens** führen wir in Abb. 934 das Trägergerüst der 60000 kW-Turbinen der **Interborough Rapid Transit Co** an. Das Trägergerüst wird statisch mit rd. 500 kg/qcm beansprucht. Die Betonausfüllung dient zur Herabsetzung der Verbiegung, die für den Rest allein auf 0,5 mm angesetzt worden war, ferner als Rostschutz.

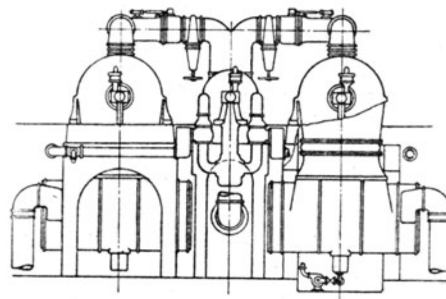


Abb. 935b. Querschnitt zu Abb. 935.

Im Gesamtplan Abb. 935, 935a erkennt man in A_1 A_2 die doppelte Dampfzuführung zur in der Mitte aufgestellten Hochdruckturbine. H_1 H_2 bilden Abzweigungen, durch die im Notfalle den Niederdruckturbinen gedrosselter Frischdampf zugeführt wird. B bedeutet die gemeinsame Notauspuffleitung. C_1 bis C_4 sind die Kühlwasserpumpen, die aus dem gewölbten Kanale D das Kühlwasser ansaugen. E sind die Abflußleitungen, die in den Kanal F münden. Jedes Ende der Zweiflußniederdruckturbinen mündet in einen eigenen Kondenser. In Abb. 935a sind die Leblancartigen Strahlluftpumpen ersichtlich. Im Querschnitt Abb. 935b ist rechts die nachgiebige Stopfbüchse zwischen Turbine und Kondenser erkennbar die in Abb. 902a dargestellt wurde. Die Kondenser sind, wie man in Abb. 934 erkennt, an dem Trägergerüst hängend befestigt. Die Wärmedehnung zwischen den Achsen der Abdampfrohre soll 3,7 mm betragen. Die Kühlwasserleitungen mit 1,5 m Durchm. erzeugten anfänglich starke Verwürgungen, die durch Gummidehnungseinlagen behoben wurden.

Abb. 936 stellt den Längsschnitt durch das Fundament einer 30000 kW-Turbine der **General Electric Co** dar[1]). A bedeutet die Hauptdampfleitung, B die Notauspuffleitung, C die Kühlwasserzu-,

[1]) Sosnowsky, Grandes Centrales Américaines. Bull. de la Soc. Franç. d'Electr. 1916 und 1919.

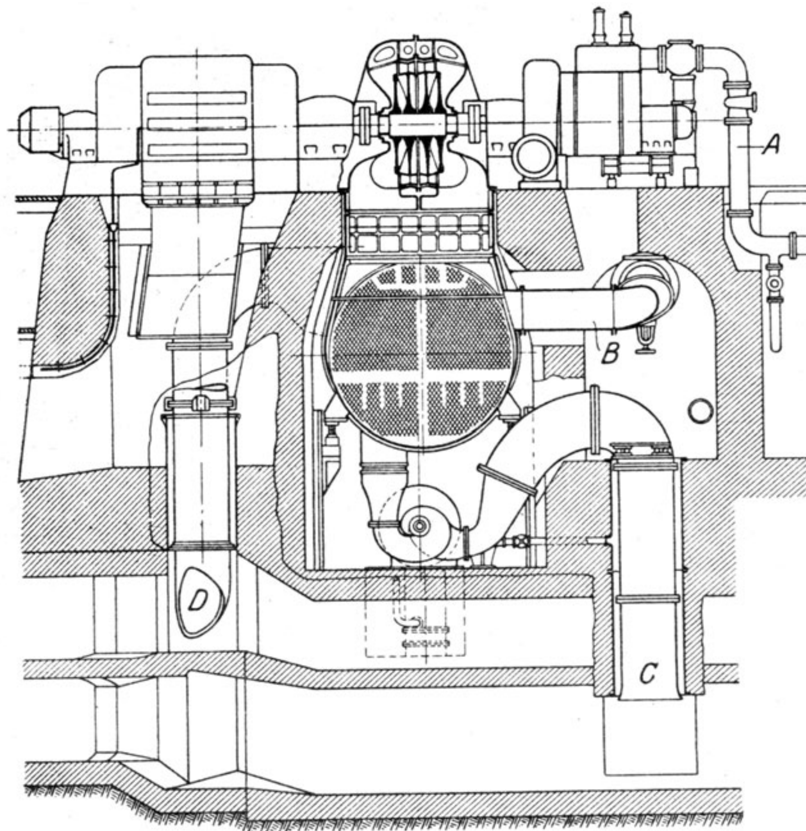


Abb. 936. Fundamente einer 30000 kW-Anlage der General-Electric Co.

D die Kühlwasserableitung. Durch die oberste Abteilung der Kondenserrohre wird das Speisewasser hindurchgeführt und so auf die Kondensertemperatur vorgewärmt. Bei neueren Ausführungen der gleichen Firma besteht das Fundament ebenfalls aus einem einbetonierten Schmiedeisengerüst.

IXa. Betriebserfahrungen.

157. Schaufelbrüche und Verschleiß.

Die Schaufelbrüche infolge Verwendung ungeeigneten Baustoffes oder ungeeigneter Behandlung desselben haben wir in Abschn. 72 besprochen. Die Aufregung, die das massenhafte Auftreten von Brüchen in den Jahren 1905 bis etwa 1910 verursacht hat, hat heute der Zuversicht Platz gemacht, im 5 v. H.-haltigen Nickelstahl und in den Nickelbronzen verläßliche Baustoffe zu besitzen. Zu den größten Gefahren für die Schaufeln gehören die

Wasserschläge,

die zwei Ursachen haben können.

a) Überkochen der Kessel, bei ungeeignetem Speisewasser oder schlechter Kesselwartung (zu seltenes Abschlammen). Die Verantwortung für die Folgen solcher Vorkommnisse kann unmöglich dem Turbinenkonstrukteur zugeschoben werden.

b) Unzweckmäßige Anlage der Rohrleitung mit ausgedehnten Wassersäcken, falls deren Entwässerung nicht hinreicht oder versagt. Bei kleiner Belastung kann sich eine erhebliche Wassermenge im Unterteil eines den „Sack“ bildenden Rohres ansammeln, die sich bei plötzlicher Steigerung der Dampfgeschwindigkeit im Rohre staut, einen „Kolben“ bildet, den meist kleinen Abscheider vor der Turbine ausfüllen kann und in die Turbine geschleudert wird. Für die entstehenden Folgen ist, unabhängig von der schlechten Wartung der Entwässerung, mindestens zur Hälfte der Konstrukteur zu behaften. Man empfahl auch schon Notabschließungen, die durch die Massenwirkung des Wassers in Tätigkeit gesetzt werden.

Schaufelverschleiß.

Bei Naßdampf ist ein Verschleiß durch die Schleifwirkung der kleinen Wassertröpfchen unvermeidlich (vgl. Abschn. 72a), und kann bei einstufigen Turbinen wegen der hohen Dampfgeschwindigkeit die Schaufeln innerhalb eines Jahres unbrauchbar machen. Die mehr- und vielstufigen Turbinen leiden bedeutend weniger.

Bei Überhitzung bleiben die in den mitgerissenen Tröpfchen enthaltenen Salze als Staub bestehen, der erheblich weniger schadet, solange sich der Dampf über der Sättigung befindet. Unterhalb davon schlägt sich der Dampf auf das Staubkorn nieder, löst das Salz und verhilft ihm so zu seiner chemischen zerstörenden Wirkung. Der Niederschlag unterhalb der Sättigung kann auch im Dampfe enthaltene gasförmige Säuren lösen, mit ähnlicher Wirkung. Die Abhilfe besteht selbstverständlich in der Erzeugung reinen Dampfes.

158. Verrostungen im Innern der Turbine.

Infolge einer durch anfänglich günstige Erfahrungen großgezogenen Vertrauensseligkeit haben Verrostungen im Innern der Turbine vielfach katastrophalen Umfang angenommen und stehen auf einer schwarzen Seite der Dampfturbinengeschichte. In der Tat gab es zahlreiche Fälle, daß Turbinen, die ihren Dienst noch leidlich versahen, sich bei dem Abdecken als verrostete Ruinen entpuppten, und vollständig neu beschaufelt werden mußten. Meist zeigt jedoch eine zunehmende Erschütterung, vereint mit wachsendem Dampfverbrauch. an, daß eine Veränderung vor sich geht, und es ist Pflicht des Betriebsingenieurs, nicht zuzuwarten, bis das Übel sich gefahrdrohend entwickelt hat.

Die **Ursache des Rostens** ist die **Gegenwart von sauerstoffhaltigem Wasser oder Feuchtigkeit,** die sich niederschlägt. Durch zahlreiche Versuche kann als bewiesen angesehen werden, daß **sauerstoffreies Wasser keinen Rost hervorruft**[1]). Chemische „Anfressungen“ anderer Art entstehen, wenn das Wasser Salze oder Säuren gelöst enthält. In hohem Maße bemerkenswert ist, daß selbst Chloride und Sulfate der Alkalimetalle (Kochsalz!) in der praktisch vorkommenden Konzentration Eisen **nicht stärker angreifen als „reines“ Wasser,** sobald dieses aus der Luft **Sauerstoff** hat **aufnehmen** können. Diese Aufnahme geht nach Versuchen von Höhn[2]) sehr rasch vor sich.

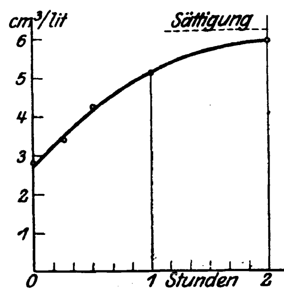


Abb. 937. Aufnahme von Sauerstoff durch destilliertes Wasser nach Höhn.

Abb. 937 zeigt die Zunahme des Sauerstoffinhaltes für einen kleinen Versuchsbehälter, in den Luft durch ein Bleirohr in Blasen ein geführt worden war, ausgedrückt in cm^3 bei 0^0 760 mm Q. S. auf 1 Liter. Das Wasser hatte vor Versuchsbeginn 4 Stunden gestanden, daher der anfängliche Inhalt von 2,77 cm^3/l. Nach 2 Stunden betrug der Inhalt 5,90 cm^3/l, war also der Sättigungsgrenze, die etwa bei 6,15 cm^3/l liegt, bereits nahegekommen.

Die verderbliche Wirkung des Luftgehaltes wird durch die Aufsehen erregenden Mitteilungen des Marine-Chefingenieurs **Siegmon** über

Verrostungen an Dampfkesseln[3])

bestätigt. Die beobachtete Wasserröhrenanlage eines Kriegsschiffes von 40000 PS Leistung verwendete einwandfreies, von den Turbinen geliefertes Kondensat als Speisewasser, so daß als Grund der ausgedehnten Anfressungen nur der absorbierte Sauerstoff in Frage kommen konnte. Infolge des Durchganges des Kondensates durch die Warmwasserbehälter wird trotz einer Temperatur von 40^0 C, ja selbst bis 85^0 C, fast die Hälfte des normalen Sauerstoffgehaltes verschluckt. Erst bei Erhitzung auf 93^0 C entweicht der Hauptteil davon. **Als Abhilfe** gegen das Rosten hat sich merkwürdigerweise **das Einführen von Öl bewährt,** das man sonst aus Angst vor Krustenbildung dem Kessel durchaus fernzuhalten pflegt. Es werden 0,25 kg Heißdampföl mit 30 l Wasser mittels Dampf gekocht und es wird in einen Kessel von 446 qm Heizfläche in 120 Stunden 1 kg Öl mit dem Speisewasser eingeführt.

Das Rosten in der Turbine ist je nach dem Betriebszustand von verschiedener Art.

Rosten während des Betriebes

kann nur vorkommen, wenn entweder Luft in die Turbine dringt, oder wenn der Dampf Säure oder Salze enthält, die sich, wie oben beschrieben, beim Erreichen der Sättigungsgrenze im Niederschlag auflösen. Sie gelangen in den Dampf durch Sprühen oder Überkochen des Kesselinhaltes; Kohlensäure auch unmittelbar aus schlechtem Speisewasser. Wie arg es hiermit beschaffen sein kann, erkennt man aus einer von Lasche[4]) mitgeteilten Anlage, die auf 100000 Teile einen Trockenrückstand von 705 ergab, wovon gebundenes Chlor 361, Kalk bloß 9 Teile. Ganz gefährlich sind in dieser Hinsicht bei Anlagen mit Seewasserkühlung Anfressungen der Kondensatorrohre (s. unten), die das Eindringen von Seewasser in die Kessel ermöglichen.

Rosten während der Betriebsstillstände.

Durch undichte Abschließungen können, wenn man nichts dagegen vorkehrt, Dampfwrasen in das Innere der Turbine dringen, wo sie sich in Gegenwart von Luft niederschlagen und scharfes Rosten bewirken. Die Mehrzahl der beobachteten Verwüstungen dürfte auf diese Ursache zurückführbar sein. Bleibt bei kürzerem Stillstand die Turbine so heiß, daß sich der Sickerdampf nicht niederschlägt, dann gibt es auch kein Rosten.

---

[1]) Heyn u. Bauer, Über den Angriff des Eisens durch Wasser und mäßige Lösungen. Mitteil. der K. Materialprüfungsanstalt Großlichterfelde, Berlin 1908 u. 1910.

[2]) Die Bekämpfung von Rost und Abzehrungen an Dampfkesseln, S. 33. Zürich 1919.

[3]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1919, S. 473.

[4]) Erfahrungen an Dampfturbinenbeschaufelungen. Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1918, S. 643.

Rosten bei fortdauerndem Anwärmen von Turbinen, die ständig betriebsbereit sein sollen.

Es ist in größeren Werken vielfach üblich, die Turbinen, die als „Aushilfe" zum Anlassen augenblicklich bereit sein sollen, beständig unter Dampf zu halten. Dem Verfasser sind Fälle bekannt, wo bei hydraulischen Anlagen die Dampf-Ersatzanlage monate-, ja jahrelang unter Dampf gehalten wurde und dabei bis an 15 v. H. des Dampfverbrauches für Vollast mit der entsprechenden Kohlenmenge aufzehrte, um nur ja bei einem Unfall keinen Unterbruch der Kraft- und Lichtlieferung zu erleiden. Hierbei kann starkes Rosten auftreten, da man den Anwärmedampf doch mit Unterbrechungen einströmen läßt, also für die Gegenwart von Luft reichlich gesorgt ist.

Abhilfen gegen das Rosten.

In erster Linie ist für gutes Speisewasser zu sorgen, denn auch bei Oberflächenkondensation müssen die auf 5 bis 10 v. H. zu schätzenden Verluste durch frisches Speisewasser ersetzt werden. Auch das beste Speisewasser sollte jedoch, schon mit Rücksicht auf die Kessel, entlüftet werden. Hierfür haben sich an Bord von Schiffen zahlreiche Vorrichtungen[1]) eingebürgert, die teilweise chemisch (durch Eisenspäne), teilweise durch Erhitzung mittels Dampfeinführung wirken. Von Siegmon stammen nachfolgende Vorschläge zu einer Betriebsvorschrift:

Baustoffe. Das zum Bau der Kessel bestimmte Material ist trocken aufzubewahren. Angerostetes Material, das hierdurch schon den Keim der Zerstörung in sich trägt, ist zu verwerfen. An ausgedrehten Ober- oder Unterkesseln ist die harte Narbe durch Nachwalzen oder Hämmern wieder herzustellen. Das Speisewasserdruckrohr soll möglichst lang sein, dicht unter dem normalen Wasserstand liegen und mit Schlitzen im obern Teil versehen sein, so daß sich das lufthaltige Speisewasser mehr im unempfindlichen öligen Oberkessel verteilt. Der Kessel ist nicht, wie häufig geschieht, mit Firnis, sondern mit Mineralöl auszuwischen.

Speisewasserleitung. Die Warmwasserkästen sollen tunlichst kleine Wasserspiegeloberflächen darbieten. (Kegelige Bauart, Abdecken der freien Oberfläche mit freien Holzschwimmern.) Erzeugung eines Dampfschleiers, der den Luftzutritt hindert. Sowohl die Vorwärmer wie die Entlüfter sollen das Speisewasser dauernd auf einer Temperatur über 100° C erhalten. Das Kondensat ist auf dem kürzesten Wege dem Kessel zuzuführen.

Kesselbetrieb. Dauernde Wasseruntersuchung auf Salzsäure und Sauerstoffgehalt.

Regelmäßiges Zusetzen der Heißdampfölmischung. (Die Menge richtet sich nach dem Befund des Kesselinnern.) Einölen trockener oder gefährdeter Kesselteile mit Heißdampföl. Einölen der untern Rohrbörtel. Glätten der Anfressungen durch Abschaben oder Abhämmern der rauh gewordenen Teile nach vorheriger gründlicher Reinigung mit Stahlbürsten. Zusatz einer Sodalösung nur bei besonders starker Schmierung zwecks Unschädlichmachung des überflüssigen Öles. Prüfung abgestellter Kessel auf Luftleere mit Manovakuummeter. Ausbau des Cumberland-Schutzverfahrens (s. unten). Gründliche Reinigung der Zinkschutzplatten und Kontaktflächen (s. unten).

Turbinenbetrieb angewärmt (nicht im Gang).

Im Hauptkondenser keine Luftleere halten. Reichlicher Stopfbüchsendampf besonders am Niederdruckgehäuse. Pumpe lediglich zum Absaugen des Kondensats nach Bedarf in Betrieb nehmen.

Turbine im Gang.

Nur so viel Mineralöl zuführen wie zur eigenen Erhaltung notwendig.

Diesen Vorschriften müssen wir diejenigen Gesichtspunkte beifügen, die insbesondere die Erhaltung der Dampfturbine zum Ziele haben. Sie lauten:

1. **Während des Betriebes ist das Eindringen von Luft zu verhindern.** Dies betrifft insbesondere die Behandlung des Stopfbüchsendampfes, den man früher von der Hochdruckseite her oft in eine Zwischenstufe einmünden ließ, um ihn weiter auszunützen. Es empfiehlt sich, nach dem Verfahren der A. E.-G., Abb. 462b, den Hochdruckdampf entweder zur Niederdruckbüchse oder unmittelbar zum Kondenser abzuführen, so daß die falsche Luft zumindest nicht in die Turbine dringen kann. Selbstverständlich ist auf ihre tunlichst vollkommene Ausschaltung zu sehen.

2. **Während der Betriebsstillstände ist das Eindringen von Dampfwrasen in das Innere** der Turbine zu **verhindern.** Dies gelingt nicht ohne weiteres durch das Schließen der Hauptventile. Es ist vielmehr erforderlich, daß der **Raum hinter dem Hauptventil mit der freien Luft in Verbindung gesetzt** wird. Hierzu wird häufig die Entwässerung des Wasserabscheiders vor der Turbine benutzt. Soll sie zuverlässig wirken, muß die Leitung eine genügende lichte Weite erhalten. Bei schlechten, säurehaltigen

[1]) Entlüfter von Weir, Hülsmeyer u. a. s. Siegmon a. a. O.

Speisewässern nimmt die A. E.-G. nach Lasche (a. a. O.) zu dem durchgreifenden Mittel Zuflucht, jenen Raum **unter Luftleere zu setzen.** Auch bei starken Undichtheiten wird alsdann der Sickerdampf abgesaugt und kann unter keinen Umständen in die Turbine dringen. Lasche empfiehlt bei großen Anlagen die Aufstellung einer eigenen Absaugevorrichtung.

Nicht rostendes Eisen.

Der Firma Jul. Pintsch, Berlin, soll es gelungen sein, nichtrostendes Eisen durch Erhitzung auf 800° C und Behandlung mit Ammoniakdämpfen herzustellen. Es bildet sich an der Oberfläche das unempfindliche Stickstoffeisen. Siegmon, dem wir diese Angabe entnehmen, fügt hinzu, daß vorläufig unbekannt ist, wie sich das Eisen bei den im Dampfbetrieb verwendeten hohen Temperaturen und Drücken verhält. Auf alle Fälle würde ein vielversprechender Anfang vorliegen, das Übel des Rostens an der Wurzel anzufassen.

159. Anfressungen in Oberflächenkondensatoren.

Die Anfressungen im Kondensator bilden neben der Schaufelverrostung die zweite große Quelle der Betriebsstörungen, die häufig die erste nach sich zieht. Sie sind überwiegend „elektrolytischen" Ursprunges und werden durch ungeeignete Beschaffenheit (d. h. Salz- oder Säureinhalt) des Kühlwassers oder des Kondensates im Verein mit einer ungeeigneten Legierung der Kühlrohre hervorgerufen. Als zweite Ursache kommen die sog. Erdströme in Betracht.

Die anfänglich rätselhafte, weil regellos in mannigfaltigen Formen auftretende Erscheinung beginnt sich allmählich aufzuklären, seit wissenschaftlich gebildete Ingenieure sich ihrer angenommen haben.

Wir nennen hier vor allem Lasche, der in seinem während des Druckes erschienenen Buch „Konstruktion und Material" eine umfassende mit viel wertvollen Versuchsangaben versehene Studie der Kondensatoranfressungen bringt. Die leichte Zugänglichkeit dieses Werkes enthebt uns der Mühe ausführlicher über den Inhalt zu berichten. Ferner sind zu nennen Cornu[1]) und v. Wurstemberger[2]).

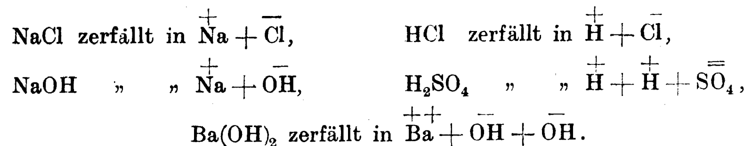
Um ein besseres Verständnis der Vorgänge zu ermöglichen, ist es unerläßlich, in Kürze einige physikalische Sätze in Erinnerung zu bringen.

a) Theorie der Elektrolyse.

1. Ein in einer Lösung befindlicher Stoff übt auf eine „halbdurchlässige" Wand, die nur die Moleküle der lösenden Substanz, nicht aber die des gelösten Stoffes durchläßt, eine Pressung, den sog. osmotischen Druck aus. Man kann diesen nach außen übertragen, wenn man die Lösung auf die eine Seite eines halbdurchlässigen Kolbens, auf die andere nur das Lösungsmittel einwirken läßt. Bei **verdünnten Lösungen** befolgt der osmotische Druck p das Gasgesetz. Ist nämlich die im Raume V enthaltene Menge des gelösten Stoffes n Kilogramm Moleküle, d. h., ist sein Gewicht $G = n\,m$, wo m sein auf Wasserstoff bezogenes Molekulargewicht bedeutet, und ist $\mathfrak{R} = 848$ die allgemeine Gaskonstante, so gilt die Gasgleichung

$$p\,V = n\,\mathfrak{R}\,T \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

2 Reines Wasser leitet den elektrischen Strom so gut wie gar nicht; wird ein geeigneter Stoff darin aufgelöst, kann es zu einem Leiter werden; man nennt den Stoff den Elektrolyt. Nach der Theorie von Arrhenius werden die Elektrolyte, sobald sie mehratomige chemische Verbindungen sind, in der Lösung gespalten, — „dissoziiert". In verdünnten Lösungen ist diese „elektrolytische Dissoziation" nahezu vollständig. Dabei werden die einzelnen Atomgruppen oder Ionen elektrisch + und — geladen, sie nehmen je soviel „Elektronen" auf, als ihre chemische Wertigkeit beträgt. In folgenden Beispielen ist die Ladung durch die entsprechende Zahl von +- und —-Zeichen angedeutet:



NaCl zerfällt in $\overset{+}{\mathrm{Na}} + \overset{-}{\mathrm{Cl}}$, HCl zerfällt in $\overset{+}{\mathrm{H}} + \overset{-}{\mathrm{Cl}}$,

NaOH „ „ $\overset{+}{\mathrm{Na}} + \overset{-}{\mathrm{OH}}$, H_2SO_4 „ „ $\overset{+}{\mathrm{H}} + \overset{+}{\mathrm{H}} + \overset{=}{\mathrm{SO_4}}$,

$Ba(OH)_2$ zerfällt in $\overset{++}{\mathrm{Ba}} + \overset{-}{\mathrm{OH}} + \overset{-}{\mathrm{OH}}$.

Jede Ionenart übt für sich einen osmotischen Partialdruck aus, als ob sie sich allein in Lösung befinden würde.

3. Die Metalle einschließlich H bilden stets positive Ionen. Taucht man ein Metall in eine Flüssigkeit, so treten nach der Theorie von Nernst infolge der hypothetisch angenommenen Lösungstension Atome in die Flüssigkeit unter Spaltung der im Metall vorhandenen +- und —-Elektronenpaare und unter Mitnahme des positiven Elektron ein, wodurch das ursprünglich neutrale Metall negativ die

[1]) In der lesenswerten Schrift von Höhn: Die Bekämpfung von Rost, Zürich 1919, zitiert.

[2]) Die selektiven Korrosionen, Schweiz. Bauztg. 1919, Bd. LXXIV, S. 66, und briefliche Mitteilungen.

Flüssigkeit positiv geladen wird. Der Übertritt hört auf, wenn die entstehenden elektrostatischen Kräfte der Lösungstension das Gleichgewicht halten. Die hierzu notwendige Stoffmenge ist verschwindend klein.

4. Der galvanische Strom entsteht, wenn zwei Metalle verschiedener Art in einen oder zwei (sich etwa mittels poröser Tonwand berührende) Lösungen getaucht und außen leitend verbunden werden. So besteht das Daniellsche Element aus Zn in $ZnSO_4$ und Cu in $CuSO_4$-Lösung, Im Augenblick des Schlusses strömen außen die positiven Elektronen vom Cu zum Zn, wodurch das elektrostatische Gleichgewicht gestört wird. Das Potential des Zn nimmt zu, dasjenige von Cu nimmt ab, daher müssen Zn-Ionen von der sogenannten Anode in die Lösung treten und Cu-Ionen sich auf dem Cu, der sogenannten Kathode niederschlagen. Auf diese Weise entsteht ein elektrischer Strom, dessen Intensität nach dem Ohmschen Gesetz $i = E : (w_i + w_a)$ ist, worin E die elektromotorische Kraft des gesamten Elementes, w_a den äußeren, w_i den inneren Widerstand bedeutet.

Ist 1 Grammolekül eines Stoffes aufgelöst worden, so geht nach dem Gesetz von Faraday sovielmal 96540 Coulombs (Amp./sek.) hindurch, als die Wertigkeit des Elementes ausmacht; bei Zn also, wenn die obige Elektrizitätsmenge mit F (Faraday) bezeichnet wird, $2F = e$. Diese Elektrizitätsmenge wird vom Zn zum Cu durch die sogenannte Ionenwanderung übertragen, indem die positiven Zn-Ionen gegen das Kupfer, die negativen SO_4-Ionen gegen das Zn hinwandern. An der porösen Tonwand vereinigen sich Zn und SO_4; jenseits derselben wandert das Cu zum Kupfer hin. Die dabei geleistete elektrische Arbeit, die als Stromwärme erscheint, ist Ee.

5. Die Größe der elektromotorischen Kraft leitet Nernst auf einem im einzelnen noch lückenhaften aber anschaulichen Wege ab. Denkt man sich nämlich 1 Grammolekül Zn-Ionen durch einen halbdurchlässigen Kolben unter dem Drucke ihrer Lösungstension P angesaugt, läßt man hierauf den Kolben unter der Wirkung des osmotischen Druckes isotherm expandieren, bis der osmotische Druck p der Umgebung erreicht ist und schiebt man den Zylinderinhalt wieder in die umgebende Lösung hinaus, so wird (wie in einer Gasmaschine) die Arbeit $A_1 = \mathfrak{R}\, T \lg n\,(P/p)$ nach außen abgegeben. In gleicher Weise würde man in einer ähnlichen Vorrichtung beim Ausfällen der äquivalenten Cu-Menge die Arbeit $A_2 = \mathfrak{R}\, T \lg n\,(P'/p')$ aufwenden müssen. Der Arbeitsgewinn ist, von der geringfügigen Arbeit an der Grenze der beiden Elektrolyten abgesehen:

$$A = A_1 - A_2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

Dieser muß, weil auf umkehrbarem Wege gewonnen und weil das Daniell-Element, wie der Versuch beweist, ebenfalls umkehrbar arbeitet der von den elektrischen Kräften geleisteten Arbeit Ee gleich sein. Daraus ergibt sich der Wert der elektromotorischen Kraft

$$E = \frac{A}{e} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

Ist die Kette ungeschlossen, so entsteht zwischen dem Cu und Zn eine Potentialdifferenz von gleicher Größe. Diese kann man zusammengesetzt denken als die Differenz der Potentialunterschiede des statischen Zustandes zwischen Zn und Elektrolyt und Cu und Elektrolyt.

6. Wir bezeichnen für die verschiedenen Arten der in Betracht fallenden Metalle mit (AB), (BC)... die resultierenden elektromotorischen Kräfte in dem Sinne, daß AB den Potentialfall im äußeren Kreis von A zu B bedeutet. Daher ist $(AB) = -(BA)$. Sei ferner S ein Elektrolyt, in welchen wir wechselweise je zwei Metalle tauchen lassen, und bedeutet $A|S$ den Potentialunterschied zwischen Metall und Elektrolyt, $B|A$ den Potentialunterschied der sich trocken (außen) berührenden Metalle B und A, so kann man schreiben:

$$\left.\begin{aligned}(AB) &= A|S + S|B + B|A\,,\\ (BC) &= B|S + S|C + C|B\,,\\ (CA) &= C|S + S|A + A|C\,.\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

Tauchen zwei Metalle A, B in zwei verschiedene, sich berührende Elektrolyte S_1, S_2, so wird die Gleichung für die elektromotorische Kraft lauten:

$$(AB) = A|S_1 + S_1|S_2 + S_2|B + B|A \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

Schreibt man die ähnlich gebildeten Ausdrücke für (BC), (CA) hin und summiert man die Gleichungen, so ergibt sich mit Rücksicht auf das bekannte Gesetz

$$A|B + B|C + C|A = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (5)$$

und indem man beispielsweise für

$A|S_1 + S_2|A$ den Ausdruck $A|S_1 + S_1|S_2 + S_2|A - S_1|S_2 = A|A - S_1|S_2 = -S_1|S_2$

setzt, die Gleichung

$$(AB) + (BC) + (CA) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (6)$$

Ist also die elektromotorische Kraft von A gegen B und gegen C bekannt, so ist auch

$$(BC) = (BA) + (AC) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (6a)$$

gegeben.

7. Die Leitfähigkeit k des Elektrolyten ist seiner ursprünglichen Konzentration η, dem Dissoziationsgrad α und den „Ionenbeweglichkeiten" verhältnisgleich[1]). η bedeutet die Zahl der Gramm-Äquivalente des gelösten Stoffes in 1 cm^3, und es ist

$$k = \alpha \eta (u + v) \qquad (7)$$

Darin bedeuten u, v die nachfolgenden Verhältniszahlen bei 18° C Temperatur

für die Ionen	K	Na	H	Cl	NO_3	CO_2H	OH
ist	$u = 65{,}3$	44,4	318;	$v = 65{,}9$	60,8	45	174.

Bei sehr starker Verdünnung ist $\alpha = 1$, und man erhält

$$k_\infty = \eta (u + v) \qquad (8)$$

Der Leitungswiderstand einer Flüssigkeitssäule von der Höhe l in cm und dem Querschnitt q in cm^2 wird dann

$$w = \frac{1}{k} \frac{l}{q} \text{ in Ohm} \qquad (9)$$

Beispielsweise ist für eine Lösung von 2,7 v. H. oder 27 g NaCl-Gehalt auf 1 l (die dem Meereswasser nahekommt), da 1 Grammolekül NaCl $23 + 35{,}5 = 58{,}5$ g bedeutet: $\eta = (27/58{,}5) : 1000 = 0{,}462 \cdot 10^{-3}$. Ferner ist $u + v = 44{,}4 + 65{,}9 = 110{,}3$, also $k_\infty = 0{,}462 \cdot 110{,}3 \cdot 10^{-3} = 51 \cdot 10^{-3}$. Bei höherer Temperatur steigt k nach Formel $k = k_0 (1 + \alpha t)$. Dabei ist für Na, H, Cl, der Reihe nach $\alpha = 0{,}025$, $0{,}015$, $0{,}022$.

Da man für Kupfer den Widerstand mit ungefähr $k = 50 \cdot 10^6$ rechnen darf, so ist für gleiche Abmessungen der Widerstand der obigen Lösung rd. 10^9mal so groß. Betrachten wir etwa im Kondensator einen über das Metall A und B und den Elektrolyt gehenden Stromkreis, so wird man im Ohmschen Gesetz

$$E_{AB} = (W_{AB} + W_{El})\, i \qquad (10)$$

den Widerstand der Metallteile (die kurzgeschlossen sind) neben dem Widerstand des Elektrolyten unbedingt vernachlässigen dürfen.

b) Vorgänge im Oberflächenkondenser.

Der Oberflächenkondensator besteht im allgemeinen aus einem Schmiedeisenmantel, gußeisernen Wasserkammern, Rohrböden aus Münzmetall (von den Kriegszeiten her auch aus Flußeisen), Kühlröhren aus Messing (stellenweise aus Kupfer). Diese verschiedenartigen Metalle werden benetzt einerseits durch das Kühlwasser, andererseits durch das Kondensat, das häufig ebenfalls salz- (oder soda-)haltig sein wird, so daß ein ganzes System von galvanischen/Ketten entsteht und ein verwickeltes Netz von elektrischen Strömen sich durch die Metalle und den flüssigen „Elektrolyt" hindurch Bahn schafft.

8. Die Größe der auftretenden Potentialdifferenzen oder „elektromotorischen Kräften" ist nach den Untersuchungen von Dr. Schmidt im physikalischen Laboratorium der Firma Brown, Boveri & Cie der folgenden Zahlentafel zu entnehmen.

Potentialdifferenzen (an den Außenklemmen) verschiedener Stoffe gegenüber Handelszink bei gewöhnlicher Temperatur in bewegtem Wasser.

Leitungswasser von Baden (Schweiz)			Dasselbe mit 30 v. T. Kochsalz		
		Volt			Volt
Graphit	gegen Zink	0,96	Graphit	gegen Zink	1,19
Messing (63 v. H. Kupfer)		0,93	Kupfer (98 v. H.)		0,87
Kupfer (98 v. H.)		0,91	Messing (63 v. H. Kupfer)		0,82
Flußeisen		0,71	Zinn		0,61
Aluminium		0,51	Flußeisen		0,51
Zinn		0,47	Grauguß ohne Gußhaut		0,35
Grauguß ohne Gußhaut		0,42	Aluminium		0,29
Zink		0	Zink		0

Die Ergebnisse einer weiteren Versuchsreihe sind in Abb. 938 dargestellt. Hier bildeten Messing und Flußeisen die Elektroden; als Elektrolyt dienten der Reihe nach I: Badener Leitungswasser, II: Zürichseewasser, III: alkalisches Kesselwasser. Die Elektroden wurden vor jeder Versuchsreihe blank poliert. Die starke Veränderuug der Elektromotorischen Kräfte ist nicht bloß durch die wachsende Temperatur, sondern wohl in höherem Maße durch die Veränderung der Oberflächen (Anlagerung der ausgeschiedenen Ionen oder chemischer Angriff durch dieselben) die bekannte **„Polarisation"** verursacht. wie man an Schaulinie IV ersieht, bei der Elektrolyt I benutzt, aber die Elektroden nicht nur vor Versuchsbeginn, sondern vor jeder neuen Messung blank poliert worden sind.

---

[1]) Nernst, Theoret. Chemie 1913, S. 390.

Schließt man den Außenkreis, so fließt der Strom außen von dem in der Reihe höher stehenden Stoff zu dem tiefer stehenden. Im Innern des Elektrolyten geht der Strom in entgegengesetzter Richtung; es treten die „Ionen" des „unedleren" Metalles in die Lösung, dieses, die sog. „Anode", wird aufgelöst, angefressen. An der anderen Elektrode, der „Kathode", werden die positiven Ionen ausgeschieden, bilden metallische oder sonstige Ablagerungen.

9. Stromverzweigung im Kondensator. Es bedeute im Kondensatorschema, Abb. 938a, A das Kühlrohrbündel aus Messing, B die Rohrwand aus Bronze, C das Kühlwassergehäuse aus Guß, D ein Schutzmetall, näher zu bestimmender Art. Bei eingewalzten Rohren sind A und B „kurzgeschlossen", C desgleichen durch die Flanschenschrauben, D wird mit der Rohrwand gutleidend ver-

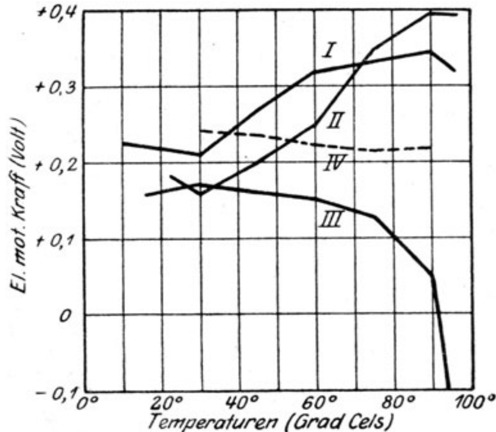


Abb. 938. Potentialunterschiede in verschiedenen Kühlwässern.

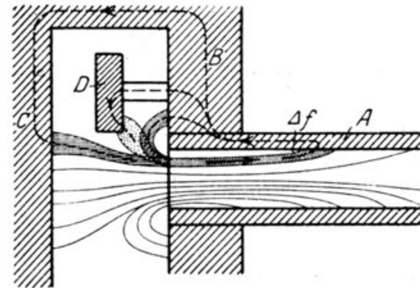


Abb. 938a. Stromverzweigung im Kondensator.

bunden. Gemäß dem Kirchhoffschen Gesetz gilt für einen beliebigen innerhalb der stromdurchflossenen Masse gewählten Stromkreis im Beharrungszustand das Ohmsche Gesetz. Weiterhin darf man die den Ketten (AB), (BC) usw. entsprechenden Ströme einander überlagern; dabei fließt für Kette (AB) der Strom so, als ob zwar C und D Leiter, aber frei von elektromotorischer Kraft wären. Einige solcher Stromlinien sind der Schätzung nach in die Abbildung eingezeichnet. Anderseits sind durch verschiedene Schraffur diejenigen Stromfäden hervorgehoben, die von einem Flächenelement Δf der Rohrwand unter der Wirkung der elektromotorischen Kräfte (AB), (AC), (AD) zu den entsprechenden Elektroden hinführen.

Schließen wir diese Fäden durch Bahnen im Inneren der kurzgeschlossenen Metallmasse und bezeichnen wir die Widerstände im Elektrolyt mit $w_{AB}\ldots$, die Ströme mit $i_{AB}\ldots$, so gelten mit Rücksicht auf die Kleinheit der Metallwiderstände die Gleichungen:

$$(AB) = w_{AB}\, i_{AB}; \qquad (AC) = w_{AC}\, i_{AC}; \qquad (AD) = w_{AD}\, i_{AD} \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

Da (AB) bei offener Kette den äußeren Potentialfall von A zu B bedeutet, so fließt der Strom (algebraisch genommen) im Metall von A nach B. Die gesamte in Δf einfließende Strommenge ist

$$i_A = i_{AB} + i_{AC} + i_{AD} = \frac{(AB)}{w_{AB}} + \frac{(AC)}{w_{AC}} + \frac{(AD)}{w_{AD}} \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

Wäre der Strom für jedes Flächenelement aller Innenwände bekannt, so wäre bei bekannter Art des Kühlwassers und der Metalle durch **das Faradaysche Gesetz auch die Art und Stärke der Anfressungen gegeben.** Die Aufklärung des Stromverlaufes ist daher die Hauptaufgabe des Konstrukteurs. Das Wesentliche davon läßt sich durch Abschätzung oder durch den Versuch feststellen.

10. Die Schutzeinlagen. Die Schutzeinlagen (oben mit D bezeichnet) haben den Zweck, die betriebswichtigen und teueren Bestandteile des Kondensers zu schonen. Solche sind in erster Linie die Kühlrohre, durch deren Anfressung und Durchlöcherung die ärgsten Betriebsstörungen hervorgerufen werden. Diese müssen daher unbedingt kathodischen Charakter haben, d.h. es muß an jeder Stelle

$$i_A > 0 \quad \ldots\ldots\ldots (13)$$

sein. Cornu und Schmidt haben (a. a. O.) durch empirische Messungen festgestellt, daß Gl. (13) erfüllt wird, falls zwischen den auf Zn bezogenen elektromotorischen Kräften die Beziehung

$$\frac{1}{3}\left[(BZ_n) + (CZ_n) + (DZ_n)\right] - (AZ_n) > 0 \quad \ldots\ldots\ldots (14)$$

besteht. Setzt man hier $(BZn) = (BA) + (AZn)$ usw. ein, so erhält man nach Vermehrung mit -3 die Form

$$(AB) + (AC) + (AD) > 0 \quad \ldots\ldots\ldots (14\,a)$$

Der Vergleich mit Gl. (12) zeigt, daß dies mit Bedingung (13) übereinstimmt, falls man

$$w_{AB} = w_{AC} = w_{AD} \quad \text{. . . . .} \quad (15)$$

voraussetzen darf. Bedenkt man, daß der Hauptteil des Widerstandes durch den in das Innere des Rohres reichenden Flüssigkeitsfaden (Abb. 938a) gebildet wird, dessen Widerstand durch die im weiten Raum vor der Rohrwand stattfindende Verzweigung der Stromfäden nur unwesentlich beeinflußt werden dürfte, so begreift man die angenäherte Gültigkeit von Gl. (15) und damit die Erfolge, die mit der Regel von Cornu und Schmidt an Ausführungen der Firma Brown Boveri & Co. im praktischen Betriebe erreicht worden sind. Cornu pflegt so vorzugehen, daß an Ort und Stelle im gegebenen Kühlwasser (sofern sich Anfressungen zeigen) die elektromotorischen Kräfte gemessen, und danach ein Schutzmetall D mit solchen Eigenschaften gewählt wird, daß Gl. (14a) erfüllt ist. Dieses muß im allgemeinen unedel sein, d. h. hohe Lösungstension besitzen, damit seine Ionen in die Lösung dringen und die edleren Cu-Ionen zurückdrängen, d. h. den Strom in das Kühlrohr hinein wenden.

Daß durch Schutzeinlagen allein das Übel nicht immer behebbar ist, liegt insbesondere an zwei Gründen. Der eine, auf den v. Wurstemberger hingewiesen hat, ist die überaus häufige Undichtheit der Kühlrohre, durch die das Kondensat mit salzigen Bestandteilen versetzt, also ebenfalls zu einem Elektrolyt umgewandelt wird. Demzufolge finden auch auf der Innenseite elektrolytische Prozesse statt, und es sind insbesondere **schmiedeiserne Zwischenböden als sehr gefährliche Beigabe** zu betrachten. Den zweiten Grund bilden:

11. Örtliche Selbstanfressungen. Ein **galvanisches Element** kann ebensogut durch **verschiedene Teile eines und desselben Metallstückes gebildet** werden, wenn diese **chemisch oder physikalisch verschiedener Art sind,** was insbesondere bei Legierungen wie Messing vorkommen kann. Dann entstehen **örtliche Selbstanfressungen,** die um so gefährlicher sind, als sich die verschiedenartigen Teile dicht beisammen befinden können, also als **„kurzgeschlossene“ Ketten** mit sehr geringem Eigenwiderstand große Stromstärken aufweisen.

Über die verwickelten Erscheinungen, die sich dabei abspielen, teilt v. Wurstemberger unter Mitarbeit des chemischen Laboratoriums der A.-G. Escher, Wyss & Cie. reichhaltige Beobachtungen a. a. O. mit. Die Benutzung von zwischen zwei Elektroden frei aufgestellten metallischen Leiterstücken, die den Strom, wie das Eisen die Magnetlinien, auf sich zusammenziehen, erlaubte am gleichen Stück kathodische und anodische Vorgänge zu beobachten. In der wichtigen Frage der örtlichen

Entzinkung

vertritt v. Wurstemberger die Ansicht, daß dafür die Möglichkeit eines ersten Niederschlages von metallischem Kupfer und die Anwesenheit einer gewissen Konzentration der Kupfer-Ionen, die Polarisation verhindern, die Vorbedingung ist, wie in einer demnächst zu veröffentlichenden Arbeit dargetan wird.

Lasche veranschaulicht a. a. O. durch vorzüglich ausgeführte farbige Lichtbilder den Entzinkungsprozeß an Messingrohren verschiedener Zusammensetzung. Bei homogenem Gefüge aus α-Mischkristallen (60 T. Cu; 36,5 T. Zn) bestehen keine örtlichen elektromotorischen Kräfte, und es ist große Widerstandsfähigkeit gegen elektrolytischen Angriff vorhanden. Stärkere Durchsetzung mit Eutektoid, rufe elektrometrische Kräfte und Entzinkung hervor, die von den Grenzflächen der Kristalle ausgeht. Auch Materialfehler werden als Angriffstellen gerne aufgesucht.

12. Gefahr der Polarisation. Im Kühlwasser als Elektrolyt stehen sich im wesentlichen Messing und Eisen gegenüber, daher müßte im Sinne der Spannungsreihe das Messing die Kathode, somit unangreifbar sein. Die Beobachtung soll jedoch gezeigt haben, daß durch den Angriff des Gußeisens dessen Graphitinhalt als Oberflächenbelag zum Vorschein kommt und eine Umpolarisation mit Stromumkehr hervorzurufen imstande ist. In ähnlicher Weise wirken Koksstücke, verbrannte Kohlen und Aschenteilchen, die etwa durch das Kühlwasser angeschwemmt, in den Rohren stecken bleiben oder abgelagert werden.

Lasche rief derartige Anfressungen durch Kurzschluß an Kohle und Messig künstlich hervor. Die entstehenden örtlichen Kupferpfropfen waren den im Betrieb auftretenden täuschend ähnlich, sobald dem Elektrolyt sehr kleine Mengen — 0,05 v. H. — von Salpetersäure zugesetzt wurden. Bemerkenswerterweise hatte in einem Fall der Pfropfen **eine von der des Messings abweichende selbständige Struktur.** Nach Lasche ist hier sowohl das Kupfer, wie das Zink in Lösung gegangen; ersteres wurde wieder in Kristallform ausgeschieden. Die näheren Umstände dieser Entzinkungsart verdienen näher aufgeklärt zu werden.

c) Erd- oder „vagabundierende“ Ströme.

In der Nähe elektrischer Straßenbahnen sind je nach Bodenbeschaffenheit mehr oder weniger starke Erdströme wahrnehmbar, die an Wasserleitungen u. a. starke Anfressungen hervorrufen können[1]). Der in die Schiene geleitete Strom sucht sich im Erdreich einen Nebenschluß und wird durch ein benachbartes Rohr „angezogen“, so daß an diesem ein Einzugsgebiet, eine neutrale Zone, und der Anfressungsbereich, d. h. die Anode,

[1]) Schweiz. Elektrotechn. Ver. Bulletin 1918, S. 138.

zu unterscheiden sind. Da parallel laufende Rohrstrecken von beträchtlicher Länge vorhanden sein können, ist die Ausbildung erheblicher Potentialdifferenzen wohl begreiflich. Demgemäß führt die angeführte Quelle Beobachtungen an, wo bis zu 60 v. H. des Schienenstromes durch Wasserleitungsrohre aufgenommen wurden. Daß aber bei den bloß wenige Meter langen Kondensatoren merkliche Schäden durch Erdströme verursacht werden sollten, wurde

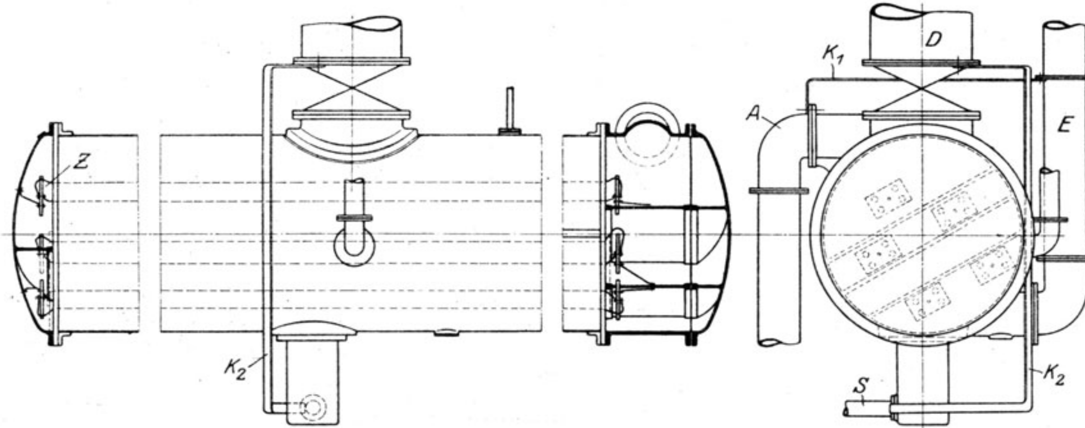


Abb. 939. Zinkschutzplatten und Sicherung gegen Erdströme nach Balcke.

vielfach angezweifelt. Die Gegenbeweise sind indessen bündig. So teilt mir die Firma Balcke & Co. mit, daß an einer Anlage in Holland, die in der Straßenbahnzentrale selbst aufgestellt ist, während der trockenen Sommermonate nicht die geringste Anfressung zu bemerken war, hingegen mit dem Eintritt nasser Witterung und Durchfeuchtung des trockenen Sandbodens solche auftraten, um im nächsten Sommer wieder zu verschwinden.

Bei Wechselstrom ist die elektrolytische Wirkung verschwindend klein und zwar schon bei 5 Perioden in der Sekunde.

Thermoelektrische Ströme.

Erhitzt man die Lötstelle (oder fest verspannte Verbindungsstelle) zweier ungleichartiger Metalle, so entstehen die bekannten thermoelektrischen Ströme; deren elektromotorische Kraft ist indessen für die im Kondensator verwendeten Metalle sehr gering, beispielsweise für Kupfer—Eisen für 100° C Temperaturunterschied bloß etwa 0,001 Volt, so daß hierdurch kaum nennenswerte Schädigungen entstehen können.

d) Abhilfsmaßnahmen gegen Anfressungen.

Ist durch Polarisationsbeschläge anderer Kondensatorteile das Messing zur Anode gemacht worden, so kann unter Umständen, wie unter 10 dargetan, durch Schutzplatten

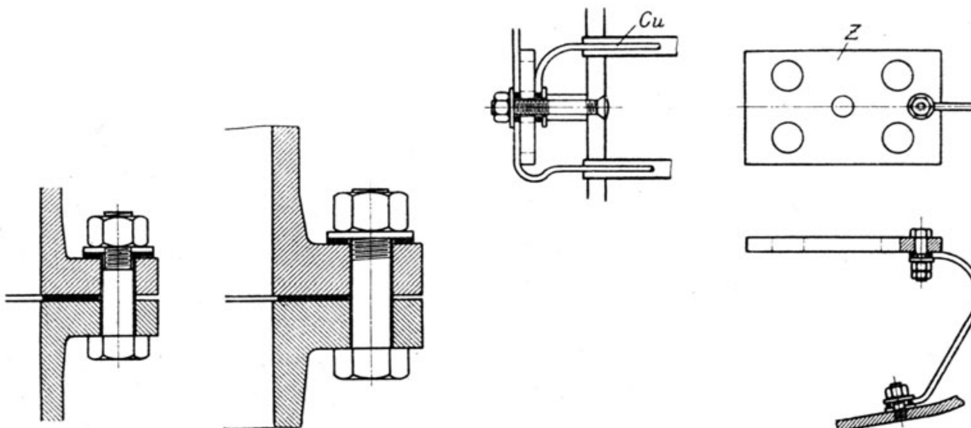


Abb. 939a. Flanschisolierung. Abb. 939b. Schutzplattenbefestigung.

eine Abhilfe geschaffen werden. Als solche kommen Zink und Aluminium in Betracht, die am besten mit den Rohrplatten in leitende Verbindung gebracht werden. Zink be-

deckt sich leicht mit Oxydschichten, die es vollständig umzupolarisieren vermögen, weshalb häufiges Blankputzen unerläßlich ist.

Die richtige Abschätzung der Schutzplattenwirkung würde die Ermittelung der räumlichen Stromverteilung im Elektrolyt bedingen, eine Aufgabe, die heute wohl noch kaum lösbar ist. Es wird berichtet, daß von den Platten weit abliegende Teile wegen vergrößerten Leitungswiderstandes des Schutzes häufig verlustig gehen.

Gegen Erdströme wird als Sicherung allgemein ein **künstlicher Kurzschluß** derjenigen Teile, die jene am leichtesten heranführen, also insbesondere der Kühlwasserzu- und -ableitung vorgesehen. Die Firma Balcke & Co. pflegt hierbei den eigentlichen **Kondenserkörper** auch noch sorgfältig **zu isolieren,** wie die Schnitte der Flanschverbindungen an Abb. 939, a, b, erkennen lassen. Zwischen den Flanschen des Abdampfrohres wird eine kräftige Klingeriteinlage als genügend erachtet. Die Schraubenbolzen werden mit Isolierband umwickelt und erhalten unter den Unterlagsscheiben Einlagen aus vulkanisiertem Gummi. Der Kühlwassereintritt E und der -austritt A sind durch die **Kupferbarren** K von 12×60 mm Stärke kurzgeschlossen, der Dampfeintritt D und das Kondensatabsaugerohr S, desgleichen durch den Barren K_2. Der Kondenser ist im übrigen mit Zinkschutzplatten Z ausgestattet, die zu weiterer Sicherheit sowohl mit den Deckeln wie untereinander durch 8 mm starke Kupferdrähte Cu kurzgeschlossen sind.

Das Cumberlandverfahren[1]).

Cumberland verteilt in den Kühlwasserdeckeln Schutzplatten aus dem billigsten in Betracht kommenden Metall, nämlich Grauguß (ohne Gußhaut) und sorgt durch eine **künstlich angelegte äußere Spannung** dafür, daß nur diese Schutzplatten und kein sonstiger Bestandteil des Kondensers die

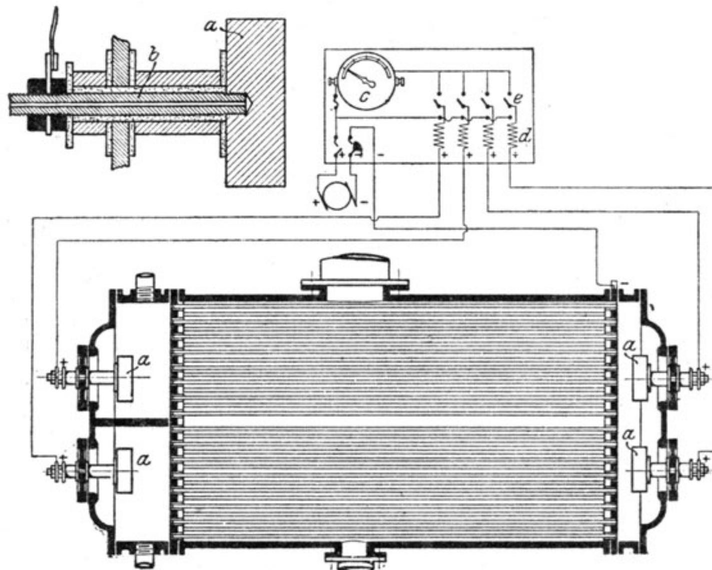


Abb. 940. Schutzverfahren von Cumberland.

Anode bilde. Zu diesem Behufe müssen, wie Abb. 940 zeigt, diese Platten mit dem positiven Pol einer **äußeren Stromquelle (kleine Dynamo)** verbunden und gegen das Gehäuse isoliert werden. Die in tunlichst guter metallischer Verbindung stehenden übrigen Kondenserteile sind mit dem negativen Pole zu verbinden. Mit einer Spannung von 6—10 Volt wird der Anodenstrom durch den Elektrolyt in die entferntesten Teile des Kondenserinnern getragen, so daß alle diese Teile zu einer einzigen großen Kathode umgewandelt sind. Als **Stromstärke** wird **1 Amp. für rund 50 qcm Plattenfläche benützt.** Dies wird erreicht, wenn man **auf je 100 qm Kühlfläche eine Gußeisenplatte von rund 180 mm Durchmesser, 50 mm Stärke** anbringt. Das Verfahren bürgert sich mehr und mehr ein und scheint die zur Zeit wirksamste Schutzmaßregel darzustellen.

Beobachtungen aus dem praktischen Betriebe.

Der nachfolgend wiedergegebene Bericht über schwere Mißstände an einer Dampfturbinenanlage soll dem Studierenden ein lebendigeres Bild über die Vorgänge des wirklichen Betriebes vermitteln, als eine abstrakte Darstellung dies zu tun vermag[2]).

[1]) Janzen, Z. d. V. deutsch. Ing. 1917, S. 140.

[2]) Costesèque, Rev. génér. d'Electric. 4. Mai 1918, betrifft die Elektrische Centrale Cap. Pinède in Marseille.

Die Anlage besteht aus vier Dampfturbinen zu 1800 kW und drei Turbinen zu 6000 kW mit den zugehörigen Wechselstromerzeugern. Die zwei ersten 1800 kW-Turbinen wurden ohne irgendwelche Schutzmaßnahmen in Betrieb genommen. Die ersten Anfressungen traten nach 4000 Betriebsstunden auf. Die Kondensatoren haben je 350 qm Kühlfläche, die Rohre sind Messing mit 70 v. H. Kupfergehalt, verzinnt und werden durch Stopfbüchsen abgedichtet. Es wurden je 7 Zinkplatten von 300 × 150 × 25 mm an die Rohrplatten angebracht, die sich als ungemein wirksam erwiesen, da nur etwa 20 Rohre im Jahre ausgewechselt werden müssen.

Das zweite Paar der 1800 kW-Turbinen wurde später aufgestellt und mit Zwischenplatten gleicher Art und Größe versehen. Es hatte bereits 14000 bzw. 19000 Betriebsstunden hinter sich, während welcher Zeit bei der einen kein einziges, bei der andern im ganzen nur etwa 10 Rohre zerfressen wurden.

Die erste 6000 kW-Maschine besitzt verzinnte Rohre französischer Herkunft mit 66 v. H. Kupfergehalt. Die Kühlfläche ist 1200 qm. Die Rohre sind mit Stopfbüchsen befestigt. Von Anfang an wurden vier Zinkplatten von rund 600 mm Durchmesser und 20 mm Dicke angebracht. Die gesamte Zinkoberfläche betrug 18 qcm auf 1 qm Kühlfläche. Die ersten Durchlochungen traten nach 2350 Betriebsstunden auf. Daraufhin wurde die Zinkoberfläche auf 27 qcm für 1 qm Kühlfläche erhöht, was die Anfressungen so herabsetzte, daß im Jahre nur etwa 20 Rohre ausgewechselt werden müssen.

Die zweite 6000 kW-Turbine wurde von Anfang an gleich ausgestattet wie die zuletzt erwähnte und wies nach 21000 Betriebsstunden nur etwa 10 Rohrdurchlochungen auf.

Die dritte Turbine von 6000 kW war in Konstruktion mit den vorhergehenden genau gleich, nur waren die Rohre fremden Ursprungs mit 70 v. H. Kupfergehalt, verzinnt und in die Rohrplatten eingewalzt. Es waren von Anfang an Aluminiumschutzplatten von 31,6 qcm für 1 qm Kühlfläche vorgesehen. Dieser Schutz erwies sich als ganz ungenügend, da schon nach 400 Betriebsstunden Durchlochungen auftraten. Hierauf wurden die Aluminiumplatten durch solche aus Zink ersetzt mit 29 qcm für 1 qm Kühlfläche. Trotz dieser Änderung nahmen die Durchbrüche außerordentlich zu, so daß die Turbine nach 1000 Betriebsstunden infolge der Störungen, die das in großer Menge in die Kessel dringende Meerwasser verursachte, außer Betrieb gesetzt werden mußte. Der Ersteller schrieb, auf Grund elektrischer Spannungsmessungen am Kondenser, die Anfressungen vagabundierenden Strömen zu. Der Kondenser wurde elektrisch isoliert und durch starke Kupferkabel in sich kurz geschlossen. Trotz dieser Maßnahme und des nach wie vor bestehenden Zinkschutzes ließ die Stärke der Zerfressungen in keiner Weise nach; **bis zu 50 Rohren im Tag wurden zerfressen** und die Turbine wurde gänzlich unbrauchbar. Man entschloß sich nun, die gesamten **Kondenserrohre durch neue Rohre mit 70 v. H. Kupfer, 29 Zink und 1 Zinn englischer Herkunft zu ersetzen.** Die Rohre waren innen unverzinnt. Die Zinkschutzplatten wurden beibehalten, der Kurzschluß gegen die vagabundierenden Ströme hingegen beseitigt. Von neuem in Betrieb gesetzt, lief die Turbine anstandslos und wies nach 10000 Betriebsstunden nur etwa 10 durchlochte Rohre auf. Die Werkleitung nahm, um die Betriebssicherheit zu erhöhen, schließlich noch Zuflucht zu einer Abart des Cumberlandverfahrens, indem man die Zinkplatten mittels Ebonitscheiben isolierte und mit 4 Volt Spannung einen Strom von hier zu den Rohrplatten hindurchtreten ließ, wobei sich 0,3 bis 0,75 Amp. als Stromstärke einstellte. Die gute Wirkung dieses Verfahrens zeigt sich darin, daß sobald aus irgendeinem Grunde der Strom unterbrochen ist, die Korrosionen häufiger werden. Im übrigen wird bemerkt, daß nach einer Reinigung der Kondenserrohre, die dann vorgenommen wird, wenn die Kühlwassertemperatur abnormal zu steigen beginnt, die Anfressungen in den auf die Reinigung folgenden ersten Tagen zahlreicher sind als später.

160. Betriebsschwierigkeiten infolge unrichtiger Anlage der Kühlwasserfassung.

Die Zentrale Chelsea der Londoner Untergrundbahnen wurde etwa im Jahre 1906 mit Turbinen älterer Bauart der damaligen Britischen Westinghouse-Gesellschaft ausgestattet, die bei 5500 kW-Leistung und 1000 Umdr./min nach Abb. 941 als Doppelflußturbinen konstruiert waren. Die erste Stufe rechts und links wird durch ein zweikränziges Curtisrad gebildet.

Infolge vollkommener Symmetrie der Strömung sollte das Kammlager (bei dem die Wellenlage nach aus- und einwärts durch die Ober- bzw. Unterschale begrenzt wird) druckfrei bleiben und erscheint übermäßig reichlich bemessen. Es sollte jedoch ganz anders kommen! und zwar durch die Schuld der Kondensationsanlage, die nach mir seinerzeit zugekommenem Bericht der Westinghouse-Gesellschaft nicht von ihr, sondern von der Untergrundbahn-Gesellschaft selbst geliefert und aufgestellt worden ist.

Sie besteht aus stehenden Oberflächenkondensatoren mit bloß einmaligem Wasserumlauf, denen das Zirkulationswasser durch Kreiselpumpen von der Themse zugeführt wird. Es wurde die verhängnisvolle Unterlassung begangen, daß man die Enden der 60″ engl. (1524 mm) im Lichten messenden Leitungen ohne jeden Schutz gegen Eindringen von Verunreinigung in das Bett des Flusses verlegte. Im Herbst beim Laubfall und insbesondere zur Zeit der Ebbe drangen nun solche Mengen von Schlamm,

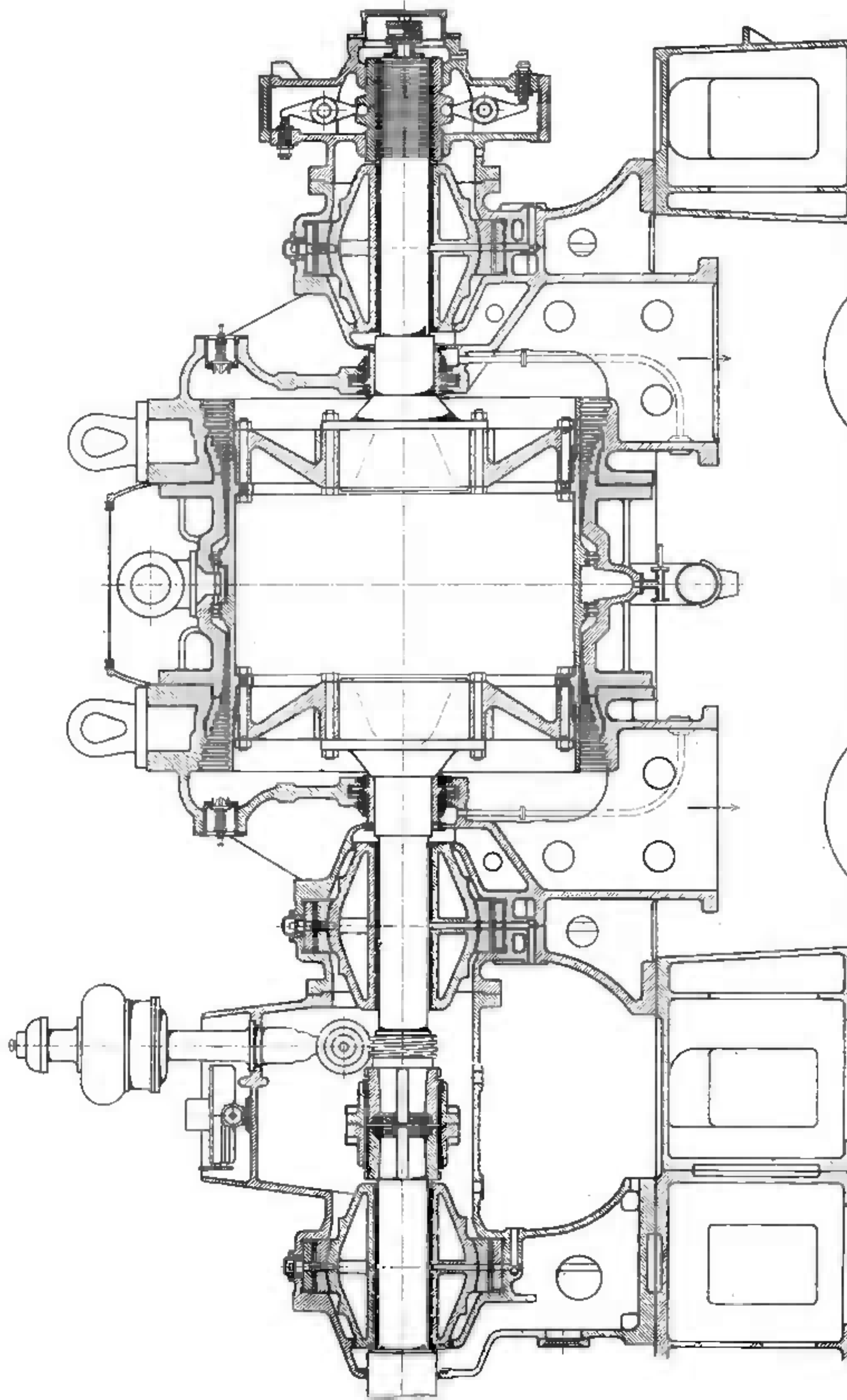


Abb. 941. Ältere Zweifluß-Überdruckturbine in Chelsea.

Ästen, Blättern u. a. in den Kondensator, daß der Wasserdurchfluß gehemmt und eine und dieselbe Turbine im Laufe eines Tages oft zwanzigmal von Kondensation auf Auspuff geschaltet werden mußte. Wie sich unter solchen Umständen der Betrieb gestaltete, geht aus einem Bericht über die Nacht vom 4. zum 5. April 1907 hervor, der auszugsweise wie folgt lautet:

„Die Kondensatoren haben uns wieder große Schwierigkeiten verursacht, und wir sind mit knapper Not dem vollständigen Einstellen des Bahnbetriebes entgangen. Es war eine bange Stunde, als um $11^h 15$ nachts der Kondensator an Maschine G das Zirkulationswasser verlor und das Vakuum langsam zu fallen begann. Turbine H wurde unmittelbar angelassen und parallel geschaltet, erreichte aber nur 750 Umdr./min (gegenüber 1000 normal), da auch ihr Vakuum und dasjenige der Maschinen A und F fiel, und zwar um $11^h 30$ auf 12″ (0,4 at Unterdruck). Nach dem Umschalten der Maschine H auf freien Auspuff begann zu alledem auch der Dampfdruck rasch zu sinken, denn der Elektromotor des Kettenrostes lief infolge der abnehmenden Spannung der elektrischen Generatoren bedeutend langsamer. Eine Katastrophe schien unvermeidlich. Zum Glück konnte man den Kondensator der Maschine G inzwischen ausspülen, so daß um $11^h 55$ diese Einheit frisch angelassen werden konnte und gutes Vakuum erhielt, worauf man die normale Geschwindigkeit wieder einholte."

Ein Bericht vom 20. Oktober 1907 besagt, daß an diesem Tage das Vakuum an verschiedenen Maschinen sechsundzwanzigmal und am 21. Oktober 1907 gar an die **achtzigmal versagt habe.**

Zu diesen Übelständen kam noch der weitere hinzu, daß die Auspuffrohre ins Freie von der Untergrundbahngesellschaft für beide Turbinenseiten getrennt, ohne Druckausgleichverbindung ausgeführt worden waren. Obzwar selbsttätige Auspuffventile vorhanden waren, konnte sich doch beim Umschalten von Kondensation auf Auspuff, infolge nicht vollkommener Gleichzeitigkeit des Öffnens, ein Druckunterschied zwischen den Turbinenhälften einstellen, der zum Einreiben der hierfür nicht berechneten Kammlager führte.

Die vielfachen Umschaltungen auf Auspuff riefen plötzliche Wärmedehnungen und Schaufelstreifen[1]) hervor. Hier zeigten sich die Folgen der für eine Leistung von 5500 kW ungünstigen Bauart, mit für den Anfang des Überdruckes viel zu großem Trommeldurchmesser, der den Konstrukteur zwang, **die Schaufellänge auf etwas wie $^1/_4$″e herabzusetzen.** Es ist begreiflich, daß man dann auch kleine Spielräume einzuhalten bestrebt war, und daß die Westinghouse-Gesellschaft nachträglich gezwungen war, das radiale Schaufelspiel zu vergrößern. Hierdurch wurde aber wieder der Verbrauch nachteilig beeinflußt! Nachdem die Untergrundbahngesellschaft einerseits Ausgleichrohre angebracht, anderseits durch mechanisch reinigbare Schutzrechen das Eindringen von Schmutz zu den Kondensatoren verhindert hatte, schwanden die Übelstände, und der vertragliche Dampfverbrauch konnte erreicht werden. Nur die Dampfreinheit ließ zu wünschen übrig, da **viel Schlamm aus dem Kessel mitgerissen wird,** der sich an **den Niederdruckschaufeln ablagert, festsetzt und den Durchflußquerschnitt bis auf die Hälfte verengen kann.** Diese ungünstige Beschaffenheit des Speisewassers dürfte wohl durch Undichtheit der Oberflächenkondensatoren erklärt werden.

Dem Vernehmen nach wurden die Turbinen später gänzlich abgebrochen und durch neue ersetzt.

Vorschlag für eine sachgemäße Überwachung der Kondensationsanlage.

Da von der Güte der Luftleere die Wirtschaftlichkeit der ganzen Anlage abhängt, wird man Oettinger recht geben, der darauf dringt[2]), daß die Betriebsmannschaft in den Stand gesetzt werde, die Gründe für eine Verschlechterung des Vakuums selbständig beurteilen und demgemäß sofort eingreifen zu können.

Er schlägt vor, daß bei der Übernahme für verschiedene Belastungen festgestellt werde: 1. die Luftleere und die zugehörige Sättigungstemperatur, die Ein- und Ablauftemperatur des Kühlwassers, die Kühlwassermenge als Abhängige vom Druck vor dem Kondenser. 2. Die Luftleere bei künstlicher Zufuhr von bestimmten Zusatzluftmengen, mit Bestimmung des zugehörigen Partialdrucks der Luft an der Absaugestelle. Dieser Druck als Abhängige der Luftmenge dargestellt ergibt durch Verlängerung bis zur Abszisse das durch Undichtheiten eindringende Luftgewicht.

---

[1]) Auf Verhältnisse dieser Art dürfte sich folgende Beschreibung in „Power, 1907, S. 159" beziehen: „Eine neue Turbine sollte den Betrieb abends 11 Uhr übernehmen, wenn die Belastung unter die maximale Leistung einer Einheit gefallen war. Alles lief gut, allein gegen 12 Uhr kam plötzlich eine starke Belastung auf, weil ein Versuchszug probiert wurde, von dem man der Station keine Anzeige gemacht hatte. Da gab es etwas wie ein Erdbeben unter der Turbine und ein Geräusch, als ob ein Dutzend Schlosser die Kanten von dünnen Stahlblechen feilen würden. Man besichtigte die Stopfbüchsen, doch die waren in Ordnung. Da das Geräusch anhielt, waren einige Wärter für Abstellen, doch der Turbinenmonteur wollte nichts davon wissen, und erst später wurde eine andere Einheit rasch angelassen und parallel geschaltet. Nun untersuchte man die Überströmrohre, in denen bei Schaufelbruch leicht Schaufeln vorgefunden werden (!), doch da war nichts. Nach dem Abdecken der Turbine zeigte sich, daß nichts gebrochen war, sondern bloß die Umleitschaufeln des „Impuls"rades gerieben hatten. (Man kann sich hiernach vorstellen, wie es hergehen muß, wenn es zum vollständigen Abrasieren einer Anzahl von Schaufelkränzen, dem berüchtigten „Schaufelsalat", kommt.)

[2]) Rev. Gen. de l'Electric. 1919, S. 419.

Ein Vergleich der im Betriebe zu machenden Beobachtungen, unterstützt durch Schauliniendarstellung des ursprünglichen Zustandes, erlaubt rasch zu schließen, ob Verstopfungen der Kondenserrohre, oder Zunahme der Undichtheiten usw. schuld an einer Abweichung der Luftleere vom normalen Werte sind.

161. Erfahrungen über kritische Drehzahlen.

Moderne in äußerst vollkommener Weise ausgewuchtete Turbinen können über die kritische Drehzahl ohne merkliche Erschütterung hinwegkommen; allein es ist bekannt, daß diese Vollkommenheit nicht im ersten Anlauf und nur um den Preis schweren Lehrgeldes erreicht worden ist. Auch heute noch kann sich ereignen, daß eine Welle trotz aller Sorgfalt bei der Herstellung und Scheibenauswuchtung nicht zur Ruhe kommen will und daß man gezwungen ist, eine neue Welle einzubauen. Gründe hierfür sind beispielsweise **Unterschiede in der Wärmeleitzahl des Baustoffes,** infolge deren die Temperatur sich nicht vollkommen symmetrisch verteilt und eine bleibende Verbiegung entsteht. Beträgt diese auch nur $^1/_{10}$ mm, so sind bei großen Einheiten starke Erschütterungen unvermeidlich.

Ein weiterer Grund für das Unruhigwerden einer ursprünglich befriedigend laufenden Welle ist die **Lockerung der Scheiben,** die im Betriebe durch allmähliches Strecken bei übermäßig stark beanspruchten Naben im Laufe der Zeit eintreten kann.

So lief beispielsweise eine 10 000 PS-Turbine unruhig, bis man entdeckte, daß sich die Naben etwas gelockert hatten. Man baute neue stärkere Naben-Tragringe ein, und die Unruhe verschwand. Allein schon nach einer Woche zeigte sich die Erschütterung wieder und zwar während des Anlassens. Nach etwa einer halben Stunde Betrieb verschwand sie unter Auftreten eines schlagartigen Geräusches. Es war, als ob durch den Schlag die **falsche sich verspannende Lagerung der Scheiben sich ausgeglichen hätte.** Die Untersuchung zeigte, daß die Naben sich wieder gedehnt hatten. Das abermalige Einziehen neuer Ringe besserte die Sachlage, bis die Naben wieder locker wurden, und so fünfmal hintereinander. Schließlich wurden stärkere Scheiben eingebaut. **Die kritische Drehzahl stieg nach jeder Neuaufschrumpfung von 1650 auf etwa 1750 i. d. Min.**

Noch schlimmere Folgen hat das **Lockerwerden von Schrumpfverbindungen,** wie wir in Abschn. 84 ausführlich dargelegt haben. Ein schlimmer, wenn auch unbewußter Vorstoß war es, daß man im Anfang des Turbinenbaues bei mehrstufigen Turbinen, die hintereinander aufgezogenen Scheiben zum Schluß **durch eine Mutter fest zusammenpreßte.** Die nie mathematisch genauen Stirnflächen der Naben konnten die Welle von Anfang an leicht krumm ziehen, insbesondere da sie beim Anlassen eine stärkere Wärmedehnung aufweisen als die Welle. Daher ist es heute eine unbedingt zu befolgende Regel, den Scheibennaben **axiale Dehnungsfreiheit** zu gewähren. Dies wurde ursprünglich erzielt, indem man die Mutter, nachdem die Scheiben fest angezogen waren, um 0,3 bis 0,5 mm zurückdrehte und in dieser Lage sicherte. Die Erfahrung zeigte, daß die Scheiben dann unter Umständen von selbst von einer Seite zur andern wandern und sich dort zusammendrängen. Man verhütet dies, indem man die Nabenstützringe in flache Nuten der Welle versenkt und so in der Achsenrichtung festhält. Besonders tückisch ist das **Mitschwingen der Scheiben selbst,** auf das wir seiner Wichtigkeit wegen weiter unten nochmals zurückkommen. Trotz vielfältiger Erfahrung tauchen immer neue rätselhafte Erscheinungen auf.

Der nachfolgende Bericht wird dem angehenden Ingenieur eine Vorstellung über das Dunkel vermitteln, in dem man in der Praxis häufig tappt. Es handelte sich um eine mit einem Kompressor gekuppelte Turbine, deren normale Drehzahl 4800/min. ist. Wir übergehen die Jahreszahl, fügen jedoch Tag und Monat bei, aus deren Angabe der Leser die Zeitdauer der einzelnen Phasen besser beurteilen kann.

8. 4. Die Turbine wird allein angelassen, sie läuft bei verschiedenen Drehzahlen ruhig bis 4000 Umdr./min.

9. 4. Turbine mit Kompressor gekuppelt; zeigt bei 2000 Umdr. einen leichten Schlag im Kompressor. Bei langsamem Hochbringen läuft sie tadellos ruhig bis 4000 Umdr. Beim Abstellen kommen die Kompressorliderungen zum Streifen und Brummen.

16. 4. Nachdem das Laufzeug herausgenommen, auf der Auswuchtmaschine nochmals ausgeglichen wurde und man dreimal mit der Drehzahl anstandslos hochgehen konnte, wurden Versuche über Dampfverbrauch veranstaltet.

21. 4. Nach einer Kontrolle der Wellen- und Raddichtungen ergibt eine Wiederholung der Versuche, daß sich eine Abänderung der Naben und Raddichtungen empfiehlt.

9. 5. Der Kompressor läuft ohne Liderungsringe bis 4200 Umdr. ruhig, von da bis 4800 schlechter, beim Abstellen schlagen die Kompressorräder.

13. 5. Die Turbine wird mit leerer Kompressorwelle erprobt und läuft unruhig.

19. 5. Nachdem die Turbinenwelle auf der Drehbank nachgedreht, der Massenausgleich auf der Auswuchtmaschine verbessert worden war, wurde die Drehzahl bis auf 5100/min gebracht; es zeigten sich jedoch starke Schwebungen.

26. 5. Die Besichtigung der Wellen zeigt Mängel, wie unrunde Stellen im Lagerlauf des Kompressorteiles, so daß die Anfertigung einer neuen Wellen beschlossen wird.

18. 6. Der Lauf mit der neuen Welle ist nur um weniges ruhiger als vorhin. Schwingungen bei 5000 bis 5300 Umdr./min.

19. 6. Das 2kränzige Curtisrad der ersten Stufe wird abgestreift; der Lauf zeigt die gleiche Unruhe. Es wird beschlossen, die Grundplatte auszumauern und die Träger, auf denen die Rahmen aufruhen, von 400 auf 550 mm zu erhöhen.

23. 6. Versuch mit leerer Kompressorwelle, ohne daß der Lauf sich bessert. Auch nach Entfernung des Curtisrades verschwinden die Schwingungen nicht. Es wird beschlossen, auch die Turbinenwelle und 3 Überdruckräder zu erneuern.

11. 7. Nachdem die Turbinenwelle allein bis 5200 Umdr. gut lief, wird das Laufzeug vollständig eingebaut und ergibt guten Lauf bis 5200 Umdr.; hingegen Schwankungen zwischen 2000 und 4000 Umdr. Die rechnungsmäßige kritische Drehzahl ist ohne Rücksicht auf Nabenversteifung 3700.

12. 7. Probelauf von Turbine mit Kompressor, jedoch ohne Wellendichtungen. Zwischen 1000 bis 1500 Umdr./min stellen sich Erschütterungen an der Turbine ein, von 3000 bis 4000 ein Brummen, dann ruhiger Lauf, bei 4700 Umdr. jedoch abermalige ziemliche Unruhe ein. Beim schnellen Stillsetzen schwankt die Kompressorwelle. Die kritische Drehzahl der Kompressorwelle allein ist 2700, mit Rädern 2000 Umdr/min.

13.—24. 7. Abermaliges Auswuchten der Räder.

In diesem Stile geht es zwei weitere Monate fort! Man kann aus der Länge der Erprobungszeit, aus der wiederholten Auswechselung von Wellen und Schaufelungen schließen, wie schwierig die Anfänge des Dampfturbinenbaues waren. Verfasser, dem die Sachlage unterbreitet worden ist, schloß in erster Linie auf eine Überbeanspruchung des Entlastungskolbens, der offenbar bleibende Dehnungen erfuhr. Es wurde der Versuch mit einem Baustoff von erheblich höherer Streckgrenze empfohlen, was auch geschah. Gleichzeitig wurden von der Werkstätte die Spielräume der Wellenzapfen, die ursprünglich 0,15 bis 0,2 mm aufwiesen, auf 0,05 mm verringert. Diese Abänderungen genügten, um den Lauf der Maschine zu einem vollständig ruhigen und zufriedenstellenden zu gestalten. Die Erstellerin glaubt der **Verringerung des Lagerspiels die Hauptwirkung** zuschreiben zu sollen. Demgegenüber haben wir in Abschn. 96 angeführt, daß der Lauf von Turbinenwellen umgekehrt durch eine **Vergrößerung des Lagerspiels verbessert** wurde. So widersprechende Erfahrungen kommen praktisch vor! Mitteilungen und Besprechungen ähnlicher Beobachtungen wären wünschbar.

162. Schwingungen der Laufscheiben.

Es gibt vielleicht keine Turbine, deren Laufscheiben nicht mehr oder weniger schwingen würden. Stimmt die Periode der erregenden Ursache mit der Eigenschwingung überein, dann kann sie zu großen Betriebsanständen führen. Die erregenden Kräfte können mannigfaltiger Natur sein. Eines der augenfälligsten Beispiele ist die **teilweise Beaufschlagung mit regelmäßig verteilten Düsengruppen.** Irgendeine Laufschaufel wird beim Vorbeigehen durch die beaufschlagte Zone, vermöge der Reibung in der Achsenrichtung abgebogen und nimmt die Scheibe mit. Der verbogene Teil kann im unbeaufschlagten Teil zurückfedern, und so werden sich Schwingungen mit einer Anzahl Durchmesser als sogenannter **Knotenlinien** ausbilden können.

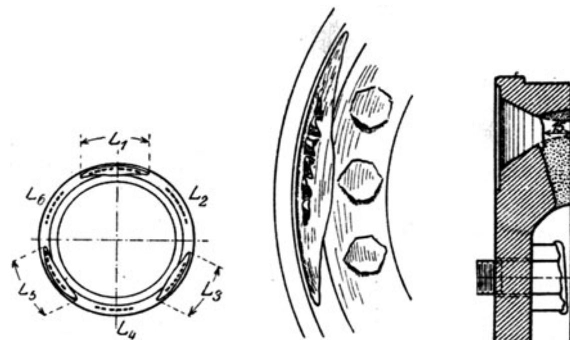


Abb. 942. Abb. 942a.
Schwingung und Anfressungen mit drei Knotendurchmessern.

Ein derartiges Vorkommnis typischer Art wird durch Abb. 942, 942a veranschaulicht. Die Beaufschlagungsbögen des ersten Leitrades sind darin mit $L_1 - L_6$ bezeichnet. Das Rad kam mit den Gruppen $L_1\ L_3\ L_5$ zum Streifen, wobei vom Leitrad nach Abb. 942a die punktierten Stellen bis zu einer Tiefe von 15 mm weggefressen wurden. Auch die Schraubenköpfe wurden durch Streifen zum Schmelzen gebracht und weisen überfließende Ränder auf. Das Rad mußte hier offenbar eine Schwingungsform mit drei Knoten Durchmessern angenommen haben, die während des Laufes relativ zum Rade sich in entgegengesetzter Richtung mit gleicher Geschwindigkeit fortbewegten, also im Raum stehend erscheinen würden. Selbstverständlich mußte der Radkranz dabei stark leiden; wie denn auch in der Tat an einzelnen Stellen kleine Ausbrüche vorgekommen sind.

Eine zweite Erregungsart bildet das

Ansaugen der Scheiben.

Bei Gleichdruckturbinen übt der aus der Leitschaufel tretende Strahl infolge der Sicherheitszugabe aus der Schaufellänge eine saugende Wirkung aus, über die wir in Abschn. 57 berichtet haben. Dies Saugen ist am stärksten bei einem vollbeaufschlagten Rad. Trotz der in der Scheibe angebrachten Sicherheitsbohrungen kann sich ein leichter Unterdruck einstellen, unter dessen Einfluß sich die Scheibe gegen ihr Leitrad hin in Glocken- (oder Regenschirm-)form durchbiegt. Hierdurch verringert sie den Querschnitt, durch den der Dampf zufließt, die abgesaugte Menge wird geringer, der Unterdruck läßt nach, die Scheibe kann zurückfedern. Daraufhin nimmt das Absaugen wieder zu und das Spiel wiederholt sich. Es könnte sich freilich auch ein Gleichgewichtszustand einstellen, was jedoch, bei elastischen Gebilden, wie bekannt, zu den Ausnahmefällen gehört.

Je nach den Verhältnissen (Stärke des Absaugens, axiale Spaltweite, Scheibenelastizität u. a.) kann sich hieraus eine Schwingung mit zunehmender Weite ausbilden. Bei der Glockenform sind offenbar die Naben allseitig auf Biegung beansprucht. Es sind Fälle vorgekommen, daß der Scheibenrand bei der Schwingung um 10 Millimeter, ja mehr, abgelenkt wurde. An Hand der in Abschn. 186 gegebenen Formeln kann man feststellen, daß die Nabe einer ungewöhnlich hohen Beanspruchung ausgesetzt ist, einer weit höheren als bei einer Schwingung mit Knotendurchmesser. So hat denn die Erfahrung gezeigt, daß in dieser Art schwingende Scheiben von der **Nabenbohrung, insbesondere von Keilnuten ausgehende Risse aufweisen,** wobei die Festigkeit der eigentlichen Radscheiben genügend groß war, um Widerstand zu leisten. Natürlich wird sich der Riß unfehlbar weiter und weiter ausdehnen und im Laufe der Zeit zu einem Bruch mit verheerender Explosion führen. Eine Abhilfe hiergegen besteht im Aussparen von Verbindungskanälen im Leitrad um den Kranz des Laufrades herum. In der Tat sind die sonst üblichen **Ventilationslöcher** in den Scheiben schon oft zum **Ursprung von Randrissen** geworden, da die von Haus aus hohen **Beanspruchungen durch die Schwingung gefährlich gesteigert werden können.**

Zur Ausbildung von Scheibenschwingungen führt auch die

Unvollständige Durchwärmung der Turbine.

Im Anfange wurden die Turbinen, bevor man sie anfahren ließ, während 15 bis 20 Minuten oder auch länger angewärmt. Meist mit freiem Auspuff, indem etwa die Kondensation schon angelassen, aber noch keine nennenswerte Luftleere erzeugt war. Der nur abgedrosselte Dampf nimmt in der Turbine eine in der Nähe von 100^0 C gelegene Temperatur an, die sich dem obern Teil des Gehäuses mitteilt, während unten infolge des herabfließenden abgekühlten Dampfwassers die Temperatur erheblich niedriger sein kann. Wir haben über die schädliche Formänderung, d. h. ein nach oben gerichtetes Aufbäumen des Gehäuses schon früher berichtet. Dieses Aufbäumen war bei den Überdruckturbinen angesichts der kleinen Schaufelspielräume äußerst gefährlich. Allein auch bei Gleichdruckturbinen können die Abdichtungen der Zwischenwände zum Streifen gelangen. Außerdem hat jene Art des Anwärmens den weiteren großen Nachteil, daß die Niederdruckseite der Turbine eine höhere Temperatur annimmt als im normalen Betrieb. Wenn in der Tat die Luftleere inzwischen hergestellt und die Turbine angelassen wird, so sinkt die Temperatur im Niederdruckteil und steigt im Hochdruckteil. Da die Scheiben bei ihrer großen Oberfläche und der großen Geschwindigkeit, mit der sie am Dampf vorbeistreichen, im Verhältnis viel mehr Wärme aufnehmen als die Wellen, werden die Hochdruckscheiben sich aufweiten und können im Nabensitz locker werden. Umgekehrt **schrumpfen die Niederdruckräder zusammen, klemmen die Welle ein** und können sogar, theoretisch gesprochen, „ausknicken", d. h. infolge des in den Außenteilen herrschenden Zuges eine Glocken- (oder Regenschirm-)form annehmen. Es werden daher in neuerer Zeit die Turbinen meist nach kurzem Anwärmen durch Dampf unter Vakuum sofort in langsame Drehung versetzt, was den Übelstand aber nur teilweise mildert. Der Dampf arbeitet hierbei nur in den ersten Stufen; in den letzten Stufen wird ihm durch die Ventilationsarbeit, sobald man zur normalen Geschwindigkeit übergeht, so viel Wärme zugeführt, daß die **Temperatur des Niederdruckteiles wieder bedenklich steigen kann.** So verdanke ich Freunden aus der Praxis die Mitteilung, daß beim Anfahren selbst unter einem Vakuum von 85 bis 95 v. H. die Temperatur am Turbinenende über 100^0 zu steigen vermag und daß diese viel zu hohe Temperatur anhält, bis die Belastung einen Wert annimmt, den man auf etwa 15 v. H. der normalen Leistung einschätzen kann. Von da an fällt die Temperatur der Niederdruckstufen sehr rasch und erreicht bei etwa 20 bis 25 v. H. der Normalleistung den Wert, der

der Luftleere zukommt. Die schweren Gußgehäuse verlieren ihre hohe Temperatur nur allmählich. Nach Beobachtungen der A.-G. Görlitzer Maschinenbauanstalt brauchen schwere Wellen (bei etwa 500 mm Durchmesser) **mehrere Stunden, bis die Dampftemperatur bis zum Wellenmittelpunkt durchgedrungen ist.** Unter solchen Umständen scheint es fast unvermeidbar, daß die Hochdruckräder auf der Welle locker werden, die Niederdruckräder aber klemmen oder sich verziehen.

Eine Abhilfe bestünde in einer elastischen Verspannung, die bei der zuerst von Zölly angewendeten Stützung der Räder durch Sprengringe an den Nabenenden, infolge der vorhandenen Elastizität der Naben bereits teilweise verwirklicht ist. Diese Konstruktion besitzt außerdem den Vorteil, daß die Naben, wenn nach Abb. 369 durch die Fliehkraft in der Mitte aufgeweitet, sich an den Enden teilweise zusammenziehen.

Welche Übelstände diese Lockerung bzw. Verspannung nach sich ziehen kann, wird dem Studierenden eindringlich durch nachfolgenden Bericht nahegebracht.

Es handelte sich um eine Turbine von 5000 kW Leistung bei 1500 Umdr./min. Die Turbine wurde im Prüffelde der Erstellerin mit freiem Auspuff im Leerlauf erprobt, zeigte nur leichte Erschütterungen und allerdings ein klopfendes Geräusch im Innern, auf das jedoch kein großes Gewicht gelegt wurde. Nachdem die Turbine in einem Elektrizitätswerk aufgestellt war, fanden die ersten Probeläufe mit Kondensation statt. Die Turbine zeigte sich gewissermaßen launenhaft, indem sie manchmal glatt auf die volle Drehzahl gebracht werden konnte, manchmal jedoch zwischen 900 und 1200 Umdrehungen stärkere Erschütterungen zeigte, so daß man abstellen und von neuem anfahren mußte. Man erkannte bald, daß die Turbine um so sicherer lief, je schneller man die Drehzahl steigerte, so daß man **die Zeit des Anfahrens vom Stillstand bis zur vollen Drehzahl auf $4^1/_2$ Minuten herabsetzte.** Hatte die Turbine ohne Erschütterung die volle Drehzahl erlangt, dann traten auch weiterhin keine Störungen auf. Wenn hingegen unterwegs eine Vibration einsetzte, so war es wahrscheinlich, daß sie sich im weiteren Verlauf dermaßen steigerte, daß man den Betrieb unterbrechen mußte. Eine vorläufige Belastung auf 2400 kW ließ wieder ein Klopfen im Innern erkennen, das eigentümlicherweise an der Turbine selbst gegen andere Geräusche zurücktrat, hingegen im nebenanliegenden Kesselhause deutlich hörbar war. Bei der daraufhin vorgenommenen Besichtigung konnte man feststellen, daß das **Curtisrad** der ersten Stufe in den **Hohlkehlen zwischen den beiden Kränzen Reibspuren aufwies,** dabei auch die Deckbänder der Umkehrschaufeln aufgerissen hatte. Beim Abziehen des Curtisrades zeigten die Stirnseiten der Radnaben Spuren davon, daß das Rad gegen die Nabe des Nachbarrades bzw. die Wellenmutter Bewegungen ausgeführt hatte. Man beschloß, das Curtisrad auf konische Ringe mit einiger Vorspannung aufzuziehen.

Als der Betrieb wieder aufgenommen wurde, hörte man bei 2000 kW Belastung klopfende Geräusche. Der Vorversuch mit 8stündiger Belastung von 5000 kW verlief befriedigend, da leichte Erschütterungen, die nach Übernahme der Vollast auftraten, innerhalb 20 Minuten wieder verschwanden. Hierauf sollte der Hauptversuch stattfinden, der jedoch kurze Zeit nach Beginn abgebrochen werden mußte. Die Besichtigung ergab, daß die Schaufel**deckbänder des letzten Laufrades** an drei Stellen abgerissen waren, wobei die weggeschleuderten Stücke auch noch einige Kondensatorrohre zerschmettert hatten. Das **letzte Rad** hatte am **Verschalungsblech des letzten Zwischenbodens gerieben,** obwohl in kaltem Zustand ein Spielraum von 2 bis 3 mm vorhanden war. Man vermutete, daß der Grund hierfür in der **einseitigen Erwärmung des Niederdruckrades durch den Stopfbüchsendampf der Niederdruckseiten** besteht. Es wurde am Stopfbüchsenende ein Abschlußblech angebracht, so daß der Dampf die Naben nicht mehr unmittelbar bespülen konnte. Ferner wurde beschlossen, alle Räder auf kegelige Ringe aufzupressen, da sich bei der Untersuchung herausstellte, daß mehrere davon locker auf der Welle saßen.

Als die Turbine in Betrieb genommen und in 7 Minuten auf normale Geschwindigkeit gebracht wurde, setzten wieder heftige Erschütterungen ein. Nach der Wiedereröffnung zeigten sich **Reibspuren** an den **Zwischenstopfbüchsen** des Hochdruckendes. Man vermutete (mit Recht), daß das scharfe Anziehen der Muttern, durch die die Naben zusammengepreßt waren, ein Werfen der Welle hervorgebracht hat, daher wurden beide Muttern um $^1/_8$ des Umfanges zurückgedreht. Später zeigten sich **Reibspuren an den inneren Stopfbüchsen des Hochdruckteiles** und am Fuße des ersten Curtisradkranzes auf der Austrittsseite. Zur Sicherheit wurde der Rotor durch das Kammlager um 0,5 mm nach vorn gezogen und von neuem im ganzen sechsmal angefahren und abgestellt, da jedesmal starke Erschütterungen auftraten. Die abermalige Revision stellte fest, daß die **Eintrittskanten des Curtisrades Reibspuren** zeigten; außerdem bekam dasselbe einen **axialen Schlag von 0,6 mm** ($\pm$ 0,3 mm Abweichung von der Mittelebene aus).

Es wurde von neuem sorgfältig aufgekeilt, so daß der axiale Schlag nur etwa 0,15 mm betrug. Trotzdem konnte die Belastung nicht über 1200 kW gesteigert werden, da alsbald heftige Geräusche im Hochdruckteil auftraten. Wieder geöffnet ergab der Befund: Ein- und Austrittskanten des ersten Curtiskranzes und die **vier ersten Niederdruckräder** weisen an **der Eintrittskante** über den ganzen Umfang verteilte **Reibspuren** auf, desgleichen das Gehäuse. Nun wurde man auf die Temperaturverhältnisse aufmerksam und stellte fest, daß **bei längerem Leerlaufbetrieb im Abdampfstutzen die Temperatur trotz einer Luftleere** von 90 bis 92 v. H. auf **über 150° C gestiegen war.** Doch soll kein Unterschied in den auftretenden Erscheinungen bemerkbar gewesen sein, ob die Austrittsseite heiß oder kalt war.

Dieser kritische Zustand wurde schließlich und zwar glücklicherweise vor dem Eintritt des Winters, für den das Elektrizitätswerk die Turbine dringend benötigte, dadurch behoben, **daß man der Turbine Zeit gewährte, ihren Wärmezustand dem jeweiligen Betrieb möglichst anzupassen.** Sobald die Belastung zu rasch wuchs, wurde die Turbine unruhig; das Streifen bleibt gänzlich aus, wenn nach erfolgtem Parallelschalten für die **Übernahme der Vollast** (5000 kW) **eine Zeitdauer von 20 bis 25 Minuten gegönnt wird.**

Man erkennt an diesem Beispiel, daß die Turbine ein sozusagen mit Launen behafteter empfindlicher Organismus ist, mit dem nicht schroff verfahren werden darf. Wir müssen freilich hinzufügen, daß der schließlichen Inbetriebsetzung eine letzte, wie der Bericht meldet, peinlich genaue Nachauswuchtung vorausging.

Konstruktionsfehler und Zufälligkeiten als Ursache von Schwingungen.

Daß Ausführungs- und Konstruktionsfehler den Lauf der Turbine beeinträchtigen können, ist selbstverständlich. Welch sonderbare Möglichkeiten dafür vorhanden sind, möge an nachfolgenden Beispielen beurteilt werden.

Eine Turbine lief dauernd unruhig, verursachte viel Schwierigkeiten. Zum Schluß entdeckte man, daß die Ursache in einem **exzentrisch gegossenem Leitrade** bestand, wodurch auf der einen Seite der Dampfstrahl über das Laufrad hinausschoß, auf der andern teilweise auf die Laufscheibe prallte. Die Ablieferung eines derartigen Stückes bedeutet eine grobe Pflichtverletzung seitens der Werkstätte, die bei guter Organisation wohl nicht sobald vorkommen kann.

Eine andere Turbine von 5000 PS Leistung hatte die Eigentümlichkeit, im Leerlauf und bei kleinerer Belastung tadellos zu laufen. Bei größerer Belastung traten jedoch periodische Unruhen auf. Als man die Turbine öffnete, zeigte sich, daß das erste Laufrad, das **teilweise beaufschlagt** war, **auf der Einströmseite** stark gestreift hatte. Das zweite Laufrad war voll beaufschlagt (Zahl der Kanäle beim ersten Rad 62, beim zweiten 122) und nun erst bemerkte der Konstrukteur, daß dem Dampfe hinter dem Laufrade **kein genügender Querschnitt zur Ausbreitung** auf die volle Beaufschlagung zur Verfügung stand. Man ließ hierauf am zweiten Leitrad auf der Einströmseite die Schaufeln und einen Teil der Wand so weit ausfräsen, als es die Festigkeit zuließ, und die Turbine konnte anstandslos im Betriebe erhalten werden. Beim abermaligen Öffnen zeigte sich indes, daß das erste Laufrad trotzdem schwach gestreift hatte. Daraufhin wurde das zweite Leitrad mit reichlicherem Zugang zur Einströmung neu gegossen, und der Lauf der Turbine wurde dauernd gut. Immerhin bestand eine Tendenz zur Entstehung von Schwingungen auch bei geringfügigen Änderungen des äußeren Zustandes, z. B. beim Einschalten eines neuen Kessels, wenn anfänglich zu nasser Dampf (vielleicht mitgerissenes Wasser?) in die Turbine gelangte. **Durch sofortige teilweise Entlastung der Turbine konnte eine Beruhigung stets wieder erzwungen werden.**

Der Fehler, daß hinter einem teilweise beaufschlagten Rade die Dampfausbreitung durch den zu nahe herangerückten Zwischenboden der nächsten Stufe behindert wird, ist häufig anzutreffen und möge der angehende Konstrukteur hierauf ganz besonders aufmerksam gemacht werden. Beispielsweise war an einer 10000 pferdigen Turbine unter vielen gleichartigen Scheiben immer nur diejenige der vierten Stufe unruhig. Nach mannigfachen Versuchen zur Beruhigung verfiel man auf die Vermutung, daß **der Abdampf der Hilfsturbine die Ursache** war, da er gerade hinter jenem Rade einmündete. Man änderte die Einführung so, daß der Dampf nicht an einer Stelle, sondern am ganzen Umfang verteilt in mehreren kleinen Strahlen einströmte und die Unruhe verschwand.

Allgemein wird verlangt, daß die Scheiben in kaltem Zustande auf den Wellen mit Schrumpf aufsitzen. Die Erfahrung zeigt indes, daß bei besonders gearteten Wärmeleitungsverhältnissen doch einmal auch das Umgekehrte zweckmäßig sein kann. So war eine Turbine dauernd unruhig bis auf der **Niederdruckseite die Naben einiger Räder absichtlich nachgedreht wurden,** damit sie **locker saßen.** Die Welle wurde durch die **Niederdruckstopfbüchse** so wirksam geheizt, daß sie sich im Betriebe **um das richtige Maß mehr als die Räder ausdehnte** und dieselben ohne schädliche Klemmung zum festen Sitze zu bringen vermochte.

163. Unfälle und Zusammenbrüche an Dampfturbinenanlagen.

Die Dampfturbine ist ganz besonders der Gefahr des „Durchgehens“ ausgesetzt, da verhältnismäßig kleine Schwungmassen vorhanden sind (man vergleiche sie etwa mit Gas- und Dieselmotorenanlagen!), so daß bei versagendem Regler die Beschleunigungszeit eine kleine ist. Um die Wahrscheinlichkeit des Durchgehens zu mindern, wird die Turbine mit mindestens einem, häufig mit zwei Sicherheitsreglern versehen, die bei Überschreitung der normalen Geschwindigkeit um 10 bis 15 v. H. die Dampfzufuhr abstellen. Diese Regler können jedoch mit verharzendem Öl versetzt und unbrauchbar werden. Überall sind Vorschriften für deren regelmäßige Nachprüfung aufgestelllt, trotzdem kann eine

Turbine auch heute bei fahrlässiger Wartung durchgehen. Noch schlimmer ist es, wenn Fehler im Baustoff der Scheiben unentdeckt, verborgen bleiben. Über eine Explosion, die so gut wie sicher infolge eines derartigen Fehlers entstand, berichtet von Plato[1]). Da der Verlauf des Unfalles im einzelnen bekannt wurde, dürften nähere Mitteilungen für den Betriebsmann von Wert sein.

Die Lavalturbine von 500 PS war in dem Libauer Stahl- und Eisenwerke aufgestellt. Das Laufrad hatte 785 mm Durchmesser über die Schaufelenden und bei 10820 Umdr./min eine Umfangsgeschwindigkeit von 445 m/sek. Da die Anlage mit Sattdampf arbeitete, war **infolge Schaufelverschleißes etwa alljährliches Auswechseln der Laufräder nötig.** An der Turbine Nr. 3 wurde am 24. VI. 1912 ein neues Laufrad eingebaut, eine Arbeit, die den Maschinenwärtern geläufig war. Um 5^{55} nachmittags wurde die Turbine langsam angelassen. Anwesend waren der Vorsteher des Kraftwerkes, ein Ausrichter der A. E.-G. als Zuschauer und drei Maschinisten. Der Vorsteher stand am Gehäuse der Turbine, behorchte sie während des Anlaufens mit einem hölzernen Lineal. Der eine Maschinist befand sich in der Nähe der Schalttafel, der zweite am Frischdampfventil. Nach seiner Genesung sagte dieser aus, er habe das Hauptdampfventil langsam geöffnet und am Manometer den Druck hinter dem Reglerventil beobachtet, der langsam auf 3 bis $3^1/_2$ at gestiegen und dann stehen geblieben sei. Hierauf habe er das Ventil vollständig geöffnet und sei zur Turbine gegangen, um, wenn sie Belastung aufnehme, die nötige Anzahl Düsen zu öffnen. Dem anderen Maschinisten wurde befohlen, die Erregung einzuschalten und Spannung zu geben. Nach seiner Aussage hatte die Spannung 20 Volt erreicht, als der Unfall erfolgte. Der Vorsteher lag bewußtlos mit zerschmettertem Schädel neben der Turbine. Er starb zwei Stunden später. Der Ausrichter der A. E.-G. war von einem Stück des Laufrades getroffen, sofort tot. Die beiden Maschinisten waren mehr oder weniger schwer verletzt, jedoch bei Bewußtsein. Das Gehäuse der Turbine war entzweigerissen, der Deckel, weggeschleudert, lag wagerecht am Boden. Das Turbinenrad wurde in eine große Zahl von Stücken gerissen, Abb. 943. Das hintere Wellenstück blieb unversehrt. Die Untersuchung ergab, daß das Regulierventil etwas angefressen war, allein zu wenig, als daß der Undichtigkeitsdampf die Turbine zum Durchgehen hätte bringen können. Da die Turbine mit dem alten Rade am Morgen des gleichen Tages noch in Betrieb gewesen war, ist ein Versagen des Reglers wenig wahrscheinlich. Außerdem hätte bei einem Durchgehen der Turbine zuerst der Kranz abreißen sollen, da er mit der bekannten Sicherheitsrinne, Abb. 365, versehen war. Plato berichtet, einem Kranzbruch beigewohnt und von mehreren anderen Kunde erhalten zu haben, wobei jedesmal die Scheiben selbst unversehrt blieben.

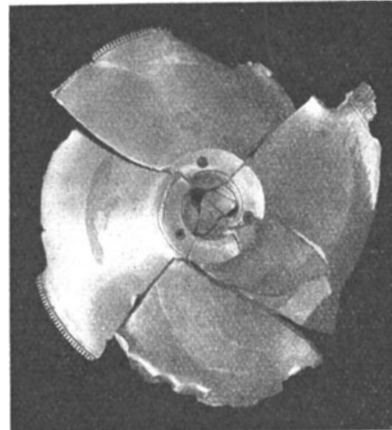


Abb. 943. Zersprungenes Turbinenrad.

Der Baustoff wurde im Petersburger Polytechnischen Institut auf seine **Festigkeitseigenschaften** untersucht und zeigte **bedeutende Ungleichmäßigkeiten.** So schwankte die **Elastizitätsgrenze zwischen 34,7 und 50,9 kg/qmm; die Bruchfestigkeit zwischen 73,5 und 94,6 kg/qmm; die Dehnung** (auf abnorme Stablänge bezogen) **zwischen 13 und 20 v. H.** Das Aussehen der Bruchflächen war einmal teilweise kristallinisch, dann aber grob kristallinisch. Nach der Analyse war der Gehalt an C 0,64; Mg 0,52 v. H. Es lag also **kein Nickelstahl** vor. Die **Beanspruchung** bei **normaler Geschwindigkeit war 20 kg/qmm.** Bei sonst gutem Baustoffe würde dies als zulässig gelten können. Die große Ungleichartigkeit desselben läßt das Vorhandensein verborgener Fehler als Grund des Unfalles vermuten. Für gewöhnlich werden die fertigen Scheiben von der Erstellerin einem Probelauf von 20 min Dauer mit 15 v. H. Überdrehzahl unterworfen, was diesmal unterlassen wurde. Es wird vorgeschlagen, auf dem Probelauf unbedingt zu bestehen und stets Protokoll darüber aufstellen zu lassen.

Zerstörungen an großen Turbinenanlagen.

Amerikanische Fachschriften brachten mit der dort üblichen Offenheit Berichte über stattgefundene Zerstörungen an großen Turbinenanlagen. Die ungemein lehr- und aufschlußreichen Vorkommnisse verdienen in Kürze auch hier besprochen zu werden.

1. Eine 35 000 kW Dampfturbine der in Abschn. 106 besprochenen Bauart, die in der O-Street Station der Elevated Railway Co., Boston aufgestellt war, ist am 14. Febr. 1918 vollständig zusammengebrochen[2]). Dem Zusammenbruch ging eine Havarie am 14. Febr. 1917 voraus, indem, wie

[1]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1914, S. 817.

[2]) Nach The Electric Review 1918, S. 341. in dem die uns nicht zugängliche Quelle: Power Vol. 47 Nr. 12 genannt wird.

angegeben wird, die Zwischenscheidewand der 18. Stufe sich ausbog, hierdurch mit dem Laufrad in Berührung kam und die Schaufelwurzeln zum Erglühen brachte. Der Schaufelbruch zog auch Beschädigungen des 19. Leit- und Laufrades nach sich. Dieser Unfall geschah während des Probelaufes und wurde rasch behoben. Es zeigte sich später, daß die Turbine bei **Belastungsspitzen,** die 2500 kW über die normale Leistung von 35 000 kW hinausgingen, unter gewöhnlichen Umständen **nicht mehr nachkam.** Der Erbauer allerdings stellte fest, daß mit 13,3 at Üb. 56° C Überhitzung vor dem Hauptventil und 0,096 at abs. Vakuum die Turbine 36 500 kW entwickelt habe und daß auf Grund dieser Leistung unter den kontraktlichen Bedingungen: 14 at Üb. 93° Überhitzung und 0,033 at abs. Kondenserdruck eine Leistung von 39 000 kW erreicht werden sollte. Trotzdem wurde dem Wunsche des Werkes entsprochen, die **Überlastfähigkeit zu erhöhen,** indem man unmittelbar vor den Schaufeln des 8. Laufrades 19 Bohrungen von je $1^1/_8{}''$ e lichter Weite im ganzen Umfang des Mantels anbrachte, durch die bei Überlastung Dampf in die 9. Stufe hinzutreten konnte, worauf die Turbine in der Tat die genannte Spitzenbelastung leicht überwand. Am Tage des Unfalles um 4^{55} nachmittags, als die Belastung zunahm, hörte man, daß etwas in der Maschine streifte und diese zu erzittern begann. Die Bedienungsmannschaft wollte das Drucklager nachstellen, um das Streifen durch vermehrtes Spiel zu beseitigen. Sie sagte aus, daß die erste Erschütterung die Merkmale eines Stoßes hatte und daß sich sofort darauf eine zweite überaus heftige Erschütterung mit den Anzeichen einer inneren Explosion einstellte, so daß die Leute sich durch Flucht in Sicherheit brachten. **Innerhalb etwa 30 sek war das Niederdruckgehäuse** des Lagergestelles zwischen Turbine und Dynamo vollständig zerstört und **sechs Minuten lang flogen weggeschleuderte Stücke im Maschinenraum umher.**

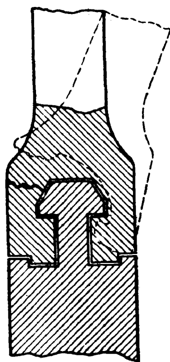


Abb. 944. Schaufelbruch durch Streifen und Erglühen.

Nachträglich wurde festgestellt, daß um die Zeit des Unfalles ein benachbartes, derselben Gesellschaft gehörendes Kraftwerk infolge irgendeines Vorkommnisses seine Leistung um 10 000 kW vermindert hatte. Die große Maschine trug um diese Zeit 32 000 kW und war die einzige Einheit, um die Belastung aufzunehmen. Sie öffnete das Überlastventil so plötzlich, daß nach Ansicht unserer Quelle die ungemein rasche Drucksteigerung imstande war, die 18. Scheidewand stark durchzubiegen und sie am 18. Laufrad zum Streifen zu bringen. Da zudem auch ihre Höchstleistung nicht ausgereicht hatte, um die 10 000 kW zu ersetzen, ging die Geschwindigkeit herab, so daß die Periodenzahl vom Normalwert 25 auf 24/sek sank, während an der Turbine eine Leistung von 37 000 kW festgestellt worden war. Auf das Signal des Turbinenwärters, der das Streifen hörte, wurde die Leistung vom Schaltbrettwärter auf 32 000 kW ermäßigt, doch war alles zu spät. Unmittelbar darauf ging die Turbine in Stücke. Abb. 944 zeigt die Stelle, an der die Schaufeln offenbar infolge Erglühens während des Streifens gebrochen waren. Ein Zeichen für die Güte des Baustoffes der Schaufeln ist, daß sie im stärkstem Maße verbogen wurden, ohne zu brechen, s. Abb. 944a. Die Erstellerin nimmt an, daß infolge des starken Streifens die Scheidewände sich übermäßig erhitzten, in radialer Richtung ausdehnten und schließlich das im Innern des Auspuffdomes gelegene **Gehäuse sprengten.** Dieses fiel in den Kondenser hinab und zerstörte die Kühlrohre auf eine Tiefe von ungefähr 600 mm. Da die vom Gehäuse getragenen Scheidewände frei geworden waren, konnten sie durch Reibung von den Scheiben bzw. Naben mitgenommen werden und erlangten schließlich eine so hohe Winkelgeschwindigkeit, daß sie der Fliehkraft nicht zu widerstehen vermochten. Kein Wunder, daß diese schweren Gußeisenstücke beim Auseinandersprengen das Auspuffgehäuse in Stücke schlugen. Die gleichzeitig einsetzende schwere Erschütterung der Turbine, die im ganzen Werke spürbar war, mochte dann den Lagerständer zum Bruche gebracht haben. Als ein ungewöhnliches Glück kann bezeichnet werden, daß die selbsttätige Ausklinkung des Hauptventiles zum Spielen kam, obwohl die Geschwindigkeit die Normale in keiner Weise überschritten hatte. Es wird dies durch die starke Erschütterung erklärt, die die Klinken zur Auslösung brachte. Die Laufscheiben an sich waren unversehrt geblieben, obwohl sie die stärkst beanspruchten heute laufenden Räder darstellen dürften. In der Tat ist ihr **Durchmesser über die Schaufelspitzen gemessen rd. 3680 mm,** was bei 1500 Umdr/min zu einer **Umfangsgeschwindigkeit von rd. 290 m/sek** führt. Die Festigkeit des verwendeten Baustoffes war 9150 kg/qcm und die Elastizitätsgrenze 5140 kg/qcm. Turbine und Kondensationsanlage stellen ein Kapital von 350 000 Dollars dar. Der reine Sachschaden ohne Rücksicht auf den Stillstand wird auf 200 000 Dollars geschätzt.

2. Kurze Zeit auf diesen, größtes Aufsehen erregenden Unfall ereignete sich ein zweiter an einer Schwesterturbine[1]) von gleicher Leistung in der Nordwest Station der Commonwealth Edison Co., Chicago, und zwar unter eigentümlichen Betriebsverhältnissen. Diese seit Dezember 1917 im Betriebe befindliche Turbine wurde am 31. Juli 1918 kurz nach Mitternacht vom Netz abgeschaltet und man schritt dazu die monatliche Prüfung des Sicherheitsreglers vorzunehmen. Dies geschah indem **ein Wärter den Reglerhebel von Hand im Leerlauf niederdrückte.** Der Schaltbrettwärter stellte fest, daß die Periodenzahl vom Normalwert 25 auf $26^1/_3$ in der Sekunde, also um bloß 6 v. H. gestiegen war, als die Explosion begann. Der Maschinenwärter löste das Schnellschlußventil von Hand aus, als

---

[1]) Electr. Rev. 1918, S. 320.

er sah, daß es nicht selbsttätig bei $27\frac{1}{2}$ Perioden, d. h. bei 10 v. H. Geschwindigkeitsüberschreitung in Tätigkeit trat. Diesen Angaben gegenüber wurde vom Erbauer angeführt, daß der Voltmeterzeiger über den äußersten Punkt hinausging. Es ist richtig, daß die Bedingungen für die Beobachtung der Maschine, für die Ablesung der Tachometer- und der Frequenzmesseranzeigen am Schaltbrett die denkbar besten waren. Es schien keine Gefahr in Verzug, man befand sich unter normalen Betriebsverhältnissen. Die Dampfpressung betrug 16,9 at. abs., da um diese Zeit die Belastung des Werkes eine geringe zu sein pflegte. Das Hauptabschlußventil war vollkommen offen. Ein Maschinist stand dabei, als die Übergeschwindigkeit eingeleitet wurde. Auf einmal gab es einen schweren Stoß, eine ungeheure Erschütterung und das Niederdruckgehäuse barst mit einem Krach auseinander, während Stücke von Metall und Schaufeln im Maschinenraum herumflogen. Der Maschinenwärter hatte die Geistesgegenwart, die Hauptabschließung von Hand zu schließen, als die Explosion begann. Die Zerstörung war im wesentlichen die gleiche wie beim vorhin beschriebenen Fall. Hinzu kam, daß der Regler, obwohl durchaus nicht in der Wurfebene liegend, vollständig weggeschlagen wurde. Ebenso waren die Lagerständer nicht bloß zwischen Turbine und Dynamo, sondern auch derjenige am vorderen Turbinenende gebrochen, und die Grundplatte unter dem letztgenannten war schief gestellt in Richtung der Wellendrehung. Abweichend vom Unfall in Boston war hier **vom vorletzten Laufrade** ein **dreieckförmiges Stück von 900 auf**



Abb. 944a. Verbogene Schaufeln zu Abb. 944.

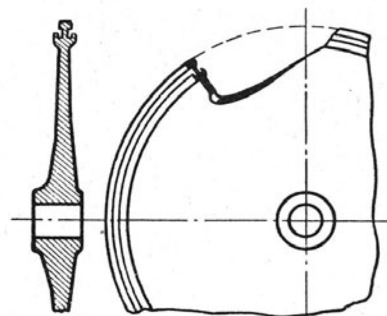


Abb. 945. Scheibe mit herausgebrochenem Kranzstück.

800 mm aus dem Kranz herausgebrochen, Abb. 945. Das weggeschleuderte Scheibenstück wog rd. 90 kg. Es wird als erwiesen angesehen, daß dessen **Loslösen den Beginn der Katastrophe bedeutete,** einerseits durch das **Auftreten des heftigen Stoßes ohne vorhergehende Erschütterung,** zweitens wegen **der Abwesenheit von Streifspuren** der Laufräder, durch die die Schaufelwurzeln, wie in Boston, zum Glühen und zum Bruche hätten gebracht werden können. Das Streifen wurde hier überhaupt erschwert oder unmöglich gemacht, da die **Zwischenwände gegenüber dem Kranz zurückgesetzt waren.** Dies vergrößerte das für gewöhnlich $\frac{1}{8}$ Zoll = 3,2 mm ausmachende axiale Spiel in so erheblichem Maße, daß die Scheibe kaum zum Streifen kommen konnte.

Als Erklärung des Unfalles wird die **starke Temperaturerhöhung des Niederdruckendes im Leerlauf angegeben, die bis zu 150° C emporsteigen konnte.** Es wird auch angeführt, daß das Massachusets Institut of Technology, über den Radentwurf befragt, angab, daß im Normalbetrieb die Sicherheit eine vierfache sei; die Professoren hätten jedoch die Meinung ausgesprochen, daß bei der gewählten Form des Meridianschnittes ein Bruch eintreten könnte, wenn man das Rad plötzlichen Temperaturänderungen unterwirft. Unsere Quelle stellte es als gut möglich hin, daß eine solche Temperaturänderung stattfand, da die Maschine bis 2 oder 3 Minuten vor dem Unfall ihre normale Leistung abgab. Nach dem Bostoner Unfall wurde an allen Turbinen der gleichen Bauart das Überlastungsventil verblockt. Hierdurch wurde die Höchstleistung der Chicagoer Maschine auf 28 000 kW herabgesetzt.

3. Daß diesen Brüchen eine gemeinsame **organische Ursache zugrunde liegen muß,** wird dadurch erwiesen, daß einen Tag später als in Chicago, in der Westend Station der Union Gas- und Electric Co. Cincinnati an einer 25000 kW-Turbine[1]) gleicher Bauart am 4. Sept. 1918 eine schwere Havarie auftrat. Die Drehzahl betrug 1800/min; die Turbine war zwei Monate lang in Betrieb. Im Augenblicke des Unfalles war die Belastung 20000 kW. Nichts wies auf irgendeine Gefahr hin, als plötzlich eine furchtbare Erschütterung das ganze Werk schüttelte. Die Maschine wurde sofort abgestellt und zeigte folgende Beschädigungen. Die Zwischenwand der 17. Stufe zeigte starke Spuren von Streifen über zwei Bogenstücke von je etwa drei Fuß Bogenlänge im Scheitel und im tiefsten Punkte, insbesondere am Außenring, in den die Schaufeln eingegossen sind. Hier waren die Einfressungen etwa $\frac{1}{2}$ Zoll = 13 mm tief. Die Schaufeln des 17. Laufrades haben eine Länge von 712 mm; von den etwa 200 Schaufeln war eigentümlicherweise etwa jede 10. unmittelbar an der Wurzel abgebrochen und zwar mit scharfer Bruchfläche. Alle stehengebliebenen Schaufeln waren **an der Spitze weggeschmolzen.** Die Deckbänder waren weggerissen. Die Maschine ist weder durchgegangen, noch wurde sie plötzlich belastet oder plötzlich erhitzt. Die Last ging knapp vor dem Unfall von 20 auf 22000 kW hinauf. Als Beweis

[1]) Electric. Rev. 1918, S. 404.

dafür, daß eine Deformation („Distortion") der Scheidewand die primäre Ursache des Unfalles war, wird angesehen, daß **auch die 16. Scheidewand am Scheitel und am tiefsten Punkte Spuren des Reibens trug.** Der Durchmesser des letzten Leitrades war rd. 3350 mm, die Umfangsgeschwindigkeit der Schaufelspitzen nahezu 300 m i. d. Sek.

Wir wiederholen, daß diesen Unfällen augenscheinlich eine konstruktive Eigenheit zugrunde liegen muß. Die Beschreibung des zuletzt aufgetretenen gibt unseres Erachtens auch den Schlüssel hierfür und dieser ist, wie seither auch die Erstellerin zugibt, eine **Schwingung der Niederdrucklaufscheiben.** Diese erklärt zwanglos, warum die Leiträder gerade nur oben und unten und diejenigen der 16. Stufe auf beiden Seiten angegriffen worden sind. Es bedeutet dies nichts anderes, als daß auch das Laufrad der vorletzten Stufe in Schwingung geriet und nach beiden Seiten hin zum Streifen gekommen war. Ebenso erklärt nur eine seit längerer Zeit bestehende Scheibenschwingung den Bruch des Scheibenrandes bei Unfall Nr. 2. Wir haben Gelegenheit gehabt, Brüche ähnlicher Art an Turbinen kleinerer Abmessungen zu beobachten, die ebenfalls durch Schwingungen verursacht waren. Ein beginnender Riß kann längere Zeit benötigen, bis er sich so weit entwickelt hat, daß die Fliehkraft die Festigkeit der noch anhaftenden Stellen überwindet. Daß dies am ehesten geschehen kann, wenn die Geschwindigkeit der Turbine bei der Nachprüfung des Sicherheitsreglers über die normale gesteigert wird, ist einleuchtend. Die Unfälle beweisen in unseren Augen die außerordentliche **Gefahr, nicht zeitig genug wahrgenommener und beseitigter Scheibenschwingungen,** auch wenn, oder gerade wenn sie klein sind und kein Streifen vorkommt, denn sie führen allmählich zu einer **Ermüdung des Baustoffes.** Sie können überdies wie bei der Turbine von Boston im Falle ungewöhnlich starker Belastung zum wirklichen Streifen führen, durch das selbstverständlich zunächst der Kranz und die Laufschaufeln beschädigt werden. Dann kann, wie auch die Erstellerin annimmt, der Leitradkranz stark überhitzt werden, wodurch er sich gegen das Gehäuse stemmt und dieses sprengt, was wir auch in Europa schon verschiedentlich verzeichnen konnten. Die nun befreiten Scheidewände konnten dann in der Tat durch die Reibung mitgenommen und bei ihrer geringen Festigkeit durch die Fliehkraft leicht gesprengt werden, was die Katastrophe vollendete.

Die Folgerungen, die wir aus diesen mit Millionen bezahlten Erfahrungen ziehen dürfen, sind einerseits die schon in Amerika gemachte Anregung, daß vom Augenblicke des ersten Streifens ab eine beschleunigte Stillegung der Turbine bewirkt werden möge. Freilich wird nicht angegeben, auf welche Weise dies zu erzielen wäre; am ehesten wohl durch raschestes Anfüllen des Kondensers mit Luft, die auf die letzten Räder bremsend wirkt.

Wir schlagen als **vorbeugende** und daher vielleicht wirksamere Maßnahme vor, bei Turbinen größerer Leistung in jede Stufe, insbesondere aber in **die letzte Niederdruck- und die erste Hochdruckstufe, Meßvorrichtungen** einzubauen, durch die die Größe der **Laufradschwingung festgestellt,** unter Umständen durch Signale nach außen dem Wärter bemerkbar gemacht werden kann. Der Konstrukteur hat die Pflicht, die Haupttypen seiner Turbinen auf dem Probierstand oder am Aufstellungsorte bei verschiedenen Belastungen, insbesondere bei plötzlichen Überlastungen und Entlastungen auf die vorkommenden Scheibenschwingungen hin sorgfältig zu untersuchen.

Die Theorie der Scheibenschwingungen bringen wir in Abschn. 187. Diese wird dem Konstrukteur die Mittel an die Hand geben, zu beurteilen, in welchem Sinne die Abmessungen der Laufräder abzuändern sind. Die Schwingung dadurch zu bestimmen, daß man auf den Scheibenrand in der Ruhelage periodisch erregte Magnete wirken läßt und die Schwingungen auf berußtes Papier aufzeichnet, versagt, da die Schwingungsart wie bei einer gespannten Saite von der Art der Erregung abhängt und überdies im Betriebe, bei so ungeheuren Umfangsgeschwindigkeiten wie oben, durch die Fliehkraft wesentlich beeinflußt wird.

164. Schäden an Turbinenfundamenten.

Unter mannigfachen größern und kleinern Schäden, die an Fundamenten beobachtet worden sind, verdient der nachfolgend von Schirp[1]) beschriebene besondere Beachtung, sowohl wegen der Größe der Anlage, wie auch der Eigenart der Schwierigkeiten.

In Abb. 946, 946a ist ein Ausschnitt aus den fraglichen Fundamenten dargestellt. Das Fundament besteht aus einer die ganze Breite des Maschinenraumes durchsetzenden Betonplatte von 1,5 m Dicke, auf der die Fundamentwände aufgestellt sind, die durch ein Trägergerüst die Turbinen tragen. Be-

[1]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1919, S. 969.

merkenswert sind die durch die ganze Länge des Maschinenhauses sich hindurchziehenden Zufluß- und Abflußkanäle für Kühlwasser. Turbine Nr. 13 leistet 6000, Nr. 12 4000, Nr. 11 3000 kW. Der Eingeweihte dürfte an der Anordnung der Kanäle unschwer erkennen, um welche Anlage es sich handelt.

Nach Schirp wurden die ersten bedenklichen Anzeichen in Form von Rißbildungen Mitte 1917 an der Frontgiebel- und Treppenhauswand des Maschinenhauses beobachtet. Im großen Fenster des Front-

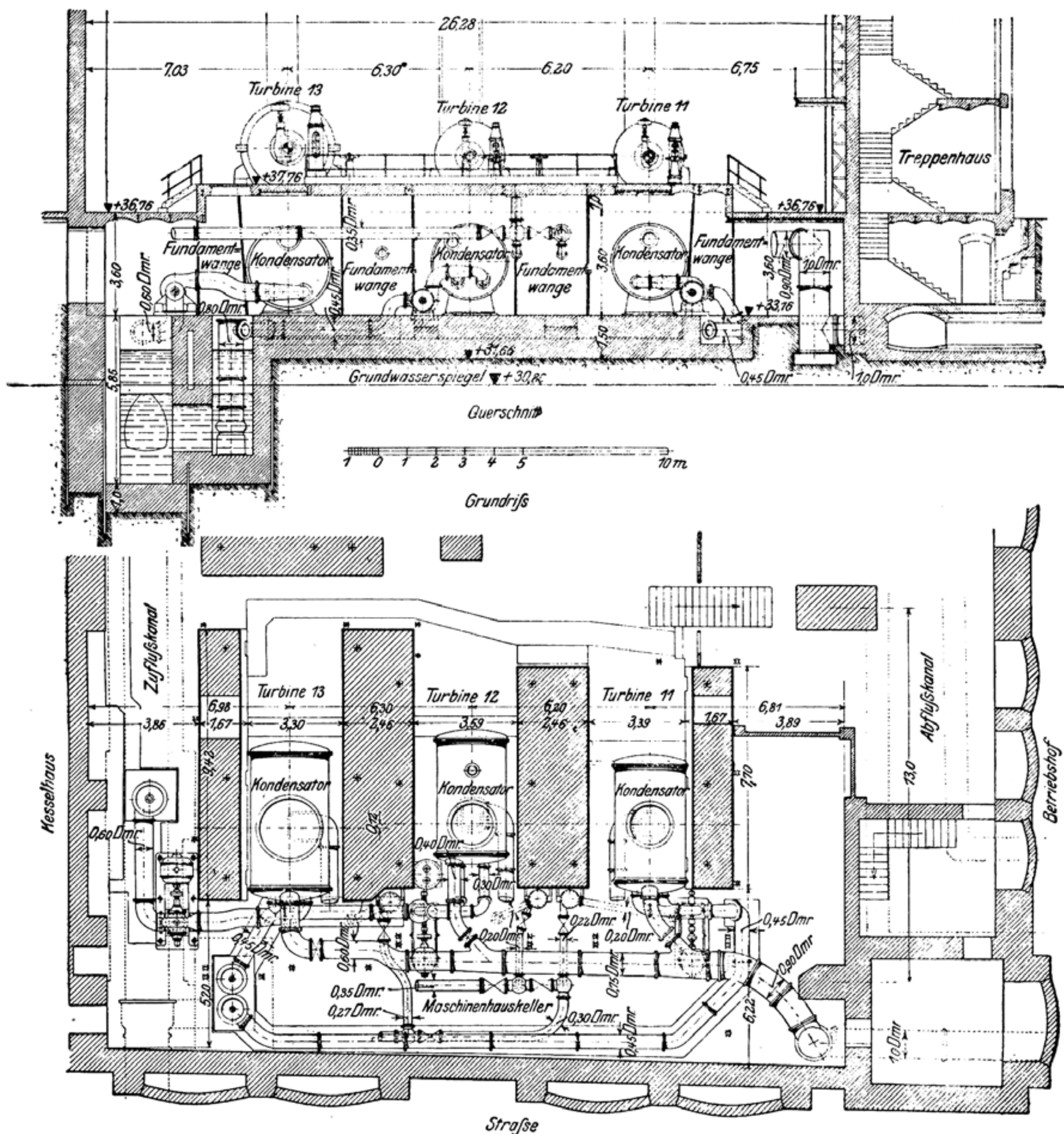


Abb. 946. Schäden an Fundamenten.

giebels platzten Fensterscheiben ohne sichtbare Ursache. Schwerer wiegende Erscheinungen zeigten sich an den Fundamenten; die Blöcke stellten sich schief, so daß die Fliesen des Bodenbelages in die Höhe getrieben und zum Teil zerstört, Luftschlitzfugen geschlossen wurden, die Verblendung des Treppenabsatzes sich lockerte u. a.

Die Untersuchung zeigte bei der Freilegung der Fundamentplatte einen wagerecht verlaufenden Riß von 1—2 mm Breite. Ebenso erschienen Risse am Abflußkanal für Kühlwasser. Eine Taucheruntersuchung im Zuflußkanal ergab keine besonderen Mängel. Man vermutete, daß die Schäden durch Unterspülung der Fundamente infolge Undichtheit des Abflußkanales entstanden waren. Zur Untersuchung des Baugrundes wurde ungefähr in der Mitte unter den Fundamenten ein Stollen von 1,0 m Breite und 0,85 m Höhe vorgetrieben, dessen Sohle in der Höhe des Grundwasserspiegels lag. Der ge-

wachsene Sand zeigte sich auf 6 cm Stärke unter den Fundamenten gelockert, ohne daß ein Hohlraum entstanden war.

Ein zweiter Stollen führte auf Treibsand, der sich stark vordrängte. Er wurde ausgemauert. An die vorhandenen Risse wurden Gipsbänder gelegt, welche jedoch während dreiwöchentlicher Beobachtungen keine Veränderung aufwiesen. Später wurden neue Risse unter Turbine 11 beobachtet, und nun traten bei Turbinen 11 und 12 heftige Erschütterungen auf, so daß sie stillgesetzt wurden, indessen nach einiger Zeit wieder in Betrieb genommen werden konnten. Inzwischen wurde auf Veranlassung eines Tiefbausachverständigen eine größere Anzahl Bohrungen in naher Umgebung der Schadenstelle niedergebracht. Es wurde festgestellt, daß die Schichten von schärferem Sand und Kies in der Höhenlage nicht unbeträchtlich wechseln.

Abb. 947. Abhilfevorschlag zu Abb. 946.

Als Ursachen der beschriebenen Schäden wurden von Sachverständigen Grundwasserabsenkungen angegeben, die im Mai 1917 bei der Erweiterung des benachbarten zweiten Kraftwerkes und im Oktober 1917 bei der Gründung eines Schornsteines ohne Umschließung der Baugrube durch Spundwände vorgenommen waren. Der Grundwasserspiegel fiel auf mehr als 4 m unter die Unterkante der Fundamentplatte herab. Ferner wurde die vorhandene 1,5 m dicke Fundamentplatte, die früher eine 3000 pferdige Kolbenmaschine getragen hatte, für die Turbine als zu schwach erklärt, um so mehr, als sie keine Eiseneinlage enthielt. Als Fehler wurde die Anlage des tiefliegenden Zufuhr- und des hochliegenden Abfuhrkanals für Kühlwasser bezeichnet, da durch Mauerrisse Wasser in die von Grundwasser freien Bodenschichten hätte eindringen können. Als Abhilfsmaßnahme wurde erwogen.

1. Die Platte an vielen Stellen durchzubohren und durch die Bohrlöcher unter starkem Druck Zementmörtel zur Dichtung und Befestigung des Baugrundes einzupressen. Hiervon wurde jedoch abgesehen, da die Wirkung auf dem feinsandigen Untergrund zweifelhaft schien.

2. Die Platte sollte an möglichst viel zugänglichen Stellen durchbohrt und auf 95 Preßbetonpfählen mit Eiseneinlagen gegründet werden.

3. Die Fundamentplatte unter den Pfeilern durch Unterführung zu fassen und die tragenden Fundamentteile bis auf den einwandfreien Baugrund herabführen.

4. Eintreiben von eisenbewehrten Betonpfählen nach Wegnahme der Kondensatoren. Die Fundamentblöcke wären wagerecht der Quere nach zu durchbohren und in die Öffnungen schwere Schmiedeeisenträger einzuziehen, die auf den Pfeilern aufruhen, so daß hierdurch das Maschinenfundament oberhalb der Platte abgefangen worden wäre.

5. Radikale Lösung. Nach Entfernung der Turbine und der Kondensatoren werden die bestehenden Fundamentblöcke beseitigt, die Stampfbetonplatte wird unterhalb der Blöcke durchbrochen, eine genügende Anzahl Bohrpfähle werden in den tragfähigen Grund eingetrieben und neue Fundamentblöcke werden als Eisenbetonkonstruktion ausgeführt. Dieser Vorschlag ist in Abb. 947 dargestellt. Keine der Alternativen kam zur Ausführung, da eine Stillsetznng der drei Turbinen auf mehr als sechs Monate eine zu große Schädigung des Werkes bedeutet hätte. Da seither keine nennenswerten Veränderungen im Fundament aufgetreten sind, war es möglich, die Turbinen in Betrieb zu erhalten.

X. Einige Sonderprobleme der Dampfturbinen-Theorie und -Konstruktion.

165. Die Eulerschen Gleichungen für reibungsfreie Strömung elastischer Flüssigkeiten[1]).

1. Rechtwinklige Koordinaten.

Es bedeute

u, v, w die Geschwindigkeitskomponenten im Punkte x, y, z nach der X, Y, Z-Richtung, abhängig von x, y, z, und der Zeit t.

X, Y, Z die Massenkräfte für die Masseneinheit,

p die Pressung in einem Punkte, Funktion von x, y, z, t,

ε die Masse der Raumeinheit $= \gamma/g = 1/gv'$ mit v' als dem spezifischen Rauminhalt.

Um die Gleichung der Bewegung in Richtung der X-Achse zu finden, betrachten wir

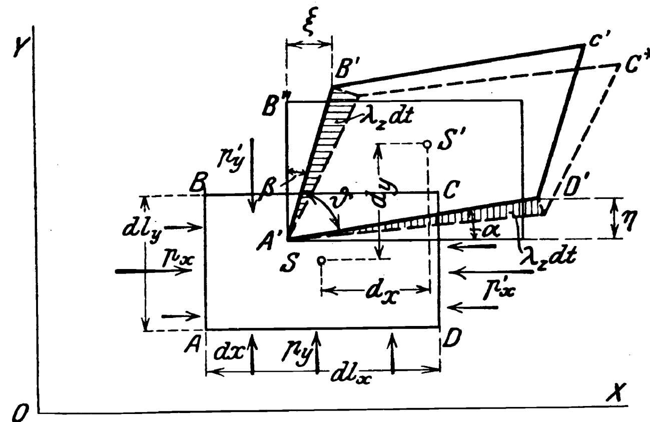


Abb. 948. Kräfte am Flüssigkeitselement.

ein Parallelepiped $ABCD$ (Abb. 948) von der Masse $dm = \varepsilon dl_x dl_y dl_z$, dessen Schwerpunktskoordinaten xyz sind, und das während der Zeit dt mit unendlich kleiner Deformation und Schiefstellung in die Lage $A'B'C'D'$ rückt.

Auf die Endfläche AB wirkt die Kraft $p_x dl_y dl_z$, auf CD die Kraft $p_x' dl_y dl_z$; der ganze Druck in Richtung von X ist

$$dP_x = (p_x - p_x')dl_y dl_z + \varepsilon dl_x dl_y dl_z X = -(\partial p_x/\partial x) dl_x dl_y dl_z + \varepsilon dl_x dl_y dl_z X.$$

Ähnliche Ausdrücke gelten für die Y- und Z-Richtung. Ist nun Du der Geschwindigkeitszuwachs von u in der Zeit dt, so ist nach dem Schwerpunktssatze: Masse mal Beschleunigung gleich resultierende Kraft

$$\varepsilon dl_x dl_y dl_z \frac{Du}{dt} = dP_x \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

[1]) Literatur: Grashof, Theoret. Maschinenlehre Bd. I. Lamb, Hydrodynamics (Cambridge). Wien, Hydrodynamik (Leipzig). Prašil, Techn. Hydrodynamik (Berlin). v. Mises, Theorie der Wasserräder (Leipzig).

wobei durch den Buchstaben D angedeutet wird, daß sich die Ableitung auf ein bestimmtes Massenteilchen bezieht, das während der Bewegung verfolgt wird. Ähnliche Ausdrücke gelten für v und w. In der Grenze fallen die Werte von p_x, p_y, p_z mit dem Werte p des Druckes im Schwerpunkte x, y, z zusammen, daher entstehen die Grundgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{Du}{dt} &= -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial x} + X \\ \frac{Dv}{dt} &= -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial y} + Y \\ \frac{Dw}{dt} &= -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial z} + Z \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

Der Erklärung gemäß ist Du der Unterschied der Werte, die u besitzt im Punkte $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ zur Zeit $t + dt$ und im Punkte x, y, z zur Zeit t, daher kann man schreiben

$$Du = \frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

und dx, dy, dz sind die tatsächlichen Verschiebungen des Schwerpunktes, daher

$$dx = u\,dt; \qquad dy = v\,dt; \qquad dz = w\,dt.$$

Es wird also

$$\frac{Du}{dt} = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2\text{a})$$

Ähnliche Ausdrücke gelten für die Ableitungen dv/dt und dw/dt.

a) Die Gleichung der Stetigkeit.

In das betrachtete Element tritt während der Zeit dt durch die Endfläche $dl_y dl_z$ die Masse $dl_y dl_z \varepsilon u dt$ ein und durch die gegenüberstehende Endfläche $dl_y dl_z$ die Masse $dl_y dl_z \varepsilon' u' dt$ aus. Der Unterschied der beiden ist $dl_y dl_z \frac{\partial(\varepsilon u)}{\partial x} dl_x dt$ mit entsprechenden Ausdrücken für die zwei anderen Endflächenpaare. Die Summe der Unterschiede stellt den Verlust des Elementes an Masseninhalt, d. h. den Ausdruck $dl_x dl_y dl_z \left(-\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}dt\right)$ dar und so erhalten wir die „Kontinuitäts-" oder „Stetigkeits-" oder „Durchfluß"gleichung

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial(\varepsilon u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varepsilon v)}{\partial y} + \frac{\partial(\varepsilon w)}{\partial z} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

Mit Rücksicht auf die Erklärung von Du gilt auch

$$\frac{D\varepsilon}{dt} + \varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3\text{a})$$

Der Druck und die spezifische Masse hängen durch eine Gleichung

$$p = f(\varepsilon) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

zusammen, in der die besondere Art der Zustandsänderung (je nach Wärmezufuhr oder Abfuhr) zum Ausdruck kommt. Aus den fünf Gleichungen (2), (3), (4) können grundsätzlich unter Hinzunahme der Oberflächenbedingungen die Veränderlichen u, v, w, p, ε als Abhängige von x, y, z, t bestimmt werden — praktisch ist die Aufgabe, soweit die Dampfturbine in Betracht kommt, nur in den weiter unten aufgeführten einfachen Sonderfällen gelöst worden.

b) Die Energiegleichung.

Vermehren wir Gl. 1 mit $dx = u\,dt$, d. h. den vom Schwerpunkt im Zeitelement dt zurückgelegten Weg, so erhalten wir die Arbeit der an den Schwerpunkt verlegt gedachten Kräfte, also die Zunahme der Schwerpunktsenergie nach der X-Richtung. Ähnliche Gleichungen gelten für die Y- und Z-Richtung, durch deren Addition nach Teilung mit dm

$$u\,Du + v\,Dv + w\,Dw = -\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right) + (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) \ . \ (5)$$

entsteht. Der Ausdruck auf der linken Seite bedeutet die Zunahme der **gesamten kinetischen Energie für die Maßeinheit,** oder mit $c^2 = u^2 + v^2 + w^2$

$$Dc^2/2 = (\partial c^2/\partial t + u\,\partial c^2/\partial x + v\,\partial c^2/\partial y + w\,\partial c^2/\partial z)/2 \quad \ldots\ldots \quad (5\text{a})$$

die resultierende Geschwindigkeit bezeichnet wird. Rechts ist das zweite Glied die Arbeit der Massenkräfte für die Masseneinheit (d. h. ein Gewicht von g kg), also die Abnahme der potentiellen Energie der Massenkräfte, die wir mit Ω bezeichnen wollen. Das erste Klammerglied rechts ist der Druckunterschied der im betrachteten Augenblick zwischen zwei unendlich benachbarten Punkten einer Stromlinie (d. h. der Strecke $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$) besteht, und kann als

$$-\frac{dp}{\varepsilon} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

geschrieben werden. Doch ist dp nicht das vollständige Differential von p, das vielmehr die Form: $(\partial p/\partial t + \partial p/\partial x \cdot dx + \partial p/\partial y \cdot dy + \partial p/\partial z \cdot dz)$ hat.

Es könnte zweifelhaft erscheinen, ob die linke Seite in (5), da sie nur die Schwerpunktsbewegung eines Massenelementes betrifft, die ganze kinetische Energie darstellt, und nicht vielmehr durch die Energie der (im allgemeinen vorhandenen) Drehung des Teilchens ergänzt werden müßte. Durch eine einfache Rechnung überzeugt man sich, daß, da die Winkelgeschwindigkeit der Drehung (die „Wirbelkomponente") endlich bleibt, der Anteil der Drehung um den Schwerpunkt unendlich klein höherer Ordnung gegenüber der kinetischen Energie der fortschreitenden Bewegung ist.

Wir beschäftigen uns hauptsächlich mit dem **Beharrungszustand,** wo alle Veränderlichen von t unabhängig sind, und (mit $\partial p/\partial t = 0$) dp in Gl. (6) die dem Zuwachs Dc entsprechende Druckzunahme ist. Gl. (5) kann dann **längs einer Stromlinie** von einem Punkt mit $p_0 c_0$ ausgehend integriert werden, und ergibt

$$\frac{c^2 - c_0^2}{2} + \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\varepsilon} + (\Omega - \Omega_0) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5\text{c})$$

Setzt man $\varepsilon = \gamma/g = 1 : gv'$, so lautet die Gleichung bei unbestimmter Integration

$$\frac{c^2}{2g} + \int \frac{dp}{\gamma} + \frac{\Omega}{g} = \frac{c^2}{2g} + \int v'\,dp + \frac{\Omega}{g} = \text{konst.} \quad \ldots\ldots \quad (5\text{e})$$

oder in Worten: im Beharrungszustand ist **in jedem Punkte eines Stromfadens** die Summe aus der kinetischen, der „Druck-" und der potentiellen Energie gleich groß. Es ist wichtig zu bemerken, daß der Wert der Konstanten theoretisch für benachbarte Fäden verschieden sein kann. Die Ausführung des Integrales $\int dp/\gamma$ setzt die Kenntnis der Zustandsänderung voraus, was eine große Schwierigkeit für die Theorie bildet. Meist beschränkt man sich auf die adiabatische Strömung $\gamma = Cp^{1/k}$ oder auf die Isotherme $\gamma = C'p$.

c) Wirbelfreie Bewegung oder „Potential"strömung.

Die Elementarbewegung eines Flüssigkeitselementes von beispielsweise parallelepipedischer Gestalt kann nach Abb. 948 stets zusammengesetzt werden

1. aus einer Parallelverschiebung mit unveränderter Form.
2. einer linearen Änderung der Koordinaten seiner Teilchen mit bezug auf ein ruhendes Koordinatensystem, wobei eine Kugelfläche in ein (im allgemeinen schief liegendes) Ellipsoid und das Rechteck in ein Rhomboid (mit den gegenüberliegenden Ecken $A'C^*$) übergeht,
3. einer Drehung um eine Achse, als ob das Element starr wäre, in die Endlage $A'B'C'D'$

In Abb. 948 ist der Eckpunkt A bzw. A' als Drehpunkt benützt. Man findet leicht, indem man die Unterschiede der Geschwindigkeiten in einem bestimmten Zeitpunkt an den Ecken A, B, D in Betracht zieht, daß $\xi = (\partial u/\partial y)\,dl_y\,dt$, $\eta = (\partial v/\partial x)\,dl_x\,dt$, daher $\alpha = (\partial v/\partial x)\,dt$; $\beta = (\partial u/\partial y)\,dt$ ist. Also nimmt der ursprünglich rechte Winkel um den Betrag

$$\alpha + \beta = (\partial u/\partial y + \partial v/\partial x)\,dt$$

ab. Durch umständlichere Rechnungen wird in der Hydrodynamik nachgewiesen, daß der für die Phase 3 in Betracht kommende Verdrehungswinkel

$$\lambda_z\,dt = \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

ist, demnach die **Winkelgeschwindigkeit der Drehung** durch den Ausdruck

$$\lambda_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6\text{a})$$

wiedergegeben wird, und diesen Ausdruck nennt man die **Wirbelkomponente der Bewegung** nach der Z-Achse, dem zwei ähnliche

$$\lambda_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6\text{b})$$

$$\lambda_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6\text{c})$$

für die X- und Y-Achse zur Seite stehen. Es wird in der Hydrodynamik bewiesen, daß wenn die Größen λ_x, λ_y, λ_z für ein Flüssigkeitselement in irgendeinem Zeitpunkt gleich Null waren, sie auch für alle folgenden Lagen desselben während der reibungsfreien Bewegung verschwinden müssen[1]). Trifft dies für alle Teile zu, so sagt man, die **Bewegung sei wirbelfrei.** Der dynamische „Wirbel“ hat aber nicht notwendigerweise mit der Bewegung in Kreisbahnen zu tun. Es gibt Strömungen, wo jedes Element einen Kreis beschreibt, und doch kein Wirbel vorhanden ist; und es gibt geradlinige Bewegungen mit Wirbeln (s. Ende von Absatz 2).

d) Geschwindigkeitsfunktion.

Das Verschwinden von λ_x, λ_y, λ_z bildet die Bedingung dafür, daß es eine Funktion, von x, y, z, t gibt, deren Ableitungen nach den Koordinaten die Geschwindigkeitskomponenten liefern, so daß

$$u = \frac{\partial\varphi(xyzt)}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial\varphi(xyzt)}{\partial y}; \quad w = \frac{\partial\varphi(xyzt)}{\partial z} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

ist. Man nennt φ nach Helmholtz die Geschwindigkeitsfunktion oder auch „Potential“ daher die Bezeichnung einer derartigen Bewegung als Potentialströmung. Ihr Kennzeichen ist die „Wirbelfreiheit“.

Bezeichnet man der Kürze halber die Ableitungen nach t, x, y, z mit gleichnamigen Fußzeichen, so schreibt sich hiernach die erste der Gl. (2) mit Rücksicht auf (2a)

$$\varphi_{xt} + \varphi_x\varphi_{xx} + \varphi_y\varphi_{xy} + \varphi_z\varphi_{xz} = -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial x} + X.$$

Die linke Seite geht durch Umstellung der Reihenfolge der Ableitungen in

$$\varphi_{tx} + \varphi_x\varphi_{xx} + \varphi_y\varphi_{yx} + \varphi_z\varphi_{zx} = \varphi_{tx} + \left(\frac{\varphi_x^2}{2}\right)_x + \left(\frac{\varphi_y^2}{2}\right)_x + \left(\frac{\varphi_z^2}{2}\right)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi_t + \frac{1}{2}[u^2 + v^2 + w^2]\right)$$

über. Indem man die entsprechenden Gleichungen für y und z aufstellt, kann die **Gleichung der Energie** durch Vermehrung der Gleichungen mit dx, dy, dz und Summation abgeleitet werden. Da $X dx + Y dy + Z dz = -d\Omega$ die Abnahme der potentiellen Energie der Massenkräfte auf der durch dx, dy, dz gebildeten Strecke dl darstellt, erhält man mit der vorübergehenden Bezeichnung $\varphi_t + c^2/2 = \Phi$ die Beziehung

$$\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\Phi}{\partial z}dz\right] = -\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right] - d\Omega \quad \ldots \quad (7\text{a})$$

Daß diese Form mit Gl. (5) übereinstimmt, kann leicht eingesehen werden, indem man in (7a) die auf φ_t Bezug habenden Glieder wie folgt schreibt

$$\varphi_{tx}u\,dt + \varphi_{ty}v\,dt + \varphi_{tz}w\,dt = [\varphi_{xt}\varphi_x + \varphi_{yt}\varphi_y + \varphi_{zt}\varphi_z]\,dt$$
$$= \left[\left(\frac{\varphi_x^2}{2}\right)_t + \left(\frac{\varphi_y^2}{2}\right)_t + \left(\frac{\varphi_z^2}{2}\right)_t\right]dt = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{c^2}{2}\right)dt,$$

---

[1]) Man vergleiche den Aufsatz von F. Klein in Heft 3 der Z. f. Math. u. Phys. 1910, der ein neues Licht auf die Bildung von Wirbeln wirft.

mithin wird die linke Seite von Gl. (7a) im ganzen

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{c^2}{2}\right)dt+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{c^2}{2}\right)dx+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{c^2}{2}\right)dy+\ldots=\frac{D}{dt}\left(\frac{c^2}{2}\right)dt$$

und wir gelangen in der Tat zur linken Seite von Gl. (5).

Nun sind die Klammerausdrücke in Gl. (7a) die vollständigen Differentiale, d. h. die algebraischen Zuwüchse der Größen Φ bzw. p auf der Verschiebungsstrecke dl bei unveränderlich erhaltener Zeit. Gl. (7a) kann daher **räumlich** integriert werden und liefert für die bestimmte Zeit t die Beziehung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}+\frac{c^2}{2}+\int\frac{dp}{\varepsilon}+\Omega=F \qquad (7\text{b})$$

wo F entweder ein Festwert oder eine Abhängige der Zeit sein kann. Der Unterschied dieser Gleichung gegenüber der Bernouillischen Beziehung (5c) bzw. (5e) ist in die Augen springend; man darf also bei **zeitlich veränderlichen** Strömungen die Anwesenheit des Gliedes $\partial\varphi/\partial t$ (oder in Gl. (5a) $\partial(c^2/2):\partial t$) nicht übersehen.

e) Energiegleichung der reibungsfreien relativen Bewegung in einem Turbinenlaufrad für den Beharrungszustand.

Im Beharrungszustand bei gleichmäßiger Drehung mit $\omega=$ konst. hängen die relativen Geschwindigkeiten nur von den relativen Koordinaten und nicht von der Zeit ab. Geht man von Gl. (7b) aus, wobei φ_r die Geschwindigkeitsfunktion der relativen Bewegung bedeuten soll, so verschwindet $\partial\varphi_r/\partial t$ und man erhält dieselbe Form wie mit Gl. (5e), d. h.

$$\frac{w^2}{2g}+\int\frac{dp}{\gamma}+\frac{\Omega_r}{g}=\text{konst.} \qquad (7\text{c})$$

Darin bedeutet w die relative Geschwindigkeit, Ω_r aber die potentielle Energie der äußeren Massenkräfte und der Ergänzungskräfte der relativen Bewegung. Von letzteren steht die Coroliskraft zur relativen Strombahn senkrecht, ihre Arbeit verschwindet. Die Fliehkraft aber leistet für die Masseneinheit bei der Zunahme dr des Abstandes von der Drehachse die Arbeit $r\omega^2 dr$, die der Abnahme der potentiellen Energie gleich ist. Mithin wird $d\Omega_r=d\Omega-r\omega^2 dr$. Die Integralformen Gl. (5e) und (7c) ergeben also beide

$$\frac{w^2}{2g}+\int\frac{dp}{\gamma}+\frac{\Omega}{g}-\frac{u^2}{2g}=\text{konst.} \qquad (7\text{d})$$

wenn $u=r\omega$ die Umfangsgeschwindigkeit bedeutet. Die Bedeutung des Festwertes rechts ist in beiden Fällen verschieden. Geht man von Gl. (7b) aus, so ist der Festwert für alle Teile der Flüssigkeit gleich groß, denn man hat das Vorhandensein einer relativen Stromfunktion vorausgesetzt, d. h. die relative Bewegung ist wirbelfrei, die absolute hat einen Wirbel. Bei Gl. (5e) kann der Festwert für verschiedene Stromfäden verschieden sein; denn in der Wirklichkeit hat die relative Bewegung im allgemeinen einen Wirbel, die absolute kann wirbelfrei sein. In beiden Fällen ist die absolute Bewegung wegen der Drehung der Bahn nicht stationär.

f) Übergang von der relativen zur absoluten Energie; Vergleich mit den thermodynamischen Gleichungen.

Zerlegt man die absolute und die relative Geschwindigkeit c und w in die radialen tangentialen und axialen Komponenten c_r, c_u, c_z bzw. w_r, w_u, w_z, so ist, wenn die Umfangskomponenten im gleichen Sinne mit der Umfangsgeschwindigkeit u positiv gewählt werden:

$$c_r=w_r;\quad c_u=w_u+u;\quad c_z=w_z \qquad (7\text{e})$$

Daraus folgt

$$w^2=w_r^2+w_z^2+w_u^2=c_r^2+c_z^2+(c_u-u)^2=c_r^2+c_z^2+c_u^2-2uc_u+u^2=c^2-2uc_u+u^2$$

und durch Einsetzen in Gl. (7d):

$$\frac{c^2}{2g}+\int\frac{dp}{\gamma}+\frac{\Omega}{g}-\frac{uc_u}{g}=\text{konst.} \qquad (7\text{f})$$

Nach dem Satz vom Drall (Abschn. 52) ist die Abnahme von uc_u/g die vom Rade aufgenommene Arbeit L_u, d. h. es wird mit 1 und 2 als Zeichen für den Ein- und Austritt, falls $\Omega = 0$ gesetzt wird für 1 kg

$$L_u = \frac{1}{g}(u_1 c_{u1} - u_2 c_{u2}) = \frac{c_1^2 - c_2^2}{2g} - \int_1^2 \frac{dp}{\gamma} \quad \ldots \ldots \quad (7\text{g})$$

sofern der Zustand am Ein- und am Austritt je ein vollkommen gleichmäßiger ist. Bei ungleichmäßiger Geschwindigkeitsverteilung, wo die Geschwindigkeit c_u dem in der Zeiteinheit durchströmenden Gewichte dG zukommt, erhält man den Mittelwert

$$L_u = \frac{1}{G}\int (u_1 c_{u1} - u_2 c_{u2}) \frac{dG}{g} = \frac{1}{g}(u_1 \bar{c}_{u1} - u_2 \bar{c}_{u2}) \quad \ldots \ldots \quad (7\text{h})$$

Die thermodynamische Energiegleichung (Abschn. 50) fordert (auf die Mittelwerte, die nicht besonders bezeichnet werden sollen, bezogen)

$$AL_u = i_1 - i_2 + \frac{A}{2g}(c_1 \;\; - c_2^2) + q_{1-2} \quad \ldots \ldots \quad (7\text{i})$$

sofern man mit q_{1-2} die zwischen Ein- und Austritt von außen zugeführte Wärme bezeichnet. Gemäß der „Wärmegleichung" ist jedoch, da hier **immer nur von reibungsfreier Bewegung** die Rede ist, mit $q_r = 0$

$$q_{1-2} = i_2 - i_1 - A\int_1^2 v' dp \quad \ldots \ldots \quad (7\text{k})$$

und dieser Wert in Gl. (7h) eingeschoben, liefert in der Tat (mit $v' = 1/\gamma$) die Gl. (7g).

Die graphische Darstellung des Integrales $-\int_1^2 v' dp$ als Ausdehnungsfläche in den Koordinaten p, v', macht Gl. (7g) besonders anschaulich.

2. Zylinderkoordinaten.

Abb. 949 stelle den Grundriß des Koordinatensystems dar, mit senkrecht zur Bildebene nach oben gerichteter Z-Achse.

w_r, w_u, w_z bedeuten die Geschwindigkeitskomponenten nach der Richtung des Fahrstrahles r, des Umfanges und der Z-Achse im Punkte A, dessen Koordinaten r, φ, z sind,

w_r', w_u, w_z' dasselbe in der Lage A', die das Massenelement nach der Zeit dt einnimmt. Schieben wir w_r', w_u', w_z' nach A parallel zurück, so ergeben sich nach der Abbildung die Geschwindigkeitszunahmen

$$dw_r - d\varphi w_u \text{ radial}, \qquad dw_u + d\varphi w_r \text{ tangential}, \qquad dw_z \text{ nach } Z.$$

Die Beschleunigungen sind die durch dt dividierten Geschwindigkeitszunahmen.

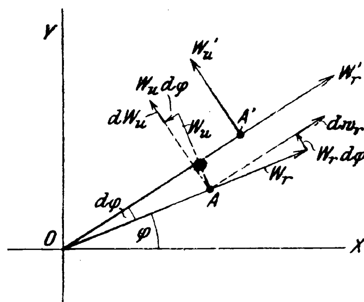


Abb. 949. Zylinderkoordinaten.

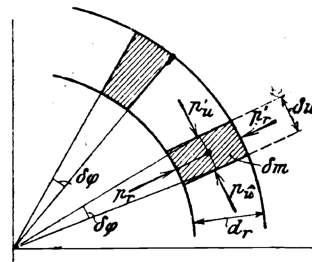


Abb. 950. Kräfte auf ein Flüssigkeitselement.

Wir grenzen das in Abb. 950 angedeutete Element dm um den Punkt A herum ab, auf das neben den Flüssigkeitsdrücken die Kräfte RUZ für die Masseneinheit in Richtung von w_r, w_u, w_z einwirken mögen. Man erhält, wenn $\delta V = \delta r \cdot \delta u \cdot \delta z$ das Volumen

bedeutet, die beschleunigenden Kräfte

$$-\delta u\cdot\delta z\frac{\partial p_r}{\partial r}\delta r+\varepsilon\delta V R \text{ nach der Richtung von } R.$$

$$-\delta r\cdot\delta z\frac{\partial p_u}{\partial\varphi}\delta\varphi+\varepsilon\delta V U \text{ nach der Richtung von } U.$$

$$-\delta r\cdot\delta u\frac{\partial p_z}{\partial z}\delta z+\varepsilon\delta V Z \text{ nach der Richtung von } Z.$$

Vermehren wir die Beschleunigungen mit der Masse des Elementes $\varepsilon\delta V$ und setzen wir sie den betreffenden beschleunigenden Kräften gleich, so entstehen, indem wir beachten, daß in der Grenze $p_r=p_u=p_z=p$ wird, und daß $\delta u=r\delta\varphi$, $d\varphi=w_u dt/r$ ist, die Bewegungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\frac{Dw_r}{dt}-\frac{w_u^2}{r}&=-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial r}+R\\ \frac{Dw_u}{dt}+\frac{w_r w_u}{r}&=-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p}{r\,\partial\varphi}+U\\ \frac{Dw_z}{dt}&=-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial z}+Z\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Um die Stetigkeitsbedingung aufzustellen, ist es zweckmäßig, das Element durch zwei axiale Ebenen zu begrenzen. Man erhält

$$r\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\frac{\partial\varepsilon r w_r}{\partial r}+\frac{\partial\varepsilon r w_u}{r\,\partial\varphi}+\frac{\partial\varepsilon r w_z}{\partial z}=0\quad\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Wie oben, so ist auch hier zu beachten, daß die totalen Differentiale der Geschwindigkeiten sich auf einen und denselben Massenpunkt beziehen, daher beispielsweise

$$\frac{Dw_r}{dt}=\frac{\partial w_r}{\partial t}+\frac{\partial w_r}{\partial r}\frac{dr}{dt}+\frac{\partial w_r}{\partial\varphi}\frac{d\varphi}{dt}+\frac{\partial w_r}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

ist, und hier $dr/dt=w_r$; $r\,d\varphi/dt=w_u$; $dz/dt=w_z$ zu setzen sind. Für die Beharrungsströmung mit $\partial w_r/\partial t=0$ ergibt sich

$$\frac{Dw_r}{dt}=w_r\frac{\partial w_r}{\partial r}+w_u\frac{\partial w_r}{r\,\partial\varphi}+w_z\frac{\partial w_r}{\partial z}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

und ähnlich für die anderen Ableitungen.

Die **Wirbelkomponenten** der Drehung nach der Richtung des Halbmessers und der Tangente sind ganz wie bei rechtwinkligen Koordinaten zu bilden.

$$\lambda_r=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_z}{r\,\partial\varphi}-\frac{\partial w_u}{\partial z}\right)\quad\ldots\ldots\ldots\ldots (11a)$$

$$\lambda_u=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_r}{\partial z}-\frac{\partial w_z}{\partial r}\right)\quad\ldots\ldots\ldots\ldots (11b)$$

Für diejenige nach der Richtung Z ist die Winkeländerung der Strecken $AB=d$ und $AC\cong r\,d\varphi$ in Abb. 951 wie folgt zu berechnen.

Der Weg von B in Richtung der Tangente ist $(w_u+\partial w_u/\partial r\,dr)\,dt$; derjenige von A ist $w_u dt$; daher der Winkel, den dr mit seiner ursprünglichen Richtung bildet

$$\alpha=\partial w_u/\partial r\cdot dt.$$

Der Weg von C parallel zur Richtung von AB ist $(w_r''-w_u'')\,dt$; derjenige von A nach der gleichen Richtung ist $w_r dt$, daher der Winkel, den $r\,d\varphi$ bilden wird,

$$\beta=\frac{w_r''-w_u''-w_r}{r\,d\varphi}dt.$$

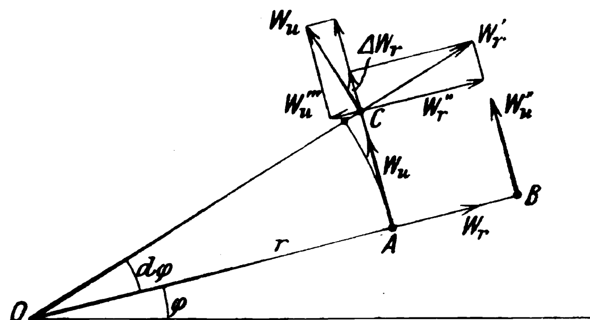


Abb. 951. Erklärung des Wirbels λ_z.

Da indes bis auf kleine Größen zweiter Ordnung $w_r'' = w_r'$; $w_u'' = w_u' d\varphi \cong w_u \cdot d\varphi$ und $(w_r' - w_r) = \partial w_r / r\partial\varphi \cdot r d\varphi$ ist, so folgt

$$\beta = \left(\frac{\partial w_r}{r\partial\varphi} - \frac{w_u}{r}\right) dt$$

und die Winkelgeschwindigkeit der Drehung um die Z-Achse ist $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)/dt$, d. h.

$$\lambda_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_u}{\partial r} - \frac{\partial w_r}{r\partial\varphi} + \frac{w_u}{r}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (11\,c)$$

Beispielsweise erhalten wir für die reine Drehung um eine feste Achse mit $w_r = 0$, $w_u = r\omega$, $w_z = 0$ die Wirbelkomponenten $\lambda_r = 0$, $\lambda_u = 0$, $\lambda_z = \omega$, wie zu erwarten war. Minder anschaulich ist der Fall der geradlinigen Strömung in einem zylindrischen Rohr mit $w_r = 0$, $w_u = 0$ aber $w_z = f(r)$, denn hier erhält man $\lambda_r = 0$, $\lambda_z = 0$ aber $\lambda_u = -\frac{1}{2}\frac{\partial f(r)}{\partial r}$, also einen sogen. Ringwirbel. Man hat sich vorzustellen, daß zunächst das Element beliebig deformiert wird, daß aber die darauf folgende Drehung eine Seitenfläche des Elementes in die alte Lage zurückführt, so daß man den Eindruck erhält, es habe nur eine Verzerrung ohne Drehung stattgefunden.

166. Analytische Integration für die ebene, wirbelfreie Beharrungsströmung.

Für die „ebene" Bewegung ohne Massenkräfte lauten die Grundgleichungen im Beharrungszustand

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial \varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial \varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

und die Durchflußgleichung ist

$$\frac{\partial \varepsilon u}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon v}{\partial y} = 0 \qquad \text{oder} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\varepsilon}\left(u\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + v\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Wie wir auf S. 809 beweisen, ist

$$\frac{\partial p}{\partial \varepsilon} = a^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

nichts anderes als das Quadrat der Geschwindigkeit, mit der sich eine Schallstörung durch die Flüssigkeit beim Zustande p, ε fortpflanzt. Setzen wir a^2 in Gl. (1) u. (2) ein und lösen wir dieselben nach $\partial\varepsilon/\partial x$ und $\partial\varepsilon/\partial y$ auf, um diese Größen in Gl. (3) einzuschieben, so entsteht

$$\frac{\partial u}{\partial x}\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) + \frac{\partial v}{\partial y}\left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) - \frac{uv}{a^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Lösungen dieser verwickelten Differentialgleichung sind für adiabatische Strömung bei Überschallgeschwindigkeit von Prandtl (s. S. 810), für isothermische Zustandsänderung von Hirsch gegeben worden.

Für letztere ist $pv' = \text{konst.} = C$, oder

$$p = \frac{C}{v'} = C\gamma = C(g\varepsilon),$$

mithin

$$a^2 = \frac{dp}{d\varepsilon} = Cg = gpv' \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5\,a)$$

Ist die Strömung wirbelfrei, so kann die Geschwindigkeitsfunktion φ eingeführt werden, und mit $u = \partial\varphi/\partial x$; $v = \partial\varphi/\partial y$ nimmt Gl. (3) folgende Form an:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \frac{1}{\alpha^2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right] = 0 \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Die auf die Dimension Bezug habende Größe α^2 kann, wie man sich leicht überzeugt, weggebracht werden, indem man

$$\varphi = \alpha\psi \quad \ldots\ldots \quad (6\text{a})$$

setzt. Wenn dann die Ableitungen nach x und y durch die Fußzeichen 1 und 2 kenntlich gemacht werden, lautet die Differentialgleichung

$$\psi_{11} + \psi_{22} - (\psi_1^2\psi_{11} + 2\psi_1\psi_2\psi_{12} + \psi_2^2\psi_{22}) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (6\text{b})$$

Die Lösung von Hirsch.

Professor A. Hirsch in Zürich hat sich in dankenswerter Weise der Mühe unterzogen, Methoden für die Integration dieser recht verwickelten Gleichung ausfindig zu machen, und gelangt u. a. zu folgenden Ergebnissen.

Es sei n eine beliebige positive ganze Zahl > 1, p und q seien zwei voneinander unabhängige Parameter, als deren Funktionen x, y, sowie die Lösung ψ gemeinschaftlich dargestellt werden sollen Mit den Bezeichnungen

$$N = \frac{n(n-1)}{2}, \qquad N_k = \frac{N(N-1)(N-2)\ldots(N-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}, \qquad t = p^2 + q^2$$

bilde man die Funktion n^{ten} Grades]

$$F(t) = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k N_k \frac{n!}{(n+k)!}\frac{t^k}{2^k}$$

und ihre Ableitung

$$\frac{dF(t)}{dt} = F'(t).$$

Es seien ferner die Funktionen P_n und Q_n erklärt durch die Gleichung

$$(p + qi)^n = P_n + iQ_n,$$

worin i die imaginäre Einheit bedeutet, so stellt sich die Lösung der Gl. (6b) wie folgt dar:

$$x = n[aP_{n-2} + bQ_{n-2}]F(t) + 2p[aP_n + bQ_n]F'(t),$$
$$y = n[-aQ_{n-1} + bP_{n-1}]F(t) + 2q(aP_n + bQ_n)F'(t),$$
$$\psi = [aP_n + bQ_n][(n-1)F(t) + 2tF'(t)],$$

worin a, b willkürliche Konstanten bedeuten. Auch die Funktion der zu ψ orthogonalen Trajektorien $\Omega =$ konst., d. h. der Stromlinien unseres Problemes, kann allgemein dargestellt werden und ist

$$\Omega = [-aQ_n + bP_n][-n(n-1)F(t) + 2tF'(t)]e^{\frac{-t}{2}}.$$

Bezeichnet man vorliegende Lösungen wegen ihrer Zusammengehörigkeit zur Zahl n genauer mit x_n, y_n, ψ_n, so lassen sich zwei zu m und n gehörige Lösungen linear verbinden, so daß

$$x = x_m + x_n, \qquad y = y_m + y_n, \qquad \psi = \psi_m + \psi_n$$

wird, und entsprechend für beliebig viele Lösungen.

Die einfachste Form erhalten wir für $n = 2$ und $b = 0$. Diese **läßt sich auf unmittelbarem Wege gewinnen,** wie folgt. Wir setzen probeweise

$$\psi = U + V \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

worin U eine Funktion bloß von x, V eine solche bloß von y bedeutet. Die Ableitungen von U nach x, von V nach y bezeichnen wir durch Akzente und erhalten

$$\psi_1 = U', \qquad \psi_2 = V', \qquad \psi_{11} = U'', \qquad \psi_{12} = 0, \qquad \psi_{22} = V'',$$

und nach Einsetzen in Gl. (6 b)

$$U''(U'^2 - 1) + V''(V'^2 - 1) = 0,$$

welche Beziehung für alle Werte von x und y nur bestehen kann, wenn beide Ausdrücke konstant und entgegengesetzt gleich sind, d. h.

$$U''(U'^2 - 1) = a, \qquad V''(V'^2 - 1) = -a \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Die Integration kann bewerkstelligt werden, indem man z. B. die erste Gleichung mit $2U'$ multipliziert und wie folgt schreibt

$$(U'^2-1)\frac{d}{dx}(U'^2)=2aU' \qquad \text{oder} \qquad (U'^2-1)\frac{d}{dx}(U'^2-1)=2a\frac{dU}{dx} \quad \ldots \ldots (9)$$

woraus durch sofortige Integration

$$\frac{1}{2}(U'^2-1)^2=2aU \quad \ldots \ldots (10)$$

Die Konstante kann weggelassen werden, da auch ψ nur bis auf eine Konstante genau angegeben zu werden braucht. Bezeichnen wir nun U' mit ξ, so kann Gl. (9) auch in der Form $(\xi^2-1)d\xi=a\,dx$ geschrieben und integriert werden:

$$\left(\frac{\xi^3}{3}-\xi\right)=ax \quad \ldots \ldots (10a)$$

Es geben nun Gl. (10) und (10a) eine Parameterdarstellung von U als Funktion von x, und zwar

$$x=\frac{1}{3a}(\xi^2-3)\xi, \qquad U=\frac{1}{4a}(\xi^2-1)^2 \quad \ldots \ldots (11)$$

wobei eine Auflösung der ersten Gleichung nach ξ und Einsetzen in den Ausdruck von U zwar möglich, aber nicht empfehlenswert wäre. In gleicher Weise ergibt sich (durch Vertauschung von $+a$ mit $-a$), wenn $V'=\eta$

$$y=-\frac{1}{3a}(\eta^2-3)\eta, \qquad V=-\frac{1}{4a}(\eta^2-1)^2 \quad \ldots \ldots (12)$$

und hiermit auch

$$\varphi=\alpha\psi=\alpha(U+V) \quad \ldots \ldots (13)$$

Die nächste Aufgabe bildet das Auffinden der Stromlinien, als der orthogonalen Trajektorien zu den Kurven konstanter Potentiale. Die Tangente des Neigungswinkels an eine Linie konstanten Potentiales $\varphi(x\,y)=$ konst., ist bekanntlich $\operatorname{tg}\tau=-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right):\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$. Die im gleichen Punkte an die Strömungslinie gelegte Tangente habe einen Neigungswinkel τ', für den $\operatorname{tg}\tau'=dy_1/dx_1$, wobei x_1, y_1 die Koordinaten der Stromlinie sind. Die Rechtwinkligkeit fordert

$$\operatorname{tg}\tau\cdot\operatorname{tg}\tau'=-1 \quad \ldots \ldots (14)$$

Wir haben es nun mit mittelbaren Funktionen zu tun, und es wird der Kürze halber vorübergehend gesetzt

$$\left.\begin{array}{ll} x=f(\xi), & y=g(\eta) \\ U=F(\xi), & V=G(\eta) \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots (11a)$$

Zunächst haben wir

$$\operatorname{tg}\tau=-\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right):\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}=\left(\frac{dU}{dx}\right):\left(\frac{dx}{d\xi}\right)=\frac{F'}{f'}, \quad \text{ebenso} \quad \frac{\partial V}{\partial y}=\frac{G'}{g'}.$$

Da tg hierdurch in ξ und η ausgedrückt wird, empfiehlt es sich auch für $\operatorname{tg}\tau'$, also auch für die Stromkurve dieselben Variablen zu wählen. Wir nehmen somit an, daß auch für letztere x_1, y_1 vermöge der Formeln (11), (12) durch $\xi\eta$ zu ersetzen sind, und haben dann zu schreiben

$$dx_1=\frac{\partial f}{d\xi}d\xi=f'd\xi, \quad dy_1=g'd\eta.$$

Dies alles in Gl. (14) eingesetzt, ergibt

$$\frac{f'^2}{F'}d\xi-\frac{g'^2}{G'}d\eta=0 \quad \ldots \ldots (14b)$$

Die Integration dieser Gleichung ist nach dem Einsetzen der Funktionswerte aus Gl. (11) ohne weiteres möglich und liefert nun die Gleichung der Stromlinienschar in der Form

$$\xi^2+\eta^2-2\lg n\,\xi\eta=\text{konst.} \quad \ldots \ldots (15)$$

Die Geschwindigkeit in einem durch ξ und η bestimmten Punkte der Stromlinie erhält man durch Differentiation von φ als mittelbarer Funktion von x, y

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right):\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)=\alpha\xi, \text{ ähnlich } v=\alpha\eta \quad \ldots \ldots (16)$$

Hiermit erhält man die resultierende Geschwindigkeit und den Druck gemäß Gl. (3a).

Die so gewonnene partikuläre Lösung der allgemeinen Differentialgleichung für φ erweist sich jedoch wegen der mittelbaren Darstellung in den Veränderlichen ξ und η als wenig handlich. Man gelangt zu einfachen Formeln, wenn man sich auf kleine Werte von ξ, η beschränkt. Wenn z. B 0,1 als oqere Grenze festgesetzt wird, so ist die Summe der beiden ersten Glieder in Gl. (15) stets kleiner als

0,02: das dritte Glied hingegen ist stets größer als 9,20. Wir begehen mithin einen belanglosen Fehler, wenn wir innerhalb der angegebenen Grenzen $\xi^2 + \eta^2$ neben dem Logarithmus vernachlässigen, wodurch Gl. (15) in

$$-2\lg n\,\xi\eta = \text{konst.} \quad \text{oder} \quad \xi\eta = \text{konst.} \qquad (15a)$$

übergeht. Mit gleichem Rechte kann man auch ξ^2 und η^2 in Gl. (11), (12) neben (3) weggelassen werden. so daß sich vereinfacht

$$x = -\frac{\xi}{a} \qquad y = +\frac{\eta}{a} \qquad (17)$$

ergibt, welche Werte, in Gl. (15a) eingesetzt, die Gleichung der Stromlinien in den Koordinaten x, y auszudrücken gestatten. Es wird

$$xy = \text{konst.} \qquad (17a)$$

d. h. die Stromlinien sind gleichseitige Hyperbeln. In dieser Vereinfachung ist ferner

$$U = \frac{1}{4a}(1 - a^2x^2)^2, \qquad V = -\frac{1}{4a}(1 - a^2y^2)^2 \qquad (18)$$

und das Geschwindigkeitspotential

$$\varphi = \frac{\alpha}{4a}\left[(1 - a^2x^2)^2 - (1 - a^2y^2)^2\right] \qquad (19)$$

oder angenähert, da ax, ay von derselben Ordnung klein sind wie ξ, η

$$\varphi = \frac{1}{2}\alpha a (y^2 - x^2) \qquad (19a)$$

Die Geschwindigkeiten sind nun

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\alpha a x, \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \alpha a y \qquad (20)$$

Die Pressung in irgendeinem Punkte bestimmen wir aus Gl. (3a), die mit $p = \alpha^2 \varepsilon$ die Form

$$\frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \alpha^2 \lg n \frac{p}{\alpha^2} = \text{konst.}$$

annimmt. Vereinigen wir $-\alpha^2 \log \alpha^2$ mit der Konstanten und bezeichnen wir mit p_0 den Druck im Koordinatenanfang, in dem $u = 0$, $v = 0$ ist, so erhalten wir

$$\lg n \frac{p}{p_0} = -\frac{1}{2a^2}(u^2 + v^2) = -\frac{1}{2}a^2(x^2 + y^2) \qquad (21)$$

oder wenn $r^2 = x^2 + y^2$

$$p = p_0 e^{-\frac{1}{2}a^2 r^2} \qquad (21a)$$

d. h. Druck und Geschwindigkeit hängen nur vom Abstande des betreffenden Strompunktes vom Koordinatenanfang ab.

Durch die eingeführte Vernachlässigung ist man freilich zum Schluß zu einem Geschwindigkeitspotential gelangt, das einer **Bewegung ohne Kompression, d. h. der Annahme ε = konst.** entspricht. Indessen gilt die Darstellung als erste Annäherung auch bei nicht stark variablem ε, wie man sich durch ein Zahlenbeispiel an der strengen Gl. (15) überzeugt. Es werde die Konstante dieser Gleichung = 6,52 gewählt; zusammengehörende. d. h. auf einer Stromlinie liegende Werte von ξ, η, $3ax$, $3ay$ aus den Formeln (15), (11), (12) gerechnet, finden sich in folgender Tabelle vereinigt:

$\xi = 1$	0,7	0,4	0,3	0,2
$\eta = 0{,}0635$	0.0702	0,1016	0,1350	0,2
$3ax = -2$	$-1{,}757$	$-1{,}136$	$-0{,}873$	$-0{,}592$
$3ay = 0{,}1896$	0,2102	0,3125	0,4025	0,592

Sollte hingegen xy = konst. sein, so würden die Werte von $3ay$ beispielsweise in gleicher Reihenfolge wie oben

0,1752	0,1994	0,3083	0,4015	0,592

sein müssen. Die Abweichung ist mithin für eine zeichnerische Darstellung der Strömung vernachlässigbar. Da die Stromlinien in bezug auf eine unter 45° geneigte, durch den Anfangspunkt gehende Gerade symmetrisch sind, ist durch obige Werte auch der zweite Ast der Kurve bestimmt. Über die Grenze $\xi - 1$ bzw. $\eta = 1$ hinaus ergeben unsere Formeln keine Fortsetzung der Stromlinien, und es muß zunächst dahingestellt bleiben, ob die Strömung darüber hinaus wirbelfrei bleiben kann oder nicht[1]).

[1]) Für unsere Aufgabe ist dies ohne Belang, da wir uns den Zustand an der Strahlmündung künstlich hergestellt denken können.

Einströmung in eine Düse.

Um ein konkretes Beispiel zu behandeln, werde überhitzter Wasserdampf von 440° abs. Temperatur mit der angenähert gültigen Zustandsgleichung

$$pv = 47\,T$$

vorausgesetzt. Wir erhalten $\alpha = \sqrt{gpv} = 450$ m/sek. Die willkürliche Konstante a sei $= 10$, und als Begrenzung des Dampfstromes nehmen wir die Gleichung

$$xy = 4$$

an für Zentimeter als Längeneinheit. Abb. 952 stellt die Strombegrenzung (hier also einen Kanal mit rechteckigem Profil), die Stromlinien, die Linien $\varphi =$ konst., d. h. die Stromquerschnitte, endlich die Linien gleicher Geschwindigkeit bzw. gleichen Druckes dar. Die eingeschriebenen Zahlen geben die Größe der Geschwindigkeit in m/sek an. Unsere Formeln ergeben eine Strömung gegen den Koordinatenanfang hin; da wir indessen das Vorzeichen von φ ohne weiteres ändern können und wieder eine Lösung der Aufgabe erhalten, ist die Stromrichtung hier der Anschaulichkeit halber entgegengesetzt eingetragen und durch ihr Spiegelbild so ergänzt worden, daß wir die Figur als Bild der Einmündung in eine Düse auffassen können.

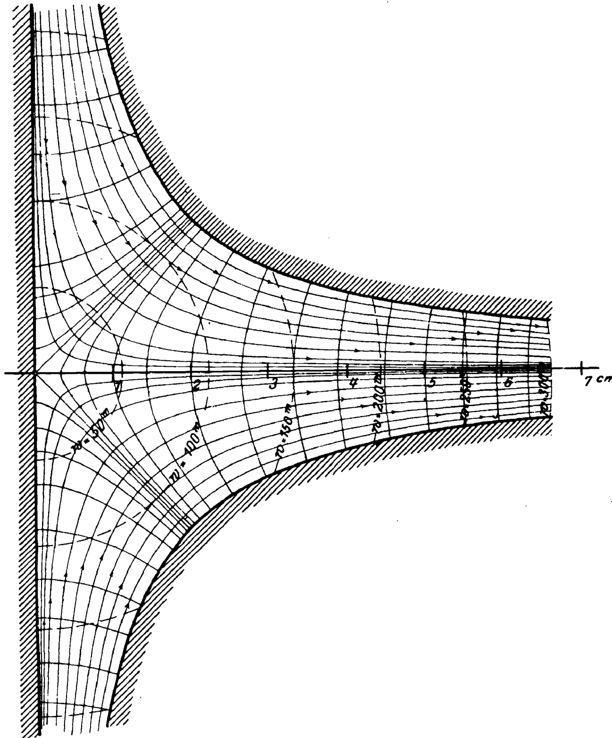


Abb. 952. Stromlinienbild.

Als Hauptergebnis dieser Untersuchung kann der Nachweis angesehen werden daß sich die Pressungen und Geschwindigkeiten der Dampfstrahlen, sobald man in Gebiete geringerer Krümmung der Strombahnen gelangt, sehr rasch ausgleichen, auch wenn die Geschwindigkeit schon Hunderte von Metern erreicht.

Es sei nämlich p_r die Pressung am Rande für den Punkt x, y, und p_m die Pressung in der Strahlmitte für die gleiche Abszisse x. Formel (21) gibt nun

$$\lg n \frac{p_m}{p_0} = -\frac{1}{2} a^2 x^2; \qquad \lg n \frac{p_r}{p_0} = -\frac{1}{2} a^2 (x^2 + y^2) \qquad \text{oder} \qquad \lg n \frac{p_m}{p_r} = \frac{1}{2} a^2 y^2.$$

Setzen wir $p_m = p_r + \Delta p$, wo Δp voraussichtlich eine kleine Größe ist, so können wir den Logarithmus entwickeln und erhalten

$$\frac{\Delta p}{p_r} = \frac{1}{2} a^2 y^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (22)$$

So wird für unser Beispiel bei $x = 6$ cm, $y = {}^4/_6$ cm $= 0{,}0066$ m, die Pressungszunahme $\frac{\Delta p}{p_r} = 0{,}0022$. War der Druck in der Strahlmitte 5 Atm., so wird der Druck am Strahlrande nur um etwa 0,01 at kleiner. Solange die Meridianlinie so sanft gekrümmt ist wie hier, wird man auch in einer kegelförmig erweiterten Düse vergeblich nach Pressungsunterschieden in der Mitte und am Strahlrande suchen. Anders jedoch liegen die Verhältnisse bei schärferen Krümmungen, wie wir weiter unten nachweisen

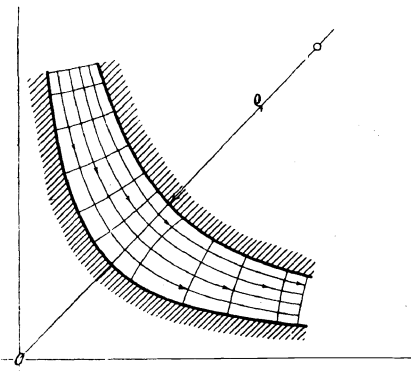


Abb. 953. Schaufelförmiger Kanal.

Druckverteilung in einer Turbinenschaufel.

Schneiden wir durch zwei Stromlinien das in Abb. 953 dargestellte Stück des Dampfstromes heraus, so entsteht ein Kanal, der mit einer Turbinenschaufel viel Ähnlichkeit besitzt. Die entwickelten Formeln geben ein Bild der Druckverteilung. Die unter 45° geneigte, durch den Koordinatenanfang gehende Gerade schneidet die Strömungsrichtung senkrecht; r_1 sei in dieser Linie gemessen der innere, r_2 der äußere Abstand. Bei geringer Schaufeltiefe dürfen wir im Differential von p

nach Gl. (21 a)

$$dp = -p_0 e^{-\frac{a^2 r^2}{2}} \frac{a^2}{2} d(r^2) = -\frac{a^2}{2} p\, d(r^2)$$

den Druck p mit einem konstanten Mittelwert p_m einführen und erhalten

$$p_2 - p_1 = -\frac{a^2}{2} p_m (r_2^2 - r_1^2) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (23)$$

als angenäherten Wert des Druckunterschiedes an der inneren und äußeren Schaufelbegrenzung. Für eine wirkliche Turbinenschaufel liegen nun die Verhältnisse insofern anders, als in obiger Herleitung weder der geradlinige Zufluß, noch die ungemein großen Reibungswiderstände berücksichtigt werden konnten.

167. Strömung mit Überschallgeschwindigkeit.

a) Die Schallgeschwindigkeit.

Betrachten wir eine nur nach der X-Richtung erfolgende Strömung, für die daher beständig $v = 0$, $w = 0$ ist, u nur von x abhängt und die mit so kleiner Geschwindigkeit vor sich geht, daß man in der Bewegungsgleichung

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

das Produkt $u \cdot \partial u / \partial x$ vernachlässigen kann. Ferner sei die Änderung des Druckes und der spezifischen Masse so klein, daß man

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \sigma) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

setzen darf, wo ε_0 einen konstanten Mittelwert bedeutet. In der Beziehung

$$p = f(\varepsilon) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

kann dann folgerichtig

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = f'(\varepsilon_0)\, \varepsilon_0 \frac{\partial \sigma}{\partial x}$$

gesetzt werden, und man wird in Gl. (1) für ε auch den Mittelwert ε_0 einführen dürfen, so daß sie mit der Bezeichnung

$$a^2 = f'(\varepsilon_0) = \left(\frac{\partial p}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon = \varepsilon_0} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

die Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

annimmt. Die Bedingung der Stetigkeit aber lautet $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon u}{\partial x} = \varepsilon_0 \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \varepsilon_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ oder

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Indem man (5) nach x und (6) nach t ableitet und voneinander abzieht, erhält man die bekannte Schwingungsgleichung

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

deren allgemeine Auflösung, wie man leicht nachprüfen kann, die Form

$$\sigma = f_1(x - at) + f_2(x + at) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

besitzt, in der f_1, f_2 willkürliche Funktionen bedeuten.

Betrachten wir den Sonderfall, daß f_2 beständig $= 0$ und f_1 so beschaffen ist, daß σ zur Zeit $t = 0$ überall $= 0$ ist, mit Ausnahme einer unendlich kleinen Strecke bei $x = x_0$, wo es einen konstanten Wert $\sigma_0 = f_1(x_0)$ haben soll. Zu einer beliebigen späteren Zeit ist dann f_1, also auch σ, ebenfalls überall $= 0$ bis auf den Punkt, dessen Abszisse der Bedingung $x - at = x_0$ entspricht, d. h.

$$x - x_0 = at$$

ist. Die anfängliche „Störung" am Orte x_0 pflanzt sich also in unserem Sonderfall mit der Geschwindigkeit a im Sinne der positiven x fort, d. h.

$$a = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \varepsilon}} \text{ ist die Schallgeschwindigkeit.}$$

Wenn wir beispielsweise annehmen, daß während der Fortpflanzung die Zustandsänderung adiabatisch ist, d. h. dem Gesetze

$$p v^k = \text{konst.} = \frac{1}{K}$$

oder, mit $v = 1/\gamma = 1/g\varepsilon$, der Beziehung $p = \frac{(g\varepsilon)^k}{K}$ gehorcht, so erhält man

$$\frac{dp}{d\varepsilon} = \frac{k(g\varepsilon)^{k-1}}{K} g = \frac{kpg}{g\varepsilon} = kgpv, \quad \text{also ist} \quad a = \sqrt{kgpv} \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

Für die isothermische Zustandsänderung oder allgemein das Gesetz $pv =$ konst, d. h. $k = 1$, wird

$$a = \sqrt{gpv} \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

b) Die Lösungen von Prandtl[1]).

Die Strömung mit über der Schallgrenze liegenden Geschwindigkeiten bietet, wie Prandtl treffend bemerkt, die Eigentümlichkeit, daß ein Flüssigkeitsteilchen von einem Hindernis, das der Strömung entgegengesetzt wird, gewissermaßen keine Meldung erhalten kann, da sich Druckänderungen nur mit Schallgeschwindigkeit fortpflanzen. Bevor diese das Teilchen erreichen konnten, ist es also schon wie blind gegen das Hindernis angerannt, und so entstehen die Verdichtungsstöße, über die wir früher berichtet haben, und andere Unstetigkeiten.

Prandtl hat den Sonderfall der ebenen Strömung um eine scharfe Ecke (allgemein um einen Punkt) herum untersucht und mathematisch strenge Lösungen gegeben.

Diese Lösung kann aus dem Gedankengang Prandtls heraus am besten wie folgt abgeleitet werden: Für die ebene Bewegung ohne Massenkräfte ist in den Formeln (8) des Absch. 165 überall $w_z = 0$. Wir untersuchen, welche Bedingung bestehen muß, wenn längs eines Fahrstrahles Geschwindigkeit und Druck konstant, d. h. nur vom Winkel φ abhängen sollen. Dann müßte

$$\frac{\partial w_r}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial w_u}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial r} = 0$$

sein, und die Grundgleichungen lauten für den Beharrungszustand:

$$w_u \frac{\partial w_r}{r \partial \varphi} - \frac{w_u^2}{r} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

$$w_u \frac{\partial w_u}{r \partial \varphi} + \frac{w_r w_u}{r} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial p}{r \partial \varphi} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Die Bedingung der Stetigkeit wird

$$\frac{\partial \varepsilon r w_r}{\partial r} + \frac{\partial \varepsilon w_u r}{r \partial \varphi} = r \frac{\partial \varepsilon w_r}{\partial r} + \varepsilon w_r \frac{\partial r}{\partial r} + \varepsilon \frac{\partial w_u}{\partial \varphi} + w_u \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} = \varepsilon \left(w_r + \frac{\partial w_u}{\partial \varphi}\right) + w_u \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} = 0 \quad \ldots \quad (3)$$

Die erste dieser Gleichungen drückt aber nichts anderes aus, als daß die hier einzig vorkommende Wirbelkomponente nach der Z-Achse (Formel 11 c, Abschn. 165) verschwindet, also **ist die Bewegung wirbelfrei.**

In der Gl. (2), in der die Zeichen der partiellen Ableitungen nach φ durch die totalen ersetzt werden dürfen $-\frac{1}{\varepsilon} \frac{dp}{d\varphi} = w_u \left(w_r + \frac{dw_u}{d\varphi}\right)$ setzen wir für den Klammerausdruck seinen Wert aus der Stetigkeitsbedingung, und schreiben außerdem $\frac{dp}{d\varphi} = \frac{dp}{d\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{d\varphi}$, wobei mit $a^2 = \frac{dp}{d\varepsilon}$, d. h. dem Quadrate der Schallgeschwindigkeit die Gleichung auf die Form $a^2 \frac{d\varepsilon}{d\varphi} = w_u^2 \cdot \frac{d\varepsilon}{d\varphi}$ oder $(a^2 - w_u^2) \frac{d\varepsilon}{d\varphi} = 0$ gebracht werden kann, aus welcher allgemein

$$w_u = a \quad \ldots \ldots \quad (4$$

folgt, da $d\varepsilon/d\varphi$ nicht allgemein verschwinden kann, weil sonst keine Druck-, also auch keine Geschwindigkeitsänderung vorkäme.

1. Die **isothermische Lösung.** Ist $p = a^2 \varepsilon$ oder $pv' = \frac{a^2}{g}$ so ist die Schallgeschwindigkeit konstant, und wir erhalten aus Gl. (1)

$$\frac{dw_r}{d\varphi} = w_u = a, \quad \text{somit} \quad w_r = a\varphi + b \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Durch passende Wahl von φ machen wir $b = 0$.

---

[1]) Physik. Zeitschr. 1906, Jahrg. 8. S. 23 f., wie auch die weitere Ausarbeitung von Th. Meyer in den Mitteil. üb. Forschungsarb. 1908, Heft 62.

Die Gl. (2) liefert $-\frac{dp}{d\varphi} = \varepsilon a^2 \varphi = p\varphi$, woraus $\lg n \frac{p}{p_0} = -\frac{\varphi^2}{2}$ . . . . (6)

falls mit p_0 die Pressung bei $\varphi = 0$ bezeichnet wird. Endlich finden wir die Gleichung der Strömungslinien, indem wir das Verhältnis der Elementarwege $dr = w_r dt$, $r d\varphi = w_u dt$ bilden, woraus

$$\frac{dr}{r d\varphi} = \frac{w_r}{w_u} = \varphi \quad \text{und} \quad r = e^{\frac{\varphi^2}{2}} \qquad (7)$$

folgt. Die Bewegung ist daher vollständig beschrieben.

2. Die **adiabatische Strömung.**

$$p v^k = p_0 v_0^k = C_0 \qquad (8)$$

Die Ausströmung erfolge aus einem Gefäß mit dem Zustand $p_0 v_0$ und $w_0 = 0$, dann liefert die Energiegleichung

$$\frac{w^2}{2g} = \frac{k}{k-1}(p_0 v_0 - pv) = C - \frac{k}{k-1} pv \qquad (9)$$

hierzu treten Gl. (1) und (4)

$$\frac{\partial w_r}{\partial \varphi} - w_u = 0; \qquad w_u^2 = a^2 = kgpv \qquad (10)$$

Aus (8) bis (10) sollen $w_r w_u p v$ als abhängige von φ dargestellt werden. Man setzt aus (10) $kpv = w_u^2/g$ mit $w^2 = w_r^2 + w_u^2$ in (9) ein und erhält $w_r^2 + \frac{k+1}{k-1} w_u^2 = 2gC$. Hier wird $w_u = \partial w_r / \partial \varphi$ eingeschoben und aufgelöst, was

$$\frac{\partial w_r}{\partial \varphi} = \sqrt{2gC \frac{k-1}{k+1}} \cdot \sqrt{1 - \frac{w_r^2}{2gC}} \qquad (11)$$

ergibt. Nach Trennung der Variablen kann man integrieren und erhält

$$\operatorname{arc\,sin} \frac{w_r}{\sqrt{2gC}} = \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \, (\varphi + C') \qquad (12)$$

Man kann φ von dem Fahrstrahl aus zählen, für den $w_r = 0$ ist, dann wird $C' = 0$, und man hat

$$w_r = \sqrt{2gC} \cdot \sin\left\{\varphi \sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\right\} \qquad (13)$$

Die erste der Gl. (10) führt auf

$$w_u = \sqrt{2gC \cdot \frac{k-1}{k+1}} \cdot \cos\left\{\varphi \sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\right\} \qquad (14)$$

Die Stromlinien ergeben sich wieder aus dem Verhältnis

$$\frac{dr}{r d\varphi} = \frac{w_r}{w_u} \quad \text{oder} \quad \frac{d \lg n r}{dt} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \, tg\left\{\varphi \sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\right\} \qquad (15)$$

Setzen wir abkürzend

$$\frac{k-1}{k+1} = \lambda \qquad (16)$$

so folgt[1])

$$r = r_0 \left[\cos(\varphi\sqrt{\lambda})\right]^{-\frac{1}{\lambda}} \qquad (17)$$

Um endlich p durch φ auszudrücken, benutzen wir Gl. (9) in der Form

$$2g \frac{k p_0 v_0}{k-1}\left(1 - \frac{pv}{p_0 v_0}\right) = 2gC \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right] = w^2 = (w_r^2 + w_u^2) = 2gC \left[\sin^2 \varphi\sqrt{\lambda} + \lambda \cos^2 \varphi \sqrt{\lambda}\right]$$

Wir setzen $\sin^2 \varphi\sqrt{\lambda} = (1 - \cos^2\varphi\sqrt{\lambda})$ und finden

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \frac{2}{k+1} \cdot \cos^2[\varphi\sqrt{\lambda}] \qquad (18)$$

[1]) In der Arbeit von Meyer S. 16 unten ist hier irrtümlich als Exponent $-\lambda$ angeführt. Für die weiteren Zahlenrechnungen benutzte jedoch Meyer offenbar die richtige Formel, da die Zahlen meist stimmen.

Oder auch wir ersetzen oben $\cos^2\varphi\sqrt{\lambda}$ durch $(1+\cos 2\varphi\sqrt{\lambda})/2$ und finden mit Meyer (nach Auflösung)

$$\varphi = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \arccos\left[(k+1)\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1\right] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (19)$$

Um den Verlauf der Strömung Abb. 954 besser zu übersehen, beachten wir, daß

$$\frac{w_u}{w} = \frac{\text{Schallgeschwindigkeit}}{\text{Strömungsgeschwindigkeit}}$$

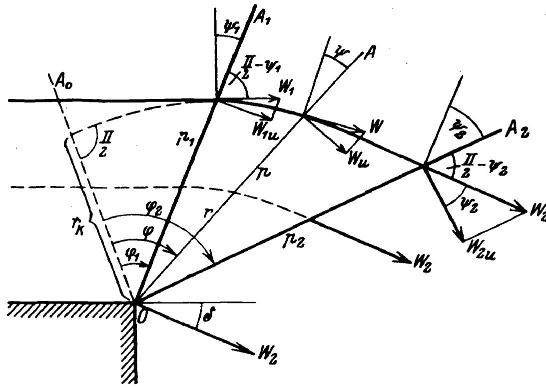


Abb. 954. Prandtlsche Strömung.

das Komplement des Machschen Winkels einschließen ($=\pi/_2 - \psi$ in der Abb.) Wir bestimmen bequemer

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{w_r}{w_u} = \frac{\operatorname{tg}\varphi\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \quad \ldots \quad (20)$$

und denken uns φ und ψ tabellarisch zu verschiedenen Werten von p/p_0 berechnet. Dann kann die Ablenkung ϑ der Strahlen ermittelt werden, indem man zum Anfangsdruck p_1 vor — und zum Enddruck p_2 nach der Ausdehnung $\varphi_1\,\psi_1$ und $\varphi_2\,\psi_2$ abgreift. Um die Richtung von w_1 in die in w_2 zu überführen, muß man w_1 zuerst um den Winkel $\varphi_2 - \varphi_1$ verdrehen, und dann noch um den Unterschied ihrer Neigung gegen den Fahrstrahl, d. h. $(\pi/_2 - \psi_2) - (\pi/_2 - \psi_1)$; also ist im ganzen

$$\vartheta = (\varphi_2 - \psi_2) - (\varphi_1 - \psi_1)$$

oder, mit den Abkürzungen

$$\varphi_2 - \psi_2 = \nu_2; \quad \varphi_1 - \psi_1 = \nu_1; \quad \vartheta = \nu_2 - \nu_1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (21)$$

die Werte von ν haben wir graphisch zusammengestellt bereits in Abb. 103 mitgeteilt. Bei einer Ausdehnung in nicht erweiterter Düse ins absolute Vakuum wird für Luft mit $k = 1{,}405$; $p_1/p_0 = 0{,}527$; $\varphi_1 = 0$; $\psi_1 = 0$ und $p_2/p_0 = 0$; $\varphi_2 = \pi/_2\sqrt{\lambda}$; $\psi_2 = \pi/_2$, somit die Ablenkung $\vartheta = 129^0\ 19'$

c) Theoretisch richtige Schaufelformen bei Überschallgeschwindigkeit.

Das Prandtlsche Integral gilt nicht nur für positive, sondern ebensogut für negative Werte von φ. Dann liefert Gl. (17) das in Abb. 954a dargestellte Strombild, in welchem durch irgend zwei Stromlinien ein als Schaufel theoretisch richtiger Kanal begrenzt wird, falls wir bei $B_1\,B_2$ geradlinige Anschlüsse vorsehen. Auf diese Weise entsteht die der „Grenzschaufel" ähnliche Form, die den in Abschn. 46 geschilderten **Nachteil vermeidet, daß an den hohlen und an der Rückenseite des Kanales außerordentliche Unterschiede an Geschwindigkeiten vorkommen.** Inwiefern die Wandreibung diese Vorteile verwischt, könnte nur durch Versuche entschieden werden. Wir haben zwar angeführt, daß man über schlechte Erfahrungen mit der „Grenzschaufel" berichtet hat; allein diese Mitteilungen stammen aus einer Zeit, wo die Prandtlsche Strömung noch unbekannt war, und es ist fraglich, ob sie überhaupt auf einwandfreien Versuchen beruhen.

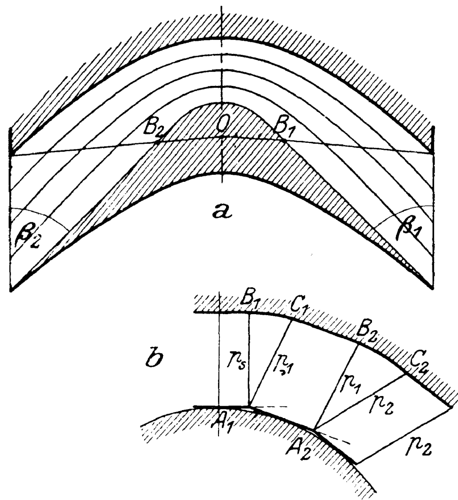


Abb. 954a, b. Theoretisch richtige Schaufelformen.

Man kann übrigens die Rückenbegrenzung, wie schon Meyer (a. a. O.) hervorgehoben hat, willkürlich festlegen. Denkt man sie sich durch ein Vieleck mit unendlich kleinen Seiten ersetzt, so würde um die Ecke bei A_1 (Nebenabbildung b) die Ausdehnung vom „Schalldruck" p_s auf p_1 erfolgen und B_1C_1 müßte die Form der Strombahn erhalten. Von A_1 bis A_2 läge eine Parallelströmung vor, daher $C_1B_2 \parallel A_1A_2$; $A_2B_2 \parallel A_1C_1$. Um die Ecke A_2 fände der neuen Ablenkung entsprechend Ausdehnung

von p_1 auf p_2 statt, also wäre B_2C_2 der Form der Stromlinie anzupassen usf. Zum Schluß kann man $B_1C_1B_2C_2$ ... durch eine stetige Linie ersetzen. So erwähnt Wewerka in seiner verdienstvollen Analyse der Löligerschen Beobachtungen zum Schutz angemeldete neue Schaufelformen[1]). Auf alle Fälle ist wichtig, festzustellen, daß **theoretisch nicht nur eine Ausdehnung, sondern auch eine Verdichtung in krummen Kanälen sogar bei willkürlicher Form der einen Begrenzung ohne Bildung von Unstetigkeiten (Verdichtungsstößen) möglich ist.** Ebensowenig hat man in diesem Falle **Schwingungen** oder ähnliches zu befürchten. Welche Störung die Reibung bewirkt, ist freilich eine andere Frage.

168. Allgemeine (dreidimensionale) Gleichungen für die Flüssigkeitsströmung in einer Turbine.

Um die Strömung in der Turbine zu untersuchen, wird man am zweckmäßigsten Zylinderkoordinaten benutzen und die (nach oben gerichtete) Z-Achse mit der Drehachse der Turbine zusammenfallen lassen.

Als Massenkraft kommt für die absolute Bewegung nur die Schwere in Betracht, daher man

$$Z = -g \quad \ldots \quad (1)$$

zu setzen hat. Wir bezeichnen die absoluten Geschwindigkeiten mit c_r, c_u, c_z und führen noch die Identität

$$\frac{dc_u}{dt} + \frac{c_r c_u}{r} = \frac{d(c_u r)}{r\,dt} \quad \ldots \quad (2)$$

ein, so daß Gl. (8) in Abschn. 165 die Form

$$\frac{dc_r}{dt} - \frac{c_u^2}{r} = -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial r}, \qquad \frac{d\,c_u r}{r\,dt} = -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial \varphi}, \qquad \frac{dc_z}{dt} = -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p}{r\,\partial z} - g \quad \ldots \quad (3)$$

annehmen. Die Gleichung der Stetigkeit lautet

$$r\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon r c_r}{\partial r} + \frac{d\varepsilon c_u}{\partial \varphi} + \frac{\partial \varepsilon r c_z}{\partial z} = 0 \quad \ldots \quad (4)$$

Die **Strömung im Laufrad** wird naturgemäß als relative Bewegung in bezug auf einen um die Z-Achse sich drehenden Raum aufzufassen sein, daher die Ergänzungskräfte dieser Bewegung hinzuzufügen sind. Nach Coriolis bestehen diese für die Masseneinheit, wenn mit w_r, w_u, w_z die relativen Geschwindigkeiten, mit ω die Winkelgeschwindigkeit des Rades bezeichnet wird,

a) aus der radialen Trägheitskraft $r\omega^2$,

b) aus der tangentialen Trägheitskraft $r\,d\omega/dt$ (der Winkelbeschleunigung entgegenwirkend),

c) aus der zusammengesetzten Trägheitskraft $2w_s\omega$, wo w_s die Resultierende aus w_r und w_u bedeutet. Diese Kraft kann in die radiale und tangentiale Komponente $2w_u\omega$ bzw. $2w_r\omega$ mit dem nachfolgend angegebenen Sinn zerlegt werden.

Wir haben mithin, wenn χ den relativen, im gleichen Sinne wie ω und φ positiv gerechneten Zylinderkoordinatenwinkel bezeichnet, die Massenkräfte als

$$R = r\omega^2 + 2w_u\omega; \qquad U = -2w_r\omega - \frac{d\omega}{dt}; \qquad Z = -g$$

anzusetzen und erhalten die Grundgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{dw_r}{dt} - \frac{w_u^2}{r} = -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial r} + r\omega^2 + 2w_u\omega; \qquad \frac{drw_u}{r\,dt} = -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p}{r\,\partial \chi} - 2w_r\omega - \frac{d\omega}{dt} \\ \frac{dw_z}{dt} = -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial z} - g \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (5)$$

mit ähnlicher Stetigkeitsbedingung wie (4), wobei die totalen Ableitungen nach t (hier der Einfachheit halber mit d bezeichnet) wie in Abschn. 165 umzuformen sind. Diese Gleichungen sind von Prášil in seinen bekannten ausgezeichneten Studien über hydraulische Turbinen[2]) zur Herleitung von Schaufelformen, Saugrohrprofilen u. a. benutzt worden. Man bildet die Energiegleichung durch Vermehrung

[1]) Z. d. V. deutsch. Ing. 1919, S. 699. Mit der dort in Abb. 15 gegebenen Deutung der doppelten Verdichtung in der Löligerschen Schaufel können wir uns allerdings nicht einverstanden erklären, da eine Strömung um eine nicht materielle Ecke nicht bestehen kann und der Stromlinienbruch in der Symmetrieebene zu neuen unbekannten Unstetigkeiten führen müßte.

[2]) Über Flüssigkeitsbewegungen in Rotationshohlräumen, Schweiz. Bauztg. 1903, Bd. XLI, Nr. 19f. Die Bestimmung der Kranzprofile und der Schaufelformen für Turbinen und Kreiselpumpen, Schweiz. Bauztg. 1907, Bd. XLVIII, Nr. 23f. Beide auch als Sonderabdrücke bei E. Rascher, Zürich 1907.

obiger Gleichungen mit dr, $rd\chi$, dz und Addition, wobei wieder die Formen Gl. (7d) (7f) (7g) in Abschn. 165 zum Vorschein kommen.

Die dreidimensionale Behandlung der Aufgabe führt aber auf sehr verwickelte Rechnungen, und da der Dampf als elastische Flüssigkeit behandelt werden muß, kann kaum gehofft werden, brauchbare Integrale erhalten zu können. Wir beschränken uns daher auf die Anführung des nachfolgenden einfachen Strömungsvorganges.

„Achsensymmetrische" kreisende Strömung.

Sind die Geschwindigkeiten und Pressungen vom Winkel φ unabhängig, so nennen wir die Strömung „achsensymmetrisch". Aus der zweiten der Gl. (3) folgt alsdann, da $\partial p/\partial \varphi = 0$ ist,

$$\frac{dc_u r}{dt} = 0\,, \qquad \text{also} \qquad c_u r = \text{konst.},$$

d. h. **das Moment der Umfangsgeschwindigkeit, also auch $mc_u r$ das Moment der Bewegungsgröße (= das Impulsmoment) für einen bestimmten Stromfaden sind unveränderlich.**

Sobald aber $mc_u r$ überall konstant ist, kann kein Kraftmoment vorhanden sein, welches auf die Flüssigkeit wirkt, daher auch kein auf die Wandung wirkendes Gegenmoment. Es wird also in diesem Falle keine Arbeit von der Flüssigkeit an eventuell vorhandene Leitflächen (Schaufeln) übertragen oder von ihr aufgenommen.

Bei der Ableitung dieses Satzes sind vielfach Mißverständnisse entstanden, weil man unterließ, hervorzuheben, daß sich $dc_u r$ auf die Änderung bezieht, die ein bestimmtes Massenteilchen während seiner **wirklichen Bewegung d. h. längs einer Stromlinie erfährt.** Es muß daher $dc_u r$ keineswegs verschwinden, wenn wir von einer Stromlinie zu einer anderen übergehen. Beispielsweise kann bei Reibungsfreiheit eine rein kreisende Bewegung bestehen, bei der c_u in beliebiger Weise mit dem Abstand sich ändert, längs eines Parallelkreises bleibt natürlich $c_u r$ konstant. **Auch die rein rotierende Bewegung ist ein Beispiel für die Unkonstanz von $c_u r$.**

169. Unendlich dicht gestellte Schaufeln.

Infolge der Schwierigkeit, aus den dreidimensionalen Gleichungen brauchbare Ergebnisse abzuleiten, vereinfacht Lorenz die Aufgabe auf die Behandlung einer Strömung auf gegebener Fläche, indem er eine Turbine aus unendlich dicht stehenden, unendlich dünnen Schaufeln gebildet denkt. Der von den Schaufeln ausgeübte Gegendruck wird von ihm auf die Masseneinheit der Flüssigkeitsmenge, die in einem unendlich kleinen Bereich momentan enthalten ist, bezogen und „Zwangsbeschleunigung" genannt.

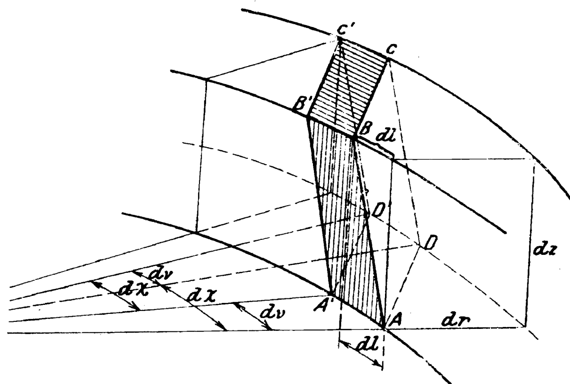


Abb. 955. Unendlich dicht gestellte Schaufeln.

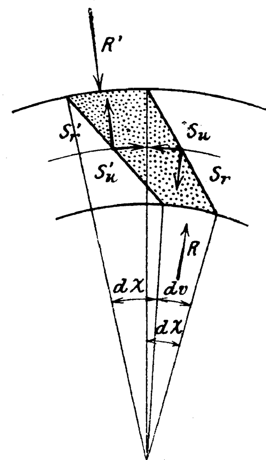


Abb. 956. Flüssigkeitsteilchen im Grundriß.

Diese Bezeichnung und ihre unvermittelte Einführung rief Mißverständnisse hervor, die durch folgende Herleitung vermieden werden[1]).

Wir schneiden aus der den ganzen Raum ausfüllenden Flüssigkeit einen Ring von der Dicke dr und der Höhe dz heraus, den wir durch kongruente Umdrehungsflächen (Schaufeln) in unendlich schmale Kanäle zerlegen (Abb 955 und 956). Den ganzen vom Schaufelelement $ABCD$ bzw. $A'B'C'D$ auf die Flüssigkeitsmasse ausgeübten Druck zerlegen wir in die Komponenten S_r, S_u, S_z bzw. S_r', S_u', S_z'.

[1]) S. d. Verf. Aufsatz „Zur Theorie der Dampfturbine" in der Zeitschr. f. d. ges. Turbinenwesen 1907, S. 245 f.

Ferner bezeichne R, R', Z, Z' den ganzen Druck, der bzw. auf die Flächen $ABB'A'$, $CDD'C'$, $ADD'A'$ und $BCC'B'$ wirkt. Es sei nun p_r, p_z, p_s je der Mittelwert des spezifischen Druckes auf die Flächen $ABB'A'$, $ADD'A'$, $ABCD$, so haben wir

$$R = r\,d\nu\,dz\,p_r \qquad R' = (r + dr)\,d\nu\,dz\left(p_r + \frac{\partial p_r}{\partial r}dr\right),$$

$$Z = r\,d\nu\,dr\,p_z \qquad Z' = r\,d\nu\,dr\left(p_r + \frac{\partial p_z}{\partial z}dz\right),$$

$$S_r = r\,d\chi\,dz\,p_s \qquad S_u = dr\,dz\,p_s,$$

$$S_r' = r\,d\chi\,dz\left(p_s + \frac{\partial p_s}{\partial \chi}d\nu\right); \quad S_u' = dr\,dz\left(p_s + \frac{\partial p_s}{\partial \chi}d\nu\right),$$

ferner wenn dl die Projektion der Kante AB auf den Umfang AA' bedeutet

$$S_z = dl\,dr\,p_s \qquad S_z' = dl\,dr\left(p_s + \frac{\partial p_s}{d\chi}d\nu\right).$$

Die Masse des eingeschlossenen Elementes ist

$$dm = \varepsilon\,r\,d\nu\,dr\,dz.$$

Demnach lauten mit Rücksicht auf Abschn. 166 und darauf, daß R und R' den Winkel $d\chi$, S_r und S_r' ebenso wie S_u und S_u' den Winkel $d\nu$ einschließen, die Bewegungsgleichungen

$$-R' + R + S_r' - S_r + S_u\,d\nu = dm\left(\frac{dw_r}{dt} - \frac{w_u^2}{r} - 2\omega w_u - r\omega^2\right),$$

$$-R\,d\chi + S_r\,d\nu - S_u' + S_u = dm\left(\frac{dw_u}{dt} + \frac{w_u w_r}{r} + 2\omega\,w_r\right),$$

$$-Z' + Z + S_z' - S_z - g\,dm = dm\left(\frac{dw_z}{dt}\right).$$

Auf die rechte Seitenfläche der Schaufel $ABCD$ wirken, bei Gleichheit aller Verhältnisse in den aufeinanderfolgenden Zellen, auch die Kräfte S_r', S_u', S_z'; im ganzen bedeuten also $\frac{S_r' - S_r}{dm}$; $\frac{S_u - S_u'}{dm}$; $\frac{S_z' - S_z}{dm}$; die von den Schaufelwänden auf die Masseneinheit der Flüssigkeit in der Bewegungsrichtung übertragenen Drucke, die wir mit q_r, q_u, q_z bezeichnen wollen. Wenn wir nun diese Ausdrücke in obige Gleichungen einführen und beachten, daß beim Übergang zur Grenze $p_r = p_s = p_z = p$ wird, so ergibt sich nach leichter Umrechnung

$$\left.\begin{aligned} q_r - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial r} &= \frac{dw_r}{dt} - \frac{w_u^2}{r} - 2\omega\,w_u - r\,\omega^2 \\ q_u &= \frac{dw_u}{dt} + \frac{w_u w_r}{r} + 2\omega\,w_r \\ -g + q_z - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{dw_z}{dt} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

und das sind die auf die Relativbewegung bezogenen Gleichungen von Lorenz, aus welchen diejenigen für die Absolutbewegung hervorgehen, wenn man $\omega = 0$ und die relativen Größen durch die absoluten ersetzt. Die Ableitungen des Druckes beziehen sich eigentlich auf die Veränderung in Richtung der Stromfläche, da indessen alle Größen vom Winkel χ unabhängig gedacht sind, darf man sie im gewöhnlichen Sinne als partielle auffassen. Aus der Bedingung, daß die in den ganzen Ring einströmende Flüssigkeitsmenge der ausströmenden gleich sei, so ergibt sich die Durchflußgleichung

$$\frac{\partial w_r r \varepsilon}{\partial r} + \frac{\partial w_z r \varepsilon}{\partial z} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Die Bedingungsgleichungen von Bauersfeld[1]**.** Man könnte glauben, daß irgendeine Lösung für die Geschwindigkeiten und p (bzw. ε), die der Gl. (2) genügen, zulässig sind, wenn man dafür sorgt, daß q_r, q_u, q_z die durch Gl. (1) vorgeschriebenen Werte erhalten. Dies wäre in der Tat der Fall, wenn die q Massenkräfte wären, für die ein beliebiges Gesetz denkbar ist. Da aber in Wahrheit die q vom Normaldruck der Schaufelflächen herstammen, muß eine besondere, zuerst von Bauersfeld aufgestellte Bedingung erfüllt werden.

[1]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1905, S. 2007 und vollständiger in der Zeitschr. f. d. ges. Turbinenwesen 1907, S. 265.

Bedeutet dr, $rd\chi$, dz ein beliebiges Linienelement in den relativen Koordinaten, das in die Schaufelfläche hereinfällt, so muß die Resultierende der q auf demselben senkrecht stehen, d. h.

$$q_r\,dr + q_u\,r\,d\chi + q_z\,dz \equiv 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

sein. In der Auflösung

$$d\chi \equiv -\left(\frac{q_r}{r q_u}\,dr + \frac{q_z}{r q_u}\,dz\right)$$

ist die linke Seite ein vollständiges Differential, also muß es auch die rechte sein. Da diese aber nach Voraussetzung von r, z und nicht von χ abhängt, so muß

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{q_r}{r q_u}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{q_z}{r q_u}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

erfüllt sein. Indem man Gl. (1) der Reihe nach mit dr, $rd\chi$ dz multipliziert und addiert, erhält man mit Bauersfeld die Energiegleichung in der Form

$$(q_r - 2\lambda_u w_z + 2\lambda_z w_u)\,dr + (q_u - 2\lambda_z w_r + 2\lambda_r w_z)\,r\,d\chi$$
$$+ (q_z - 2\lambda_r w_u + 2\lambda_u w_r)\,dz = g\,dz + \frac{dp}{\varepsilon} + \frac{dw^2}{2} - \frac{dr^2\omega^2}{2} \quad \ldots \ldots \ldots (5)$$

Hierin sind λ_r, λ_u, λ_z die Winkelkomponenten nach Gl. (11), Abschn. 165, allein bezogen auf die absoluten Geschwindigkeiten $c_r = w_r$; $c_u = w_u + r\omega$; $c_z = w_z$. Die relativen „Wirbel" sind im übrigen identisch mit den absoluten, bis auf denjenigen um die Drehachse, der wie naturgemäß gleich der Summe aus dem relativen Wirbel und der Winkelgeschwindigkeit ω ist.

Erfolgt die Verschiebung in Richtung einer Strömungslinie, d. h. wird $dr = w_r\,dt$; $r\,d\chi = w_u\,dt$; $dz = w_z\,dt$ vorausgesetzt, so verschwindet mit Rücksicht auf Gl. (3) die linke Seite von Gl. (5), und das Integral der rechten Seite ist eine Konstante. Strömt die Flüssigkeit dem Rade mit überall gleichem Zustande zu, was wir annehmen wollen, so ist der Wert des Integrales für alle Stromfäden derselbe, und sein Differential für irgendwelche Änderungen dr, $rd\chi$, dz ist gleich Null. Dann müssen aber die Faktoren dieser Größen auf der linken Seite einzeln gleich Null sein, und wir erhalten die elegante Darstellung

$$\left.\begin{aligned} q_r &= 2(\lambda_u w_z - \lambda_z w_u) \\ q_u &= 2(\lambda_z w_r - \lambda_r w_z) \\ q_z &= 2(\lambda_r w_u - \lambda_u w_r) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (6)$$

Da eine Arbeitsübertragung nur durch den Schaufeldruck stattfindet, darf q_u unter keinen Umständen verschwinden. Daher können auch die Wirbelkomponenten nicht alle gleich Null werden, und so ist scheinbar in der Turbine eine wirbelfreie Strömung unmöglich. Dies beruht indes darauf, daß wir hier nur mit Mittelwerten der Geschwindigkeit rechnen, und der damit gebildete Ausdruck für den Wirbel eine andere Bedeutung hat, als der echte hydrodynamische Wirbel von Helmholtz.

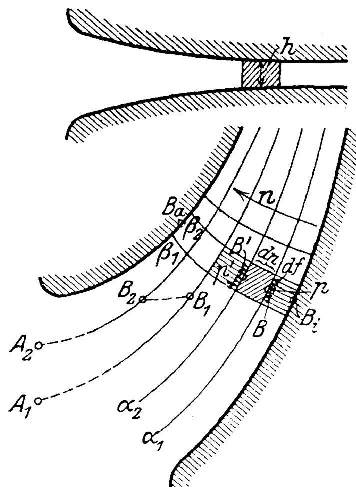


Abb. 957. Zum Verfahren von Flügel.

Bauersfeld hat die Theorie für hydraulische Turbinen später[1] weiter ausgebaut und ein graphisches Verfahren ausgearbeitet, welches hohe Beachtung verdient. Da dieses weit über die Bedürfnisse des Dampfturbinenbaues hinausgeht, begnügen wir uns mit diesem Hinweis und wenden uns dem graphischen Verfahren von Flügel zu, das, auf dem gleichen Grundgedanken beruhend, auch für elastische Flüssigkeiten anwendbar ist und viele Aufgaben des Dampfturbinenbaues in einfachster Weise zu lösen gestattet.

170. Graphische Integration der Strömungsgleichungen nach Flügel.

a) Ruhender Kanal[2]. Es sei ein ruhender flacher Kanal, Abb. 957, mit wenig veränderlicher Höhe h gegeben, so daß die Strömung als „zweidimensional" behandelt werden kann. Dies wäre der Fall, auch wenn die Mittellinie eine Raumkurve, aber die Höhe h so gering wäre, daß längs ihr die Verdichtung vernachlässigt werden kann.

Man zeichnet schätzungsweise eine Anzahl Strombahnen α_1, α_2 ... mit der Bogenlänge s in Anlehnung an die gegebene Begrenzung ein und ermittelt die orthogonal dazu verlaufenden Querschnittslinien β_1, β_2 ... mit der Bogenlänge n. Der Ausfluß erfolge verlust-

[1] Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1912, S. 2045.

[2] Ein neues Verfahren der graphischen Integration, Dissertation Oldenbourg, 1914. Mehrdimensionale Strömung von Gasen. Z. f. d. gesamte Turbinenwesen 1919, S. 161 u. f.

frei aus einem Raume $p_0\,v_0$, wo man die Anfangsgeschwindigkeit $w_0 = 0$ setzen darf. Die Energiegleichung liefert für die Stromlinie $A_1\,B_1$ und $A_2\,B_2$

$$\frac{w_1^2}{2g} = -\int_{p_0}^{p_1} v\,dp = \frac{k}{k-1}(p_0\,v_0 - p_1\,v_1) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

$$\frac{w_2^2}{g} = -\int_{p_0}^{p_2} v\,dp = \frac{k}{k-1}(p_0\,v_0 - p_2\,v_2) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

Bilden wir die Differenz

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = -\int_{p_0}^{p_2} v\,dp + \int_{p_0}^{p_1} v\,dp = -\left\{\int_{p_1}^{p_0} v\,dp + \int_{p_0}^{p_2} v\,dp\right\} = -\int_{p_1}^{p_2} v\,dp \quad \ldots (3)$$

so kann dieses Integral als eine Summation der Elementarbeträge $-v\,dp$ längs eines beliebigen Weges von B_1 nach B_2 aufgefaßt werden; nicht aber ohne weiteres als „Zunahme der kinetischen Energie“, da auf jenem Wege stets neue Massenteilchen angetroffen werden, physikalisch aber nur ein Fortschreiten längs einer Strömungslinie den Sinn einer Arbeitsaufnahme hat. Allein formal, mathematisch ist das Vorgehen erlaubt und liefert einen bestimmten, vom Weg unabhängigen Zahlenwert, da p und v ebenfalls unabhängig vom Wege durch die Gleichung

$$p\,v^k = C \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

verbunden sind. Man erhält also

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = \frac{k}{k-1}(p_1\,v_1 - p_2\,v_2) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (5)$$

Betrachtet man die unendlich nahen Punkte B und B' mit den Geschwindigkeiten w und w' und den Drücken p und p', so wird mithin $\frac{w'^2 - w^2}{2g} = -\frac{k}{k-1}\,d(pv)$ oder $\left[\text{da infolge von (4) } \frac{dp}{p} + k\frac{dv}{v} = 0 \text{ woraus man } \frac{dv}{v} \text{ in } d(pv) = pv\left(\frac{dp}{p} + \frac{dv}{v}\right) \text{ einsetzen kann}\right]$ $= -v\,dp$, also

$$\frac{w\,dw}{g} = -v\,dp \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (6)$$

wo $dp = p' - p$ ist. Gl. (6) folgt auch unmittelbar aus (3). Aus der Zentripetalbeschleunigung des schraffierten Massenelementes dm, in dessen Seitenflächen B und B' fallen, folgt nun ein zweiter Ausdruck für $p' - p$:

$$dm\,\frac{w^2}{\varrho} = \delta f(p - p') = -\delta f\,dp \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (7)$$

wo ϱ den Krümmungshalbmesser der Bahn bedeutet. Mit $dm = \delta f \cdot dn\,\frac{\gamma}{g}$ erhält man

$$\frac{dw}{dn} = \frac{w}{\varrho} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (8)$$

Würde man von der konvex gegen den Strom gekrümmten Wand weg fortschreiten, so ergäbe sich $dw/dn = -w/\varrho$, weil die Geschwindigkeit w mit wachsendem n abnähme. Gl. (8) kann integriert werden, wenn man den Ausdruck

$$\int \frac{dw}{w} = \int_0^n \frac{dn}{\varrho} = \Phi(n) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (9)$$

graphisch auswertet. Bezeichnet w_i den Wert am „inneren“ (hohlen) Rande, so ist gemäß (9) und (8)

$$w = w_i\,e^{\Phi(n)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (10)$$

Nun stellt man die Durchflußgleichung

$$G(n) = \int_0^n w\,h\,dn\,\gamma = w_i \int e^{\Phi(n)}\,h\,\gamma\,dn = w_i \int_0^n f(n)\,dn \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

auf. Aus dem bekannten w wird am einfachsten in der Entropietafel auf der Adiabate das zugehörige p und v (γ) abgegriffen, so daß $wh\gamma$ als Abhängige von n bekannt sind. Abb. 958 stellt einige der benötigten Kurven über der abgewickelten Länge n dar. Diese sind

1. Der Krümmungshalbmesser ϱ und sein reziproker Wert,
2. die Funktion $\Phi(n) = \int_0^n \frac{dn}{\varrho}$,
3. die Geschwindigkeit w nach Gl. (10),
4. die Funktion $wh\gamma$,
5. die Funktion $G(n)$ nach Gl. (11), worin w_i noch unbestimmt bleibt. Im allgemeinen wird von vornherein (z. B. bei einer Leitschaufel oder Düse) das gesamte G_{tot} und der Druckverlauf durch den Entwurf vorgeschrieben sein; das graphische Verfahren soll die Berichtigung daran ergeben. Man wird w_i aus dem vorläufigen Mittelwerte von w einschätzen, und den endgültigen Wert aus

Abb. 958. Zum Verfahren von Flügel.

$$G_{tot} = w_i \int_0^{n_0} f(n) \cdot dn \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

berechnen, wo n_0 die ganze Länge der Orthogonale bedeutet. Weicht w_i vom ursprünglichen Wert stärker ab, muß auch $f(n)$ frisch berechnet und die Integration wiederholt werden. Zum Schluß teilt man in jedem Querschnitt G_{tot} in eine Anzahl gleicher Teile, projiziert diese auf $G(n)$, von da auf n hinab, und trägt sie in die Orthogonalen ein. Die Verbindung entsprechender Punkte liefert die **berichtigten Stromlinien.** Im Falle stärkerer Abweichung ist das Verfahren zu wiederholen.

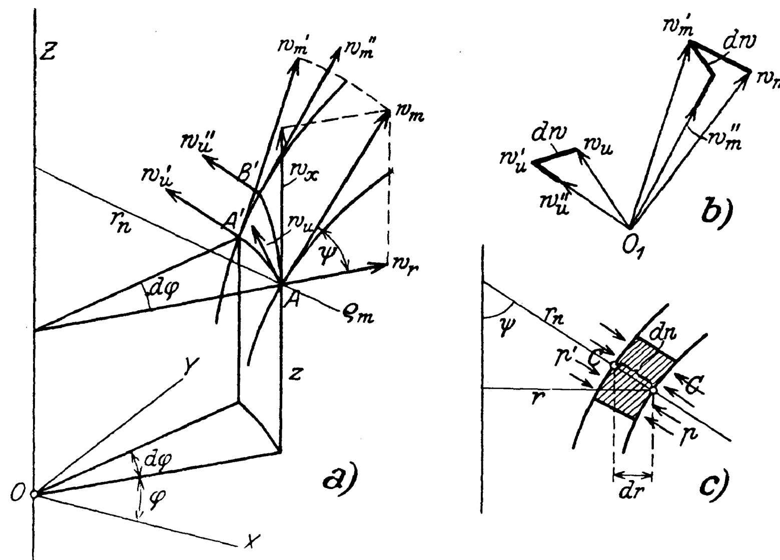


Abb. 959. Achsensymmetrische Strömung.

b) Achsensymmetrische Beharrungsströmung. In Abb. 959 sei A ein Punkt einer nach Schätzung eingezeichneten Meridianlinie, w_r, w_u, w_z die Geschwindigkeitskomponenten, von denen w_r, w_z zur „Meridiangeschwindigkeit" w_m zusammengefaßt werden. Die Aufgabe ist,

die in der Meridianebene gelegene, zum Meridian senkrechte Komponente der Gesamtbeschleunigung zu finden. Zu diesem Zwecke sind von O_1 aus die Geschwindigkeiten in drei unendlich benachbarten Punkten zusammengetragen, und zwar bezieht sich

$w_m\, w_u$ auf den ursprünglichen Punkt A,
$w_m'\, w_u'$ auf den um den Winkel $d\varphi$ abstehenden Punkt A' auf dem gleichen Breitenkreis,
$w_m''\, w_u''$ auf den unendlich nahen Punkt B' des Nachbarmeridians, den das in A befindliche Massenteilchen nach der Zeit dt erreicht.

Die Beschleunigung ist jeweils der geometrische Zuwachs der Geschwindigkeit in der Zeiteinheit. Es kommen daher nur die Änderungen $\varDelta w_\varrho$ und $\varDelta w_\nu$ in Betracht, von denen die erste die „Normal“beschleunigung w_m^2/ϱ_m, wo ϱ_m der Krümmungshalbmesser des Meridians ist, die zweite die Zentripetalbeschleunigung w_u^2/r ergibt. Von diesen ist die zu ϱ_m parallele Komponente $(w_u^2/r)\sin\psi = w_u^2/r_n$, sofern mit $r_n = r/\sin\psi$ die Länge der Normalen bis zur Achse bezeichnet wird. Die Beschleunigung zum Krümmungsmittelpunkt des Meridians hin ist somit

$$b_\varrho = \frac{w_m^2}{\varrho_m} - \frac{w_u^2}{r_n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Daraus folgt die Bewegungsgleichung des Massenelementes, das zwischen zwei Meridian-, zwei Orthogonalflächen und zwei axialen, den Winkel $d\varphi$ einschließenden Ebenen enthalten ist

$$dm\, b_\varrho = \delta f(p' - p)$$

oder mit $dm = \delta f \cdot dn\,\gamma/g$ und $dp = p' - p$

$$\frac{dn}{g}\left(\frac{w_m^2}{\varrho_m} - \frac{w_u^2}{r_n}\right) = v\,dp \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Der Energiesatz liefert, wie oben bewiesen, wenn w und w' die Gesamtgeschwindigkeiten in A und B' bedeuten, mit $dw = w' - w$ und $w^2 = w_m^2 + w_u^2$

$$\frac{w\,dw}{g} = \frac{w_m\,dw_m + w_u\,dw_u}{g} = -v\,dp \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Für die Umfangskomponente gilt, da die reibungsfreie Flüssigkeit kein um die Symmetrieachse drehendes Moment erzeugt

$$w_u r = \text{konst.} \quad \text{oder} \quad \frac{dw_u}{w_u} = -\frac{dr}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Die Absolutbeträge dr dn bilden nach der Abbildung (c) das Verhältnis $dr : dn = r : r_n$; mit Rücksicht darauf, daß dr negativ ist, wird mithin

$$\frac{dw_u}{w_u} = \frac{dn}{r_n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

und dw_u ist, wie sein soll, positiv, wenn, wie in der Abbildung dn nach einwärts gerichtet ist. Dies in (15) eingesetzt, ergibt

$$\frac{1}{g}\left(w_m\,dw_m + \frac{w_u^2}{r_n}\,dn\right) = -v\,dp \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

der Vergleich mit (14) führt auf

$$\frac{dw_m}{dn} = -\frac{w_m}{\varrho_m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Hätte man den Meridian gegen die Achse konkav vorausgesetzt, so hätte sich auf der rechten Seite ein $+$ Zeichen ergeben. Die Änderung der Meridiangeschwindigkeit befolgt mithin das gleiche Gesetz wie die Hauptgeschwindigkeit beim ruhenden Kanal (Gl. 8) und ist insbesondere unabhängig von der Umfangsgeschwindigkeit. Die graphische Integration von (19) liefert

$$w_m = w_{mi}\,\Phi(n) \quad \text{mit} \quad \Phi(n) = e^{\int -\frac{dn}{\varrho}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

wo w_{mi} die Geschwindigkeit am Rande für $n=0$ bedeutet. Hiermit ergibt sich die Durchflußgleichung

$$G(n)=\int_0^n 2\pi r\,dn\,w_m\gamma \quad \text{. . . . . (21)}$$

In den meisten Fällen wird $w_u=0$ sein, und die Theorie der „Fadenströmung" wird den ersten Anhaltspunkt für die Wahl von w_{mi} bieten. Die graphische Integration erfolgt wie unter a) beschrieben.

Ist ein Grund zur Erzeugung einer Umfangskomponente vorhanden, so ist durch einen einzigen Wert derselben die Größe infolge Gl. (16) in allen übrigen Punkten bestimmt. Strömung im vollen Rohr ist ausgeschlossen, da für $r=0$ $w_u=\infty$ sein müßte. Da die Energiegleichung nur die Gesamtgeschwindigkeit w bestimmt, bildet die Theorie der „fadenförmigen" Strömung eine bloß grobe Näherung für die Wahl von w_m.

c) Laufkanal der radialen Turbine.

Wir betrachten die ebene relative Strömung im kreisenden Kanal, Abb. 960, müssen also am Massenteilchen dm die Ergänzungskräfte $dm\,r\,\omega^2$ und $dm\,2\,\omega\,w$ anbringen. Die Normalbeschleunigung gegen den Krümmungsmittelpunkt hin ist w^2/ϱ, und es gilt die Bewegungsgleichung

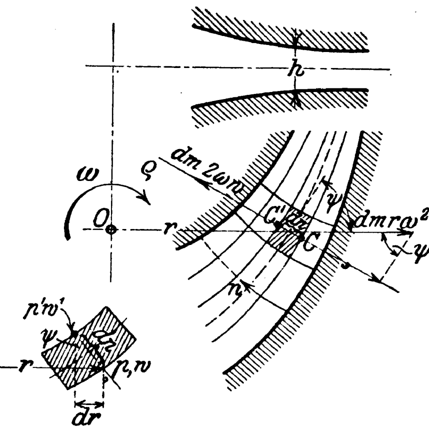


Abb. 960. Laufkanal der Radialturbine.

$$dm\frac{w^2}{\varrho}=df(p-p')+dm\,2\,\omega\,w-dm\,r\,\omega^2\sin\psi.$$

Beachten wir, daß bei der Zählung der Länge n von der konkaven Seite aus, einem positiven dn das negative $dr=dn\sin\psi$ entspricht, so kann das letzte Glied als $+dm\,r\,\omega^2\,dr/dn$ geschrieben werden und man erhält nach Kürzung mit $dm=df\cdot dn\cdot\gamma/g$, wenn $dp=p'-p$

$$\frac{w^2}{\varrho}=-gv\frac{dp}{dn}+2\,\omega w+r\,\omega^2\frac{dr}{dn} \quad (22)$$

Die Energiegleichung lautet für einen Stromfaden

$$\frac{w^2-w_0^2}{2g}=-\int_{p_0}^{p} v\,dp+\frac{u^2-u_0^2}{2g}, \quad \text{. . . . . (23)}$$

Aus ihr leitet man wie unter a für die unendlich nahen Punkte $C\,C'$, wenn $dw=w'-w$, die Beziehung ab:

$$\frac{w\,dw}{g}=-v\,dp+\frac{r\,\omega^2\,dr}{g} \quad \text{. . . . . (24)}$$

Der Vergleich von (22) und (24) ergibt

$$\frac{dw}{dn}-\frac{w}{\varrho}+2\,\omega=0 \quad \text{. . . . . (25)}$$

Dies ist die neue Differentialgleichung für w in Abhängigkeit von n, die an Stelle von Gl. (8) des ruhenden Kanales tritt. Hätte man Drehsinn gegen den Uhrzeiger angenommen, so wäre ω negativ einzuführen. Die Integration von (25) erfolgt bekanntlich, indem man $w=y\,z$ setzt, und in der entstehenden Gleichung $y'z+y(z'-z/\varrho)+2\,\omega=0$ durch Nullsetzen des Klammerausdruckes $\lg n\, z/z_1=\int_0^n dn/\varrho$ oder

$$z=z_1\,\Phi(n) \qquad \text{mit} \qquad \Phi(n)=e^{\int_0^n \frac{dn}{\varrho}} \quad \text{. . . . . (26)}$$

erhält, so daß aus $y' z + 2\omega = 0$, $y = -2\omega \int_0^n \frac{dn}{z} + C$ folgt. Für $n = 0$ soll $w = w_i$ sein, was $z_1 C = W_i$ und für die Lösung die Form

$$w = \Phi(n) \left[w_1 - 2\omega \int_0^n \frac{dn}{\Phi(n)} \right] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (27)$$

ergibt. Ist w graphisch bestimmt, kann auch die Durchflußgleichung

$$G(n) = \int_0^n h w \gamma dn \quad \ldots \ldots \ldots \quad (28)$$

graphisch zur Ermittelung der wahren Stromlinien wie unter a) benutzt werden.

Die entwickelten Formeln gelten für das Unter- und Überschallgebiet, sofern bei letzterem keine Unstetigkeiten (Verdichtungskanten) zu erwarten sind. Die Entscheidung hierüber ist freilich nicht leicht.

171. Neuere, auf den Begriff der Zirkulation aufgebaute Theorie der Kreiselmaschinen.

Mit Rücksicht auf die Bedeutung der Kreiselverdichter für die Gasturbine und die hierüber in Abschn. 208 enthaltenen Erörterungen müssen wir kurz auf die neue Theorie der Flüssigkeitswirkung in den Kreiselmaschinen eintreten, die auf dem Begriff der „Zirkulation" aufgebaut ist.

Betrachten wir eine in einen unendlichen Strom getauchte ebene Platte, Abb. 961, so kann aus den hydrodynamischen Gleichungen für unelastische Flüssigkeiten eine Lösung hergeleitet werden, die durch die vollgezogenen Stromlinien gekennzeichnet ist. Die Geschwindigkeit im Unendlichen ist unveränderlich $= w_0$. Die Platte ist infolge der vorauszusetzenden Reibungslosigkeit keiner resultierenden Kraft ausgesetzt; nur ein Moment von der Größe[1])

$$\mathfrak{M} = \frac{\pi}{2} \mu w_0^2 l^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

wirkt im Sinne des Uhrzeigers auf sie ein, wobei l die halbe Länge, μ die spezifische Masse bedeutet

Nun betrachten wir eine Strömung, bei der die Stromlinien die punktiert angedeuteten konfokalen Ellipsen mit im Abstande $2l$ liegenden Brennpunkten sind. Bildet man das Integral

$$\Gamma = \int w ds \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1a)$$

längs einer Strombahn zum Anfangspunkte zurückkehrend, wobei ds die Bogenlänge bedeutet, so zeigt sich dessen Wert unabhängig von der Wahl der betreffenden Ellipse. Er wird die **„Zirkulation"** benannt, die Bewegung selbst heißt **Zirkulationsströmung.** Sie ist, ebenso wie die oben beschriebene, die man als **„Durchflußströmung"** (oder Translationsströmung) bezeichnen kann, wirbelfrei, also eine **„Potentialströmung".** Sie übt auf die Platte weder eine Einzelkraft noch ein Moment aus.

1. Gesetz der Überlagerung. Zwei für sich bestehende Strömungen mit gleichen Grenzbedingungen dürfen in dem Sinne einander überlagert werden, daß man in jedem Punkte die Resultierende der dort herrschenden Geschwindigkeiten, d. h. die algebraische Summe ihrer x, y, z-Komponenten bildet. Die so entstehende Strömung befriedigt jedenfalls die Stetigkeitsbedingung bei unelastischen Flüssigkeiten, da diese in u, v, w, linear sind. Die resultierenden Drücke hingegen sind nicht die algebraische Summe der ursprünglichen Drücke, denn sie hängen mit dem Quadrat der resultierenden Geschwindigkeit durch die (erweiterte) Bernouillische Gleichung zusammen. Die Kräfteverteilung der so über-

---

[1]) Lamb, Hydrodynamics, Art. 71.

lagerten Bewegungen wird also je nach Umständen von der algebraischen Summe der Komponenten wesentlich verschieden sein.

So sind z. B. für die Durchflußströmung in Abb. 961 auf der Unterseite der Platte in der unteren Hälfte die Geschwindigkeiten groß, die Einzeldrücke klein, wie durch die (den Unterdruck darstellenden) gestrichelten Linien veranschaulicht wird. Die Zusammensetzung mit der Zirkulationsströmung liefert dort, da die Geschwindigkeiten entgegengesetzt gerichtet sind, eine kleine Geschwindigkeit, also einen großen Druck. Auf der Oberseite der Platte findet das Gegenteil statt — der Druck nimmt, wie die strichpunktierten Linien zeigen, ab. So kommt es, daß die beiden Strömungen, die einzeln (vom Drehmoment abgesehen) wirkungslos sind, zusammengenommen eine resultierende Kraft erzeugen, von der die Hydrodynamik[1]) beweist, daß sie zur Geschwindigkeitsrichtung w_0 senkrecht steht, für die Längeneinheit der Platte (senkrecht zur Bildebene gemessen) den Betrag

$$P = \mu w_0 \Gamma \quad \text{. . . . .} \quad (1\text{b})$$

ergibt, und im oberen Viertel der Plattenbreite angreift.

Die Erkenntnis des Zirkulationseinflusses verdankt man der Entwicklung der Tragflügeltheorie durch Lanchester, Kutta, Joukowski, Prandtl u. a. Föttinger war einer der ersten, der die Folgerungen daraus für die Entstehung des „Schaufeldruckes" der Turbinen zog.

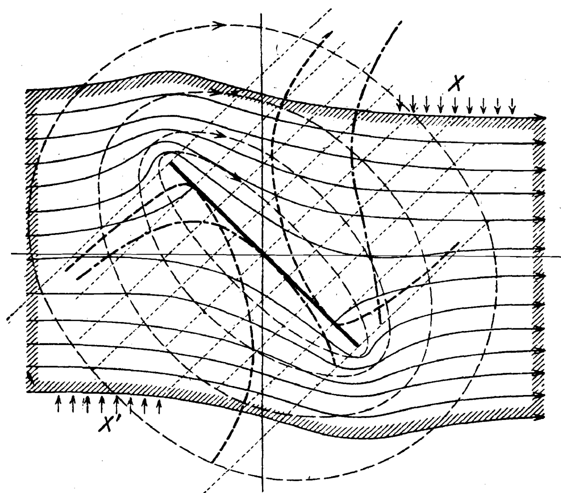


Abb. 961. Strömung um eine ebene Platte herum.

2. Ebene Potentialdurchflußströmung in einer Kreiselmaschine. Es sei in Abb. 1088c ein Kreiselrad mit überall gleicher Schaufelhöhe angenommen, so daß die Strömung eine „ebene" wird. Die Flüssigkeit tritt aus der im Mittelpunkte (längs der Achse) anzunehmenden „Quelle" radial ein und durchströmt die Schaufeln unter Bildung von „Staupunkten" in ähnlicher Weise, wie bei der ebenen Platte im unendlichen Strom[2]). Die Stromlinien verlassen das (ruhend gedachte) Rad im Unendlichen mit radialer Richtung; es gibt keine Umfangskomponente der Geschwindigkeit, und daraus folgt nach dem Satz von Drall, daß auch kein Moment auf das Rad und vom Rad auf die Flüssigkeit ausgeübt werden kann.

Daß bei der geraden Platte im ursprünglich geradlinigen Strom Abb. 961 trotzdem sie einem Moment ausgesetzt ist, im ablaufenden Strom kein Drall vorhanden ist, liegt an der ungleichmäßigen Druckverteilung, indem bei X und X' die Drücke infolge kleinerer Geschwindigkeit höher sind, so daß auf das durch Schraffur hervorgehobene Flüssigkeitsgebiet ein Gegenmoment ausgeübt wird. Bei Abb. 1088c ist aber das Moment der Flüssigkeitsdrucke auf irgendeinen mit dem Rad koaxialen Kreiszylinder notwendig gleich Null, es kann also die Gegenwirkung zu einem von den Schaufeln etwa übertragenen Drehmoment nur durch den Drall gebildet werden.

Um eine Kraftwirkung hervorzurufen, muß eine Zirkulationsströmung hinzutreten. Wie dies am besten einzurichten ist, hat anschaulich Kucharski[3]) von folgendem Grundgedanken ausgehend gezeigt.

Die reibungsfreie Flüssigkeit kann mangels an Drehmomenten in keinem Teil in Rotation versetzt werden; ihre Absolutbewegung muß dauernd wirbelfrei bleiben. Nach dem Eintritt ins Laufrad befindet sie sich jedoch in einem sich drehenden System, daher muß sie diesem gegenüber eine scheinbare entgegengesetzte Drehung, d. h. einen Wirbel besitzen, der der negativen Winkelgeschwindigkeit gleich ist. In einem kugelförmigen Hohlraum würde die anfänglich ruhende Flüssigkeit während einer Umdrehung

---

[1]) Grammel, Die hydrodyn. Grundlagen des Fluges. Braunschweig 1917.

[2]) Der Stromlinienverlauf wurde auf die im Abschn. 208 angegebene Weise von Ing. Ackeret ermittelt.

[3]) Strömungen einer reibungsfreien Flüssigkeit bei Rotation fester Körper. Oldenbourg 1918.

des Rades als Ganzes einen Umlauf vollenden; man muß sich jedoch hüten dies Ergebnis voreilig auf Hohlräume anderer Form zu übertragen. Dort ist die Drehung nur in den kleinsten Teilchen ausführbar, die Strömung im Ganzen ist verwickelter Art.

Auf mathematischem Wege erhält man nähere Einsicht in die Verhältnisse durch die Einführung der „Stromfunktion" und der Prandtlschen Analogie der Torsion.

3. Stromfunktion und relative Bewegung. Wir benutzen Polarkoordinaten gemäß Abschn. 165 und 168, wobei für die ebene Bewegung $w_z = 0$ ist. Der (doppelte) absolute Wirbel um die Z-Achse nach Gl. (11c) Abschn. 165

$$2\,\lambda_z = \frac{\partial c_u}{\partial r} - \frac{\partial c_r}{r\,\partial \varphi} + \frac{c_u}{r} = 0 \quad (2)$$

verschwindet der Voraussetzung gemäß Berechnet man den in den Geschwindigkeiten w_r w_u ausgedrückten relativen Wirbel, wobei $w_r = c_r$; $w_u = c_u - u$ ist, so findet man in der Tat

$$\lambda_z' = -\,\omega \quad (2a)$$

wie schon oben klargelegt wurde. In rechtwinkligen relativen (d. h. mitkreisenden) Koordinaten $x\,y$ ausgedrückt, mit w_x w_y als Geschwindigkeiten, ist

$$2\,\lambda_z' = \frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y} = -\,2\,\omega \quad (2b)$$

Die Stetigkeitsgleichung mit $\epsilon =$ konst. lautet

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

Durch die Gleichungen

$$w_x = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}; \qquad w_y = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (4)$$

wird die **„Stromfunktion"** Ψ eingeführt, zu deren Bestimmung nach Gl. (2b) die Beziehung

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\,2\,\omega \quad (5)$$

dient. Ist ein Ψ gefunden, das dieser Gleichung genügt, so wird die Stetigkeitsgleichung ohne weiteres erfüllt, wie man sich durch Einsetzen in Gl. (3) überzeugt. Da Gl. (5) linear ist, erlaubt sie die Überlagerung von Einzellösungen. Bezeichnet man die linke Seite mit $\Delta\,\Psi_1$ und sind zwei Lösungen

$$\Delta\,\Psi_1 = -\,2\,\omega_1; \qquad \Delta\,\Psi_2 = -\,2\,\omega_2$$

bekannt, so ist auch $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$ eine Lösung mit dem Wirbel $\omega = \omega_1 + \omega_2$. Zwei für sich bestehende Strömungen mit den gleichen Grenzbedingungen ergeben eine neue Strömung, bei der die Geschwindigkeiten die geometrischen Summen der ursprünglichen Geschwindigkeiten sind.

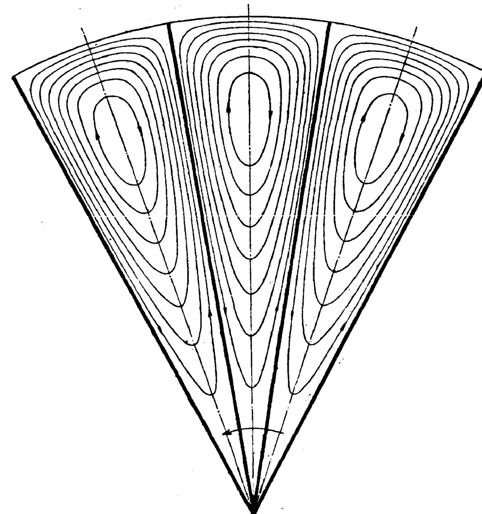


Abb. 961a. Wirbelströmung in einem Kreissektor.

Kucharski hat Gl. (5) für die Bedingungen eines geschlossenen Kreissektors integriert und eine angenäherte Lösung für den offenen Kanal aufgestellt (a. a. O. S. 127), wobei sich die in Abb. 961a dargestellten Stromlinien ergeben. Wir ziehen vor, die von Kucharski mit herangezogene

4. Analogie zwischen der Senkung einer Membrane und der Wirbelströmung

zu verwenden. Eine allseitig mit S kg für die Längeneinheit gespannte Membrane sei dem spezifischen Drucke p ausgesetzt, und erfahre auf die Koordinaten $x\,y$ bezogen die Einsenkungen $z = f(x\,y)$. Auf die zur Y-Achse parallelen Seiten dy eines Rechteckes $dx\,dy$ wirken je die Spannungen $S\,dy$, deren lotrechte Komponenten $-\,S\,dy\;\partial z/\partial x$ und $S\,dy\;\partial z'/\partial x$ sind, sofern die Neigungen klein bleiben. Ihre Summe ist $S\,dy\,(\partial^2 z/\partial x^2)\,dx$; desgleichen die von den auf die Seite dx wirkenden Kräften $= S\,dx\,(\partial^2 z/\partial y^2)\,dy$. Diese Kräfte halten dem (in Richtung von $-\,z$ wirkenden) Drucke $p\,dx\,dy$ das Gleichgewicht, also ist

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{p}{S} \quad (6)$$

die Differentialgleichung der Senkung z. Man erkennt durch Vergleich von Gl. (5) mit (6), daß Ψ mit z identisch wird, wenn man bei gleichen Randbedingungen

$$\frac{p}{S} = -\,2\,\omega \quad (7)$$

macht. So wird Ψ der Anschauung zugänglich gemacht und kann auf dem Wege des Versuches, mittels gespannten Gummimembranen (noch besser Seifenhäute) ermittelt werden. Die Geschwindigkeiten sind nach (4)

$$w_x = -\frac{\partial z}{\partial y}, \quad w_y = +\frac{\partial z}{\partial x} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

nichts anderes als die Neigungswinkel der Tangenten an die Membranfläche.

Die **Stromlinien** werden durch einen konstanten Wert von Ψ, also an der Membrane durch die Linien $z =$ konst. gekennzeichnet. Es stellt nämlich

$$\Psi(x, y) = \text{konst}$$

eine Linie dar, deren Neigung durch Differentiation

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{als} \quad \frac{dy}{dx} = -\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) : \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

gegeben ist. Allein dies bedeutet nach (4) nichts anderes als $w_y : w_x$, womit die Behauptung bewiesen ist. Da am Rande des Kanales die Geschwindigkeit tangential gerichtet ist, bildet dieser eine Stromlinie und gehört zur Schaar der Kurven $\Psi =$ konst. Im allseitig geschlossenen Kanal kann man am Rande $\Psi = 0$ setzen, weil es auf den Absolutwert von Ψ nicht ankommt. Das bedeutet, daß die **stellvertretende Membrane am Rande eine Senkung $= 0$ hat, d. h. dort zu befestigen ist.**

Bei offenen Kanälen wird die durchströmende Flüssigkeitsmenge wie folgt dargestellt: Verschieben wir das Koordinatensystem mit der Achse y tangierend an die Stromlinie $\Psi = 0$. Im Abstande $dx = dn$ gehe die Linie $\Psi' = 0$ vorbei; dann ist längs Ψ die Geschwindigkeit

$$w = \frac{\Psi' - \Psi}{dn} = \frac{d\Psi}{dn} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

oder

$$w\,dn = d\Psi \quad \text{und} \quad \int_0^n w\,dn = q = \Psi_{(n)} - \Psi_{(0)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10\text{a})$$

d. h. der zwischen zwei Stromlinien für die Einheit der Kanalhöhe sekundlich durchfließende Flüssigkeitsrauminhalt ist gleich dem Unterschiede der Stromfunktionswerte.

Ist bei einem offenen Kanal z. B. für die Wirbelströmung die im ganzen durchfließende Menge $= 0$, so hat die Stromfunktion an den gegenüberliegenden Rändern den gleichen Wert und kann, wie auch die stellvertretende Einsenkung $z = 0$ gesetzt werden.

Die Beziehung zwischen Ψ und z bleibt auch bei $\omega = 0$, d. h. $p = 0$ bestehen, es liegt dann eine wirbelfreie oder **„Potentialströmung"** vor. Bei dieser ist an einem Rand $\Psi_1 = z_1 = 0$, am anderen ist $\Psi_2 = z_2 = \Psi_1 + q$, wenn q der sekundlich durchströmende Rauminhalt ist. Der zweite Rand ist also höher, und die zwischen den Rändern gleichmäßig ausgespannte Membrane nimmt die Gestalt einer Minimalfläche an, deren Schnitte mit wagerechten Ebenen die Stromlinien $z =$ konst. darstellen.

5. Anwendung auf das radiale Laufrad in unendlich ausgedehnter Flüssigkeitsmasse.

Die Bedingungen für das Auftreten der geringsten Verluste sind offenbar „stoßfreier" Eintritt, und (relativ gegen die Schaufel) tangentialer Austritt des Stromes, so daß an der Ein- und an der Austrittskante (theoretisch) unendlich große Geschwindigkeiten, die in Wirklichkeit zu Wirbelbildung Anlaß geben, vermieden werden. Wie aus dem Nachfolgenden erhellt, empfiehlt es sich, die relative Stromfunktion als Summe

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

einzuführen; darin soll bedeuten:

- Ψ_1 eine radiale (relative) Potentialdurchflußströmung mit (im unendlichen) radialem Austritt, also ohne Kraftwirkung;
- Ψ_2 eine relative Wirbelströmung mit dem Wirbel $-\omega$;
- Ψ_3 eine Potential-Zirkulationsströmung von weiter unten näher bestimmter Beschaffenheit.

Bei Polarkoordinaten können aus den Formeln des Abschn. 165 die Ausdrücke

$$w_r = \frac{\partial \Psi}{r\,\partial \chi}; \quad w_u = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

mit χ als dem relativen Winkel abgeleitet werden. Setzt man in unmittelbarer Nähe des Quellpunktes

$$(\Psi_1)_{\text{für klein. } r} = \frac{q}{2\pi}\chi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (12\text{a})$$

so wird

$$w_r = q/2\pi r; \qquad w_u = 0;$$

es stellt also w_r den richtigen Wert der radialen Geschwindigkeit dar, falls q **der gesamte für die Einheit der Schaufelhöhe sekundlich durchfließende Rauminhalt ist.** Im Rade und dessen Umgebung ist Ψ_1 graphisch durch eine Abbildung wie 1088c darzustellen.

a) Einlauf ins Rad. Die hinzutretenden Strömungen Ψ_2 und Ψ_3 müssen so beschaffen sein, daß die von Ψ_1 her an der Eintrittskante entstehende unendlich große Geschwindigkeit durch eine gleichgroße entgegengesetzt gerichtete aufgehoben wird. **Praktisch** wird diese dadurch zu erreichen gesucht, daß man **die Schaufelneigung am Eintritt in die Richtung** der relativen **Eintrittsgeschwindigkeit** w_1, die als Resultierende aus c_{r_1} und $-u_1$ gewonnen wird, legt. Die relativen Bahnen der zufließenden Teilchen wären alle gleiche Spiralen mit stark abnehmender Neigung gegen den jeweiligen Fahrstrahl, wenn sich **von der Schaufelspitze** keine **Störung** in den Vorraum fortpflanzte Wie es sich hiermit bei den Teilströmungen verhält, lehrt für Ψ_1 Abb. 1088c, für Ψ_2 nehmen wir **zur elastischen Analogie Zuflucht.** Aus dieser geht, wie wir unten zeigen, hervor, daß die Zirkulationsströmung Ψ_3 bei der in Abb 962 gewählten üblichen Schaufelform auf die Eintrittsseite **bloß einen vernachlässigbaren Einfluß ausübt.** Es genügt hier daher, die von Ψ_2 hervorgerufene Strömung zu betrachten, zu welchem Zwecke die Membrane an die in gleicher Höhe stehenden oberen Schaufelenden befestigt, dem Innendruck $p = -2\omega S$ ausgesetzt und durch wagerechte Ebenen geschnitten wird. Abb. 962 zeigt den schätzungsweise eingezeichneten Verlauf der Stromlinien.

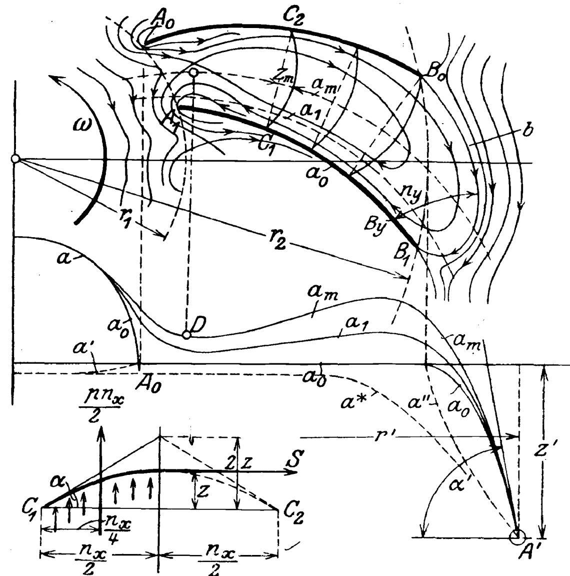


Abb. 962. Relative Wirbelströmung mit Zusatzzirkulation.

b) Strömung im Kanal. Auch für diese genügt es in der Nachbarschaft des Einlaufes die Funktion Ψ_2 zu berücksichtigen. Bei der üblichen Größe der Teilung zeigt die Anschauung, daß man die Einsenkung der Membrane z. B. bei $C_1 C_2$ Abb. 962 so rechnen darf, als ob nur ein schmaler Streifen die dort vorhandene Breite n_x zu überbrücken hätte. Infolge der Kleinheit von z ergeben, wie die Nebenabbildung andeutet, die Momente für die halbe Breite und C_1 als Eckpunkt die Gleichung

$$(S\,\Delta l)\cdot z = \left(p\frac{n_x}{2}\Delta l\right)\cdot\frac{n_x}{4},$$

woraus als Absolutwert

$$z = \frac{p\,n_x^2}{8S} = \frac{\omega\,n_x^2}{4} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (13)$$

folgt. Für den Neigungswinkel α, der nach (10) nichts anderes ist als die zum Schnitt $C_1 C_2$ senkrechte Geschwindigkeit, erhält man aus dem Parabelgesetz

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\partial z}{\partial n} = w = \frac{2z}{(n_x/2)} = \omega\,n_x \quad \dots\dots\dots\dots \quad (13\text{a})$$

Entsprechend ist für Zwischenpunkte der Breite, wenn $n_x/2$ den Abstand des betreffenden Punktes von der Kanalmitte bedeutet die Geschwindigkeit

$$w = \omega\,n_x$$

c) Der Auslauf. Hier kommt neben der Wirbel- **die Zirkulationsströmung Ψ_3 besonders zur Geltung.** Denkt man sich die Zirkulationsbahnen um die einzelnen Schaufeln ähnlich wie in Abb. 961 für die Platte eingezeichnet, so wird klar, daß sich infolge gegensätzlichen Sinnes die Strömungen innerhalb des Kanales im wesentlichen aufheben, und daß **in der Hauptsache eine kreisende Strömung außerhalb des Rades übrig bleibt.**

Die elastische Analogie macht anschaulich, daß man eine **relative Zirkulations-Potentialströmung** erhalten würde, wenn man in Abb. 962 die Membrane außerhalb des Rades auf einer um den Abstand z' tiefer liegenden Ebene längs eines Kreises vom Halbmesser r' von solcher Größe befestigte, daß bis dorthin die Ungleichmäßigkeit sich ausgeglichen hätte. Dann würde der Schätzung nach die Membrane längs der Mittellinie a_m etwa die mit a^* und von den Schaufelspitzen A_0 und B_0 ausgehend etwa die mit a' und a'' bezeichneten Biegungslinien annehmen.

Es ist wichtig zu bemerken, daß bei schräg liegenden Schaufeln, wie die Anschauung und der Versuch mit einer Membrane zeigen, die Senkung in vom Umfang weiter nach Innen abliegenden Punkten eine nur kleine, beim Einlauf selbst eine fast unmerkliche wird. Der Einfluß der Außenzirkulation vermag also nicht bis zum Einlauf vorzudringen, so daß wir ihn dort mit Recht vernachlässigen durften.

Läßt man auf die Membrane von untenher den Druck $p = -2\omega S$ einwirken, so entsteht das Abbild der **Wirbelströmung, die stets mit einer Zirkulation verbunden ist.** Nach Lamb, Art. 33, ist für eine das Rad ganz umschließende Linie die im Sinne des Uhrzeigers gerechnete Zirkulation $= 2\omega \times$ Gesamtfläche — abzüglich die gegen den Sinn des Uhrzeigers gerechnete Zirkulation um alle Schaufelumfänge. Wählt man als Befestigung der Membrane den gleichen Kreisumfang wie vorhin, so kommt zu dieser von ω allein abhängigen Zirkulation noch die vorhin erzeugte reine Potentialzirkulation hinzu.

d) Übersichtliche Lösung. Man fügt zur **Stromfunktion Ψ_1 zunächst eine Zirkulations-Potentialstromfunktion Ψ_3 von solcher Art zu, daß die zusammengesetzte Bewegung tangentialen Auslauf am Schaufelende** aufweist. Die so geartete Strömung könnte nach dem Verfahren von Flügel wie für eine ruhende Schaufel entworfen werden. Die Anschauung legt die Vermutung nahe, daß die Geschwindigkeiten am Austritt von der Schaufelrichtung nur unwesentlich abweichen und unter sich nahezu gleich groß sein werden.

Zur Stromfunktion $\Psi_1 + \Psi_3$ ist nun eine Funktion Ψ_2 hinzuzufügen, die **den Wirbel $-\omega$ besitzt und den tangentialen Auslauf nicht stört.** Dies wird der Fall sein, wenn die zugehörige Geschwindigkeit um die Schaufelkante herum auf den Wert Null sinkt, was für die Membrane das Vorhandensein einer **wagrechten Tangentialebene am Schaufelende** bedingt. Man muß daher bei der Einstellung der Membrane die Höhe z' und den Abstand r' so lange abändern, bis diese Forderung erfüllt ist. In Abb. 962 ist dies durch die bei B_0 (im Schnitt) wagrecht angenommene Tangente der Schnittlinie a_0 als erreicht angedeutet.

e) Die Strömung in großer Entfernung vom Rad muß schließlich vom Winkel unabhängig werden, da sich alle Druckunterschiede allmählich ausgleichen. Da wir von Massenkräften abgesehen haben, wird die Absolutströmung dem Gesetz

$$r\,c_u = A\,; \qquad 2\pi r\,c_r = q \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

genügen müssen. Dies entspricht der Stromfunktion

$$\Psi_{\text{abs}} = -A \lg n\, r + \frac{q}{2\pi}\varphi \quad \ldots\ldots \quad (14\text{a})$$

aus der sich in der Tat

$$c_u = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{A}{r}\,; \qquad c_r = \frac{\partial \Psi}{r\,d\varphi} = \frac{q}{2\pi r} \quad \ldots\ldots \quad (14\text{b})$$

ergibt. Die relative Bewegung unterscheidet sich von der absoluten durch Hinzutreten der Geschwindigkeit $-u = -r\omega$ an jedem Punkt; was das Anfügen der Stromfunktion $\omega r^2/2$ bedingt, und im ganzen

$$\Psi_{\text{rel}} = \frac{\omega r^2}{2} - A \lg n\, r + \frac{q}{2\pi}\chi \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

ergibt. In der Tat folgen hieraus

$$w_u = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{A}{r} - \omega r = c_u - u\,; \qquad w_r = \frac{\partial \Psi}{r\,\partial \chi} = c_r \quad \ldots\ldots \quad (15\text{a})$$

als die richtigen relativen Geschwindigkeiten.

Sind die Stromfunktionen Ψ_2 und Ψ_3 den aufgestellten Bedingungen gemäß bestimmt worden, so findet der richtige Anschluß an die Strömung im Unendlichen von selbst statt.

Die Gleichung der relativen Energie ist wie in Abschn. 165

$$\frac{w^2}{2g} = \frac{u^2}{2g} - \frac{p}{\gamma} + C \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

In großen Abständen wird $w \sim u$ und damit $p = \text{konst}$. Diesem scheint zu wiedersprechen, daß bei der relativen kreisenden Strömung die Fliehkraft einen nach außen endlos wachsenden Druck hervorruft. Diese Täuschung wird behoben, wenn man überlegt, daß **auch die Corioliskraft** als Ergänzung an jedem Teilchen angefügt werden muß, wodurch die erforderliche Zentripetalkraft in der Tat herbeigeschafft wird.

f) Die mittlere Umfangskomponente $\bar{c}_{2u}$ der absoluten Geschwindigkeit. Bei radialem Eintritt ist das vom Rade auf 1 kg der Flüssigkeit übertragene Moment, da $c_{1u} = 0$ ist:

$$M = \frac{1}{g}(u_2\,\bar{c}_{2u} - u_1\,c_{1u}) = \frac{u_2\,\bar{c}_{2u}}{g} \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

Man kann jedoch ebensogut die im großen Abstand R vorhandene Umfangskomponente C_u heranziehen, die wir als schon ausgeglichen ansehen wollen, so daß $M = \frac{U\,C_u}{g}$ wird. Man erhält mithin aus (17)

$$\bar{c}_{2u} = C_u \frac{U}{u_2} = C_u \frac{R}{r_2} = \frac{A}{r_2} \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

Auf **unmittelbarem Wege** kann ein **angenäherter Wert von** c_{2u} durch folgende Überlegung abgeleitet werden. Die Zusammensetzung von Ψ_1 mit Ψ_3 führt, wie erläutert, auf tangentialen Austritt mit wenig veränderlicher relativer Geschwindigkeit w_2 in Richtung der Schaufelneigung β_2. Die relative Umfangskomponente dieser Strömung ist also (vom Vorzeichen abgesehen) $w_{u2} = w_2 \cos \beta_2$. Zu dieser Geschwindigkeit tritt diejenige hinzu, die der Stromfunktion Ψ_2 entspricht und durch Ausspannen einer Membrane über dem Radmodell experimentell bestimmt werden kann. In allergröbster Näherung könnte man den durch die Schaufelspitzen $B_0 B_1$ in Abb. 962 gehenden wagerechten Schnitt b der Membrane nach Schätzung einzeichnen, und die Wölbung bis etwa zu Punkt B_y mit den zugehörigen Spannweiten wie in der Nebenfigur angedeutet, als Parabeln ansehen. Für die über B_1 ausbuchtende Fläche wäre die Annahme

$$z = \Psi = \frac{\omega}{2} r^2 = \frac{p}{4S} r^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (19)$$

zulässig, wobei $n_y/2$ als äußerster Halbmesser aufzufassen wäre. Mit Hilfe der darstellenden Geometrie würde man, unter Ausgleich des Überganges von der Parabel zur Fläche (19) einige Schnitte konstruieren und die Ableitung $-\frac{\partial \Psi}{\partial r} = w_u'$ längs des Radumfanges graphisch ermitteln. Bezeichnet man die Bogenlänge $B_0 B_1$ mit s_2, so kann der Mittelwert

$$\overline{w}_u' = \int \frac{w_u' \, ds}{s_2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (19a)$$

graphisch bestimmt werden. Dann ist die gesamte relative Umfangskomponente

$$w_u = w_{u2} + \overline{w}_u'. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (19b)$$

Die absolute Umfangskomponente, in der Richtung der Umfangsgeschwindigkeit u_2 positiv gerechnet, ist

$$c_{u2} = u_2 - (w_{u2} + \overline{w}_u'). \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (20)$$

Die Wirkung der Wirbelströmung besteht mithin in einer Verkleinerung der absoluten Umfangskomponente, also in einer Verminderung der von der Flüssigkeit aufgenommenen Energie bei Kreiselfördermaschinen.

g) Strahlablösung innerhalb des Kanals. Die durch die Anschauung begründete Formel (13a) ermöglicht es, bei aller Unvollständigkeit dieser Skizze einer genaueren Theorie, auf einen wichtigen Umstand zahlenmäßige Schlüsse zu ziehen, von dem die ältere Theorie keine Vorstellung gehabt hat. Die reine Durchflußströmung möge an der inneren (hohlen) und an der äußeren Schaufelwand die relativen Geschwindigkeiten w_a, w_i aufweisen, die man bei längeren Kanälen durch den Mittelwert

$$w_0 = \frac{q}{2\pi r} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (21)$$

ersetzen könnte. Die zusätzliche relative Wirbelgeschwindigkeit ist nach Gl. (13a) nur von der Kanalbreite n und der Winkelgeschwindigkeit ω gemäß Formel

$$w' = n\,\omega \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (22)$$

abhängig. Wir erhalten also als resultierende relative Geschwindigkeit, mit Rücksicht auf den Sinn der Strömungen, am Innenrand

$$w_i' = w_i - w' \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (23)$$

am Außenrand

$$w_a' = w_a + w'. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (24)$$

Es gibt eine Grenzgeschwindigkeit $w_i = w'$, bei der $w_i' = 0$ wird; darüber hinaus beginnt ein rückläufiger Wirbel sich auszubilden, d. h. **es findet eine Ablösung des Strahles von der treibenden Schaufelfläche bei Verdichtern statt.** Die Grenzgeschwindigkeit besitzt angenähert den Wert

$$w_0 = n\,\omega;$$

ihr entspricht die Fördermenge

$$q = 2\pi r n \omega \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (25)$$

wobei n die Kanalbreite bedeutet.

Wollte man sich die **wirbelfreie Durchflußströmung** durch die **elastische Analogie** veranschaulichen, so müßte die Membrane an der Kante $A_0 B_0$ überall die Höhe $z = 0$, an der Kante $A_1 B_1$ hingegen die Höhe $z + q$, wo q das Durchflußvolumen ist, besitzen, und ohne Innendruck mit beliebiger Spannung gespannt werden. Überlegt man, daß sie sich infolge der Kanalkrümmung nach abwärts wölben müßte, so kann die Form der wagerechten Schnitte durch die Anschauung einigermaßen festgestellt werden. Viel schwieriger ist die Vorstellung der Membranfläche am Ein- und Auslauf. Wenn man annimmt, daß am Umfang eines Kreises vom Halbmesser r_0 innerhalb des Einlaufes die Strömung noch eine ungestört rein radiale ist, so müßte über jenem Umfang **eine Schraubenlinie** konstruiert werden, an die man die Membrane befestigt. Allein der Anfangspunkt ($z = 0$) der Schraubenlinie ist nicht festgelegt.

Ähnlich würde am Austritt, wenn im Abstand r'' keine Störung mehr vorhanden ist, d. h. die Geschwindigkeiten sich ganz ausgeglichen haben, die Membrane wieder einer Schraubenlinie von gleicher

Steigungshöhe (kleinerem Steigungswinkel) folgen, doch ist deren Anfangspunkt nicht angebbar. Die exakte Lösung einiger Aufgaben tut hier dringend not.

Die Entstehung der jeweils geeigneten Zirkulationsströmung wird durch die Theorie der Grenzschichten von Prandtl erklärt. In Wirklichkeit ist einerseits jede Flüssigkeit mit einer Reibung behaftet und anderseits unfähig, so große negative Spannungen zu erleiden, als erforderlich wäre, um die hohe Geschwindigkeit an den Kanten der wirklichen Schaufeln zu erzeugen. An der Stelle, wo gegen den Staupunkt hin die Strömung verzögert wird, löst sich eine Wirbelschicht ab, deren Gegenwirkung die Zirkulation ist, so daß für ein größeres Gebiet, welches die Schaufel und jenen Wirbel umschließt, das Impulsmoment im ganzen verschwindet. Man vergleiche hierüber die Veröffentlichungen von Prandtl, insbesondere „Tragflügeltheorie" in Nachricht. d. K. Ges. d. Wissenschaften, Göttingen. Math.-Phys. Kl. 1918. Neuerdings wird von Föttinger[1]) auf die Tatsache hingewiesen, daß bei der schräg gestellten Platte Abb. 961 die zentrisch symmetrisch verlaufende Potentialströmung in der Plattenmitte ein Loch ohne Störung der Strömung anzubringen erlaubt. Dann bestehen längs der beiden den oberen, beziehungsweise den unteren Rand umfassenden, durch diese Bohrung gehenden Bahnen zwei entgegengesetzte mächtige Zirkulationen. Föttinger ist der Ansicht, daß die untere, durch die Prandtlschen Grenzschichten abgelöst, fortschwimmt, so daß nur die obere als tragdruckerzeugend übrig bleibt.

Erzeugung der relativen Wirbelströmung durch einen Drehimpuls. Wenn ein mit Flüssigkeit gefülltes prismatisches Hohlgefäß durch einen Drehimpuls mit der Winkelgeschwindigkeit ω in Drehung um eine zur Erzeugenden parallele Achse versetzt wird, so nimmt die Flüssigkeit eine Bewegung an, deren Geschwindigkeit der Torsionsspannung verhältnisgleich ist, die in einem Prisma von gleichem Querschnitt bei einem Verdrehungswinkel ω für die Längeneinheit entstehen würde[2]). Da aber letztere nach der Membrananalogie die dem axialen Wirbel $-\omega$ entsprechende Wirbelbewegung darstellt, so haben wir in jener Impulsbewegung ein weiteres Mittel um die Turbinenströmung zu veranschaulichen. So kann man sich beispielsweise vorstellen, daß die axiale „Quelle" in Gestalt eines dünnen Rohres mittels Schieber abgeschlossen ist und die mit Flüssigkeit gefüllte Kreiselmaschine „angelassen", d. h. auf die Winkelgeschwindigkeit ω beschleunigt wird. Da die Anschauung nahelegt, zu vermuten, daß auch für den mehrfach zusammenhängenden Raum, den das Kreiselrad bildet, jener Lehrsatz gilt, so wird die relative Strömung der Flüssigkeit die Wirbelbewegung mit dem Wirbel $-\omega$ darstellen, die den einen Bestandteil der schließlichen Strömung ausmacht. Außen gibt es relativ zum Rad eine Wirbelzirkulation; die absolute Zirkulation ist vorläufig gleich Null. Wird nun die Quelle geöffnet, so entsteht zunächst die kräftefreie Durchflußströmung, im wesentlichen radial; durch die Ablösung von Wirbeln an den Schaufelenden kann man sich daraufhin die Potentialzirkulation entstehen denken.

172. Mit Reibung verbundene Strömungen.

Die theoretische Hydrodynamik unterscheidet zwei Arten von Flüssigkeitsreibung, die man als eine Art Schubspannung und eine Art Zermalmungsdruck ansehen kann. Bei der

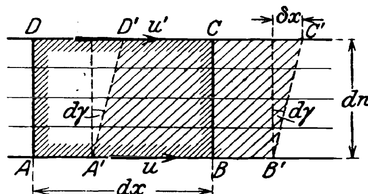


Abb. 963. Reibung als Schubspannung.

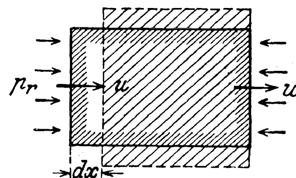


Abb. 964. Reibung als Zermalmungsdruck.

Strömung nach Abb. 963, wo alle Geschwindigkeiten gleich gerichtet sind, wird ein Rechteck $ABCD$ nach Verlauf der Zeit dt in das schiefwinklige Parallelogramm $A'B'C'D'$ verzerrt, mit dem Winkel

$$d\gamma = \frac{\delta x}{dn} = \frac{(u'-u)\,dt}{dn} = \frac{\partial u}{\partial n}\,dt.$$

[1]) Nach während der Drucklegung erhaltener freundlicher Mitteilung.

[2]) Thomson & Tait, Natural Philosophie II, S. 243.

Man darf, wie die Erfahrung bestätigt hat, annehmen, daß die Reibung in der Fläche AB der Formänderungsgeschwindigkeit $d\gamma/dt$ verhältnisgleich ist, und setzt für die Flächeneinheit

$$\tau = \eta \frac{\partial u}{\partial n} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

wo η die Zähigkeitsziffer heißt.

Findet zugleich eine Strömung nach der Lotrechten statt, so wird allgemeiner

$$\tau_{zx} = \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1a)$$

mit ähnlichen Ausdrücken für τ_{xy} und τ_{yz}, wobei $\tau_{xy} = \tau_{yz}$ usw.

Die „Zermalmungsreibung" tritt in der Stirnfläche Abb. 964 auf. Die Verkürzung der Länge dx in der Zeit dt ist $dx = (u - u')\,dt = -\frac{\partial u}{\partial x} dx\,dt$, und die Reibung wird der Geschwindigkeit dieser Zermalmung des Elementes für die Längeneinheit, d. h. $-\frac{\partial u}{\partial x}$ verhältnisgleich gesetzt, wobei die Hydrodynamik aus den allgemeinen Gleichungen der Bewegung folgert, daß die Vorzahl 2η sein müsse, demnach die Reibung

$$p_r = -2\eta \frac{\partial u}{\partial x} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

als Druck auftritt, sofern u in Richtung der Bewegung abnimmt. Diese Formel gilt, solange das Teilchen keine Änderung des Rauminhaltes erfahren hat. Im allgemeinen wird ein Rechtkant $dx\,dy\,dz$ in Richtung von x um $\delta x = \partial u/\partial x\,dx\,dt$ verlängert und der Rauminhalt um $\delta x \cdot dy\,dz$ vergrößert; mit den entsprechenden Ausdrücken für die v- und w-Richtung erhält man als gesamten Zuwachs

$$\delta V = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dx\,dy\,dz\,dt \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2a)$$

Der Klammerausdruck wird die „Divergenz" der resultierenden Geschwindigkeit c genannt und mit div c bezeichnet. Es wird angenommen, daß eine zusätzliche Stirnreibung auftritt, die zu $\delta V : dx\,dy\,dz\,dt$ proportional ist, wobei wahrscheinlich gemacht wird, daß die Vorzahl $-\frac{2}{3}\eta$ sei. Die Gesamtreibung ist daher nach der x-Richtung allgemein (als Druck positiv aufgefaßt)

$$p_{rx} = -2\eta \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3} \operatorname{div} c \right] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Findet eine Raumabnahme statt, so wird div c negativ, der Zermalmungswiderstand wird, wie es der Anschauung entspricht, vergrößert.

Diese Reibungen sind unter die auf das Massenelement Abb. 948 wirkenden Kräfte aufzunehmen, um die neuen Bewegungsgleichungen aufzustellen. Es treten in den Stirnflächen nun auch beim Grenzübergang zu dx, dy, $dz = 0$ verschieden große Drücke

$$p_x = p + p_{rx}; \quad p_y = p + p_{ry}; \quad p_z = p + p_{rz} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

auf. Man nimmt an, daß **die Zustandsgrößen** (da in einem Punkt nur ein Zustand herrschen kann) **von einer Größe p abhängen,** die sich, wie die Hydrodynamik nachweist, als **arithmetisches Mittel der Seitendrücke**

$$p = \tfrac{1}{3}(p_x + p_y + p_z) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

darstellt. Die unschwere Ableitung sehe man in den angeführten Quellen nach. Unter Annahme eines unveränderlichen η und mit der Abkürzung

$$\nabla u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

findet man

$$\left.\begin{aligned}
\frac{Du}{dt} &= -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\eta}{\varepsilon}\left[\nabla u + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{div} c)\right] + X \\
\frac{Dv}{dt} &= -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\eta}{\varepsilon}\left[\nabla v + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{div} c)\right] + Y \\
\frac{Dw}{dt} &= -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\eta}{\varepsilon}\left[\nabla w + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{div} c)\right] + Z
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

Dazu tritt die Stetigkeitsbedingung

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+\frac{\partial \varepsilon u}{\partial x}+\frac{\partial \varepsilon v}{\partial y}+\frac{\partial \varepsilon w}{\partial z}=0 \quad \text{oder} \quad \frac{D\varepsilon}{dt}+\varepsilon \operatorname{div} c=0 \quad \ldots \ldots (8)$$

Müßte man (wie etwa bei der Lagerreibung) die Veränderlichkeit von η berücksichtigen, so würde dieses mitdifferentiiert werden, und man erhielte z. B. im Ausdruck von Du/dt neben den in Gl. (7) angeführten Gliedern noch den Ausdruck

$$+2\left[\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{3}\operatorname{div} c\right]\frac{\partial \eta}{\partial x}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial \eta}{\partial y}+\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{\partial \eta}{\partial z} \quad \ldots \ldots (8a)$$

Bei dieser verwickelten Bauart ist es begreiflich, daß die allgemeinen Gleichungen bis jetzt nur in wenigen vereinzelten Fällen integrierbar gewesen sind, und ein Prunkstück der Lehrbücher ohne weitere „Nutzanwendung“ bilden. Trotzdem ist es unerläßlich, mit ihnen bekannt zu werden, nicht so sehr um ihrer selbst willen, als wegen der Grundlagen, auf denen sie beruhen. Wir benutzen sie, um über die Rolle der inneren Reibung ins reine zu kommen, da diese in den technischen Energiegleichungen Abschn. 16, um sie durchsichtig zu erhalten, nur durch eine äußere Reibung ersetzt wurde.

a) Strömung in einem Diffusor als vereinfachtes Beispiel einer Reibungsströmung.

Wir **setzen voraus,** daß bei der Strömung im Diffusor, Abb. 965, **nur eine Reibung längs der Mantelflächen der Stromfäden** vorkommt; w ist abhängig von l und r. Für die Bewegungsgleichung sind die Flüssigkeitsdrücke $(p-p')\,df_0$ wo df_0 den mittleren Querschnitt bedeutet. Die gesamten Reibungskräfte auf die Mantelflächen df_1 und df_2 seien R und R'. Ist V der Rauminhalt, so wird die Masse $dm=\gamma V/g$, und die Schwerpunktgleichung lautet

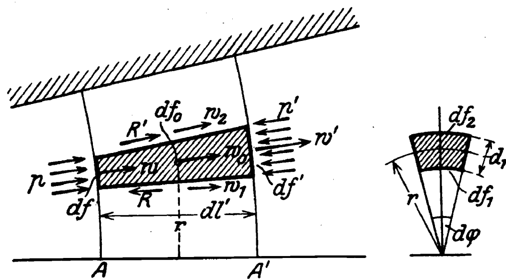


Abb. 965. Kräfte aus Flüssigkeitsteilchen.

$$dm\frac{dw_0}{dt}=-df(p'-p)+(R'-R) \quad . \quad (9)$$

Dabei ist

$$R=df_1\,\eta\,\frac{\partial w_1}{\partial r}; \qquad R'=df_2\,\eta\,\frac{\partial w_2}{\partial r}. \quad (10)$$

Wir stellen der Reihe nach die Gleichungen der Schwerpunkts-, der Gesamt- und der relativen Energie auf. Um die erste zu erhalten, muß man die Kräfte an den Schwerpunkt übertragen und die während der Verschiebuug $dx=w_0\,dt$ geleistete Arbeit dem Zuwachs der kinetischen Energie gleichsetzen. Man erhält mit $R'-R=dR\cdot$

$$dm\,w_0\,dw_0=(p-p')\,df_0\,w_0\,dt+dR\,w_0\,dt \quad \ldots \ldots \ldots (11)$$

Für die Gesamtenergie gilt:

$$dm\,w_0\,dw_0+dU=p\,df\,w\,dt-p'\,df'\,w'\,dt+R'w_2\,dt-R\,w_1\,dt+dQ=-d_l\,(p\,df\,w)\cdot dt$$
$$+d_r\,(R\,w)\cdot dt+dQ \quad \ldots \ldots \ldots (12)$$

wobei die Fußnote am Differential andeutet, nach welcher Richtung man fortschreitet. Für die Energie der relativen Bewegung um den Schwerpunkt gilt:

$$dQ+R\,(w_2-w_1)\,dt=dU+p\,dV \quad \ldots \ldots \ldots (13)$$

Darin bedeutet dQ die von den Nachbarelementen gelieferte Wärme, dU die Zunahme der inneren Energie im mechanischen Maß. Die Reibungsarbeit dem ruhenden Schwerpunkt gegenüber ist genauer geschrieben $=R'\,(w_2-w_0)\,dt+R\,(w_0-w_1)\,dt$, und geht bei Vernachlässigung kleiner Größen höherer Ordnung in $R\,(w_2-w_1)\,dt$ über. Indem man (11) von (12) abzieht, entsteht

$$dU=-d_l\,(p\,df\,w)\,dt+d_r\,(R\,w)\,dt+w\,df\,d_l\,p\,dt-w\,d_r\,R\,dt+dQ\,.$$

Das nach Kürzung übrig bleibende Glied $-p\,d_l\,(w\,df)\,dt$ bedeutet $-p\,[w'\,dt\,df'-w\,dt\,df]$ und die Klammer ist nichts anderes als die Volumenzunahme dV, da $V=df_0\,dl$ gesetzt war. Man erhält schließlich mit $w_2-w_1=d_r\,w$

$$dQ+R\,d_r w\cdot dt=dU+p\,dV \quad \ldots \ldots \ldots (13a)$$

und diese Gleichung stimmt mit (13) überein. Die „Wärmegleichung“, wie man (13) nennen kann, ist also auch hier eine Folge der beiden anderen Energiegleichungen. Die (relative) innere Reibung jedes Elementes wird ihm selbst als Wärme zugeführt.

Eigentümlich scheint das Ergebnis der Integration der Gesamtenergie Gl. (12) über einen Bereich, der einen Teil der Düse ganz ausfüllt, z. B. dem der zwischen den Querschnitten $A\,A'$ enthalten ist. Die

Summe der mit den absoluten Verschiebungen gerechneten Reibungsarbeiten ergibt

$$\int_{r=0}^{r=r_a} d_r (R w)\, dt = \int_{r=0}^{r_a} \frac{\partial}{\partial r} (R w)\, dr\, dt = \{(R w)_{r=r_a} - (R w)_{r=0}\}\, dt = (0 - 0)\, dt = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Sie verschwindet, weil in der Achse infolge der Symmetrie $R = 0$ sein muß, und am Rande $w = 0$ ist, weil man annehmen muß, daß sowohl Flüssigkeiten wie Gase an der Wand haften. Dies folgt noch unmittelbarer aus der Gleichheit und dem entgegengesetzten Sinn der Reibungen, die zwei benachbarte Elemente aufeinander ausüben, wodurch sich die Arbeiten paarweise aufheben, bis auf die Wandoberfläche, die aber auch keine Arbeit ergibt, weil sie eben haftet. **Die absolute Arbeit der inneren Reibung ist also wohl zu unterscheiden von der relativen; die erstere verschwindet, die letztere trägt nichts bei zur Verminderung der Gesamtenergie,** — was freilich von Anfang an feststand, denn diese Arbeit bedeutet einen Verlust an kinetischer Energie, der sofort durch die entstehende Wärme wettgemacht wird. Aus (14) folgt noch

$$\int_0^{r_a} d_r (R w) = \int_0^{r_a} R\, dw + \int_0^{r_a} w\, dR = 0, \qquad \text{oder} \qquad \int_0^{r_a} R\, dw = -\int_0^{r_a} w\, dR \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Man erhält so zwei Ausdrücke für die relative Reibungsarbeit, d. h. gesamte Reibungswärme, wobei jedoch zu beachten ist, daß nur die bestimmten Integrale, nicht aber die Einzeldifferentiale einander gleich sind. Die rechte Seite in (15) ist, wie man erkennt, die negative Arbeit der an den Schwerpunkt verlegten Reibungskräfte.

b) Allgemeine Energiegleichungen.

Von diesen kommt für uns in erster Linie die „Wärmegleichung" in Betracht, da sie die in Wärme umgewandelte Reibungsarbeit unmittelbar zur Anschauung bringt.

Wir fassen ein Rechtkant $dx\,dy\,dz$ ins Auge, auf dessen $dy\,dz$-Flächen die Reibungskräfte p_{rx} und p'_{rx} wirken. Die Verschiebungen δx gegen den ruhenden Schwerpunkt hin sind, wenn $u u'$ die Geschwindigkeiten der Endflächen, u_0 die des Schwerpunktes bedeutet $(u' - u_0)\,dt$; $(u_0 - u)\,dt$ oder es ist $\delta x = -\frac{1}{2}\partial u/\partial x\, dx\, dt$; die Arbeiten sind $p_{rx} dy\, dz \cdot \delta x + p'_{rx} dy\, dz\, \delta x$ oder im ganzen, wenn man nächsthöhere kleine Größen vernachlässigt:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} dx\, dy\, dz\, p_{rx}\, dt = -\frac{\partial u}{\partial x} dV\, p_{rx}\, dt.$$

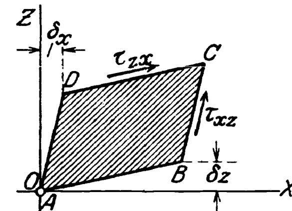


Abb. 966. Berechnung der Reibungsarbeit.

Mit den gleichgeformten Ausdrücken der anderen Kräfte erhält man im ganzen

$$-\left(\frac{\partial u}{\partial x} p_{rx} + \frac{\partial v}{\partial y} p_{ry} + \frac{\partial w}{\partial z} p_{rz}\right) dV\, dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Die Schubspannung τ_{zx}, Abb. 966, wirkt auf Fläche $dx\,dy$, die sich um $\xi = \partial u/\partial z\, dz\, dt$ gegen die unten gegenüberliegende verschiebt, so daß die Arbeit $\tau_{zx}\, \partial u/\partial z\, dV\, dt$ geleistet wird[1]). Ähnlich berechnet sich die Arbeit von τ_{xz} an Fläche BC als $\tau_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} dV dt$; da $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, so erhält man für alle Seitenflächen zusammen

$$dV\, dt \left\{ \tau_{yz}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) + \tau_{zx}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) + \tau_{xy}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Schiebt man die Ausdrücke (1a) und (3) ein, so erhält man für die Reibungswärme (in mech. Maß) die Formel

$$dA_r = \eta \left[2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 - \frac{2}{3} (\operatorname{div} c)^2 \right] dV\, dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Hierzu ist folgende wichtige Bemerkung zu machen.

[1]) Genau genommen müßte man wieder den Schwerpunkt S als ruhend ansehen, und die Verschiebung von Fläche DC nach rechts als $\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial z} dz\, dt$, diejenige von AB (nach links) als $-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial z} dz\, dt$ ansetzen. Die Vermehrung mit den Kräften $\tau'_{zx} dx\, dy$, $-\tau_{zx} dx\, dy$ und die Summation ergeben bei Vernachlässigung höherer kleiner Größen dasselbe.

Summiert man über einen bestimmten Rauminhalt, so erhält man die Reibungsarbeit die während der Zeit dt in der ganzen Masse geleistet wurde. Liegt eine einfache Durchflußströmung im Beharrungszustand vor, so ist diese Arbeit gleich groß wie die, die an der im Zeitelement dt einströmenden Menge während ihres ganzen Weges bis zur Ausströmung geleistet wird. Denn die aufeinanderfolgenden Lagen dieser Menge erfüllen den ganzen gegebenen Raum, also kommen bei der Summation der Zeit nach dieselben Differentiale dA_r vor, wie bei der Summation dem Raume nach.

Die von außen hinzutretende Wärmemenge wird, wenn wir von Strahlung absehen, durch Leitung zugeführt. Es seien T und T' die Temperaturen in den Endflächen $dy\,dz$ bei x und bei $x + dx$ (sie seien als absolute Temperaturen eingeführt, um Verwechselungen mit der Zeit t zu vermeiden). Bei x strömt die Wärmemenge $= \lambda\,\partial T/\partial x\,dy\,dz\,dt$ zu, bei $x + dx$ die Menge $-\lambda\,\partial T'/\partial x\,dy\,dz\,dt$ ab. Der Überschuß $\lambda\left(-\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T'}{\partial x}\right)dy\,dz\,dt$ oder $\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\,dx\,dy\,dz\,dt$ verläßt das Element. Mit Hinzufügung der Wärmen, die durch die übrigen Seitenflächen ein- und austreten, erhalten wir im ganzen

$$dQ = \lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)dV\,dt \quad \ldots \ldots \ldots \quad (19)$$

Die Ausdehnung des Elementes dV beträgt nach Gl. (2a)

$$\delta(dV) = \operatorname{div} c \cdot dV \cdot dt.$$

Demnach wird an die Umgebung durch den gleichmäßigen Druck p die Arbeit

$$dA_p = p\,\delta(dV) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (20)$$

abgegeben. Die Massenkräfte leisten bei ruhendem Schwerpunkt eine Arbeit von höherer Kleinheitsordnung. Die innere Energie werde um den Betrag dU erhöht. Dann lautet die **Wärmegleichung** [wenn zur Unterscheidung das Wärmeäquivalent 1/427 kcal mit $\mathfrak{A}$ bezeichnet wird]

$$dQ + \mathfrak{A}\,dA_r = dU + \mathfrak{A}\,p\,\delta(dV) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (21)$$

Im Falle eines Gases ist $dU = \gamma\,dV \cdot du = \gamma\,dV\,c_v\,dT$. Aus der Gleichung der Stetigkeit $D\varepsilon/dt + \varepsilon \operatorname{div} c = 0$ folgt mit $\varepsilon = \gamma/g = p/g\,R\,T$; $DT/dt = (Dp/dt + p \operatorname{div} c)(v/R)$. Dies in dU und in (21) eingesetzt führt auf die Form

$$\frac{Dp}{dt} + k\,p \operatorname{div} c = (k-1)\left[\frac{\lambda}{\mathfrak{A}}\,\nabla T + \eta\left\{2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \ldots\right\}\right] \quad \ldots \quad (21\text{a})$$

wobei der Faktor von η mit dem Klammerausdruck in der Reibungswärme Gl. (18) übereinstimmt[1]).

Um die Gleichung der kinetischen Schwerpunktsenergie zu erhalten, müßte man die Kräfte an den Schwerpunkt verlegen und mit den Verschiebungen $u\,dt$, $v\,dt$, $w\,dt$ vermehren. Dies kommt nach Teilung mit dm darauf hinaus, die Gl. (7) mit diesen Verschiebungen zu vermehren und zu addieren, wobei auf der linken Seite $D(u^2 + v^2 + w^2)/2 = Dc\,dc$ als Zunahme der kinetischen Energie für die Masseneinheit auftritt. Wir unterlassen es, diese Gleichung hinzuschreiben, weil sie nichts Übersichtliches vorstellt.

Für die Gleichung der Gesamtenergie müßte endlich die Reibungsarbeit nicht mit den Verschiebungen des Schwerpunktes, sondern der Flächenelemente, an denen die Reibungskräfte angreifen, gerechnet werden.

Wir verweisen auf die Literatur[2]) und fügen eine Bemerkung über die auf eine **endliche Masse bezogene mit den absoluten Verschiebungen gerechnete Reibungsarbeit** bei. Diese ist, wie oben erläutert, soweit sie das Innere der Flüssigkeit betrifft $= 0$, weil zwischen zwei benachbarten Elementen gleichgroße entgegengesetzte Reibungskräfte wirken, deren Arbeiten sich aufheben. Ist die Flüssigkeit überall von Wänden umgeben, an denen sie haftet, so ist jene Reibungsarbeit im ganzen $= 0$; im andern Fall, also insbesondere im Ein- und Ausströmungsquerschnitt, sind die betreffenden Oberflächen-

[1]) Diese Form stammt von Smoluchowski; Principles of Aerodynamics. Philos. Mag., Bd. 7, 1904, S. 669.

[2]) Z. B. auf Grashof, Theoret. Maschinenlehre, Leipzig 1875, Bd. I, S. 29, wo diese Rechnung sehr klar durchgeführt ist. (Allerdings ist der Ansatz der Reibungskräfte unrichtig und es müßte in Gl. (6) auf S. 27 bei $\partial\Delta/\partial x$ die Beizahl 1/3 stehen.)

anteile in Anschlag zu bringen. In manchen Anwendungen sind diese Anteile unbedeutend und können vernachlässigt werden. Nun kann man die gesamte Reibungsarbeit zusammensetzen aus dem Anteil, der bei der Verschiebung des Schwerpunktes ohne Verzerrung des Rauminhaltes geleistet wird, und aus demjenigen, der bei der relativen Bewegung gegen den Schwerpunkt auftritt, Gl. (18). Da die Summe der beiden unter den zuletzt angegebenen Umständen = Null ist, so folgt, daß der erste Anteil, der für die Berechnung der kinetischen Schwerpunktsenergie in Frage kommt, **dem negativen Betrag der Reibungswärme gleich ist.** Allein, wie schon im Beispiel unter a) erwähnt, nur als Integralwert, und nicht für das einzelne Massenelement.

Auf diesen Ersatz kommt die in Abschn. 16 angewendete Rechnungsart hinaus, die man auch noch wie folgt besser veranschaulichen kann. Nach Abschn. 28 ist die Geschwindigkeit über den Querschnitt ziemlich gleichmäßig verteilt und nimmt in der Nähe der Wand sehr rasch auf Null ab. Sieht man von dieser dünnen Schichte ab, so kann in der Tat die Strömung so behandelt werden, **als ob die Flüssigkeit wie ein massiver Zylinder durch das Rohr hindurchglitte und am Umfange eine äußere Reibung zu überwinden hätte.** Es ist also die (relative) innere Reibungsarbeit für die ganze Masse durch die äußere Reibungsarbeit einer ohne Formänderung durchströmenden Masse ersetzt.

172a. Verdichtungsstöße und Verdünnungswellen.

a) Die Zustandsänderung während des Dampfstoßes.

Wennschon in der rein mathematischen Theorie des Verdichtungsstoßes dieser als eine „Unstetigkeitsstelle" aufgefaßt wird, so kann physikalisch kein Zweifel daran herrschen, daß zu seiner Ausbildung Zeit gehört, daß er also eine endliche räumliche Ausdehnung haben muß. Um nun die Frage, welche Zwischenzustände der Dampf dabei durchläuft, zu beantworten, muß die Aufgabe allgemein, d. h. unter Berücksichtigung der Wärmeleitung und des bei der Verdichtung auftretenden „Zermalmungsdruckes" behandelt werden, der nichts anderes ist als die Reibungskraft, die auf eine zur Strömung senkrecht stehende Fläche ausgeübt wird (hier ein Druck, da die Geschwindigkeit in Richtung der Bewegung abnimmt).

Die allgemeinen hydrodynamischen Gleichungen (7) des Abschnittes 172 schrumpfen auf eine zusammen, wobei wir die Z-Achse in die Strömungsrichtung verlegen, und beachten, daß die Geschwindigkeiten $u = v = 0$ werden, w nur von z abhängt, und infolge des Beharrungszustandes $dw/dt = 0$ ist. Dann gilt die Gleichung

$$\frac{\gamma}{g} w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + 2\eta \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Hierin ist, wie aus der Ableitung hervorgeht, $2\eta\, \partial w/\partial z$ die zusetzliche Reibungskraft oder der **Zermalmungsdruck** $-p^*$, so daß (1) die Form

$$\frac{\gamma w}{g} \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial(p + p^*)}{\partial z} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

annimmt. Beachten wir die Durchflußgleichung

$$w\gamma = w_1 \gamma_1 = \text{konst.} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

so kann (2) von $p = p_1$ bis p integriert werden, und liefert

$$\frac{w_1 \gamma_1}{g}(w - w_1) = -(p + p^* - p_1) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

wobei p^* für den Anfangszustand $= 0$ vorausgesetzt wurde, da dort die gleichmäßige Geschwindigkeit w_1 herrscht. (4) ist die neue „Stoßgleichung", die sich von der alten durch das Vorhandensein von p^* unterscheidet, das jedoch, wenn die Verdichtung vollendet ist, wieder verschwindet. Wie sich p^* in Zwischenzuständen ändert, ist nicht bekannt, da η nur für die roheste Annäherung als unveränderlich angesehen werden kann. Trotz dieser Unbestimmtheit kann der Stoßvorgang in weitgehendem Maße anschaulich gemacht werden. Zu diesem Behufe ziehen wir die **Gleichung der Gesamtenergie** heran, die die gleiche Form wie für zähigkeitsfreie Verdichtung besitzt, nur daß an Stelle von p die Summe $p + p^*$ treten muß; wir haben also:

$$A \frac{dw^2}{2g} = -d[u + A(p + p^*)v] + dq = -di - A\,d(p^*v) + dq \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

oder mit $i = \frac{Ak}{k-2}(pv)$ zwischen dem Anfangs- und dem Zwischenzustand und integriert:

$$\frac{w^2 - w_1^2}{2g} = \frac{k}{k-1}(p_1 v_1 - pv) - \frac{p^* v}{A} + q \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Die Wärmemenge dq dringt in das Element vermöge der Leitung von den Nachbarelementen ein. Man kann die **Wärmegleichung** aufstellen, wenn man (4) differentiiert und so umformt, daß darin dw^2 vorkommt, d. h. indem man $w_1\gamma_1 dw = w\gamma dw = \gamma dw^2/2$ setzt, und (4) $\times A$ von (5) abzieht. Man erhält

$$dq - Ap^* dv = di - Avdp \quad \ldots \quad (7)$$

wobei das zweite Glied, da dv negativ ist, die positive Reibungswärme darstellt. Die drei Gleichungen (3) (4) (6) genügen, um zunächst den Endzustand $p_2 v_2 w_2$ des Stoßes zu bestimmen, für den, $p^* = 0$ und ebenso $q = 0$ ist, da von außen keine Wärme zugeführt wird, also die durch Leitung übergehende Wärme zum Schluß die Summe Null ergeben muß. Man wird beispielsweise $v_2 = 1/\gamma_2$ aus (3) und p aus (4) in (6) einschieben, wobei der folgende Zwischenausdruck gewonnen wird

$$(k-1)(w_2^2 - w_1^2)\, w_1 = 2k\,[-g p_1 v_1 (w_2 - w_1) + w_2 w_1 (w_2 - w_1)],$$

der durch $w_2 - w_1$ teilbar ist, und die Auflösung

$$w_2 = \frac{a_o^2}{w_1} \text{ mit } a_o^2 = \frac{1}{k+1}\,[(k-1)\,w_1^2 + 2gkp_1 v_1] \quad \ldots \quad (8)$$

ergibt, womit wir auf einem Umweg bei der Formel von **Prandtl** (Abschn. 32) angelangt sind. Schiebt man w_2 in Gl. (4) ein, so folgt

$$p_2 = \frac{1}{k+1}\left[\frac{2 w_1^2 \gamma_1}{g} - (k-1)\,p_1\right] \quad \ldots \quad (9)$$

und aus (3) erhält man schließlich γ_2.

Diese Formeln **verbürgen indes noch nicht die Möglichkeit der Verdichtungskörper,** da bei ihrer Ableitung nur der Energiesatz verwendet worden ist. Es ist nachzuweisen, daß auch dem II. Wärmesatz Genüge geleistet wird. In dieser Hinsicht herrschte bis vor kurzem Unklarheit. **Rayleigh** hat aus der Verbindung von Gl. (3) und (4) die Beziehung

$$p = p_1 + \frac{w_1^2}{g v_1^2}(v_1 - v) - p^* \quad \ldots \quad (10)$$

im übrigen mit Außerachtlassung von p^* abgeleitet und **als unmöglich bezeichnet.** Demgegenüber wies **Proell**[1]) nach, daß der Dampfstoß zum Schluß auf eine **Vergrößerung der Entropie** führt, falls nur die Geschwindigkeit vor dem Stoße, d. h. w_1, größer war, als die dem betreffenden Dampfzustand entsprechende Schallgeschwindigkeit. Trotzdem konnte **Langrod**[2]) den scheinbar begründeten Einwand vertreten, daß, wenn man die Zwischenzustände an der Stoßstelle untersucht, die Entropie zunächst ein Maximum erreiche, von dem ein Abstieg zu dem von **Proell** berechneten Endwerte durch den zweiten Hauptsatz ausgeschlossen sei. Diese Unklarheit wurde durch **Prandtl**[3]) behoben, der darauf hinwies, daß bei der Verdichtung in der Stoßstelle Schichten mit endlichem Temperaturunterschied aneinandergrenzen, daher eine intensive Wärmeübertragung stattfinden muß. Die hierauf Rücksicht nehmende Rechnung erweist denn auch, daß die Entropie nach Maßgabe jener Wärmemitteilung zunimmt und die von **Rayleigh** beanstandete Zustandsänderung gerade die in Wahrheit vorhandene ist.

Hamel[4]) behandelt den Dampfstoß unter Vernachlässigung der Wärmeleitung, statt dessen mit Einführung eines besonderen Gesetzes für die Zähigkeitsreibung und kommt zum Schluß, daß auch ein „Verdünnungsstoß", d. h. eine Umkehrung des Verdichtungsstoßes, möglich ist, welcher Ansicht auf Grund des II. Wärmesatzes zu widersprechen ist. Eine Einsicht in die wahren Vorgänge während des Stoßes wird gewonnen, wenn man die **Veränderung der Entropie im einzelnen** verfolgt. Da die Reibungswärme im Augenblick der Entstehung an das Massenelement abgegeben wird und dessen Temperatur bloß um ein unendlich Kleines hebt, wird, wie bei umkehrbaren Zustandsänderungen die Gesamtwärme im Entropieschaubild durch den Flächeninhalt unterhalb der Zustandskurve bis zur absoluten Nullinie dargestellt. Zeichnen wir die Rayleighsche Zustandskurve Gl. (10), aber mit $p^* = 0$, wie auch Prandtls Theorie entspricht, in einer Gasentropietafel ein, so ergibt sich eine Schaulinie wie a in Abb. 966a. Die lotrecht schraffierte Fläche ist Wärmezufuhr, die wagerecht schraffierte ist Wärmeabfuhr, ihre Summe = 0.

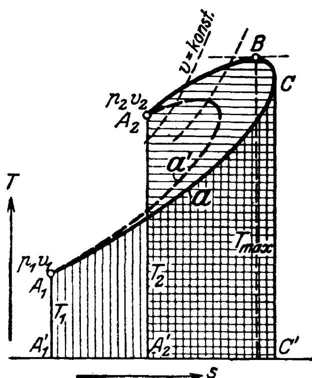


Abb. 966a. Zur Theorie des Dampfstoßes.

Hat das Element den Höchstpunkt B der Temperatur erreicht, so haben die Nachbarelemente rechts und links fast gleich hohe Temperatur und man könnte glauben, daß die Wärmeleitung aufhören müsse, während im Widerspruch damit die Entropieabnahme Wärmeabfuhr fordert. Da indessen die Leitung dem Ausdruck $\partial^2 T/\partial x^2$ proportional ist, der nicht verschwindet, bleibt die Zustandslinie möglich. **Wird p^* berücksichtigt,** so gehört gemäß (10) zu einem bestimmten v ein kleineres p als vorhin, und es wird sich die punktierte Zustandskurve a' ergeben, bei der die Gesamtwärme nicht verschwindet, sondern

[1]) Zeitschr. f. d. ges. Turbinenwesen 1904, S. 164. [2]) Zeitschr. f. d. ges. Turbinenwesen 1905, S. 370.
[3]) Zeitschr. f. d. ges. Turbinenwesen 1906, S. 241. [4]) Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1911, S. 1895.

infolge der aufgespeicherten Reibungswärme einen positiven Endbetrag liefert. Der Gesamtwärmeaustausch ist jedoch geringer als vorhin, und so könnte es vorkommen, daß die Temperatur von Anfang bis Ende stetig steigt, was der Anschauung genehmer wäre.

Um die **endliche Ausdehnung der Stoßzone** zu bestimmen, müßte man die Differentialgleichungen integrieren. Eine Abschätzung aus dem Wärmeleitvermögen bringt Prandtl a.a.O. und findet für 0,2 at Drucksteigerung eine Dicke der Stoßschicht von 0,0005 mm. Hamel stellt die vollständige Lösung auf, indes mit unbekannten Werten der Zähigkeitsziffern.

b) Verdünnungswellen nach Hugoniot.

Der Verdichtungsstoß ist, solange ein endlicher Drucksprung vorliegt, infolge der stattfindenden Entropievermehrung nicht umkehrbar. Ist jedoch der Sprung unendlich klein, so sinkt die Entropievermehrung auf ein unendlich Kleines höherer Ordnung, und damit wird der Vorgang umkehrbar. Gemäß Gl. 4 Abschn. 32 ist nämlich mit $p_2 = p_1 + dp$ die Stoßgeschwindigkeit $w_1^2 = kgp_1v_1$ gleich der dem Anfangszustand entsprechenden Schallgeschwindigkeit. Die Entropievermehrung ist allgemein $ds = dp/p + kdv/v$; im vorliegenden Fall liefert die „Stoßgleichung" $-\, gdp = w_1 dw/v_1$ und die „Stetigkeit" $dw/w_1 = dv/v_1$. Hieraus folgt

$$ds = \frac{dp}{p}\left[1 - \frac{kgp_1v_1}{w_1^2}\right] = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

Aus vielen unendlich kleinen Verdünnungen läßt sich eine „Verdünnungswelle" mit endlichen Druckunterschieden auf folgendem Wege[1]) ableiten.

Es sei in Abb. 966b in einer Röhre eine Gasmenge vom Zustande p_1, v_1, durch Kolben A_0 abgeschlossen. Erteilt man diesem eine unendlich kleine Geschwindigkeit, so wird sich die unendlich kleine

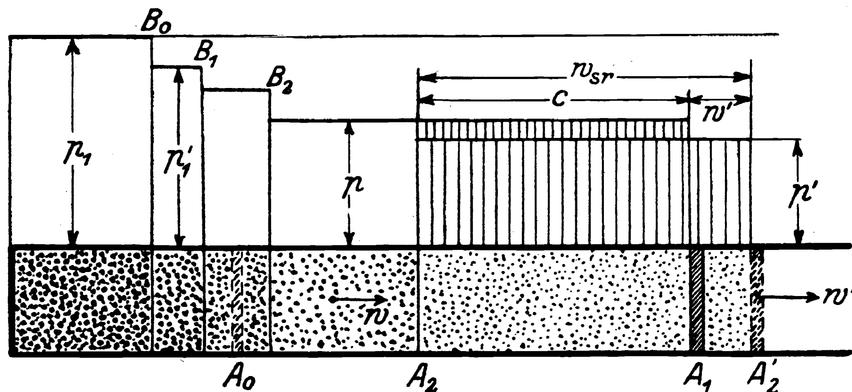


Abb. 966b. Die Verdünnungswelle.

Drucksenkung von p_1 auf p_1' mit Schallgeschwindigkeit nach links ausbreiten. Durch plötzliche unendlich kleine Geschwindigkeitssteigerung tritt eine neue Senkung bei B_1 ein, und durch Wiederholung entsteht die treppenartige Druckverteilung $B_0\ B_1\ B_2 \ldots$ So möge beim Drucke p der Kolben die Lage A_1 mit der endlichen Geschwindigkeit w erreicht haben, und wieder plötzlich auf die etwas größere Geschwindigkeit w' beschleunigt werden. Nach einer Sekunde sei seine Lage A_2', während sich die Verdünnung bis A_2 ausgebreitet hat. Diese Ausbreitung erfolgt gegenüber der mit w fortschreitenden Gasmasse und der Schallgeschwindigkeit

$$w_s = \sqrt{kgpv} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

und kann von unendlich Kleinem abgesehen durch $A_2'A_2$ dargestellt werden. Die absolute Ausbreitungsgeschwindigkeit c ist der Unterschied von w_s und w', welches von w unendlich wenig abweicht, d. h.

$$c = \sqrt{kgpv} - w \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

Um w zu ermitteln, wenden wir auf die ursprünglich im Zustand p, v zwischen A_1A_2 enthalten gewesene Gasmenge den Satz vom Antrieb an. Innerhalb einer Sekunde ist deren Geschwindigkeit von w auf w' gesteigert worden; die wirkenden Kräfte sind $f(p - p')$, mithin ist

$$m(w' - w) = f(p - p'); \quad \text{oder mit } m = fw_s\gamma'/g \cong fw_s\gamma/g; \quad w' - w = dw; \quad p' - p = dp$$

$$dw = -\sqrt{\frac{g}{k}\frac{v}{p}}\,dp \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

[1]) Hugoniot, Journ. de l'Ecole Polytechn., Cahier 57, 58.

Da jeder einzelne Sprung isentropisch erfolgte, wird auch für die endliche Druckabnahme $s =$ konst, d. h. es gilt das adiabatische Gesetz

$$p v^k = p_1 v_1^k \qquad (5)$$

Setzt man hieraus v in (4) ein und summiert man die Zunahmen von w von $p = p_1$ bis $p = p$, so erhält man

$$w = \frac{2}{k-1}\left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{2k}}\right] w_{s1} \text{ mit } w_{s1} = \sqrt{k g p_1 v_1} \qquad (6)$$

Indem man auch in (2) v durch $p_1 v_1$ ausdrückt, ergibt sich gemäß (3)

$$c = \frac{2}{k-1}\left[\frac{k+1}{2}\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{2k}} - 1\right] w_{s1} \qquad (7)$$

und zwar ist c positiv im Sinne nach links, w positiv nach rechts.

Die Fortpflanzung hört auf, wenn $c = o$, d. h. bei

$$\frac{p_g}{p_1} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{2k}{k-1}} \qquad (8)$$

Der Grenzdruck p_g kann also nicht unterschritten werden; das Verhältnis p_g/p_1 ist, wie ersichtlich, das Quadrat des Verhältnisses p_m/p_1, wo p_m den Druck in der Mündung beim Ausfluß aus einem Gefäß bedeutet. Die zu p_g gehörige Ausflußgeschwindigkeit aus dem Rohr ist gemäß (6): $w_g = 2 w_{s1}/(k+1)$ und ihr Verhältnis zur Schallgeschwindigkeit w_m beim gewöhnlichen Ausfluß wird

$$\frac{w_g}{w_m} = \sqrt{\frac{2}{k+1}}, \text{ also für Luft } \cong 0{,}913 \qquad (5\text{a})$$

Zeitlicher Druckverlauf im Innern des Rohres. Aus den Zeitpunkten, in denen die aufeinanderfolgenden Drucksprünge eingeleitet worden sind, kann mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit c die Länge berechnet werden, auf die jene Drucksenkungen in das Rohr eingedrungen sind. Besonders einfach stellt sich der Druckverlauf dar, wenn man annimmt, daß der Kolben in außerordentlich kleinen Zeitintervallen ruckweise von 0 auf die gegebene Geschwindigkeit w gebracht wird. Dann gehen alle Wellen näherungsweise vom gleichen Querschnitt aus; zu irgendeinem Zwischendruck p gehört die nach Gl. (7) zu rechnende Geschwindigkeit c, und dieser Druck wird nach t Sekunden in die Entfernung

$$x = c t \qquad (5\text{b})$$

fortgeschritten sein. Bei bestimmtem t stellt diese Gleichung (durch Auflösung) auch den Druck als abhängig von x dar. Geht man mit der Drucksenkung bis zum Grenzwert p_g, z. B. bei plötzlicher Öffnung eines Rohrverschlusses vor einem großen Behälter von niederem Druck, so bleibt am Rohrende p_g unverändert, da dort $c = 0$ ist. In graphischer Darstellung wird die Druckverlauflinie stets durch den Punkt p_g hindurchgehen und sich längs der Rohrlänge, gemäß (5b) mit der Zeit affin ändern[1]).

Wellenreflexion. Wird bloß ein einzelner unendlich kleiner Drucksprung von p_1 auf p_1' erzeugt, und trifft dieser auf das geschlossene Rohrende (Abb. 966b), so bewegt sich der ganze Rohrinhalt mit der Geschwindigkeit w_1 nach rechts. Denkt man sich das Rohr auf einem mit w_1 nach links bewegtem Fahrzeug aufgestellt, so steht der Fall so, als ob gegenüber der ruhenden Gasmasse der linke Rohrboden als Kolben plötzlich mit der Geschwindigkeit w_1 nach links verschoben würde. Es muß also eine weitere Verdünnung um den gleichen Betrag $dp = p_1 - p_1'$ wie vorhin auftreten, die sich als Welle nach rechts fortpflanzt.

Allmähliche Verdichtung. Erzeugen wir durch eine entgegengesetzt gerichtete Bewegung des Kolbens unendlich kleine aufeinanderfolgende Druckwellen, so gelten für deren Fortpflanzung ähnlich gebaute Formeln, wie vorhin, die man leicht ableiten wird. Der wesentliche Unterschied gegenüber den Verdünnungswellen besteht darin, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der später erzeugten Druckwellen, infolge der nach der Adiabate steigenden Temperatur, als Schallgeschwindigkeit des soeben erlangten Zustandes größer ist als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der anfänglich entstehenden Druckwellen. Diese werden, auch wenn sie zeitlich einen Vorsprung haben, bei genügend großer Rohrlänge eingeholt, so daß schließlich eine einzige „Wellenfront" entsteht, in der die Drucksprünge sich zu einem endlichen Druckunterschied, eben dem „Verdichtungsstoß", summieren. Infolge endlichen Temperaturunterschiedes auf (theoretisch) unendlich kleine Entfernung tritt jedoch sofort eine bis dahin vernachlässigbar gewesene Wärmeleitung, und damit die Nichtumkehrbarkeit des Vorganges auf.

Füllen und Entleeren von Gefäßen. Das Öffnen oder Schließen eines Ventils erfolgt allmählich. Man kann es theoretisch durch eine aus unendlich kleinen Treppenstufen bestehende Zeitlinie ersetzen. Jedem Absatz entspricht eine unendlich kleine Verdünnungs- oder Verdichtungswelle, die sich nach den Schallgesetzen in das Innere des Gefäßes ausbreitet und an den Wänden in verwickelter Weise zurückgeworfen wird. Infolge der gegen die Schallgeschwindigkeit kleiner Abmessungen der für gewöhnlich technisch benutzten Gefäße findet der Druckausgleich so rasch statt, daß man wie üblich mit einem unveränderlichen im Verhältnis der jeweils zu- oder abgeflossenen Menge steigenden oder sinkenden Druck rechnen darf.

[1]) Man vergleiche insbesondere die wertvolle Studie von Prof. Dr. Kobes: Die Durchschlaggeschwindigkeit bei den Luftsauge- und Druckluftbremsen. Z. d. Österr. Ing. u. Archit.-Ver. 1912.

173. Das dynamische Ähnlichkeitsgesetz.

Setzen wir voraus, daß man für die allgemeinen Bewegungsgleichungen (7) (8) (21a) des Abschn. 172 gewissen Grenzbedingungen entsprechende Lösungen (Integrale) gefunden hätte. so daß die Veränderlichen p, u, v, w, γ, T, η, λ als Abhängige der Koordinaten $x\,y\,z$ und der Zeit t bekannt wären. Dann ist es nach dem Vorgange von Helmholtz[1]) möglich, unendlich viele Bewegungen anzugeben, die in geometrisch ähnlichen Bahnen verlaufen und wobei alle Veränderlichen (die Zeit eingeschlossen) sich mit den alten in bestimmten Verhältnissen ändern. Die Größe und die Beziehungen der Verhältniszahlen werden, wenn man die neuen Variablen durch einen Strich unterscheidet, wie folgt ermittelt. Man setzt

$$\left.\begin{array}{llll} p'=f_p p; & u'=f_u u; & v'=f_u v; & w'=f_u w; \\ x'=f_l x; & y'=f_l y; & z'=f_l z; & t'=f\,t; \\ \gamma'=f_\gamma \gamma; & T'=f_T T; & \eta'=f_\eta \eta; & \lambda'=f_\lambda \lambda \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

und schiebt diese Werte in die Gl. (7) (8) (21a) des vorigen Abschnittes, wobei indessen von Massenkräften abgesehen, also $X=Y=Z=0$ vorausgesetzt wird. Mit $\varepsilon=\gamma/g$ liefern Gl. (7):

$$\frac{Du'}{dt}=\left(\frac{f_u}{f_t}\right)\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]+\left(\frac{f_u^2}{f_l}\right)\left[u\frac{\partial u}{\partial x}\right]+\ldots=-\left(\frac{f_p}{f_\gamma f_l}\right)\left[\frac{g}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial x}\right]+\left(\frac{f_\eta f_u}{f_\gamma f_l^2}\right)\left[\frac{\eta g}{\gamma}\right]\left[\Delta u+\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x}\,div\,c\right] \quad (2)$$

Diese und die ihr ähnlichen Gleichungen für $v'\,w'$ werden erfüllt sein, falls die in runde Klammern gesetzten Beiwerte alle untereinander gleich sind, da nach deren Kürzung die in eckigen Klammern enthaltenen Ausdrücke übrig bleiben, die die Gleichung nach Voraussetzung befriedigen Man erhält also die Bedingungen

$$\frac{f_u}{f_t}=\frac{f_u^2}{f_l}=\frac{f_r}{f_\gamma f_l}=\frac{f_\eta f_u}{f_\gamma f_l^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (I)$$

Behandelt man die Durchflußgleichnung in ähnlicher Weise, so kommt keine neue Beziehung zum Vorschein. Aus der Wärmegleichung (21a) hingegen erhält man

$$\frac{f_p f_u}{f_l}=\frac{f_\eta f_u^2}{f_l^2}=\frac{f_\lambda f_T}{f_l^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (II)$$

Setzen wir voraus, daß eine Gasströmung vorliegt und daß die Gasbeschaffenheit sich ändert, so gilt für die beiden Fälle

$$p=RT\gamma; \qquad p'=R'T'\gamma',$$

und wenn wir $R'=f_R R$ setzen, so ergibt sich hieraus

$$f_p=f_R f_T f_\gamma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (III)$$

Die Gruppe I erlaubt von Anfang an, die Verhältniszahl der Zeit als Quotient

$$f_t=\frac{f_l}{f_u} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

darzustellen, womit sie aus den ferneren Betrachtungen ausscheidet. Dann umfassen die Gruppen I bis III noch 4 Beziehungen zwischen den 8 Unbekannten $f_p\,f_u\,f_l\,f_\gamma\,f_T\,f_\eta\,f_\lambda$, weil, wie man gleich bemerkt, die letzte Gl. in (I) mit der ersten Gl. in (II) identisch ist. In der Reihenfolge, wie sie oben hingeschrieben sind, ergeben sich die Einzelgleichungen

$$f_u^2=\frac{f_p}{f_\gamma}; \quad f_\eta=f_u f_l f_\gamma; \quad f_\lambda=\frac{f_p f_u f_l}{f_T}; \quad f_R=\frac{f_p}{f_T f_\gamma} \quad \ldots\ldots \quad (IV)$$

4 der Unbekannten, die jedoch nicht nach Belieben ausgewählt werden können, sind willkürlich, die 4 anderen durch diese Gleichungen bestimmt. So wie sie vorliegen, sind $f_p\,f_l\,f_\gamma\,f_T$ willkürlich, $f_u\,f_\eta\,f_\lambda\,f_R$ bestimmt. Zieht man vor, die Stoffart als gegeben zu betrachten[2]), so daß $f_R\,f_\eta$, dazu $f_T\,f_l$ vorgeschrieben werden (da f_λ gleichzeitig frei zu wählen nicht zu-

[1]) Wissenschaftl. Abhandl. Bd. I, S. 159.

[2]) Wie Smoluchowski a. a. O., dessen Rechnungen jedoch durch Verwechselung seiner Beiwerte m und n mit Fehlern behaftet sind.

lässig ist), so erhält man die Auflösung

$$f_u^2 = f_R f_T; \quad f_p = \frac{f_\eta \sqrt{f_R f_T}}{f_l}; \quad f_\lambda = f_\eta f_R; \quad f_\gamma = \frac{f_\eta}{f_l \sqrt{f_R f_T}} \quad \ldots\ldots \quad \text{(V)}$$

Behandelt man eine adiabatische Strömung, so muß $\lambda = 0$ vorausgesetzt werden. Dadurch entfällt das Glied mit λ.

Endlich wird bei **unelastischen Flüssigkeiten** $\gamma = \text{konst.}$, daher entfällt die Gasgleichung. Von Wichtigkeit können in diesem Falle die **Massenkräfte** sein. Setzt man das Verhältnis $X'/X = Y'/Y = Z'/Z = f_m$, so tritt in der Gruppe (I) die Gleichung $f_u^2/f_l = f_m$ hinzu, und wenn die Massenkraft sich nicht ändert, z. B. bei Strömungen unter dem Einfluß der Schwere, so vereinfacht sich diese Beziehung in $f_u = \sqrt{f_l}$. Wenn man dies in die erste der Gl. (IV) einführt und nach f_p auflöst, so wird $f_p = f_u^2 f_\gamma f_e f_y$ und es gelten im ganzen die Gleichungen

$$f_p = f_l f_\gamma; \quad f_u = \sqrt{f_l}; \quad f_\eta = f_l^{\frac{3}{2}} f_\gamma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(VI)}$$

Sie bilden die Grundlage der hydraulischen Modellversuche für Schiffe, bei denen allerdings $f_\gamma = 1$ ist, d. h. die Flüssigkeit sich nicht ändert, wodurch die Gleichung für f_η unerfüllbar bleibt, was für jene Versuche indessen nicht ausschlaggebend zu sein pflegt. Der Druck ändert sich von selbst proportional der Eintauchtiefe, und die Schleppgeschwindigkeit muß im quadratischen Verhältnis der Länge abnehmen.

Die Blasiussche Formel für die Rohrreibung[1]).

Die Reibungsarbeit in einer geradlinigen Röhre vom Durchmesser D und der Länge L für eine mittlere unveränderliche Geschwindigkeit w, kann, wie Versuche zeigen, für eine bestimmte Flüssigkeit für 1 kg der durchströmenden Menge in die Formel

$$a_r = \left(\frac{p_1 - p_2}{\gamma}\right) = \zeta \frac{L}{D} \frac{w^2}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

zusammengefaßt werden. Darin ist ζ eine reine Zahl, wie man durch Nachrechnen der Dimensionen rechts und links leicht feststellt. Vergleichen wir hiermit eine ähnliche Strömung mit $p' = f_p p$; $w' = f_u w$; $L' = f_l L$; $\gamma' = f_\gamma \gamma$, so werden die neuen Größen Gl. (4) erfüllen, falls

$$\frac{f}{f_\gamma} = f_u^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

ist. Damit wird, wie man an Gl. (IV) erkennt, nur der ersten Forderung der Ähnlichkeit Genüge getan. Da (4) sich auf adiabatische Strömung bezieht und wir dasselbe Gas voraussetzen, entfallen die Gl. für f_λ und f_R, aber es gilt

$$f_\eta = f_u f_l f_\gamma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Nehmen wir an, diese Gleichung sei nicht erfüllt, dann ist die Strömung nicht ähnlich, es muß sich an der Beziehung (4) etwas ändern. Dieses etwas kann, da die Form der Gleichung durch die Versuche bestätigt wird, nur ζ sein, das hiernach keine an sich Unveränderliche, sondern von den in Gl. (6) auftretenden Größen η, w, L (oder D), γ abhängig sein muß. Da ζ, wie erwähnt, eine reine Zahl ist, müssen diese Größen in einer Verbindung vorkommen, deren Dimensionen ebenfalls $= 0$ ist. Im übrigen ist das Heranziehen der Schwerebeschleunigung g erforderlich, weil es in den Bewegungsgleichungen nicht auf γ sondern auf $\varepsilon = \gamma/g$ ankommt. Auch erscheint in jenen Gleichungen η nur in der Verbindung $\eta : (\gamma/g)$ als sogenannte **kinematische Zähigkeit**. Behält man diese hier bei und setzt man die fragliche Funktion als Produkt von Potenzen von w, D, $(\eta g/\gamma)$ voraus, so ergibt sich nur die Verbindung $wD\gamma/g\eta$ als dimensionslos, wie man durch einen algebraischen Ansatz nachweist. Von diesen Überlegungen ausgehend, kommt Blasius zum Schluß, daß

$$\zeta = \text{Funktion von } \frac{g\eta}{wD\gamma}$$

[1]) Blasius, Das Ähnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen. Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1912, S. 639.

sein muß. Aus den von ihm herangezogenen Versuchsergebnissen folgt

$$\zeta = 0{,}3164 \sqrt[4]{\frac{g\eta}{w D \gamma}}.$$

Über die Vervollständigung des Versuchsstoffes durch Ombeck und die von ihm aufgestellte Funktionsform haben wir in Abschn. 25 berichtet.

Die Theorie der mechanischen Ähnlichkeit wird zweckmäßigerweise mit dem Verfahren des Dimensionsvergleiches verbunden. Hierüber lese man nach:

Nusselt, Der Wärmeübergang in Rohrleitungen. Mitteil. üb. Forschungsarb., Heft 89.

Prandtl, Bemerk. üb. Dimensionen u. Luftwiderstandsformeln. Z. f. Flugtechnik u. Mortorluftschifffahrt 1910, Heft 13.

174. Ein Versuch, die Turbulenz in gröbster Annäherung durch Mantelreibung zu ersetzen.

Wie schon im Abschnitt 28 angeführt, hat die Turbulenz der Art nach dieselbe Wirkung wie die gewöhnliche Flüssigkeitsreibung, nur ist sie außerordentlich viel stärker. Man könnte daher die Gl. (7) in Abschn. 172 als Strömungsgleichungen verwenden, wenn man η durch die „Turbulenzziffer" τ ersetzt und beachtet, daß diese nach Abschn. 28 stark veränderlich ist, daher die Zusatzglieder Gl. (8a) zuzufügen wären. Bei der Aussichtslosigkeit, strenge Integrale zu erhalten, unternahm ich den Versuch, ob für gewisse Fälle eine Vereinfachung zulässig wäre, die darin besteht, bei einer achsensymmetrischen Strömung nur die „Mantelreibung" zu berücksichtigen wie an dem „Beispiel" unter a) in Abschn. 172 veranschaulicht wurde.

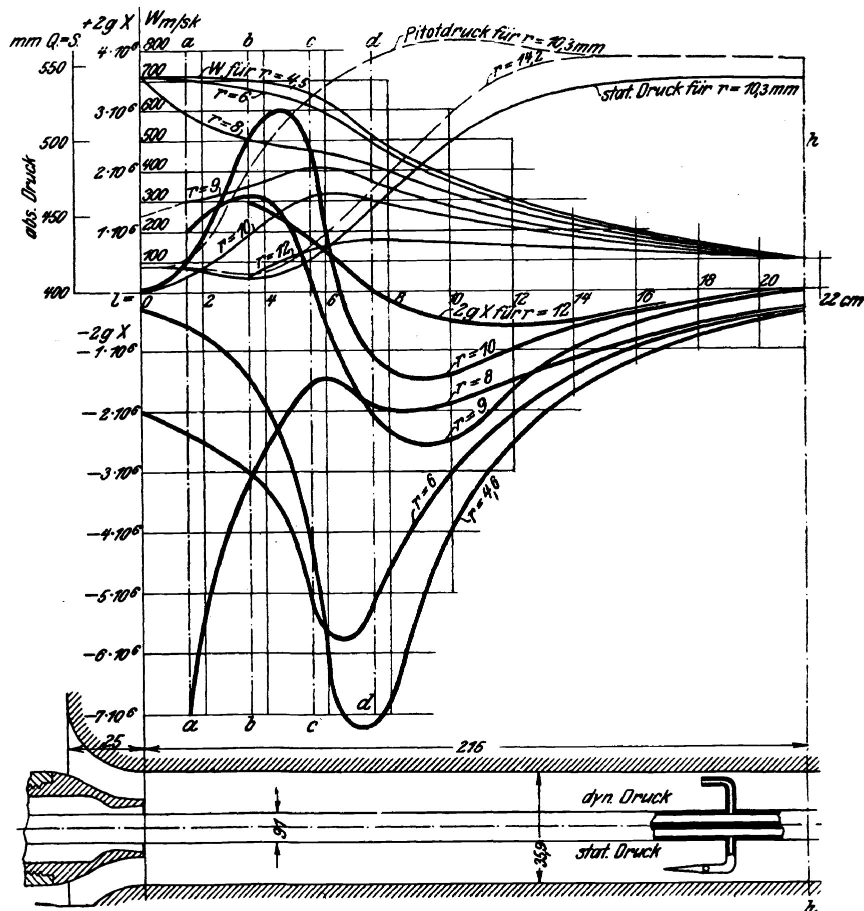


Abb. 967. Druck und Geschwindigkeit im zylindrischen Diffusor.

Als Grundlage für den Vergleich mit der Wirklichkeit stehen zur Verfügung Versuche von Diebold an einem zylindrischen Diffusor und die von Trüpel an einem freien Luftstrahl in der Atmosphäre [1]).

Bei den in unserem Maschinen-Laboratorium durchgeführten Versuchen des Ersteren diente als Treibflüssigkeit Dampf, der durch eine Düse, Abb. 967, mit 15 mm engstem und 16,1 mm Enddurchmesser in den „Diffusor" von 35,9 mm Durchmesser strömte. Zu Meßzwecken wurde ein in 4 Quadranten geteiltes axiales Rohr von 9 mm Außendurchmesser durch Düse und Diffusor hindurchgezogen, welches rechtwinklig dem Strom entgegen umgebogene Knieröhrchen trug, die mit den einzelnen Quadranten in Verbindung waren. Zwei Knie endigten stumpf und zeigten den Pitoschen Druck an; zwei andere waren fein zugespitzt und hatten vom Dampf tangential bestrichene Bohrungen für die Druckmessung. Durch mehr oder weniger Ausladung des Knies konnte der Druck in verschiedenen Abständen von der Achse bestimmt werden. Als zu fördernde Flüssigkeit diente Luft, die durch gut gerundete Meßmündungen in das vom Dampfstrahl erzeugte Vakuum strömte. Für einen der Versuche wurden mit Hilfe der Löligerschen Kurve die Strömungsgeschwindigkeiten bestimmt und in Abb. 967 und 968 als Abhängige der Achsenlänge (des Abstandes des Querschnittes vom Düsenende) und des Halbmessers (im Querschnitt) aufgetragen [2]), der Einfachheit halber unter Vernachlässigung der durch das Meßrohr verursachten Reibung.

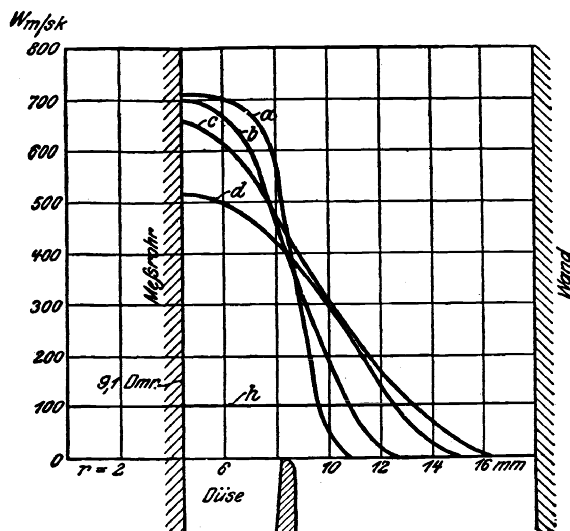


Abb. 968. Geschwindigkeitsverlauf in einem Querschnitt.

Die Schaulinien der Abbildung 968 lassen erkennen, daß der Geschwindigkeitsausgleich um so rascher erfolgt, je größer das Gefälle der Geschwindigkeit in Richtung des Halbmessers ist. Es ist daher berechtigt, zu vermuten, daß für die Reibung der Quotient $\partial w / \partial r$ maßgebend sein werde, so daß die Kräfte, die in Abb. 965 dargestellt sind, für die Bewegung des Elementes in Frage kommen. Man erhält die Schwerpunktsenergie (11) Abschn. (172), wenn man w_0 durch w und df_0 durch df ersetzt

$$dm\,w\,dw = -\,df\,(p-p')\,w\,dt + dR\,w\,dt \quad \ldots \quad (1)$$

Nach Division mit $\gamma V = \gamma\, df \cdot dl$ entsteht:

$$\frac{dw^2}{2g} = -\frac{df\,(p'-p)\,w\,dl}{V\gamma} + \frac{dR\,w\,dt}{V\gamma} \quad \ldots \quad (2)$$

Im ersten Gliede auf der rechten Seite vermehren wir im Zähler und Nenner mit dl und schreiben:

$$(p'-p) : dl = dp : dx \quad \ldots \quad (2a)$$

wo dp die Druckänderung für die Verschiebungsstrecke dx ist, die sich gegen das gleich große wdt weghebt. Das zweite Glied rechts ist nichts andres als die Turbulenzarbeit für 1 kg der durchfließenden Menge und das Zeitelement dt, die wir $= X dx$ setzen wollen. Dann lautet die Energiegleichung:

$$\frac{dw^2}{2g} = -\frac{dp}{\gamma} + X\,dx \quad \ldots \quad (3)$$

Setzen wir statt der Differenziale endlich kleine Differenzen, so kann Gl. (3) dazu verwendet werden, um aus den Schaulinien der Abbildung 967 die Turbulenz X zu berechnen. Die so ermittelten Werte sind in die Abbildung (wo die an die Schaulinien angeschriebenen Zahlen die Abstände der Meßebene von der Diffusorachse in mm bedeuten) als vollgezogene Linien eingetragen. Wir vergleichen diese Versuchsergebnisse mit den Werten, die sich ergeben, wenn wir annehmen, daß die Turbulenz, wie die gewöhnliche Reibung, der Größe der relativen Gleitgeschwindigkeit der Flüssigkeitsschichten $\frac{dw}{dr}$ proportional ist, d. h., wenn wir setzen:

$$R = \tau\, r\, d\varphi\, dl\, \frac{\partial w}{\partial r} \quad \ldots \quad (4)$$

wo τ „Turbulenzziffer" genannt werden kann. Das letzte Glied in Gl. (2) schreibt sich nunmehr

$$\frac{\tau \dfrac{\partial}{\partial r}\left[r\, d\varphi\, dl \dfrac{\partial w}{\partial r}\right] dx}{r\, d\varphi\, dl\, dr\, \gamma} = \frac{\tau}{\gamma r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right) dx,$$

mit der Abkürzung $$Z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right) \quad \text{wird} \quad X = \frac{\tau}{\gamma} Z \quad \ldots \quad (5)$$

[1]) Z. f. d. gesamte Turb.-Wesen 1916, S. 301.

[2]) Diese und die folgenden zahlenmäßigen Auswertungen verdanke ich Herrn Ingenieur Abderhalden.

Die Größe Z kann ihrerseits aus den Schaulinien der Abbildung 968 ermittelt werden. Dies ist in Abb. 969, 970, 970a für die in 15, 35, 75 mm Abstand vom Düsenende gelegenen Querschnitte durchgeführt worden. In die gleichen Abbildungen sind aus Abb. 967 die zugehörigen Werte der Größe $2gX$ eingetragen worden. Man erkennt, daß eine entschiedene Übereinstimmung der Form vorhanden ist, so daß der Ansatz Gl. (5) als praktisch zulässig erklärt werden dürfte. Für die Turbulenzziffer ergeben sich die in Abb. 971 mit runden Punkten als Abhängige des Briggschen Logarithmus von Z eingetragenen Werte.

Das Gemisch enthielt 5,3 v. H. Gewichtsteile Luft und wurde bei 0,57 at abs. Druck als homogenes Gas mit $\gamma = 0{,}34$ behandelt. Die gleiche Untersuchung wurde mit den Angaben über die Geschwindigkeitsverteilung eines in die freie Atmosphäre tretenden Luftstrahles, die wir Trüpel verdanken, durchgeführt. Die Übereinstimmung von X und Z ist hier keine so vollkommene, und es ergeben sich für τ in freilich sehr roher Annäherung die in Abb. 971 durch Kreuze eingetragenen Werte. Daß der Unterschied in der abweichenden Größe der Mündung, die bei Trüpel 90 mm Durchmesser hatte, gegenüber 16 mm in Diebolds Versuchen, begründet wäre, ist nicht wahrscheinlich; man muß vielmehr annehmen, daß die Turbulenz, ähnlich wie die Rohrreibungsziffer, mit wachsender Strömungsgeschwindigkeit abnimmt. Da bei Trüpel die Geschwindigkeit unter 90 m/sek blieb, sind für die Strahlverdichter die Meßergebnisse von Diebold, die an Geschwindigkeiten bis zu 700 m/sek gewonnen wurden, maßgebend. In diesem Gebiete wird man berechtigt sein, für τ einen unveränderlichen Mittelwert, etwa

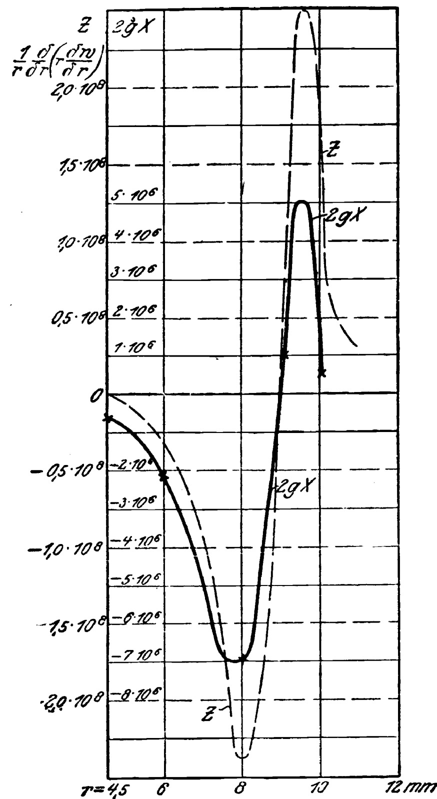


Abb. 969.

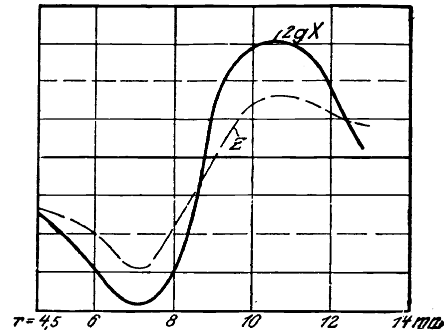


Abb. 970.

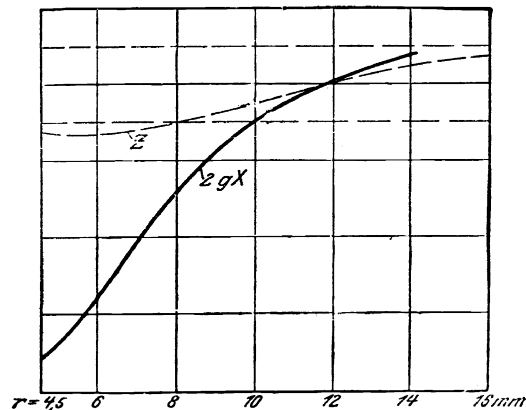


Abb. 970a.

Vergleich von X und Z.

$$\tau = 7\cdot 10^{-4},$$

wenn in den Einheiten m kg sek gerechnet wird, zu benutzen. Die Dimension von τ ist dieselbe wie die der Zähigkeitsziffer η, d. h. kg sek m^{-2}. Für Luft bei 0° C ist $\eta = 1{,}7\cdot 10^{-6}$, mithin $\tau =$ rd. $4\cdot 10^{4}\,\eta$, **also ist η neben τ verschwindend klein** und man kann die Energiegleichung nunmehr in der Form

$$\frac{dw^2}{2g} = -\frac{dp}{\gamma} + \frac{\tau}{\gamma r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

ansetzen.

Um mit ihrer Hilfe den Vorgang in einem Strahlverdichter voraus zu berechnen, muß die anfängliche Geschwindigkeitsverteilung beispielsweise in der Mündungsebene der Düse bekannt sein. Scharfe Ecken müssen von vornherein mit Rücksicht auf die Differentiation abgerundet werden. Wird dieser Verlauf beispielsweise durch Linie w in Abb. 972 veranschaulicht, so liefert die erste Ableitung nach r

den Wert $\partial w / \partial r$, der sein negatives Maximum an der Stelle des steilsten Geschwindigkeitsabfalles aufweist. Was den Verlauf gegen den Außenrand hin anbelangt, so kann dort, wie bei den Düsen erläutert wurde, ein plötzlicher rascher Abfall der Geschwindigkeit bis auf 0 angenommen werden. Im allerletzten Teil verläuft die Geschwindigkeit geradlinig, daher hat die Kurve $\frac{\partial w}{\partial r}$ am Ende eine wagerechte Tangente. Vermehren wir deren Ordinaten mit r und bilden wir von neuem die Ableitung nach r, so entsteht die mit Z bezeichnete Kurve Abb. 972 mit deren Ordinaten und der endlichen Verschiebungs-

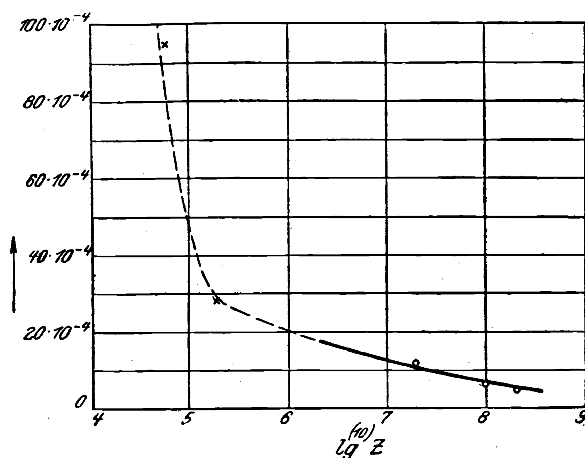


Abb. 971. Turbulenzziffer τ.

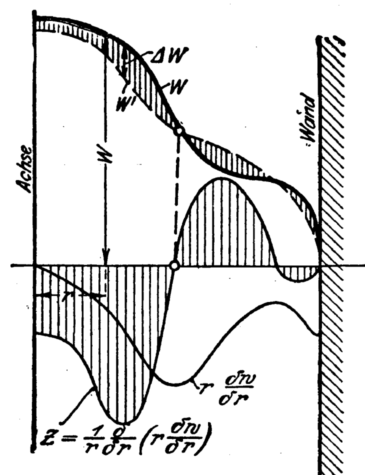


Abb. 972. Zeitlicher Ausgleich der Geschwindigkeiten in einem Querschnitt.

strecke Δx die allgemeine Geschwindigkeitszunahme Δw, die in die Abbildung schraffiert eingezeichnet ist, nach Gl. (6) berechnet wird. Mit der so erhaltenen neuen Geschwindigkeitskurve w' wird für einen nächsten Wegabschnitt Δx ähnlich verfahren.

Im Mittelpunkt des Querschnittes für $r = 0$ entsteht die Schwierigkeit, daß Z die Form $\frac{0}{0}$ annehmen kann. Dieser unbestimmte Wert wird umgangen, wenn man in der Umgebung von $r = 0$ die Geschwindigkeitskurve durch eine Parabel $w = w_0 - \alpha r^2$ ersetzt, was für $r = 0$, $Z = -4\alpha$ ergibt. Bei einer Düse, wo in der Strahlmitte die Geschwindigkeit von r nicht abhängt, versagt dieses Verfahren, und man muß eine durch den Ansatz (4) nicht erfaßbare Turbulenz als wirkend voraussetzen. Auch für die Strahlvorrichtungen muß die Fortführung der Versuche erst erweisen, ob es hinreicht, wenn man gleich anfänglich eine leichte Krümmung der w-Linie in der Mitte annimmt, oder ob eine geeignete Zusatzturbulenz einzuführen sein wird.

Zur vollen Kenntnis der Zustandsänderung wäre es erforderlich, die stattfindende Temperaturänderung zu bestimmen. Da hierbei die durch Turbulenz stattfindende Vermischung der Nachbarteile, also in unserem Fall von Dampf und Luft, in Betracht gezogen werden müßte, über die beim heutigen Stand unserer Kenntnisse nichts ausgesagt werden kann, stehen wir vor einer unlösbaren Aufgabe. Der Versuch zu einem rechnerischen Ansatz, den ich in der Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1919, S. 36, 96 unternahm, ist unbefriedigend, und es wäre in hohem Maße erwünscht, wenn sich unsere technischen Physiker dieser dringenden Frage annehmen wollten.

175. Mittelwerte bei ungleichmäßiger Geschwindigkeitsverteilung. Genauere Durchflußgleichung.

Ist die Verteilung der Geschwindigkeit und der Zustandsgrößen in jedem Querschnitt bekannt, so kann man in die Strömungsgleichungen gewisse Mittelwerte jener Größen einführen. Die Gleichung der Gesamtenergie für den Übergang von einem Querschnitt 1 zu einem Querschnitt 2 schreibt sich im Beharrungszustand, wenn beständig $dQ = 0$ ist, wie man leicht ableitet

$$A\int_{(2)}\frac{dm\,w^2}{2} - A\int_{(1)}\frac{dm\,w^2}{2} = \int_{(1)} dGi - \int_{(2)} dGi \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

worin dm, dG die durch ein Querschnittselement df während einer beliebigen Zeit (z. B.

1 sek) strömenden Massen- bzw. Gewichtsteile sind. Führen wir vermöge der Gleichungen

$$G\overline{\overline{w}}^2 = \int dG\, w^2 = \int_0^f \gamma w^3\, df\,, \qquad G\bar{i} = \int dG i = \int_0^f \gamma w i\, df \quad \ldots \ldots \quad (1\text{a})$$

die Mittelwerte $\overline{\overline{w}}$ und $\bar{i}$ ein, so lautet die Energiegleichung

$$A \cdot \frac{\overline{\overline{w}}_2^{\,2} - \overline{\overline{w}}_1^{\,2}}{2g} = \bar{i}_1 - \bar{i}_2 \quad \ldots \ldots \quad (1\text{b})$$

Der bei vollständiger Ausdehnung in einer Düse ausgeübte Rückdruck P wird

$$P = \int dm\, w = \int \frac{dG}{g} w = \int_0^f \frac{\gamma w^2\, df}{g} = \frac{G}{g} \bar{w} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Das sekundlich durchströmende Gewicht schreibt sich

$$G = \int dG = \int_0^f \gamma w\, df = f w_m \gamma_m \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Auf Grund von Beobachtungen oder geeigneten Annahmen über die Zustandsverteilung wird man die Mittelwerte $\bar{i}$ γ_m w_m $\bar{w}$ $\overline{\overline{w}}$ durch graphische Integration ermitteln können.

Für den Fall des **Kreisquerschnittes** gelingt dies rechnerisch mit Hilfe folgender Annäherungen. Es bedeute

ϱ einen Zwischenhalbmesser, r den äußersten Halbmesser,
w_a die Geschwindigkeit in der Rohrachse,
γ_a γ_r das Raumgewicht in der Achse und am Rande.

Wir setzen

$$w = w_a \left[1 - \left(\frac{\varrho}{r}\right)^n\right]; \quad \gamma = \gamma_r + (\gamma_a - \gamma_r)\frac{w}{w_a} \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Die Strömung am Rande darf man als reine Drosselung ansehen, so daß dort $i_r = i_1 =$ dem Anfangswerte gleich ist, demnach γ_r aus der Entropietafel bestimmbar ist. Es gelten die Gleichungen

$$G = \int_0^r 2\pi\varrho\, d\varrho\, w\gamma; \quad G\bar{w} = \int_0^r 2\pi\varrho\, d\varrho\, w^2\gamma; \quad G\overline{\overline{w}}^2 = \int_0^r 2\pi\varrho\, d\varrho\, w^3\gamma \quad \ldots \ldots \quad (4\text{a})$$

Führt man die Integration durch, so erhält man mit $f = \pi r^2$ als Düsenquerschnitt

$$G = \beta_0 f w_a \gamma_a; \quad G\bar{w} = \beta_1 f w_a^2 \gamma_a; \quad G\overline{\overline{w}}^2 = \beta_2 f w_a^3 \gamma_a \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

und den Bezeichnungen:

$$\left.\begin{array}{l}
\beta_0 = \alpha_0 \dfrac{\gamma_r}{\gamma_a} + \alpha_1 \dfrac{\gamma_u}{\gamma_a}; \quad \beta_1 = \alpha_1 \dfrac{\gamma_r}{\gamma_a} + \alpha_2 \dfrac{\gamma_u}{\gamma_a}; \quad \beta_2 = \alpha_2 \dfrac{\gamma_r}{\gamma_a} + \alpha_3 \dfrac{\gamma_u}{\gamma_a} \\
\alpha_0 = 1 - \dfrac{2}{2+n}; \quad \alpha_1 = 1 - \dfrac{4}{2+n} + \dfrac{1}{1+n}; \quad \alpha_2 = 1 - \dfrac{6}{2+n} + \dfrac{3}{1+n} - \dfrac{2}{2+3n} \\
\alpha_3 = 1 - \dfrac{8}{2+n} + \dfrac{6}{1+n} - \dfrac{8}{2+3n} + \dfrac{1}{1+2n}; \quad \gamma_u = \gamma_a - \gamma_r
\end{array}\right\} \quad \ldots \quad (5)$$

Mißt man den Rückdruck der Düse, so wird $\bar{w}$ gemessen; man sieht, daß es falsch wäre, mit dem gleichen Werte auch die kinetische Energie zu messen, da vielmehr das Verhältnis

$$\frac{\overline{\overline{w}}^2}{\bar{w}^2} = \frac{\beta_0 \beta_2}{\beta_1^2} \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

besteht. $w_a \gamma_a$ können häufig den adiabatischen Werten gleich gesetzt werden. Aus $\overline{\overline{w}}$ folgt mittels der Energiegleichung $\bar{i}$

Genauere Durchflußgleichung.

In Abb. 34 Abschn. 28 ist der durch Versuch ermittelte Geschwindigkeitsverlauf am Ende einer Düse dargestellt. Wir stellen uns die Aufgabe, aus einem gegebenen Gesamtverlust an Energie die Querschnittsgröße, die jener Verteilung und einem gegebenen G entspricht, zu berechnen (und mit der „theoretischen" zu vergleichen).

Wir beschränken uns auf **überhitzte Dämpfe oder Gase** und bezeichnen mit

p_1, T_1 Druck und Temperatur vor der Düse,

w' T' die der adiabatischen Ausdehnung von p_1 auf p entsprechende „theoretische" Geschwindigkeit und Temperatur,

$w_a T_a$; $w_r T_r$ dieselben Größen in der Achse und am Rande,

w, T, γ die mit einem Energieverlust von ζ sich ergebenden „mittleren" Zustandsgrößen im betrachteten Querschnitt, so daß $w = \overline{w}$; $c_p T +$ konst. $= i$ ist. Es sei ferner

$$\tau = \frac{T_1}{T'} = \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{k-1}{k}} \text{ das Temperaturverhältnis.}$$

Da wir die Anfangsgeschwindigkeit $= 0$ voraussetzen, so ist

$$w^2 = (1 - \zeta)\, w'^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (7)$$

Es bedeute ζ_a den Verlust, den der Stromfaden in der Düsenachse erleidet; dann ist

$$w_a^2 = (1 - \zeta_a)\, w'^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (8)$$

In jedem Punkt ist $p = R T \gamma$, somit hat man

$$\frac{\gamma}{\gamma_a} = \frac{T_a}{T} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (9)$$

Der „theoretische", d. h. gleichmäßiger Verteilung entsprechende Querschnitt ist $f_{th} = \frac{G}{w\gamma}$, der wirkliche, nach Gl. (4) $f_w = \frac{G}{\beta_0 w_a \gamma_a}$.

Diese stehen mit Rücksicht auf (7) bis (9) im Verhältnis

$$\frac{f_w}{f_{th}} = \frac{w\gamma}{\beta_0 w_a \gamma_a} = \frac{1}{\beta_0} \sqrt{\frac{1-\zeta}{1-\zeta_a}} \cdot \left(\frac{T_a}{T}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (10)$$

Die Temperaturen T_a und T berechnen sich aus den Wärmeinhalten i_a und i, die, wenn man vom Einfluß der Turbulenz absieht, mit dem Wärmeinhalt i' der adiabatischen Ausdehnung durch die Gleichungen $i_a = i' + \zeta_a (i_1 - i')$; $\quad i = i' + \zeta (i_1 - i')$ zusammenhängen. Hieraus folgt

$$i_a - i' = c_p (T_a - T') = \zeta_a c_p (T_1 - T'); \qquad T - T' = \zeta (T_1 - T')$$

und mit der Bezeichnung $\tau = \frac{T_1}{T'}$ das Verhältnis $\frac{T_a}{T} = \frac{1 + \zeta_a (\tau - 1)}{1 + \zeta\ (\tau - 1)}$ oder angenähert $= 1 - (\zeta - \zeta_a)(\tau - 1)$. Schreiben wir $\beta_0 = 1/(1 - \vartheta_0)$, das entwickelt $= 1 + \vartheta_0 + \vartheta_0^2 + \ldots$ oder $\sim 1 + \vartheta_0$ ergibt, so folgt schließlich angenähert

$$\frac{f_w}{f_{th}} = (1 + \vartheta_0)\left(1 - \frac{\zeta}{2} + \frac{\zeta_a}{2}\right) \frac{1 + \zeta\ (\tau - 1)}{1 + \zeta_a (\tau - 1)} \simeq 1 + \vartheta_0 - (\zeta - \zeta_a)(\tau - \tfrac{1}{2}) \quad \ldots \ldots (11)$$

Nun ist noch ϑ_0 durch die Form der Geschwindigkeitskurve, d. h. durch n und ζ auszudrücken. Zu diesem Zwecke ziehen wir in den Größen der Gl. (5) in jedem Nenner n als Faktor heraus und ersetzen in den betreffenden Klammergrößen das verbleibende n durch den Mittelwert $n = 25$. Dies führt auf die Näherungsausdrücke

$$\left.\begin{aligned} \beta_0 &= 1 - \vartheta_0; & \vartheta_0 &= \left[3{,}24 - 1{,}08 \frac{\gamma_r}{\gamma_a}\right] \frac{1}{n} \\ \beta_1 &= 1 - \vartheta_1; & \vartheta_1 &= \left[3{,}83 - 0{,}59 \frac{\gamma_r}{\gamma_a}\right] \frac{1}{n} \\ \beta_2 &= 1 - \vartheta_2; & \vartheta_2 &= \left[4{,}38 - 0{,}55 \frac{\gamma_r}{\gamma_a}\right] \frac{1}{n} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (12)$$

Da nun w mit dem gesamten Energieverlust ζ berechnet worden ist, ist es gleichbedeutend mit $\overline{w}$ in Gl. (4) und es folgt aus jener Gleichung

$$\overline{w}^2 = \frac{\beta_2 f w_a^3 \gamma_a}{G} = \frac{\beta_2}{\beta_0} w_a^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (13)$$

Mit Rücksicht auf (7) und (8) erhält man

$$\frac{\overline{w}^2}{w_a^2} = \frac{1 - \vartheta_2}{1 - \vartheta_0} = \frac{1 - \zeta}{1 - \zeta_a} \qquad \text{oder} \qquad 1 - \vartheta_2 + \vartheta_0 = 1 - \zeta + \zeta_a$$

also mit Benutzung von (12)

$$\left(1{,}14 + 0{,}53 \frac{\gamma_r}{\gamma_a}\right) \frac{1}{n} = \zeta - \zeta_a \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (14)$$

Hierin ist γ_r das nach Abdrosselung von p_1 auf p entstehende spezifische Gewicht, und da $T_r = T_1$, so wird $\gamma_r = \gamma_1 p/p_1$. Andererseits ist $\gamma_a/\gamma' = T'/T_a$ und $\gamma' = \gamma_1 (p/p_1)^{\frac{1}{k}}$, also $\gamma_r/\gamma_a = (p/p_1)^{\frac{k-1}{k}} (T_a/T')$. Nun ist $T_a/T' = [T' + \zeta_a (T_1 - T')]/T' = 1 + \zeta_a (\tau - 1)$, und so wird

$$\frac{\gamma_r}{\gamma_a} = \frac{1}{\tau}[1 + \zeta_a(\tau - 1)] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (15)$$

Hierdurch ist die Aufgabe gelöst, denn aus dem Druckverhältnis p/p_1 folgt τ, aus den als bekannt anzusehenden $\zeta\ \zeta_a$ liefert (15) γ_r/γ_a; (14) n; (12) ϑ_0 und (11) das gewünschte Verhältnis f_w/f_{th}.

Man kann auch umgekehrt f festlegen, und vergleichen, wieviel in Wirklichkeit und wieviel theoretisch d. h. bei gleichmäßigem w und γ ausfließen wird. Es ist

$$G_w = \beta_0 f w_a \gamma_a; \qquad G_{th} = f w \gamma,$$

daher

$$\frac{G_w}{G_{th}} = \beta_0 \left(\frac{w_a}{w}\right)\left(\frac{\gamma_a}{\gamma}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (16)$$

Dieses Verhältnis ist aber nach (10) einfach der reziproke Wert von f_w/f_{th}.

Ausfluß aus einer gut abgerundeten Mündung.

Für diese darf man $\zeta_a = 0$ setzen, woraus $\gamma_r/\gamma_a = 1/\tau$ folgt, und wenn man annimmt, daß das kritische Druckverhältnis erreicht wurde, d. h. daß für überhitzten Dampf bzw. Luft $p/p_1 = 0{,}547$ bzw. $0{,}530$ ist, so ergibt sich $G_w/G_{th} = 1 - 0{,}78\,\zeta$ für beide Fälle.

Noch einfacher ist in diesem Falle die Formel für die Ausflußzahl α, unter der man das Verhältnis der wirklich ausströmenden Menge zu derjenigen versteht, die bei rein adiabatischer Ausdehnung ausströmen würde. Mit $\zeta_a = 0$ werden $w_a \gamma_a$ den adiabatischen Werten w_{ad}, γ_{ad} gleich. Man hat demnach

$$G_w = \beta_0 f w_{ad} \gamma_{ad}; \qquad G_0 = f w_{ad} \gamma_{ad}$$

somit die Ausflußzahl

$$\alpha = \frac{G_w}{G_0} = \beta_0 = 1 - \vartheta_0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (17)$$

oder mit Rücksicht auf Gl. (15) (14) (12)

$$\alpha = 1 - \frac{3{,}24\,\tau - 1{,}08}{1{,}14\,\tau + 0{,}53}\,\zeta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (18)$$

Schließlich erhielt man für Dampf mit $k = 1{,}3$

$$\tau = 1{,}16; \quad \alpha = 1 - 1{,}43\,\zeta; \qquad \text{für Luft mit } k = 1{,}4 \quad \tau = 1{,}20; \quad \alpha = 1 - 1{,}47\,\zeta \quad . . (19)$$

Infolge der Bahnkrümmung im gerundeten Einlauf wird durch die **Zentrifugalwirkung** der Druck in der Achse größer als am Rande. Es ist daher **an G eine zweite Berichtigung anzubringen,** die man nach dem Verfahren von Flügel oder auch analytisch ermitteln könnte.

176. Druckverlust in langen Leitungen.

a) Zustandsänderung pv = konst.

Diese Zustandsänderung bedeutet bei Gasen, daß die Temperatur unveränderlich bleibt, was bei dauernder Abkühlung an die Atmosphäre (z. B. bei Erdgasleitungen) möglich ist. Bei nassen Dämpfen würde sie bedeuten, daß man sich an der Adiabate im Sinne von (innerer) Wärmezufuhr etwas entfernt, sie darf also als Annäherung an die Strömung in isolierten Leitungen gelten.

Die Strömung wird als „fadenförmig" behandelt; es kommen in Betracht die Energiegleichung für den Schwerpunkt und die Durchflußgleichung. Die Zustandsgleichung ersetzt die Wärmegleichung; sie ist ein Integral derselben. Wir wollen die Schwere als Massenkraft einführen, so zwar, daß die Leitung auf eine Länge von l m um h m steigt. Wir erhalten

$$\frac{dw^2}{2g} = -v\,dp - dh - \zeta \frac{dl}{D}\frac{w^2}{2g} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

$$G_{\text{sek}} = \frac{fw}{v} = \frac{fw_1}{v_1} \quad \text{oder mit } pv = p_1 v_1; \quad \frac{v}{v_1} = \frac{w}{w_1} = \frac{p_1}{p} \quad \ldots \ldots (2)$$

Bezeichnen wir die Neigung des Rohres mit α, so sei $\sin\alpha = h/l$ abkürzend $= s$ gesetzt, demnach $dh = s\,dl$. Wenn vorübergehend die Abkürzung

$$b = \frac{\zeta}{2gsD} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

benutzt wird, und wenn man aus (2) $\frac{dp}{p} = \frac{dw}{w}$ sowie $v = v_1 \frac{w}{w_1}$ in (1) einsetzt, so entsteht:

$$\frac{dw^2}{2g} - p_1 v_1 \frac{dw}{w} = -[1 + b w^2]\, s\, dl.$$

Nach Teilung mit $(1 + b w^2)$ ist das erste Glied sofort leicht integrierbar. Das zweite kann auf die Form $p_1 v_1 d\left(\frac{1}{w^2}\right) : 2\left(b + \frac{1}{w^2}\right)$ gebracht werden, so daß das ganze Integral von $l = 0$ mit $w = w_1$ bis l lautet:

$$\frac{1}{2gb} \lg n \left(\frac{1 + b w^2}{1 + b w_1^2}\right) + \frac{p_1 v_1}{2} \lg n \left(\frac{b + \frac{1}{w^2}}{b + \frac{1}{w_1^2}}\right) = -sl.$$

Im zweiten Gliede ziehen wir $w^2 w_1^2$ als Faktoren heraus, und erhalten nach leichter Umrechnung wenn man

$$\beta = \zeta / 2g \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

einführt

$$\left(1 + \frac{D \sin\alpha}{\beta g p_1 v_1}\right) \lg n \left(\frac{w_1^2 + \frac{D \sin\alpha}{\beta}}{w^2 + \frac{D \sin\alpha}{\beta}}\right) + \lg n \frac{w^2}{w_1^2} = \frac{2h}{p_1 v_1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Diese Formel führt Mollier in der „Hütte" an. Für eine wagerechte Leitung muß erneut integriert werden und es ergibt sich auf ähnliche Weise

$$\frac{p_1 v_1}{2}\left(1 - \frac{p^2}{p_1^2}\right) - \frac{w_1^2}{g} \lg n \frac{p_1}{p} = \frac{\beta}{D} w_1^2 l \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Die Formeln gelten im einheitlichen Maß kgmsek (also p in kgm²).

b) Leitung mit wärmeundurchdringlicher Wand.

Wir beschränken uns auf vollkommene Gase, für welche die Gleichungen

$$\frac{w\,dw}{g} = -v\,dp - \zeta \frac{w^2}{2g} dz, \text{ mit } \zeta = \frac{\zeta_r}{D} \quad . . (7); \quad \frac{w\,dw}{g} = -\frac{k}{k-1} d(pv) \quad . . (8); \quad Gv = fw \quad . . (9)$$

gelten. Das allgemeine Verfahren besteht darin, daß man die vorliegenden Gleichungen weiter differenziert, bis so viele Beziehungen vorhanden sind, daß man zwei der abhängigen Funktionen p, v, w und ihre Differentiale ausscheiden kann, so daß eine einfache Differentialgleichung für die dritte Abhängige entsteht, die man zu integrieren hat. Die Reihenfolge ist gleichgültig; am raschesten kommt man wie folgt zum Ziele.

Die Gleichung der Gesamtenergie kann unmittelbar integriert werden und liefert, wenn $p_1 v_1 w_1$ die Werte des Anfangszustandes bedeuten,

$$\frac{w^2 = w_0^2}{2g} = \frac{k}{k-1}(p_1 v_1 - pv) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

Hierauf ist es am einfachsten, wenn wir dp und v aus (9) und (10) bestimmen und in Gl. (7) einsetzen. Wir führen die Bezeichnungen $H = w^2/2g$; $H_1 = w_1^2/2g$ ein und schreiben Gl. (7) in der Form

$$dH = -d(pv) + p\,dv - \zeta H\,dl \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

dann berechnen wir aus Gl. (10) $pv = p_1 v_1 - (k-1)(H - H_1)/k$, erheben Gl. (9) ins Quadrat (um w^2 zu erhalten) $G^2 v^2 = f^2 w^2$, nehmen ihren natürlichen Logarithmus und differenzieren sie, was $2\,dv/v = dw^2/w^2 = dH/H$ ergibt. Hieraus folgt $p\,dv = pv\,dH/2H$ und Gl. (11) lautet

$$dH = \frac{k-1}{k} dH + \left[p_1 v_1 - \frac{k-1}{k}(H - H_1)\right] \frac{dH}{2H} - \zeta H\,dl \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

Nach Teilung mit H kann man die Variablen trennen und erhält

$$-\frac{k+1}{2k} \frac{dH}{H} + \frac{1}{2}\left(p_1 v_1 + \frac{k-1}{k} H_1\right) \frac{dH}{H^2} = \zeta\,dl$$

und durch Integration zwischen dem Anfangswert p_1, v_1, w_1, bei $= 0$ und den Werten p, v, w bei l

$$(k+1) \lg n \left(\frac{H_1}{H}\right) + [k p_1 v_1 + (k-1) H_1]\left(\frac{1}{H_1} - \frac{1}{H}\right) = 2k\zeta l \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

und dies ist gleichlautend mit der Formel des Abschn. 26, wenn noch $\zeta = \zeta_r / D$ eingesetzt wird. Bei der Deutung dieses Ergebnisses wird man sich von den Betrachtungen, die wir an die Fanno-Kurve angeschlossen haben, leiten lassen.

177. Schmiermittelströmung in Lagern zweidimensional behandelt.

Es sei in Abb. 973 *ABCD* die beliebig geformte Lagerschale, *XOY* die Zapfenfläche. Da es nur auf die relative Bewegung ankommt, denken wir uns den Zapfen ruhend, während die Schale die Geschwindigkeiten $u_0 v_0 w_0$ nach den Richtungen xyz erteilt werden. Der Schalenabstand h ist eine Funktion von x, y. Die Gleichgewichtsbedingungen an einem durch Stromflächen herausgeschnittenen Flüssigkeitselement $dx\,dy\,dz$ lauten, wenn wir die Beschleunigungskräfte vernachlässigen

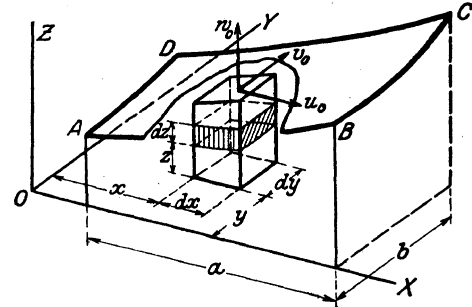


Abb. 973. Schmiermittelströmung.

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial z}\right);\quad \frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\eta\frac{\partial v}{\partial z}\right)\quad . \quad . \quad (1)$$

Sie können, wie in Abschn. 96, unmittelbar abgeleitet werden, oder sie ergeben sich aus der Gl. (7) Abschn. 172, wenn wir dort $Du/dt=0$, $Dv/dt=0$ und unelastische Flüssigkeiten, d. h. $\operatorname{div} c=0$ voraussetzen. Die Beschleunigung und Reibung in der z-Richtung sei so klein, daß p nur von x und y abhängt. Dann kann man die beiden Gleichungen nach z integrieren und erhält zunächst

$$\eta\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial p}{\partial x}z+a_1,\quad \text{woraus}\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial p}{\partial x}\,\frac{z}{\eta}+\frac{a_1}{\eta}\quad \text{und}\quad u=\frac{\partial p}{\partial x}\int\limits_0^z\frac{z\,dz}{\eta}+a_1\int\limits_0^z\frac{dz}{\eta}\quad . \quad . \quad (2)$$

Durch die bestimmte Integration ist bereits die Forderung erfüllt, daß für $z=0$ $u=0$ sein muß. Wäre die Abhängigkeit des η von z etwa graphisch gegeben, so könnten beide Integrale ebenfalls graphisch ermittelt werden. Wir schreiben $\int z\,dz/\eta=z^2/2\eta_2$; $\int dz/\eta=z/\eta_1$, wo $\eta_1\,\eta_2$ von z abhängige Mittelwerte bedeuten. Man erhält die beiden Gleichungen

$$u=\frac{\partial p}{\partial x}\,\frac{z^2}{2\eta_2}+\frac{a_1 z}{\eta_1};\qquad v=\frac{\partial p}{\partial y}\,\frac{z^2}{2\eta_2}+\frac{b_1 z}{\eta_1}\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Bei unveränderlicher Zähigkeit wird $\eta_1=\eta_2=\eta$, was wir für das Fernere voraussetzen wollen, obwohl die gegenteilige Annahme auch weiterhin leicht durchführbar wäre. Die Beiwerte $a_1 b_1$ werden durch die Forderung bestimmt, daß für $z=h$, $u=u_0$, $v=v_0$ sein müsse, und so findet man schließlich

$$u=\frac{\partial p}{\partial x}\,\frac{z^2-hz}{2\eta}+\frac{u_0}{h}z;\qquad v=\frac{\partial p}{\partial y}\,\frac{z^2-hz}{2\eta}+\frac{v_0}{p}z\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Eine Beziehung zwischen u und v ergibt die Durchflußgleichung für das über der Fläche $dx\,dy$ stehende Prisma von der Höhe h. In der Richtung X tritt in dieses durch die Fläche $h\,dy$ im Zeitelement dt die Menge

$$\left.\begin{aligned} V_x&=\int\limits_{z=0}^{h}u\,dy\,dz\,dt=dy\left\{-\frac{h^3}{12\eta}\,\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{u_0 h}{2}\right\}dt\\ \text{ähnlich}\qquad V_y&=\int\limits_{z=0}^{h}v\,dx\,dz\,dt=dx\left\{-\frac{h^3}{12\eta}\,\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{v_0 h}{2}\right\}dt\end{aligned}\right\}\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Auf den gegenüberliegenden Seitenflächen treten die für die Abstände $x+dx$, $y+dy$ zu rechnenden Beträge $V_x'\,V_y'$ aus. Außerdem findet infolge der Geschwindigkeit w_0 eine Raumvergrößerung des Prisma um den Betrag

$$V_z=dx\,dy\,w_0\,dt\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

statt. Da die Flüssigkeit unzusammendrückbar ist, muß

$$V_x'-V_x+V_y'-V_y+V_z=0$$

sein, was die **Differentialgleichung**

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{h^3}{\eta}\frac{\partial p}{\partial y}\right)=6\,u_0\frac{\partial h}{\partial x}+6\,v_0\frac{\partial h}{\partial y}+12\,w_0 \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

ergibt. Für das weitere setzen wir $w_0=0$, $v_0=0$ voraus und verweisen, was die strenge Integration anbelangt, auf die Literatur[1]). Da die vorliegenden Lösungen jedoch außerordentlich umständliche Rechenarbeit erheischen und doch nur den einfachsten Fall mit linear von x abhängigem h und unveränderlichem η zu bewältigen vermögen, liegt ein Bedürfnis nach einer graphischen Lösung vor, wenn sie auch nur angenähert ist, aber eine beliebige Veränderlichkeit von h und η zuläßt.

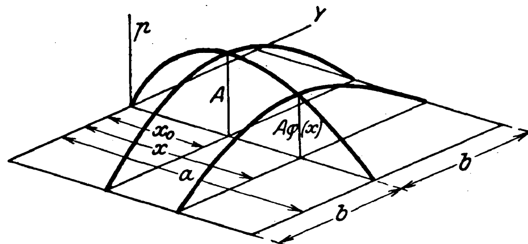


Abb. 974. Der p-Hügel.

Eine solche wird hier mitgeteilt. Um die Entwicklung durchsichtig zu halten, beschränken wir uns immerhin auf den Fall, daß h und η von y unabhängig sind, was in bezug auf h praktisch immer zutrifft, und von η nach den Temperaturmessungen von Lasche angenähert gilt. Hingegen sollen h η von x beliebig abhängige, graphisch gegebene Funktionen sein, wobei η auf Grund bekannter Versuchsergebnisse angenommen wird.

Aus den Lösungen von Michell wissen wir, daß p als Funktion von x, y eine Fläche von der in Abb. 974 dargestellten Form bilden wird. Ob der Abfall nach der Y-Richtung ein mehr parabel- oder mehr sinusförmiger sein wird, hat offenbar nicht soviel Wichtigkeit, wie die Gestalt des Mittelschnittes längs der X-Achse. Um diese zu ermitteln, wird eine nur angenäherte Annahme über $\partial^2 p/\partial y^2$ für $y=0$ genügen. Wir schreiben daher Gl. (7) in der Form

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\right)\right]_{y=0}=6\,u_0\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{h^3}{\eta}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right)_{y=0} \quad \ldots \ldots \quad (7\text{a})$$

und bringen die Gleichung auf eine dimensionslose Form durch Einführung folgender Veränderlichen:

$$x'=\frac{x}{a};\quad y'=\frac{y}{b};\quad \frac{\eta}{\eta_0}=\lambda;\quad \frac{h}{a}=\frac{l}{n};\quad \alpha^2=\frac{a^2}{b^2} \quad \ldots \ldots \quad (7\text{b}).$$

Darin bedeutet η_0 eine mittlere Zähigkeit und l eine graphisch gegebene Form der lichten Weite des Spaltes, mit der die wirkliche Weite $h=al:n$ verhältnisgleich ist. Durch Änderung der reinen Zahl n wird die Spaltform affin geändert. Nach der Einführung von (7b) in (7a) erscheint

$$c=\frac{6\,u_0\eta_0}{a} \quad \ldots \ldots \quad (7\text{c})$$

als Faktor im ersten Gliede rechts. Wir teilen die Gleichung mit c, und so daß mit der Abkürzung

$$\zeta=\frac{p}{c} \quad \ldots \ldots \quad (7\text{d})$$

die neue Form

$$\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{l^3}{\lambda}\frac{\partial \zeta}{\partial x'}\right)_{y=0}=n^2\frac{\partial l}{\partial x'}-\alpha^2\frac{l^3}{\lambda}\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y'^2}\right)_{y=0} \quad \ldots \ldots \quad (7\text{e})$$

entsteht. Für die rechteckige Platte mit a als Länge, $2b$ als Breite werden $x'y'$ sich nur in den Grenzen 0 bis 1 ändern. Man überzeugt sich leicht, daß die allgemein aufgefaßte Gl. 7e durch den Ansatz

$$\zeta=A\,\varphi(x')\,\psi(y') \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

nicht befriedigt werden kann. Wohl aber wird man diese einfache Form in das zweite Glied rechts von Gl. 7e mit der vorläufig unbestimmt bleibenden Größe A einführen dürfen, indem man $\varphi(x')$ für den Mittelschnitt versuchsweise vornimmt, so daß den Randbedingungen

$$\varphi(0)=0;\qquad \varphi(1)=0 \quad \ldots \ldots \quad (8\text{a})$$

genügt wird. Auch darf für die Abszisse x_0', wo $\varphi(x')$ ein Höchstwert ist, $\varphi(x_0')=1$ gemacht werden. Ebenso wird $\psi(0)=1$ werden, und da man nur die zweite Ableitung von ψ für $y'=0$ benötigt, darf der weitere Verlauf von ψ in Schwebe bleiben. Die zweite Ableitung $\psi''(0)$ selbst lassen wir in den Formeln stehen, um darüber zuletzt zu verfügen. Mit den Abkürzungen

$$\alpha^2\frac{l^3}{\lambda}\varphi(x')=f_1(x');\qquad \frac{\partial l}{\partial x'}=f_2(x') \quad \ldots \ldots \quad (8\text{b})$$

[1]) Michell, Z. f. Math. u. Phys. 1905. Kucharski, Z. f. d. gesamte Turbinenwesen 1918, S. 53.

schreibt sich dann die Gl. (7e) als

$$\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{l^3}{\lambda}\frac{\partial \zeta}{\partial x'}\right) = -A\psi''(0)\,f_1(x') + n^2 f_2(x') \quad \text{(8c)}$$

die man, da sie nur von x' abhängt, nachdem man $f_1\ f_2$ aufgetragen hat, graphisch zwischen den Grenzen 0 und x' integrieren kann. Bedeuten l_1 und λ_1 die Werte für $x' = 0$, und führt man

$$\int_0^{x} f_1(x')\,dx' = f_3(x'); \qquad \int_0^{x'} f_2(x')\,dx' = f_4(x') \quad \text{(8d)}$$

ein, so entsteht

$$\frac{l^3}{\lambda}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x'}\right) - \frac{l_1^3}{\lambda_1}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x'}\right)_0 = -A\psi''(0)\,f_3(x') + n^2 f_4(x') \quad \text{(8e)}$$

Die unbekannte Ableitung von ζ bei $x' = 0$ werde mit B bezeichnet, dann liefert mit

$$\frac{l_1^3}{\lambda_1}\frac{\lambda}{l^3} = f_5(x'); \qquad \frac{\lambda}{l^3} f_3(x') = f_6(x'); \qquad \frac{\lambda}{l^3} f_4(x') = f_7(x'); \qquad B = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x'}\right)_0 \quad \text{(8f)}$$

die Auflösung von (8e) nach $\partial\zeta/\partial x'$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x'} = B f_5(x') - A\,\psi''(0)\,f_6(x') + n^2 f_7(x') \quad \text{(9)}$$

Es seien die Integrale von $f_5\ f_6\ f_7$

$$\int_0^{x'} f_5(x')\,dx' = F_1(x'); \qquad \int_0^{x'} f_6(x')\,dx' = F_2(x'); \qquad \int_0^{x'} f_7(x')\,dx' = F_3(x') \quad \text{(9a)}$$

so wird die integrierte Form von (9)

$$\underset{(x'=0)}{\zeta} = B\,F_1(x') - A\,\psi''(0)\,F_2(x') + n^2 F_3(x') \quad \text{(10)}$$

Der Wert von ζ für $x' = 0$ ist dann, wie die Randbedingung fordert, $= 0$. Zu erfüllen sind noch die Vorschriften $\zeta = 0$ für $x' = 1$, wie auch daß für $x' = x_0'$ Gl. (10) denselben Wert, d. h. A für ζ ergebe, wie die ursprüngliche Annahme Gl. (8). Dies führt auf die Gleichungen

$$BF_1(1) - A\psi''(0)F_2(1) + n^2 F_3(1) = 0 \quad \text{(11)}$$

$$BF_1(x_0') - A\psi''(0)F_2(x_0') + n^2 F_3(x_0') = A \quad \text{(11a)}$$

Erst jetzt braucht man über $\psi(y')$ schlüssig zu werden. Die einfachste Annahme ist die Parabelform, d. h.

$$\psi(y') = 1 - y'^2, \quad \text{woraus} \quad \psi''(0) = -2 \quad \text{folgt} \quad \text{(11b)}$$

Die Auflösung von (11) und (11a) liefert A und B als zu n^2 proportionale Zahlenwerte

$$A = n^2 A_0; \qquad B = n^2 B_0 \quad \text{(11c)}$$

Also ergibt sich mit der Abkürzung

$$B_0 F_1(x') - A_0\psi''(0)\,F_2(x') + F_3(x') = \Phi(x') \quad \text{(11d)}$$

der angenäherte Wert von ζ und p nach Gl. (8)

$$p = c\zeta = n^2 c\,\Phi(x')\,\psi(y') \quad \text{(12)}$$

Nun muß der Schnitt $y' = 0$ mit der ursprünglichen Annahme Gl. (8) verglichen werden. Ergeben sich wesentliche Abweichungen, so müßte (12) als neue „Annahme" gewählt und das Verfahren wiederholt werden. Ein unten erläutertes Beispiel spricht dafür, daß die „Konvergenz" des Verfahrens eine große ist.

Mit p bestimmt sich die gesamte Normalkraft P

$$P = \int_0^{a}\int_{-b}^{+b} p\,dx\,dy = abcn^2 \int_0^{a}\int_{-b}^{+b} \Phi(x')\,\psi(y')\,dx'\,dy' \quad \text{(13)}$$

Ferner die auf die Kammoberfläche wirkende Reibungskraft in der X-Richtung

$$K = \int_0^{a}\int_{-b}^{+b} (\tau)_{z=0}\,dx\,dy \quad \text{(14)}$$

Darin ist $\tau_{z=0} = \eta\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=0}$ gemäß Gl. (4) $= -\frac{h}{2}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{u_0\eta}{h}$. Am ersten Gliede kann man par-

tiell nach x integrieren $\int_0^a -\frac{h}{2}\frac{\partial p}{\partial x}dx = \left[-\frac{h}{2}p\right]_{x=0}^{x=a} + \int_0^a \frac{p}{2}\frac{dh}{dx}dx$, wobei der Klammerausdruck verschwindet, weil p an den Grenzen $=0$ ist. Danach wird K, wenn man $\frac{u_0\eta}{h} = \frac{\eta_0 u_0}{a}\left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)\left(\frac{a}{h}\right) = \frac{nc}{6}\,\frac{\lambda}{l}$ einführt,

$$K = a\,b\,c\,n \int_0^a \int_{-b}^{+b} \left\{\frac{dl}{dx'}\,\Phi(x')\,\psi(y') + \frac{1}{6}\,\frac{\lambda}{l}\right\} dx'\,dy' \quad \ldots\ldots\ldots (14\text{a})$$

Die graphisch zu bildenden Integrale ergeben die Zahlenwerte Z_k und Z_p und man erhält schließlich die Reibungszahl

$$\mu = \frac{K}{P} = \frac{Z_k}{n\,Z_p} \quad \ldots\ldots\ldots (15)$$

Z_k und Z_p hängen vom Verhältnis a/b, der Form des Spaltes, dessen ursprünglicher Weite, der mittleren Zähigkeit und deren Änderungsgesetz, nicht aber von der Geschwindigkeit u_0 ab. Es ist bemerkenswert, daß μ bei jeder Spaltform, wenn sie ähnlich verändert wird, mit der lichten Weite verhältnisgleich wächst oder abnimmt. Da jedoch n nicht ursprünglich gegeben ist, wird man vorziehen, μ durch den mittleren Druck $\overline{p}$ auszudrücken.

Aus Gl. 13 folgt

$$n = \sqrt{\frac{\overline{p}}{c\,Z_p}},$$

somit wird, mit $c = 6\,u_0\eta_0/a$

$$\mu = \sqrt{\frac{6\,u_0\eta_0}{a\,p}\,\frac{Z_k^2}{Z_p}} \quad \ldots\ldots\ldots (16)$$

Hier kommt die Abhängigkeit der Reibungszahl von der Geschwindigkeit u_0 klar zum Ausdruck. Bei unendlich langer Schale ($b=\infty$) ist μ um so kleiner, je größer die Breite a ist. Bei endlich langen Schalen bleibt diese Regel bestehen; allein es tritt ausschlaggebend das Verhältnis a/b auf, so zwar, daß wie wir in Abschn. 96 gezeigt haben, bei einem Wachsen von a/b über 1,5 bis 2 hinaus die Reibungszahl auf ein Vielfaches des bei quadratischer Form geltenden Wertes zunimmt.

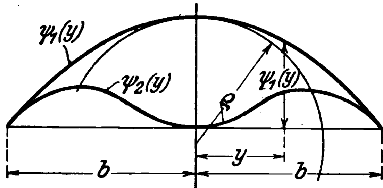


Abb. 975. Berichtigung von $\psi(y)$.

Berichtigung von $\psi(y)$. Wenn gemäß Gl. (12) der verbesserte Wert von p feststeht, bestimmt man (graphisch) den neuen Wert x_0, bei dem $\partial p/\partial x = 0$ wird. Für die Abszisse $x' = x_0$ lautet die Differentialgleichung (7), dimensionslos ausgedrückt, da $(\partial\zeta/\partial x')$ bei $x' = x_0'$ verschwindet,

$$\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x'^2}\right)_{x_0'} + \alpha^2\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y'^2}\right)_{x_0'} = n^2\left(\frac{\lambda}{l^3}\,\frac{\partial l}{\partial x'}\right)_{x_0'} = n^2 D \quad \ldots\ldots\ldots (17)$$

Man denkt sich nun $\psi(y')$ zusammengesetzt aus der ursprünglichen Annahme Gl. 11b), die wir mit $\psi_1(y')$ bezeichnen wollen, und einer mit dem unbestimmten Beiwert β vermehrten Funktion $\psi_2(y')$, die der Bedingung genügt, bei $y'=0$ und $y'=1$ zu verschwinden und bei $y'=0$ eine verschwindende Krümmung zu besitzen. Eine Kurve dieser Art wird von Freihand eingezeichnet, wie Abb. 975 zeigt, und es wird

$$\psi(y') = \psi_1(y') + \beta\,\psi_2(y') \quad \ldots\ldots\ldots (18)$$

Aus Gl. (12) berechnet sich

$$\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x'^2}\right)_{x_0'} = n^2\,\Phi''(x_0')\,\psi(y')$$

Wird dies in Gl. (17) eingeschoben, so kann man nach $\partial^2\zeta/\partial y'^2$ auflösen über $y'=0$ bis y' integrieren, was auf

$$(\zeta)_{x_0'} = \frac{n^2}{\alpha^2}\,D\,\frac{y'^2}{2} - \frac{n^2}{\alpha^2}\,\Phi''(x_0')\int_0^{y'}\!\!\int_0^{y'} \psi(y')\,dy'^2 + C \quad \ldots\ldots\ldots (19)$$

führt. Das Doppelintegral, mit $\Psi(y')$ bezeichnet, läßt sich als

$$\Psi(y') = \Psi_1(y') + \beta\,\Psi_2(y') \quad \text{mit} \quad \Psi_1 = \int_0^{y'} dy' \int_0^{y'} \psi_1(y')\,dy'; \qquad \Psi_2 = \int_0^{y'} dy' \int_0^{y'} \psi_2(y')\,dy' \quad . \; . \; (20)$$

ausdrücken, und es muß die Bedingung erfüllt sein, daß für $y' = \pm 1$ $\zeta = 0$ sei, d. h.

$$0 = \frac{n^2}{2\,\alpha^2} D - \frac{n^2}{\alpha^2} \Phi''(x_0') \left[\Psi_1(1) + \beta\,\Psi_2(1)\right] + C \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (21)$$

Ferner muß bei $y' = 0$ der Wert $\zeta = A$ erreicht werden, oder da $\Psi(0) = 0$ ist

$$C = A \quad . \; (22)$$

so daß nun Gl. (21) zur Bestimmung der Beizahl β dienen kann.

Da der Hauptzweck dieser graphischen Annäherung darin besteht, Vergleichswerte für den Einfluß der maßgebenden Größen zu erhalten, dürfte man sich mit dem Ergebnis in Gl. (12) zufrieden geben und auf die Berichtigung von ψ verzichten.

Die Strömungslinien sind von Schichte zu Schichte verschieden. Man wird sie aus der mittleren Geschwindigkeit $\bar{u}$ und $\bar{v}$ an jeder Stelle entwickeln können, wenn man beachtet, daß in Gl. (5) die Durchflußmengen als $V_x = h\,dy\,\bar{u}\,dt$; $V_y = h\,dx\,\bar{v}\,dt$ ausgedrückt werden können. Daraus ergibt sich

$$\bar{u} = -\frac{h^2}{12\,\eta}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{u_0}{2}; \qquad \bar{v} = -\frac{h^2}{12\,\eta}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{v_0}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (23)$$

Bezeichnen wir die ersten Glieder rechts mit u_1 und v_1, so wird mit $v_0 = 0$

$$\bar{u} = u_1 + \frac{u_0}{2}; \qquad \bar{v} = v_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (23\,\text{a})$$

Um die Gesamtgeschwindigkeit zu bilden, kann man zuerst u_1 und v_1 zu einer Resultierenden zusammenfassen und an diese die überall gleiche Komponente $u_0/2$ anfügen. Nun ist

$$w^* = \sqrt{u_1^2 + v_1^2} = -\frac{h^2}{12\,\eta}\sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2}$$

und der Wurzelausdruck darin der Gradient der Abhängigen p, d. h. $= \partial p/\partial n$, wenn n die Richtung der Normalen an die Höhenlinien $p =$ konst (im Grundriß) bedeutet. Die Gesamtheit der Geschwindigkeiten w^* stellt gewissermaßen einen Strom von Flüssigkeit dar, die vom „p-Hügel" mit einer der jeweiligen Böschungsneigung proportionalen Schnelligkeit herabfließt. In $\partial p/\partial n$ erscheint bei der Ausrechnung u_0 als Faktor, so daß die resultierende Richtung von u_0 unabhängig wird. Die Überlagerung der „Zentralströmung" mit $u_0/2$ ergibt das wirkliche Geschwindigkeitsbild.

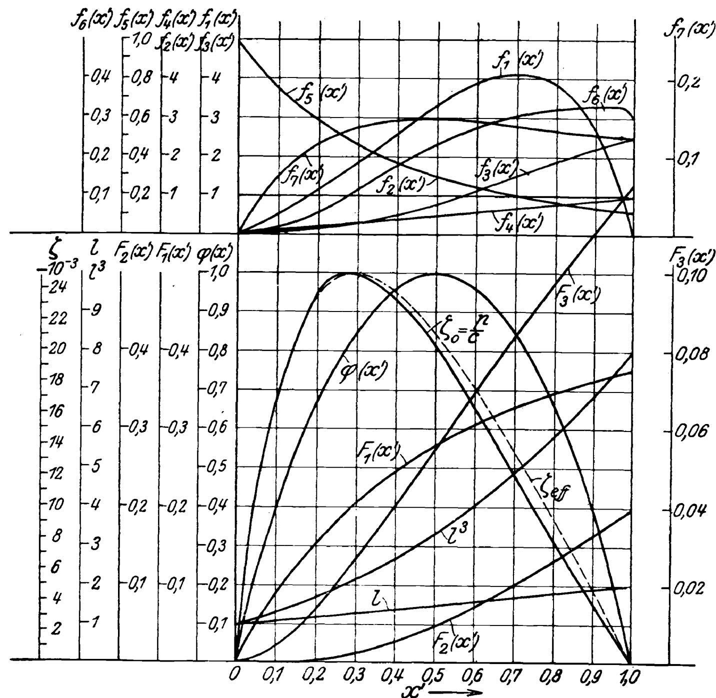


Abb. 975a. Beispiel, die quadratische Platte.

Beispiel 1. In Abb. 975a ist die **quadratische Platte** behandelt für die gemäß der strengen Lösung von Michell im Mittelschnitt der Verlauf von ζ (bzw. p) durch die punktierte Schaulinie ζ_{eff} gegeben ist. Um die Annäherung des Verfahrens zu prüfen, wurde die hiervon stark abweichende Linie $\varphi(x')$ als erste Annahme ausgeführt. Die Spaltform ist durch l veranschaulicht, η wird als unveränderlich angesehen. Im Oberteil der Abbildung sind der Reihe nach die Funktionen f_1 bis f_7, im unteren die Funktionen F_1 bis F_3 entwickelt. Das Ergebnis ist die ausgezogene Schaulinie $\zeta_0 = p/c$, die auf der linken Seite mit ζ_{eff} fast genau, auf der rechten Seite so befriedigend übereinstimmt, daß von einer Wiederholung abgesehen wurde.

Beispiel 2. Abb. 975b soll die Wirkung einer in Richtung der Strömung zunehmenden Temperatur, also **abnehmenden Zähigkeit** veranschaulichen. Die Änderung der letzteren wurde der Einfach-

heit halber (jede andere Annahme kann ebenso leicht berücksichtigt werden) durch die gerade Linie für den reziproken Wert $1/\lambda$ ausgedrückt, wobei die Endwerte sich wie 1 : 3 verhalten. Hier wurde als

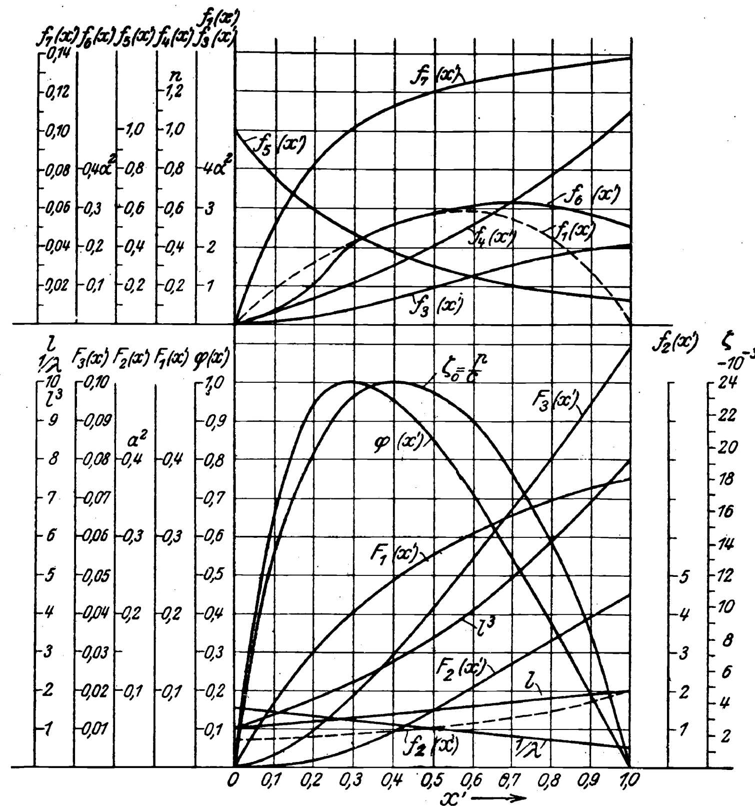


Abb. 975b. Einfluß der Temperatur.

erste Annahme für $\varphi(x')$ die richtige Kurve von Michell für die quadratisehe Platte (bei unveränderlichem η) gewählt. Das Verfahren führt auf die flache Hügelform ζ_0, womit eine bedeutende Wirkung der Abnahme der Zähigkeit erwiesen wird.

Das Verfahren ist auf Halslager ausdehnbar, da die Krümmung der Strombahnen auf die Geschwindigkeit in der Tangentialebene so gut wie keinen Einfluß ausübt. Man darf dabei Abb. 973 als Abwickelung der Zapfen und Schalenfläche ansehen, wobei sich die veränderliche Höhe des Spaltes aus der versuchsweise anzunehmenden Exzentrizität der Zapfen ergibt. Gemäß den in Abschn. 96 gemachten Festsetzungen würde man negative Pressungen nicht zulassen. Die Integrationen haben sich daher von der engsten Stelle aus im Sinne der Drehung bis zur wagerechten Teilfuge zu erstrecken.

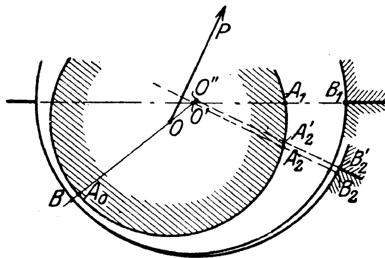


Abb. 976. Verfahren bei Halslagern.

Erschwerend wirkt hier die Förderung, daß die **Resultierende aus Normaldrücken und Reibungskräften der lotrecht wirkenden Lagerbelastung gleich sein muß.** Doch dürfte man die Reibungen, da die Reibungszahlen meist unter $^1/_{100}$ liegen, vernachlässigen, und hätte nur die Resultierende der Normaldrücke mittels Seilpolygonen aufzusuchen. Diese wird in der Regel nicht lotrecht zur Lagerfuge stehen; doch kann das Ergebnis mit einer gewissen Annäherung einer anderen Exzentrizität der Welle angepaßt werden. Es kommt nämlich für die Druckverteilung im wesentlichen auf das Verhältnis der Spaltweiten am Anfang und am Ende an. Wenn also in Abb. 976 bei der ursprünglich gewählten Wellenlage die Resultierende P die gezeichnete schräge Richtung erhält, kann man auf die vom Schalenmittelpunkt senkrecht dazu gezogene neue Spaltrichtung $O'A_2$ in $A_2B_2 = A_1B_1$ die gleiche Spaltweite wie ursprünglich abtragen, wodurch sich in $O'B_2$ der neue Schalenhalbmesser R' ergibt. Unter Beibehaltung der engsten Stelle wird von B aus der Halbmesser $O'B_2$ freilich eine neue Lage O'' des Mittelpunktes und die neue Exzentrizität OO'' herausschneiden, wodurch A_2B_2 in das unmerklich wenig verschiedene $A_2'B_2'$ verwandelt wird. Man wird so viele Beispiele lösen müssen, daß sich durch Interpolation P und K für alle Exzentrizitäten und alle Umschließungswinkel ermitteln lassen. Daß man sich dabei mit der Berichtigung von $\psi(y)$ nicht wird aufhalten wollen, liegt auf der Hand.

178. Unterkühlung bei der Entspannung von Naßdampf.

Im Abschn. 41 sind die Erscheinungen besprochen worden, durch die das Auftreten der Unterkühlung beim Entspannen von Naßdampf erwiesen wird. Im nachfolgenden treten wir auf die thermodynamische und molekulartheoretische Untersuchung dieser wichtigen Frage ein.

a) Thermodynamisches Gleichgewicht zwischen Dampf und in ihm schwebenden Tropfen mit Rücksicht auf die Kapillarkräfte.

Die in der Nähe der Tropfenoberfläche sich befindlichen Moleküle erleiden von ihren innerhalb der „Wirkungssphäre" gelegenen Nachbarn eine nach einwärts gerichtete Anziehungskraft, die den sogenannten „Binnendruck" erzeugt. Man pflegt dessen Wirkungen durch die „kapillare Oberflächenspannung" σ (kg für die Längeneinheit) zu ersetzen. Wir denken uns an der in Abb. 977 dargestellten Vorrichtung einen Tropfen durch die statische Pressung der Druckhöhe h hervorgetrieben. Die Oberflächenspannung hält im Verein mit dem Dampfdruck p in der Umgebung des Tropfens dem Flüssigkeitsdruck p^* das Gleichgewicht, und die Gleichheit der Kräfte, die an der oberen Kugelhälfte wirken, drückt sich durch die Gleichung

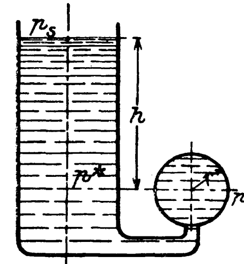


Abb. 977. Gleichgewicht bei Kapillarkräften.

$$\pi r^2 p^* = \pi r^2 p + 2\pi r \sigma, \quad \text{oder} \quad p^* = p + \frac{2\sigma}{r} \quad \ldots (1)$$

aus. Gleichzeitig ist auch

$$p^* = p_s + h\gamma_0 \quad \text{und angenähert} \quad p = p_s + h\gamma \quad \ldots\ldots\ldots (1a)$$

wenn p_s der Sättigungsdruck am freien ebenen Wasserspiegel bei gleicher Temperatur T,
γ_0 das spezifische Gewicht des Wassers,
γ dasjenige des Dampfes

bedeutet. Durch Ausscheiden von p^* und h folgt bei thermodynamischem Gleichgewicht d. h. **bei überall gleicher Temperatur,**

$$p - p_s = \frac{2\sigma}{r}\frac{\gamma}{\gamma_0 - \gamma} \simeq \frac{2\sigma}{r}\frac{\gamma}{\gamma_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Hiernach ist der Dampfdruck an der Tropfenoberfläche um einen zum Kugelhalbmesser umgekehrt proportionalen Betrag größer als der Sättigungsdruck an der ebenen Oberfläche. Oder umgekehrt: die Temperatur des thermischen Gleichgewichtes ist kleiner als die Sättigungstemperatur, die dem herrschenden Drucke entspricht. Bei sehr großen Höhen h muß das Gewicht der Dampfsäule wegen des veränderlichen γ durch Integration gefunden werden. Wenn angenähert nach dem Gasgesetz $p_x = RT\gamma_x$ gilt, wo $R = 47{,}1$ gesetzt wird, so ist $-dp_x = \gamma_x dh = \frac{p_x}{RT}dh$, oder integriert, mit Rücksicht auf Gl. (1), (1a)

$$\lg n \frac{p}{p_s} = \frac{h}{RT} = \frac{p - p_s + 2\sigma/r}{\gamma_0 RT}.$$

Wenn γ_m einen Mittelwert bedeutet, so kann man nach (1a) $p - p_s = 2\sigma\gamma_m/\gamma_0 r$ setzen, wodurch der Zähler in $(1 + \gamma_m/\gamma_0)\cdot 2\sigma/r$ übergeht. Da aber γ_m klein ist gegen γ_0, so wird sehr angenähert

$$\lg n \frac{p}{p_s} = \frac{2\sigma}{\gamma_0 r RT} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Dies sind die bekannten Formeln von Lord Kelvin und R. v. Helmholtz[1]).

Zur gleichen Formel gelangt man durch den Prozeß einer „isothermischen Destillation", indem man aus der Kugel eine unendlich kleine Menge Wasser verdampft, in einem Zylinder isotherm auf p_s ausdehnen läßt, auf die Höhe h hinaufschafft, dort durch Wärme-

[1]) Wied. Ann. 27, 1886, S. 508.

entzug kondensiert, im Rohre wieder hinuntersinken läßt, so daß der Tropfen auf den alten Rauminhalt gebracht wird. Nach einem bekannten Lehrsatz muß hierbei die Summe der gewonnenen und verbrauchten Arbeiten = Null sein, was unter Benutzung von Gl. (1) auf Gl. (3) führt.

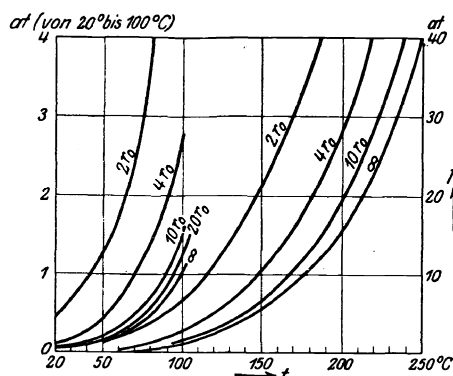


Abb. 977 a. Dampfspannung in Abhängigkeit vom Tropfenhalbmesser.

Die Oberflächenspannung muß mit wachsender Temperatur abnehmen und bei der kritischen Temperatur, wo Flüssigkeit und Dampf eins sind, auf den Wert Null sinken. Über ihren Zahlenwert sind wir nur in einer kleinen Temperaturspanne von 6° bis 40° C durch die Untersuchungen von Volkmann[1]) unterrichtet, deren Ergebnisse man durch die Formel

$$\sigma = 7{,}66 \cdot 10^{-3} - 1{,}45 \cdot 10^{-5}\,t$$

oder

$$\sigma = 11{,}62 \cdot 10^{-3} - 1{,}45 \cdot 10^{-5}\,T = a - bT \quad . \,(4)$$

in kg für 1 m Breite darstellen kann.

Wir wollen die Größe der Unterkühlung an einem Tropfen berechnen, der beispielsweise aus 1000 Molekülen besteht. Bekanntlich enthält 1 g-Molekül Wasser (nach etwas älteren Angaben) rund $6{,}8 \cdot 10^{23}$ Moleküle. Daraus folgt das Gewicht eines Moleküls

$$g_0 = 18 \cdot 10^{-3} : 6{,}8 \cdot 10^{23} = 2{,}647 \cdot 10^{-26}\ \text{kg}.$$

Der Tropfenhalbmesser bestimmt sich aus der Gleichung $^4/_3\,\pi r^3 \gamma_0 = 1000\,g_0$ zu $r = 1{,}85 \cdot 10^{-9}$ m. Mit diesem Wert ist die folgende Zahlentafel nach Gl. (3) berechnet, außerdem sind die Unterkühlungsdrücke für **Vielfache des Moleküldurchmessers** in Abb. 977a als abhängige der Temperatur dargestellt.

Aus 1000 Molekülen bestehender Tropfen.

Sättigungsdruck am ebenen Wasserspiegel p_s	kg/qcm	1	0,8	0,6	0,4
Dampfdruck im Gleichgewicht mit dem Tropfen p . .	„	1,469	1,186	0,906	0,618
Temperatur der Unterkühlung t	°C	99,1	93,0	85,5	75,5

Außerordentlich hoch ist der Druck im Innern des Tropfens; nach Gl. (1) für unser Beispiel bei 100° C:

$$p^* = p + 6{,}72 \cdot 10^6\ \text{kg/qcm} = p + 672\ \text{at}.$$

Ein solcher Tropfen wird also selbst bei noch so rascher Druckentlastung keine innere Dampfentwicklung zeigen und nicht „explodieren" können.

Mit wachsender Tropfengröße nähert sich die Dampfpressung sehr rasch dem Sättigungsdruck; so beträgt bei einem Halbmesser $r = 10^{-8}$ m und 100° Temperatur das Verhältnis p/p_s nur noch 1,073, bei $r = 10^{-7}$ m nur 1,007. Umgekehrt müßte bei abnehmendem Halbmesser p/p_s über alle Grenzen wachsen. Doch ist zu beachten, daß schon der Halbmesser des einzelnen Moleküls (oder doch derjenige seiner „Wirkungssphäre") nicht = Null werden kann, sondern sich aus dem berechneten Gewicht des Moleküls mit dem spezifischen Gewicht des Wassers zu

$$r_0 = 1{,}85 \cdot 10^{-10}\ \text{m} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (4\text{a})$$

ermittelt. Wenn dann etwa 4 Moleküle in den Eckpunkten eines Tetraeders zusammentreffen, so wird an diesem „Tropfen" die „Oberflächenspannung" wohl kleiner sein als an einem größeren Tropfen mit viel Molekülen. Da indessen Lamellen aus Seifenblasen in Dicken von nur wenigen Molekülschichten vorkommen und bereits den normalen Wert der Oberflächenspannung aufweisen, so dürfte ihre Abnahme erst bei sehr kleinen Tropfen mit vielleicht $r = 3$ bis $4\,r_0$ merklich werden. Bei dieser Größenordnung betritt man bereits das **Gebiet der kinetischen Gastheorie, d. h. der statistischen Wahrscheinlichkeit,** mit anderen Gesetzen als denen für den „makroskopischen", d. h. durch die Mittelwerte von p, T, v bestimmbaren Zustand. Infolge der außerordentlichen rechnerischen Schwierigkeiten muß **dieses Gebiet** im wesentlichen **aus den folgenden Betrachtungen ausgeschlossen werden,** was jedoch nicht hindert, den Endzustand auch solcher Prozesse richtig bestimmen zu können, die durch jenes Gebiet hindurchführen.

Aus der Kapillaritätsformel folgt, daß ein Tropfen in **gesättigter Dampfatmosphäre nicht bestehen kann, sondern verdampft, da die Temperatur der Umgebung höher ist, als dem thermodynamischen Gleichgewicht entspricht**[2]).

---

[1]) Wied. Ann. N. F. 56, 1895, S. 457.

[2]) J. J. Thomson zwar hat in seinem Werke „Elektrizitätsdurchgang in Gasen" 1906, S. 153, die Ansicht ausgesprochen, daß thermodynamisches Gleichgewicht auch zwischen Tropfen sehr kleiner, aber bestimmter Größe und gesättigtem Dampf bestehen könne, infolge des von Reinold und Rücker

Kapillarenergie und Entropie.

Von grundlegender Wichtigkeit für Wärmerechnungen ist die **Kapillarenergie** der Oberflächenschicht des Tropfens. Um diese zu bestimmen, führen wir mit einer Wassermembrane folgenden umkehrbaren Kreisprozeß durch: 1. Wir dehnen unter Zufuhr der Wärmemenge $2\,dq$ die Membrane um den Oberflächenbetrag dO bei der Temperatur T aus, wobei auf die Membrane die Arbeit $2\,\sigma dO$ übertragen wird (je einmal σdO für die obere und für die untere Oberflächenschicht). 2. Wir kühlen die gespannte Membrane auf $T' = T - dT$ ab, wobei die Oberflächenspannung (algebraisch) auf $\sigma' = \sigma - d\sigma$ sinkt. 3. Wir entspannen die Membrane um denselben Oberflächenbetrag dO, unter Entzug der Wärme $2\,dq'$ und unter Abgabe der Arbeit $2\,\sigma' dO$ nach außen. 4. Wir erwärmen die entspannte Membrane auf die ursprüngliche Temperatur T. Die Unterschiede der zum Abkühlen und Erwärmen notwendigen Wärmemengen pflegt man als unendlich klein höherer Ordnung anzusehen. Es ist mithin die gesamte Entropiezunahme $= dq : T - dq' : T'$. Da wir durch umkehrbare Änderungen zum Anfangszustand zurückkehrten, muß

$$dq/T = dq'/T' \quad \ldots \quad (5)$$

sein, und es ergibt sich somit zwischen den Wärmemengen und den Temperaturen die gleiche Beziehung wie bei einem Carnotschen Prozeß. Die im ganzen nach außen abgegebene Arbeit (in kcal) ist

$$2\,A(\sigma' - \sigma)\,dO = 2\,(dq - dq') \quad \ldots \quad (6)$$

und da $dq' = dq T' : T$, erhält man:

$$dq = AT\frac{\sigma' - \sigma}{T - T'}dO = -AT\frac{d\sigma}{dT}dO \quad \ldots \quad (7)$$

Der Energiesatz für den Vorgang 1 an sich liefert die Gleichung

$$2\,dq + 2\,A\sigma dO = 2\,du,$$

also ist mit Rücksicht auf Gl. (7) und (4) die innere Energie einer Oberflächenschicht vom Flächeninhalt O:

$$u_{\text{kapo}} = A\left(\sigma - T\frac{d\sigma}{dT}\right)O = AaO \quad \ldots \quad (8)$$

Besteht nun die Flüssigkeit aus lauter kugelförmigen Tropfen vom Halbmesser r, so ist die Oberfläche $O = 4\,\pi r^2$ und das Gewicht eines Tropfens $G = {}^4/_3\,\pi r^3 \gamma_0$, daher liefert Gl. (7) die für 1 kg zuzuführende Wärmemenge

$$q_{\text{kap}} = -AT\frac{d\sigma}{dT}\frac{O}{G} = -\frac{3\,A}{\gamma_0 r}T\frac{d\sigma}{dT} = \frac{3\,Ab}{\gamma_0 r}T \quad \ldots \quad (9)$$

und Gl. (8) die **kapillare Energie** für 1 kg

$$u_{\text{kap}} = \frac{3\,A}{\gamma_0 r}\left(\sigma - T\frac{d\sigma}{dT}\right) = \frac{3\,Aa}{\gamma_0 r}$$

oder in Zahlenwerten

$$u_{\text{kap}} = \frac{8{,}160}{r}10^{-8}\ \text{kcal} \quad \ldots \quad (10)$$

Endlich ist die **Entropie der kapillaren Oberflächenschicht** für 1 kg des Tropfengewichtes

$$s_{\text{kap}} = \frac{q}{T} = -\frac{3\,A}{\gamma_0 r}\frac{d\sigma}{dT} = \frac{3\,Ab}{\gamma_0 r} \quad \ldots \quad (11)$$

oder nach Gl. (4)

$$s_{\text{kap}} = \frac{1{,}016}{r}10^{-10}\cdot\text{kcal}/{}^0\text{C} \quad \ldots \quad (12)$$

(Philos. Transact. Bd. 177, Teil II, 1886, S. 680) bei Messungen an dünnen Lamellen (Seifenblasen) wahrscheinlich gemachten Umstandes, daß die Oberflächenspannung bei abnehmender Schichtendicke zuerst abnimmt, dann zunimmt, um endlich bei ganz kleiner Schichtendicke wieder abzunehmen. Doch können wir der Ansicht J. J. Thomsons nicht beipflichten, da seine Ableitung die Wärmemenge, die bei einer isothermen Zustandsänderung ins Spiel tritt, außer acht läßt und er einen unrichtigen Ausdruck für die Energie der Oberflächenschicht benutzt.

Ist eine Flüssigkeitsmenge gegeben, die aus z Tropfen von je G kg Gewicht besteht, so ist ihre kapillare Energie $U_{\text{kap}} = zGu_{\text{kap}}$. Bei einem Übergang in den Zustand z', G' u'_{kap} ist mithin die Gesamtänderung

$$dU_{\text{kap}} = d(zGu_{\text{kap}}) = zGu_{\text{kap}}\left(\frac{dz}{z} + \frac{dG}{G} + \frac{du_{\text{kap}}}{u_{\text{kap}}}\right).$$

Die thermodynamischen Grundgleichungen für unterkühlten Naßdampf.

Der Naßdampf möge auf 1 kg Gewicht einen Anteil x kg unterkühlten Dampf und $(1-x)$ kg Tropfen in der Anzahl z enthalten. Für den Dampfteil wählen wir in Ermangelung genauerer Angaben als Ausdruck der Zustandsgrößen die Formeln für überhitzten Dampf. In der dem Buche beigegebenen Tafel sind die Unterkühlungslinien p = konst., T = konst. nach den Formeln von Eichelberg, Abschn. 9, gerechnet. Dies hindert nicht, daß man für Rechnungen minder großer Genauigkeit vereinfachte Ausdrücke verwendet, z. B. die von Mollier-Callendar (laut „Hütte")

$$\left.\begin{aligned} v'' &= 47\frac{T}{p} + 0{,}001 - \mathfrak{B}, \quad \text{mit} \quad \mathfrak{B} = 0{,}075\left(\frac{273}{T}\right)^{\frac{10}{3}} \\ u'' &= \frac{A}{k-1}pv'' + 464{,}7\,; \qquad i'' = \frac{Ak}{k-1}pv'' + 464{,}7 \quad \text{mit} \quad k = 1{,}3 \\ s'' &= 0{,}477 \lg n\, T - 0{,}11 \lg n\,(p\,10^{-4}) - \mathfrak{S}p\,10^{-4} - 1{,}0544 \quad \text{mit} \quad \mathfrak{S} = \frac{10^5}{3}\frac{A\mathfrak{B}}{T} \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

für m/kg/sek Einheiten (also p in kg/qm). Wir werden auch die einfache Gasgleichung

$$pv'' = RT \quad \text{mit} \quad R = 47{,}1$$

häufig anwenden dürfen. Für den flüssigen Teil gelten

$$\left.\begin{aligned} &v' = 0{,}001\,; \qquad u_{fl} = u' + u_{\text{kap}} \\ &i_{fl} = u_{fl} + Apv' \cong i' + u_{\text{kap}}; \qquad s_{fl} = s' + s_{\text{kap}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (13\text{a})$$

Darin bedeutet $u'i's'$ die aus den Tabellen der „Hütte" zu entnehmenden gewöhnlichen, oder thermischen Größen; während u_{kap} s_{kap} die nach Gl. (16) u. (12) zu rechnenden Kapillaritätsgrößen sind. Die Summe ist durch die Fußnote „fl" als auf flüssiges Wasser im ganzen bezogen gekennzeichnet.

Für 1 kg des Gemisches gelten, einmal durch den Dampfinhalt x, dann durch die **Dampfnässe** $y = 1 - x$ ausgedrückt, die Formeln

$$\left.\begin{aligned} &\text{der Rauminhalt} && v = (1-x)\,v' + xv'' = v' + x(v''-v') = v'' - y(v''-v') \\ &\text{die innere Energie} && u = (1-x)\,u_{fl} + xu'' = u_{fl} + x(u''-u_{fl}) = u'' - y(u''-u_{fl}) \\ &\text{der Wärmeinhalt} && i = (1-x)\,i_{fl} + xi'' = i_{fl} + x(i''-i_{fl}) = i'' - y(i''-i_{fl}) \\ &\text{die Entropie} && s = (1-x)\,s_{fl} + xs'' = s_{fl} + x(s''-s_{fl}) = s'' - y(s''-s_{fl}) \end{aligned}\right\} \quad (13\text{b})$$

Hierin tritt mit Einführung von z als Zahl der Tropfen (gleicher Größe vom Halbmesser r) die Gleichung

$$y = 1 - x = \tfrac{4}{3}\pi r^3 \gamma_0 z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13\text{c})$$

Die Gl. (13) bestimmen mit der „Dampfspannungsformel" (3) die Zustandsänderung des unterkühlten Dampfgemisches.

Als Beispiel berechnen wir die **Verdampfungswärme** für ein Element des Tropfens bei unendlich kleiner Zustandsänderung und unveränderlicher Temperatur. Die Wärmegleichung lautet auf 1 kg bezogen allgemein

$$\begin{aligned} dq &= du + Ap\,dv = d\left\{u_{fl} + x(u''-u_{fl})\right\} + Apd\left\{v' + x(v''-v')\right\} \\ &= du_{fl} + x\,d(u''-u_{fl}) + (u''-u_{fl})\,dx + Ap(v''-v')\,dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14) \end{aligned}$$

Das Tropfengewicht G möge (algebraisch) um dG; der Dampfanteil um $d\Gamma$ zunehmen. Dann ist $dG = -d\Gamma$; $dx = d\Gamma/G$. Da die Temperatur sich nicht ändert ist, $du_{fl} = du_{\text{kap}}$ und man erhält

$$dq = \frac{1}{G}\left\{G\,du_{\text{kap}} - u_{\text{kap}}\,d\Gamma + [u'' - u' + Ap(v''-v')]\,d\Gamma\right\}$$

Wenn wir $d\Gamma = -dG$ im zweiten Gliede einsetzen und beachten, daß im dritten Gliede die Klamme den Wärmeinhalt $(i'' - i')$ bedeutet, so wird

$$dq = \frac{1}{G}\left\{d(G u_{\text{kap}}) + (i'' - i')\, d\Gamma\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (14a)$$

Das erste Glied rechts ist $= d\left(\frac{4}{3}\pi\gamma_0 r^3 \cdot \frac{3\,A\,a}{\gamma_0 r}\right) = d([4\pi r^2])\,A\,a$; das Differential darin die Oberflächenzunahme (algebraisch), die wir $= d\,0$ setzen. Demnach ist $d(G u_{\text{kap}})$, wie sein soll, die Zunahme der Oberflächenkapillarenergie $= A\,a\,d\,0 = 8\pi r\,dr\,A\,a$ je nach dem Vorzeichen von dr positiv oder negativ.

$G\,dq$ ist die dem ganzen Tropfen zugeführte Wärmemenge; $G\,dq/d\Gamma$ diejenige, die auf ein 1 *kg* der verdampften Menge entfällt, d. h. die gesuchte Verdampfungswärme:

$$q_v = \frac{8\pi r\,dr\,A\,a}{d\Gamma} + (i'' - i')$$

oder mit Rücksicht auf Gl. (10) und den Wert von $d\Gamma = -d\,4\,\pi r^3\gamma_0/3$ wenn mit q_n die normale Verdampfungswärme bezeichnet wird.

$$q_v = q_n - \frac{2\,A\,a}{\gamma_0 r} = q_n - \frac{2}{3}u_{\text{kap}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (14c)$$

Die Verdampfungswärme wird mithin um $^2/_3$ der auf 1 kg des Tropfengewichtes entfallenden Kapillarenergie verkleinert. Würde das Gesetz bis auf Molekülgröße herab gelten (was nicht der Fall ist), so betrüge die Verkleinerung 294 kcal, also mehr als die Hälfte der normalen mittleren Verdampfungswärme.

b) Die Ausdehnungsgeschwindigkeit.

Das Schwierige der nachfolgenden Betrachtungen ist, sich eine richtige Vorstellung von der außerordentlich kleinen Größenordnung der Zeitvorgänge zu verschaffen. Um die Geschwindigkeit und die Zeitdauer der Ausdehnung beurteilen zu können, ist daher in Abb. 978 für einen Anfangszustand

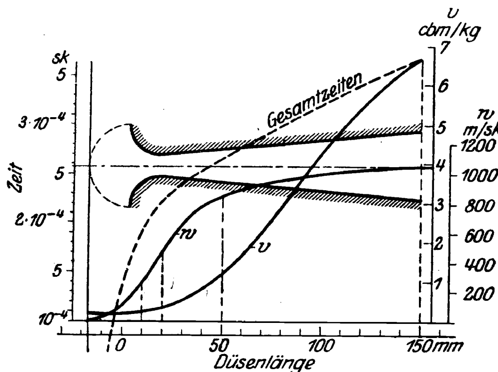


Abb. 978. Ausdehnungsgeschwindigkeit.

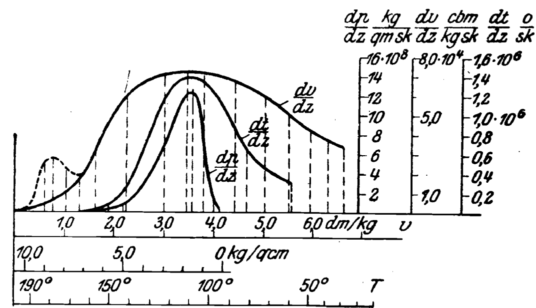


Abb. 978a zu Abb. 978.

$p_1 = 10{,}5$ at abs., $t_1 = 198^0$ C und eine Dampfmenge von $G = 0{,}153$ kg/sek der Verlauf des spezifischen Volumens und der Geschwindigkeit in einer kegelig erweiterten Düse (ohne Rücksicht auf Unterkühlung bis zu einem Enddruck von 0,2 at dargestellt. Aus der mittleren Geschwindigkeit w für eine Achsenlänge Δs der Düse berechnet sich die zum Durchlaufen erforderliche Zeit $\Delta z = \Delta s : w$, deren Summierung die gestrichelt eingetragene Kurve der „Gesamtzeiten" ergibt. Die Strömung innerhalb der eigentlichen Düse dauert somit bloß etwa

$$2 \cdot 10^{-4} \text{ sek.}$$

Im ferneren sind die Ableitungen der Größen p, v, t nach der Zeit eingetragen. Man findet als Höchstwerte

$$\frac{dp}{dz} = -1{,}2 \cdot 10^9 \text{ kg/qm·sek}, \qquad \frac{dv}{dz} = -7 \cdot 10^4 \text{ cbm/kg·sek}, \qquad \frac{dt}{dz} = -1{,}4 \cdot 10^{6\,0} \text{ C/sek}.$$

Es wird also der Druck um 1 kg/qm abnehmen in rd. 10^{-9} sek, oder um 1 kg/qcm in rd. 10^{-5} sek.

c) Die Raschheit des Temperaturausgleiches.

Für die Wärmeleitung im Innern eines Tropfens, der während der Entspannung Eigenwärme vom Innern zur Oberfläche schaffen muß, gilt die Differentialgleichung[1])

$$\frac{\partial(\varrho t)}{\partial z} = a^2 \frac{\partial^2(\varrho t)}{\partial \varrho^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

[1]) Riemann-Weber, Die Differentialgleichungen der Physik.

worin ϱ den Abstand eines Elementes vom Kugelmittelpunkt,

z die Zeit,

$a^2 = \frac{\lambda}{\gamma_0 c_0} = 1{,}39 \cdot 10^{-7}$ für m/sek °C-Einheiten,

λ die Leitfähigkeit des Wassers $= 1{,}386 \cdot 10^{-4}$ kcal/msek °C,
γ_0 das spezifische Gewicht $= 1000$ kg/cbm,
c_0 die spezifische Wärme $=$ rd. 1

bedeutet. Ein Sonderintegral dieser Gleichung ist

$$t = B e^{-a^2 \beta^2 z} \frac{\sin \beta \varrho}{\beta \varrho} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (15\text{a})$$

Der Beiwert β bestimmt dabei das Verhältnis der Temperaturen im Mittelpunkt $= t_i$ für $\varrho = 0$ zur Temperatur am Rande $= t_a$ für $\varrho = r$, indem

$$\frac{t_a}{t_i} = \frac{\sin \beta r}{\beta r} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (15\text{b})$$

ist. Der größte Wert von $\sin \beta r : \beta r$ ist $= 1$, für $\beta = 0$. Wir wollen im Anschluß an die im vorigen Abschnitt gegebene Darstellung annehmen, daß $dt_a : dz = -10^7$ sei, und fragen nun, wie groß β sein muß, damit ein Tropfen dieser raschen Temperatursenkung an der Oberfläche folgen kann. Aus Gl. (15a) folgt

$$\frac{dt_a}{dz} = -a^2 \beta^2 B e^{-a^2 \beta^2 z} \frac{\sin \beta r}{\beta r} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

Setzen wir in Gl. (15a) $\varrho = r$, so daß sie t_a ergibt, und dividieren wir damit Gl. (16), so entsteht

$$\frac{1}{t_a} \frac{dt_a}{dz} = -a^2 \beta^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

aus welcher Gleichung β berechnet werden kann, wenn $dt_a : dz$ und t_a gegeben sind. Gl. (15a) liefert dann den Wert von B und Gl. (15b) das Verhältnis $t_a : t_i$. Sei beispielsweise $t_a = 100$, so wird

$$\beta = 0{,}85 \cdot 10^6.$$

Ist der Tropfenhalbmesser $r = 10^{-8}$ m, so wird bis auf einen unmerklichen Unterschied $t_i = t_a$; bei $r = 10^{-7}$ m, das für uns als äußerste Grenze in Betracht kommt, wird

$$\frac{t_a}{t_i} = 0{,}97,$$

so daß man für die Verhältnisse, die wir zu betrachten haben, die Temperatur immer als ausgeglichen ansehen kann.

Was die den Tropfen umgebende Dampfmasse anbelangt, so können wir uns diese auch in Kugeln aufgeteilt denken, deren Mittelpunkte die in regelmäßigen Abständen vorausgesetzten Tropfenmittelpunkte bilden, wobei wir die verbleibenden Zwischenräume vernachlässigen. Um über die Maßverhältnisse eine Übersicht zu gewinnen, betrachten wir einen Dampf mit 10 v. H. Nässe in Tropfenform mit je dem Halbmesser r. Dann ist $(1 - x)\gamma = {}^4/_3 \pi r^3 \gamma_0 n_0$, wenn n_0 die Zahl der auf 1 cbm entfallenden Tropfen bedeutet. Der zu einem Tropfen gehörende Rauminhalt ist $1 : n_0$ cbm, also ist der Tropfenabstand (falls die Tropfen in den Ecken eines Würfels sitzen)

$$D_0 = \sqrt[3]{\frac{1}{n_0}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

Ist anderseits n die Zahl der Dampfmoleküle in der Raumeinheit, so ist der Abstand der Moleküle

$$D = \sqrt[3]{\frac{1}{n}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (18\text{a})$$

Auf diese Weise findet man die Werte der nachfolgenden Zahlentafel, in die zum Vergleich auch die sogen. mittlere freie Weglänge der Moleküle, d. i. diejenige geradlinige Strecke, die ein Molekül im Mittel zwischen zwei Stößen zurücklegt, aufgenommen wurde.

Absoluter Druck . . . . kg/qcm	10	5	1	0,02
Spezifisches Gewicht bei Sättigung γ . . kg/cbm	5,02	2,62	0,581	0,0147
Abstand der Dampfmoleküle D . . . . m	$1{,}742 \cdot 10^{-9}$	$2{,}10 \cdot 10^{-9}$	$3{,}57 \cdot 10^{-9}$	$12{,}17 \cdot 10^{-9}$
„ „ Tropfen D_0 als Vielfaches vom r . „	$23{,}2\,r$	$25{,}2\,r$	$41{,}6\,r$	$142\,r$
Desgl. bei $r = 10^{-8}$ „ . . . . „	$2{,}32 \cdot 10^{-7}$	$2{,}52 \cdot 10^{-7}$	$4{,}16 \cdot 10^{-7}$	$14{,}2 \cdot 10^{-7}$
„ „ $r = 10^{-7}$ „ . . . . „	$2{,}32 \cdot 10^{-6}$	$2{,}52 \cdot 10^{-6}$	$4{,}16 \cdot 10^{-6}$	$14{,}2 \cdot 10^{-}$
Mittlere freie Weglänge der Moleküle . . . . „	$0{,}925 \cdot 10^{-8}$	$1{,}74 \cdot 10^{-8}$	$7{,}97 \cdot 10^{-8}$	$315 \cdot 10^{-8}$

Für die Temperaturverteilung gilt wieder das partikuläre Integral Gl. (15a), wobei indes für die äußerste Kugelbegrenzung mit dem Halbmesser R die Vorschrift $dt : d\varrho = 0$ zu erfüllen wäre, da an der Berührungsstelle mit den Nachbarkugeln kein Wärmeaustausch stattfindet. Dies bedeutet, daß

$$\beta R \text{ nahezu } {}^3/_2 \pi$$

sein müsse. Für irgendeinen Augenblick ist dann

$$\frac{t_a}{t_i} = \frac{\sin \beta R}{\beta R} = \frac{-1}{{}^3/_2 \pi} = -0{,}212 \quad (19)$$

Da indes der Anfangspunkt für die Zählung der t beliebig ist, so kann das beispielsweise bedeuten, daß die Temperatur im Mittelpunkte $100 + 10$, am Umfange $= 100 - 2{,}12^0$ C ist. Die Raschheit des Ausgleiches, d. h. $dt:dz$, ist gemäß Gl. (16) zu berechnen, und man erhält mit $\lambda = 5{,}35 \cdot 10^{-6}$ kcal/sek qm nach der „Hütte") $c = 0{,}56$ kcal/kg, ferner für die Annahme $R = 10^{-5}$ m und $\gamma = 0{,}6$ kg/cbm $a^2 = 1{,}8 \cdot 10^{-4}$, daher im Mittelpunkt der Kugel

$$\frac{dt}{dz} = -11{,}6 \cdot 10^{17}.$$

Das Verhältnis der Temperaturen im Mittelpunkte, t_0 für die Zeit 0 und t_z für die Zeit z, ist

$$\frac{t_0}{t_z} = e^{-a^2 \beta^2 z} \quad (20)$$

daher wird für unser Beispiel selbst für die außerordentlich kurze Zeit $z = 10^{-9}$ sek; $\frac{t_0}{t_z} = {}^1/_{50}$ und für $z = 10^{-8}$ sek

$$\frac{t_0}{t_z} = 10^{-16}.$$

Hieraus folgt, daß der Temperaturausgleich sowohl im Innern des Tropfens wie in der umgebenden Dampfmasse für die hauptsächlich in Frage kommenden Grenzen der Ausdehnungsgeschwindigkeit und der Dampfnässe eine im Verhältnis zur Strömungsdauer außerordentlich kurze Zeit beansprucht, so daß man die Temperatur sowohl im Tropfen wie in der Dampfumgebung je für sich als gleichmäßig verteilt ansehen kann.

Es bleibt nur übrig, zu entscheiden, wie rasch der Ausgleich zwischen Dampf und Tropfen vor sich geht. Hierfür dürfen nicht die gewöhnlichen Formeln der Wärmeleitung benutzt werden, da im Anfang der Kondensation die freie Weglänge der Moleküle groß ist gegen die Tropfendurchmesser. Zur Klarstellung dieser Frage kann also eine Betrachtung der molekularen Vorgänge nicht umgangen werden, die zugleich Aufschluß über das Wachstum der Tropfen während der Kondensation erteilt.

d) Die molekularen Vorgänge während der Kondensation und Ausdehnung[1]).

Zunächst ist zu beachten, daß, wenn die Strömungsgeschwindigkeit in einer Düse auch 1000 m/sek erreicht, aus dem Strome stets so kleine Raumteile abgegrenzt werden können, daß die Ausdehnungsgeschwindigkeit ihrer Begrenzungsflächen gegenüber dem Schwerpunkt vernachlässigbar klein (0,1 m/sek oder wie viel man will) ist. Diese Raumelemente enthalten noch immer außerordentlich viele Moleküle, werden aber gewissermaßen als Ganzes fortgeschoben und beschleunigt.

Die Entstehung der Tropfen werden wir uns unter einem ähnlichen mechanischen Bilde vorstellen können, wie es Boltzmann für die chemische Bindung bei der Behandlung der Dissoziation beschreibt[2]). Da die Molekularstöße als verlustfrei angesehen werden, so muß nämlich, wenn zwei zusammentreffende Moleküle haften bleiben sollen, entweder ein Teil der kinetischen Energie der Schwerpunktbewegung in intramolekulare Energie verwandelt werden („unelastischer" Stoß), oder es muß gleichzeitig ein drittes Molekül derart zum Stoße gelangen, daß es einen Teil der kinetischen Energie der beiden andern wegführt. Befindet sich die so gebildete Molekülgruppe in zu warmer Dampfatmosphäre, so wird durch die Stöße der andern Moleküle die lebendige Kraft der inneren Schwingung derart gesteigert, daß die Moleküle wieder auseinanderfliegen. Daher kann ein Tropfen in gesättigtem Dampf, d. h. ohne Unterkühlung, nicht bestehen. Im andern Falle wird der Tropfen wachsen, oder es kann Gleichgewicht herrschen. Sind Kerne vorhanden, so können die Unebenheiten ihrer Oberfläche, ohne daß zunächst Unterkühlung erforderlich wäre, bei der geringsten Druckabnahme mit sich kondensierenden Wasserteilchen ausgefüllt werden. Sobald sich der Tropfen rundet, ist wieder Unterkühlung da.

Im Gleichgewicht wird der Tropfen einen Teil der auf ihn stoßenden Moleküle zurückwerfen, den andern verschlucken; eine ebenso große Zahl an Molekülen muß dann durch die innere Wärmebewegung unmittelbar aus der Tropfenmasse unter Bindung der entsprechenden Wärmemengen herausgeschleudert werden, damit die Tropfengröße sich nicht ändert. Es ist wahrscheinlich, daß letztere Zahl nahezu gleich ist der Gesamtheit der auftreffenden Moleküle, was wir zunächst der Einfachheit halber als feststehend annehmen wollen. Auf diese Weise wird ein Tropfen von gegebener Größe bei gegebener Eigentemperatur eine bestimmte Anzahl von Molekülen herausschleudern, unabhängig vom Drucke und von der Temperatur der Umgebung; entspricht diese dem thermodynamischen Gleichgewicht, so stellt sich ein Beharrungszustand ein. Ist die Temperatur gleich, der Druck aber zu klein, so wird der Tropfen

[1]) Anmerkung für den Studierenden: Das Studium der unter d), e) und f) gegebenen etwas schwierigeren Entwickelungen ist für das Verständnis des Nachfolgenden nicht erforderlich.

[2]) Vorlesungen über Gastheorie 1896 II, S. 186.

mehr Moleküle und zugleich mehr Energie ausgeben als er aufnimmt, also muß er verdampfen und sich zugleich abkühlen. Ist die Pressung gleich dem Gleichgewichtsdruck, die Temperatur aber zu hoch, so bringt jedes auftreffende Molekül mehr Energie mit als ein verdampftes Molekül verbraucht, aber die Zahl der weggeschleuderten ist größer als die Zahl der ankommenden, da der Dampf infolge Temperaturerhöhung verdünnt ist. Das Endergebnis ist offenbar durch reine Abschätzung kaum richtig zu übersehen und führt uns naturgemäß zur rechnerischen Untersuchung der Aufgabe, bei der auch die wichtige Rolle der Zeit aufgeklärt werden wird. Dabei gehen wir von der Voraussetzung aus, daß die mittlere Weglänge der Moleküle groß ist gegen den Tropfendurchmesser, was nach der oben angeführten Zahlentafel für den Anfang der Kondensation fast immer, und bei kleinen Pressungen immer erfüllt sein wird.

Es bezeichne in den Einheiten m, kg, sek, kcal

c_0 die spezifische Wärme des flüssigen Wassers,
γ_0 das spezifische Gewicht des flüssigen Wassers,
c_v, c_p die spezifischen Wärmen des Dampfes bei stets gleichem Volumen bzw. Druck,
p, T, v, γ Druck, absolute Temperatur, spezifisches Volumen, spezifisches Gewicht des Dampfes,
c die fortschreitende Geschwindigkeit der Molekülschwerpunkte,
m die Masse eines H_2O-Moleküls,
n die Zahl der Dampfmoleküle in der Raumeinheit,
T' die absolute Tropfentemperatur,
r den Tropfenhalbmesser,
p_{sr}' die zur Temperatur T' am Tropfen vom Halbmesser r in thermischem Gleichgewicht gehörende „Sättigungs“pressung,
$p_{s\infty}'$ den zur Temperatur T' am ebenen Wasserspiegel ($r = \infty$) gehörenden Sättigungsdruck.
Zwischen den Drücken p_{sr}', $p_{s\infty}'$ besteht die Gleichung von Helmholtz:

$$\lg n \frac{p_{sr}'}{p_{s\infty}'} = \frac{2\sigma}{\gamma_0 r R T'},$$

u', u'' die innere Energie des Wassers bzw. des Dampfes bei der Temperatur T und dem Druck p,
u'^*, u''^* die innere Energie des Wassers bzw. des Dampfes bei der Temperatur T' und dem Drucke p_{sr}',
z die Zeit,
$N = 6{,}8 \cdot 10^{23}$ die Zahl der Dampfmoleküle in einem Grammolekül, d. h. in 18 g Dampfgewicht,
g_0 das Gewicht eines H_2O-Moleküls $= 2{,}647 \cdot 10^{-26}$ kg,
g die Beschleunigung der Schwere $= 9{,}81$ m/sek²,
$G_0 = {}^4/_3 \pi \gamma_0 r^3$ das Gewicht eines Tropfens,
G_1 das auf einen Tropfen entfallende Gewicht an Dampf,
$G = G_0 + G_1$ das zu einem Tropfen gehörende Gesamtgewicht,
$y = G_0 : G$ die spezifische Dampfnässe,
$x = 1 - y$ die spezifische Dampfmenge,
a, e Fußzeichen, um anzudeuten, daß von einer veränderlichen Größe der Wert, den sie am Anfang bzw. am Ende eines Zeitelementes besitzt, verstanden ist.

Für das Nachfolgende muß sorgfältig auseinandergehalten werden, daß in den Zustandsformeln (13) im allgemeinen die sich auf den flüssigen Teil beziehenden Größen mit einer andern Temperatur (T') als der des Dampfteiles (T) zu rechnen sind.

Nach der kinetischen Gastheorie erhält der Tropfen durch die Stöße der Moleküle alsbald eine kinetische Energie, die derjenigen eines einfachen Moleküls im Mittel gleich ist. Wenn aber hundert und mehr Moleküle den Tropfen bilden, können wir seine Translationsgeschwindigkeit neben der der Moleküle vernachlässigen. Wir gehen nun von der vereinfachenden Annahme aus, daß sich alle Moleküle mit der im Mittel unveränderlichen, aber nach allen Richtungen gleichmäßig verteilten Geschwindigkeit c bewegen. Nimmt man die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung an, so werden die Ergebnisse um einen Zahlenfaktor verschieden, ohne im Wesen geändert zu werden. Für alle nachfolgenden Betrachtungen nehmen wir an, daß, wie schon oben erwähnt, die mittlere freie Weglänge groß ist gegen den Tropfendurchmesser. Die Zahl der Moleküle, deren Geschwindigkeit in die Richtung eines Kegels mit dem Raumwinkel $d\alpha$ fällt, ist $\frac{n\,d\alpha}{4\pi}$ für die Raumeinheit. Umschließen wir den Tropfen mit einem Berührungskegel, der sich in der Richtung von $d\alpha$ ins Unendliche erstreckt, so werden alle Moleküle, deren Abstand von der Kugelfläche $c\,dz$ ist, während der Zeit dz zum Stoße mit dem Tropfen gelangen. Diese Moleküle erfüllen den Rauminhalt $\pi r^2 c\,dz$, ihre Zahl ist daher $\pi r^2 c\,dz \frac{n\,d\alpha}{4\pi}$, und wir erhalten die Gesamtzahl der Stöße, wenn wir die Summe über alle Richtungen bilden, d. h. nach $d\alpha$ zwischen 0 und 4π summieren, was auf

$$\pi r^2 c\,dz\,n$$

führt, worin n die Gesamtzahl der Moleküle in der Raumeinheit ist. Hieraus folgt das Gewicht der auf den Tropfen treffenden und von ihm festgehaltenen Moleküle: $dG' = \pi r^2 c n g_0 dz$. Da aber $n g_0$

nichts andres als das Raumgewicht γ des Dampfes ist, so hat man auch:

$$d\,G' = \pi r^2 \gamma c\,d z \quad \ldots\ldots \quad (21)$$

Nun beweist die Gastheorie, daß die kinetische Energie der Schwerpunktbewegung der Moleküle gleich ist $^3/_2\, p V$, d. h. für die Raumeinheit $= {}^3/_2\, p$, oder mit Rücksicht auf die Zustandsgleichung der Gase:

$$\frac{n m c^2}{2} = {}^3/_2\, p = {}^3/_2 \cdot \frac{R T}{V}.$$

Indem wir noch auf beiden Seiten mit der Beschleunigung der Schwere vermehren, liefert $n m g$ das Dampfgewicht der Raumeinheit $= \gamma$, und da $\gamma v = 1$ ist, erhält man

$$c^2 = 3\, R g T; \qquad c = \sqrt{3\, R g T} \quad \ldots\ldots \quad (22)$$

Ferner ist $\gamma = \frac{p}{R T}$, und so wird

$$d\,G' = \pi r^2 \sqrt{\frac{3 g}{R}}\, \frac{p}{\sqrt{T}}\, d z \quad \ldots\ldots \quad (23)$$

1. Hierdurch sind wir in die Lage versetzt, die **Massenbilanz** des Tropfens aufzustellen. Wären p und T Druck und Temperatur des thermodynamischen Gleichgewichtes, so würde der Tropfen eine gleich große Menge von Molekülen abschleudern. In Wirklichkeit jedoch hat der Tropfen die Temperatur T', und zu dieser gehört als Gleichgewichtsdruck einer gedachten Dampfumgebung von der Temperatur T' die Pressung p_{sr}', und so wird vom Tropfen die Menge

$$d\,G'' = \pi r^2 \sqrt{\frac{3 g}{R}}\, \frac{p_{sr}'}{\sqrt{T'}}\, d z \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

weggeschleudert, d. h. verdampft werden. Daher erhalten wir als Gewichtszuwachs des Tropfens die Größe

$$d\,G_0 = d\,G' - d\,G'' = \pi r^2 \sqrt{\frac{3 g}{R}} \left[\frac{p}{\sqrt{T}} - \frac{p_{sr}'}{\sqrt{T'}}\right] d z \quad \ldots\ldots \quad (25)$$

2. Nun ist es leicht, die **„Energiebilanz des Tropfen"** aufzustellen. Seine innere Energie am Anfang des Zeitelementes $d z$ ist $G_0 u_a'^*$; zu dieser tritt die Energie $d G' u_a''$ hinzu und liefert als Endergebnis: im Tropfen $(G_0 + d G_0) u_e'^*$, im verdampften Teil $d G'' u_e''^*$, weil dieser Teil den Tropfen mit der Temperatur T' verläßt. Es gilt mithin

$$G_0 u_a'^* + d G' u_a'' = (G_0 + d G_0) u_e'^* + d G'' u_e''^* \quad \ldots\ldots \quad (26)$$

und mit $d G_0 = d G' - d G''$ und der Bezeichnung

$$\left.\begin{aligned} \Delta u^* &= u_e''^* - u_e'^* \sim u_a''^* - u_a'^* \\ \Delta u &= u_e'' - u_e'^* \sim u_a'' - u_e'^* \\ \Delta u' &= u_e'^* - u_a'^* \\ G_0\, \Delta u' &= d G' \Delta u - d G'' \Delta u^* \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (27)$$

die Hauptgleichung

oder mit Gl. (23) und (24)

$$G_0\, \Delta u' = \pi r^2 \sqrt{\frac{3 g}{R}} \left[\frac{p\, \Delta u}{\sqrt{T}} - \frac{p_{sr}'\, \Delta u^*}{\sqrt{T'}}\right] d z \quad \ldots\ldots \quad (28)$$

3. Ferner wird die **Energiegleichung der Gesamtdampfmenge G,** die aus dem flüssigen Teil G_0 Tropfen) und dem dampfförmigen Teil G_1 besteht gewonnen, indem man den Satz mathematisch ausdrückt, daß die Abnahme der inneren Energie (infolge Abwesenheit äußerer Wärmemitteilung) die Ausdehnungsarbeit $A p d V$ bestreitet. Am Anfange ist die Energie $= G_0 u_a' + G_1 u_a''$, am Ende aber für den Tropfen $(G_0 + d G_0) u_e'$; für den Dampfteil, von dem wir annehmen, daß die durch $d G''$ mitgebrachte Energie sich mittlerweile gleichmäßig verteilt habe, $(G_1 - d G_0) u_e''$, und so ist

$$G_0 u_a'^* + G_1 u_a'' - (G_0 + d G_0) u_e'^* - (G_1 - d G_0) u_e'' = A p d V \quad \ldots\ldots \quad (29)$$

oder, wenn man zunächst $G_0 u_a'^*$ aus Gl. (26), dann $d G_0 = d G' - d G''$ einsetzt und $d G'$ neben G_1 vernachlässigt:

$$d G'' (u_e''^* - v_e'') = G_1 (u_e'' - u_a'') + A p d V \quad \ldots\ldots \quad (30)$$

Diese Gleichung könnte unmittelbar hingeschrieben werden, wenn man die Energieänderung am Dampfteil allein betrachtete.

Hierzu tritt endlich die vereinfachte Zustandsgleichung für den dampfförmigen Teil:

$$p V = G_1 p v'' = G_1 R T \quad \ldots\ldots \quad (31)$$

Die Beziehungen (25), (28), (30), (31), die nichts andres sind als die Gleichungen der Stetigkeit, die Gleichung der Tropfenenergie, die Gleichung der Gesamtenergie und die Zustandsgleichung, bestimmen

die unbekannten Veränderlichen: Druck, Temperatur des Dampfes, Temperatur des Tropfens, Zunahme des Tropfengewichtes für die Expansion bei ruhendem Schwerpunkt („statische Ausdehnung"), falls bekannt oder vorgeschrieben ist, welche Raumvermehrung dV das ganze Element in der gewählten Zeit dz erfährt. Infolge ihrer verwickelten Bauart (da sie nicht einmal linear sind) kann von einer allgemeinen Integration dieser Differentialgleichungen keine Rede sein; doch kommen wir zu wichtigen Schlüssen durch die Betrachtung der nachfolgenden vereinfachten Sonderfälle.

e) Verhalten eines Tropfens in unendlich ausgedehnter Dampfumgebung.

Das Verhalten eines Tropfens in unendlich ausgedehnter Umgebung, deren Druck und Temperatur sich nicht ändern, ist im wesentlichen durch die Sättigungs- (oder Siede-)Temperatur bedingt, die ihm beim herrschenden Druck zukommt. Diese von der augenblicklichen Temperatur des Tropfens (T') und der Temperatur des Dampfes (T) wohl zu unterscheidende Größe wird mit

$$T_{spr}$$

bezeichnet, um durch die Fußnoten nachdrücklich an die Definition zu erinnern. In Abb. 979 sind die Temperaturen als Abszissen, die Drücke als Ordinaten eingezeichnet, und es bedeutet $p_{s\infty}$ die Kurve der Sättigungsdrücke am ebenen Wasserspiegel ($r = \infty$), während p_{sr} die Sättigungsdrücke an der Tropfenoberfläche vom Halbmesser r darstellt. Der Dampfzustand, durch Punkt A dargestellt, ist in der Abbildung als unterkühlt vorausgesetzt, weil die Pressung p größer als $A_\infty A_s$ ist; er wäre überhitzt, wenn A zwischen A_∞ und A_s fallen würde. Man erhält die „Sättigungstemperatur zum Drucke p am Tropfenhalbmesser r", d. h. T_{spr}, indem man A wagerecht auf die Kurve p_{sr} in Punkt B überträgt.

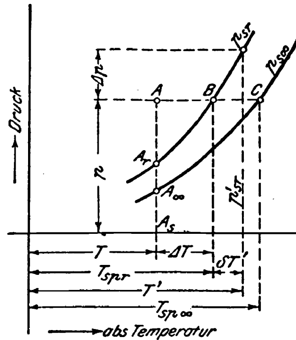


Abb. 979. Sättigung und Unterkühlungskurven.

Wir bezeichnen den Überschuß der Tropfentemperatur über die Temperatur T_{spr} mit

$$\delta T' = T' - T_{spr} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (32)$$

und den Überschuß von T_{spr} über die Dampftemperatur mit

$$\Delta T = T_{spr} - T \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (33)$$

die beide auch negativ sein können. Im thermodynamischen Gleichgewicht muß $\delta T' = 0$, $\Delta T = 0$ sein, und es ist ΔT insbesondere **ein Maß für die relative Unterkühlung des Dampfes,** nämlich im Vergleich zum Temperaturgleichgewicht am Tropfen; und $\delta T'$ kann als Maß der **relativen Überhitzung des Tropfens** bezeichnet werden, bezogen auf sein eigenes Temperaturgleichgewicht.

Es sei ferner

$$\Delta p = p_{sr}' - p \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (34)$$

worin p'_{sr} sinngemäß den Gleichgewichtsdruck am Tropfen bei der Temperatur T' bedeutet.

Führen wir diese Größen in die Gleichung der Stetigkeit (25) ein, und setzen wir außerdem $d\,G_0 = d\,({}^4/_3\,\pi\,\gamma_0\,r^3)$, so erhalten wir

$$dr = \frac{1}{4\gamma_0}\sqrt{\frac{3g}{R}}\left[\frac{p}{\sqrt{T_{spr} - \Delta T}} - \frac{p + \Delta p}{\sqrt{T_{sp} + \delta T'}}\right] dz.$$

Da Δp, ΔT, $\delta T'$ als kleine Größen vorausgesetzt werden, kann

$$\sqrt{T_{spr} - \Delta T} = \sqrt{T_{spr}}\sqrt{1 - \frac{\Delta T}{T_{spr}}} = \sqrt{T_{spr}}\left(1 - \frac{\Delta T}{2\,T_{spr}}\right)$$

und

$$1 : \sqrt{T_{spr} - \Delta T} = \left[\frac{1}{\sqrt{T_{spr}}}\right]\left(1 + \frac{\Delta T}{2\,T_{spr}}\right)$$

gesetzt werden. Mit ähnlicher Entwicklung nach Δp, $\delta T'$ vereinfacht sich die Formel zu

$$dr = \frac{1}{4\gamma_0}\sqrt{\frac{3g}{R}}\,\frac{p}{\sqrt{T_{spr}}}\left[\frac{\Delta T}{2\,T_{spr}} - \frac{\Delta p}{p} + \frac{\delta T'}{2\,T_{spr}}\right] dz.$$

Nun ist p_{sr}' nach der Kapillaritätsformel (3) abhängig von $p_{s\infty}'$ und T', wobei $p_{s\infty}'$ für sich nach den Dampftabellen abhängig von T'; man kann also

$$\frac{d\,p_{sr}'}{d\,T'} = \frac{\partial\,p_{sr}'}{\partial\,p_{s\infty}'}\,\frac{d\,p_{s\infty}'}{d\,T'} + \frac{\partial\,p_{sr}'}{\partial\,T'} = \alpha \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (35)$$

setzen, wo α eine Abhängige von T' und den andern bekannten Größen ist und $\frac{\partial\,p_{sr}'}{\partial\,T'}$ meist vernachlässigt werden kann. Es wird dann angenähert

$$\Delta p = p_{sr}' - p = \alpha\,\delta T'$$

und

$$d r = \frac{1}{4\gamma_0}\sqrt{\frac{3g}{R}}\,\frac{p}{\sqrt{T_{spr}}}\left[\frac{\Delta T}{2T_{spr}} - \left(\frac{\alpha}{p} + \frac{1}{2T_{spr}}\right)\delta T'\right] dz \quad \ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

Ähnlich behandeln wir die Energiegleichung (28), wobei wir in die Formel von Mollier

$$u'' = {}^{10}/_{3}\, A\, p v'' + 464{,}7$$

angenähert $p v'' = R T$ setzen, so daß mit $k = 1{,}3$ und $c_p - c_v = A R$

$$u'' = c_v T + a, \quad \text{wo } a = 464{,}7 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

wird. Für c_p, c_v müssen wir unveränderliche Mittelwerte wählen, z. B. $c_p = 0{,}48$, $c_v = c_p : \varkappa = 0{,}369$. Die Energie des flüssigen Wassers wird angenähert

$$\left.\begin{aligned} &u' = c_0 t' + u_k, \\ &\text{oder mit der absoluten Temperatur } u' = c_0 T' + b \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

worin $b = u_k - 273\, c_0$, und daraus nach der Gleichung (27)

$$\left.\begin{aligned} \Delta u' &= c_0\, d T' \\ \Delta u^* &= u''^* - u'^* = c_v T' + a - c_0 T' - b \\ &= (c_v T_{spr} + a - c_0 T_{spr} - b) + (c_v - c_0)\,\delta T' \\ &= \Delta u_s + (c_v - c_0)\,\delta T' \\ \text{ähnlich}\quad \Delta u'' &= u'' - u'^* = \Delta u_s - c_v \Delta T - c_0\,\delta T' \\ \text{mit der Bezeichnung}\quad \Delta u_s &= (c_v - c_0)\, T_{spr} + a - b \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

welche Größe offenbar die „innere Verdampfungswärme" darstellt. So erhält man, wenn die Abweichungen der Δu^*, $\Delta u''$ von Δu_s ebenfalls als klein vorausgesetzt werden:

$$r\, d T' = \frac{3}{4\gamma_0 c_0}\sqrt{\frac{3g}{R}}\,\frac{p\,\Delta u_s}{\sqrt{T_{spr}}}\left[\left(\frac{1}{2T_{spr}} - \frac{c_v}{\Delta u_s}\right)\Delta T - \left(\frac{\alpha}{p} + \frac{c_v}{\Delta u_s} - \frac{1}{2T_{spr}}\right)\delta T'\right] dz \quad \ldots \quad (40)$$

Wir bestimmen zunächst die Beziehung, die zwischen ΔT und $\delta T'$ bestehen muß, damit die Tropfengröße sich nicht ändert, d. h. $d r = 0$ wird. Dies bedingt, daß der Klammerausdruck in Gl. (36) verschwindet, woraus, wenn $1 : 2\, T_{spr}$ neben dem großen $\alpha : p$ vernachlässigt wird, mit der Bezeichnung

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{p}{2T_{spr}\,\alpha} \\ \text{die Bedingung}\qquad \delta T'_{(r = \text{konst.})} &= \varphi\,\Delta T \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (41)$$

folgt. Weiterhin hat dasjenige Verhältnis von $\delta T'$ zu ΔT ein Interesse, bei dem $d T' = 0$ ist, d. h die Temperatur des Tropfens unveränderlich bleibt. Durch Nullsetzen der rechten Seite in Gl. (40) und Vernachlässigung der kleinen Größen $\frac{c_v}{\Delta u_s}$ und $\frac{1}{2T_{spr}}$ gegen $\frac{\alpha}{p}$ und mit der Bezeichnung

$$\left.\begin{aligned} \psi &= \left(\frac{1}{2T_{spr}} - \frac{c_v}{\Delta u_s}\right)\frac{p}{\alpha} \\ \text{erhält man die neue Bedingung}\qquad \delta T'_{T = \text{konst.}} &= \psi\,\Delta T \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

Für mittlere Verhältnisse darf man $\Delta u_s = 500$ kcal, $\frac{\alpha}{p} = 0{,}03$ setzen und erhält bei $T_{spr} = 400$ abgerundet:

1. **für unveränderlich bleibende Tropfengröße**

$$\delta T'_{r = \text{konst.}} = \frac{\Delta T}{24} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

2. **für unveränderlich bleibende Tropfentemperatur**

$$\delta T'_{T = \text{konst.}} = \frac{\Delta T}{60} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (43\text{a})$$

Wenn die relative Unterkühlung ΔT auch beträchtlich groß ist, z. B. 20° C beträgt, so ist δT_r bloß $\simeq 0{,}8^\circ$ C, $\delta T'_T \simeq 0{,}3^\circ$ C. Die Kleinheit dieser Unterschiede berechtigt zu dem Ausspruche, daß in diesen beiden ausgezeichneten Sonderfällen die Temperatur des Tropfens nahezu mit seiner Gleichgewichtstemperatur T_{spr} übereinstimmt.

Ist auch vorübergehend der Zustand $r =$ konst. erreicht, so nimmt indessen die Temperatur rasch ab oder zu, und dadurch wird sofort auch r in Mitleidenschaft gezogen. Derjenige Zustand hingegen, wo T' konstant geworden ist, besitzt insofern ein Beharrungsvermögen, als sich der Tropfen einer Ände-

rung dieser seiner Temperatur widersetzt. Nur verändert er hierbei seine Größe sehr rasch, wie man bequem durch folgende Umformung der Gleichungen (36) und (40) übersieht: Schreiben wir abkürzend

$$dr = A\,\Delta T - B\,\delta T',$$

so ist nach Gl. (41)

$$0 = A\,\Delta T - B\,\varphi\,\Delta T,$$

woraus durch Subtraktion

$$dr = B(\varphi\,\Delta T - \delta T') = \frac{1}{4\gamma_0}\sqrt{\frac{3g}{R}}\frac{\alpha}{\sqrt{T_{spr}}}(\varphi\,\Delta T - \delta T')\,dz \quad \ldots\ldots\ldots (44)$$

In gleicher Weise bildet man mit Gl. (42)

$$r\,dT' = \left[\frac{3}{4\gamma_0 c_0}\sqrt{\frac{3g}{R}}\frac{\Delta u_s\,\alpha}{\sqrt{T_{spr}}}\right](\psi\,\Delta T - \delta T')\,dz \quad \ldots\ldots\ldots (45)$$

Für dieselben mittleren Verhältnisse wie oben und $p = 10^4$ kg/qcm erhält man

$$\left.\begin{aligned} \frac{dr}{dz} &= 2{,}96\cdot 10^{-3}(\varphi\,\Delta T - \delta T') \\ r\frac{dT'}{dz} &= 4{,}44\,(\psi\,\Delta T - \delta T') \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (46)$$

Diese Gleichungen lassen erkennen, daß die **zeitliche Änderung von T' mit äußerster Energie auf den Zustand hinarbeitet, wo T' = konst. werden kann.** Beispielsweise sei $\delta T' = 0$, der Tropfen habe also die richtige Temperatur, hingegen sei $\Delta T = 10$, der Dampf sei zu stark unterkühlt. Wenn noch $r = 10^{-8}$ m vorausgesetzt wird, so erhält man aus Gl. (46)

$$\frac{dT'}{dz} = 0{,}74\cdot 10^8.$$

Es wird also die Temperatur des Tropfens in kälterer Dampfumgebung zu wachsen anfangen (weil letztere zu dicht ist und zu viel Moleküle auf den Tropfen stoßen) und alsbald den Betrag erreichen, bei dem Gleichgewicht herrscht, d. h. $\psi\,\Delta T - \delta T' = 0$. Hierzu ist erforderlich: $\delta T' = {}^1/_6{}^0$ C, und die Zeitdauer hierfür ist

$$\Delta z = \frac{\delta T'}{0{,}74\cdot 10^8} = 2{,}2\cdot 10^{-9} \text{ sek.}$$

Oder es sei der Tropfen überhitzt, $\delta T' = 10$, während $\Delta T = 0$, dann kann Gl. (46) geschrieben werden als

$$\frac{dT'}{dz} = -4{,}44\,(T' - T_{spr}),$$

eine Form, die leicht integrierbar ist und zu berechnen erlaubt, in welcher Zeit der Temperaturunterschied $T' - T_{spr}$ z. B. auf den hundertsten Teil seines Anfangswertes (d. h. auf $0{,}1^0$ C) gesunken ist. Man erhält

$$\Delta z = \text{rd. } 10^{-8} \text{ sek.}$$

Wenn wir bedenken, daß die Strömungsdauer in der als Beispiel betrachteten Düse $2\cdot 10^{-4}$ sek ausmacht, so wird es klar, daß man obige Zeitgrößen dieser gegenüber schon als praktisch unendlich klein ansehen kann.

Das Wachstum des Tropfenhalbmessers ist für dieselben Annahmen, nämlich

1. $\delta T' = 0, \quad \Delta T = 10^0$ C: $\ldots\ dr : dz = 1{,}2\cdot 10^{-3}$

und

2. für $\delta T' = 10^0$; $\Delta T = 0$: $\ldots\ dr : dz = 2{,}96\cdot 10^{-2}$.

Es würde also die Tropfengröße unter diesen Umständen für ein Zeitelement von 10^{-5} sek, was ein kleiner Bruchteil der Ausdehnungsdauer in einer Düse ist, schon nahe an denjenigen Betrag reichen, den wir als obere Grenze für den Niederschlag in der Düse festgestellt hatten.

Im übrigen bieten Gl. (44) und (45) die Handhabe zur Abschätzung der höchsten Unterkühlung, die bei der Expansion in der Düse zu erwarten sein dürfte. Wir brauchen zu diesem Zwecke nur die Höchstwerte für die zeitliche Änderung von r und T', d. h. $\frac{dr}{dz}$ und $\frac{dT'}{dz}$, vorzuschreiben, die in der Düse voraussichtlich vorkommen können, um daraus ΔT und $\delta T'$ zu berechnen. Gemäß Abb. 978 ist nun im äußersten Fall $dT' : dz = \text{rd.} - 10^6$, und für den Tropfen ist im Anfangsstadium der Expansion ein Wachstum von 0 auf 10^{-8} m in 10^{-4} sek, wie auf Grund der später mitzuteilenden Düsenversuche eingesehen werden kann, eine reichliche Annahme. Dies gibt $dr : dz = 10^{-4}$, und wenn wir dann r im Mittel $= 10^{-8}$ einsetzen, so liefert die Auflösung der Gleichung (46):

$$\Delta T = 1{,}4^0 \text{ C}, \qquad \delta T' = -0{,}3^0 \text{ C} \quad \ldots\ldots\ldots (47)$$

Hieraus folgt, daß, so lange die entwickelten Grundgleichungen gelten, auch in der Düse die relative Unterkühlung und noch viel mehr die relative Überhitzung bloß äußerst geringe Beträge annehmen können.

Wenn aber **die Tropfen und der Dampf stets nahezu die Temperatur T_{spr} haben, so bedeutet das, daß bei so gearteter Ausdehnung die absolute Unterkühlung fast vollständig sein müßte.**

f) Die molekularen Vorgänge mit Rücksicht auf die Arbeiten von Marcelin und Knudsen.

In einer neuern Arbeit von Marcelin[1]) wird die Geschwindigkeit bestimmt, mit der eine überhitzte Flüssigkeit verdampft oder ein fester Körper sublimiert. Die Zahl der von einer siedenden Wasseroberfläche abgeschleuderten Moleküle und die Zahl, die sie von der Summe der aufprallenden Moleküle verschlucken kann, sind im thermischen Gleichgewicht gleich groß. Marcelin ließ die Verdampfung in ein fast absolutes Vakuum erfolgen und bestimmte so unmittelbar die Zahl der abgeschleuderten Moleküle für die Flächen- und Zeiteinheit. Er vergleicht deren Betrag mit der Zahl der Moleküle, die aus einer mit der Wasseroberfläche im thermischen Gleichgewicht stehenden Dampfatmosphäre auf die Oberfläche im ganzen aufprallen, welch letztere Zahl die obere Grenze der Verdampfungsgeschwindigkeit bilden würde, wenn alle Moleküle an der Flüssigkeit haften blieben. Marcelin findet, daß dieses Verhältnis mit wachsender Temperatur zunimmt, und für Naphtalin bei $72^1/_2{}^0$ C den Wert 1 : 6,6, für Quecksilber bei 140° Temperatur den Wert 1 : 7,3, für Nitrobenzin bei $62^1/_2{}^0$ Temperatur 1 : 4,2 und für Jod bei $67^1/_2{}^0$ Temperatur 1 : 4,7 besitzt (Seite 103 bis 106). Hiernach würden im günstigsten Falle im thermischen Gleichgewicht rund $^1/_4$ der auf eine Flüssigkeit auftreffenden Moleküle zurückbehalten werden. Die Interpretation von Marcelin scheint mir nicht einwandfrei zu sein; ich glaube vielmehr, daß bei den fraglichen Versuchen letzten Endes für die Verdampfungsgeschwindigkeit immer nur die Geschwindigkeit der Wärmezufuhr maßgebend war, was sich durch eine eingehende Kritik und Vergleich der in Kapitel 1 seiner Arbeit mit stärker überhitzten Flüssigkeiten gewonnenen Ergebnisse, wie ich glaube, zwingend nachweisen ließe.

Nichtsdestoweniger hat es ein Interesse, die molekularen Vorgänge während der Kondensation unter dem Gesichtspunkt zu untersuchen, daß nicht, wie wir ursprünglich voraussetzten, alle auf einen Tropfen treffende Moleküle von diesem zurückbehalten werden. Für den Energieaustausch derjenigen Moleküle, die zurückprallen, kommt eine wichtige Arbeit von Knudsen[2]) in Betracht. Ein Molekül mit einer gegebenen Geschwindigkeit, die einer bestimmten Temperatur der Dampfatmosphäre entspricht, prallt von einer wärmeleitenden Oberfläche (hier derjenigen des Tropfens) nicht mit derjenigen Geschwindigkeit zurück, die der Temperatur der Oberfläche entspricht, sondern mit einer geringern. Ist seine innere Energie, auf 1 kg Gewicht bezogen, vor dem Anprall u'' und ist die theoretische Energie, die der Flüssigkeitstemperatur entspricht, u''^*, so ist die Energie des zurückprallenden Moleküls nicht u''^*, sondern

$$(u''^* - u'')\,\varepsilon + u'',$$

worin ε kleiner als 1 ist und der „Akkomodationskoeffizient" heißt. Knudsen findet bei Stoß gegen blankes oder stark platiniertes Platinband für H_2; $\varepsilon = 0{,}32$ und 0,59, für O_2; $\varepsilon = 0{,}81$ und 0,93, für CO_2; $\varepsilon = 0{,}84$ und 0,96. Die Einführung dieser neuen Betrachtungsweise bedingt folgende Änderungen an der oben entwickelten Theorie der Kondensation. Das Gewicht der im Zeitelement dz das einen Tropfen treffenden Dampfmoleküle bleibt unverändert[3])

$$d\,G' = \pi r^2 \beta \frac{p}{\sqrt{T}} dz \quad \text{mit } \beta = \sqrt{\frac{3\,g}{R}} \qquad (48)$$

Im thermischen Gleichgewicht wird bloß der Teilbetrag $\lambda\, d\, G'$ verschluckt; ein ebenso großer Betrag muß dann durch die innere Bewegung vom Tropfen abgeschleudert werden. Ist aber die Temperatur des Tropfens T' größer als die Gleichgewichtstemperatur T, dann ist der zu T' und dem Tropfenhalbmesser r gehörende Gleichgewichtsdruck p_s' zu ermitteln und die vom Tropfen abgeschleuderte Menge ist gleich

$$d\,G'' = \lambda \pi r^2 \beta \frac{p'_{sr}}{\sqrt{T'}} dz \qquad (48a)$$

Die Zunahme des Tropfengewichtes während des Zeitelementes dz ist

$$d\,G_0 = \lambda\, d\,G' - d\,G'' = \lambda \pi r^2 \beta \left[\frac{p}{\sqrt{T}} - \frac{p'_{sr}}{\sqrt{T'}}\right] dz \qquad (48b)$$

Diese Bezeichung nannten wir die Massenbilanz. Für die Energiegleichung des Tropfens gilt sinngemäß die Formel

$$d\,G'\,u'' = (1 - \lambda)\, d\,G' \left[(u''^* - u'')\,\varepsilon + u''\right] + d\,G''\,u''^* + d(G_0 u'^*) \qquad (48c)$$

Ähnlich wäre die Gleichung der Gesamtenergie zu bilden.

---

[1]) Thèses, présentées à la faculté des sciences à Paris par M. R. Marcelin, Paris 1914.

[2]) Ann. d. Physik 4 F. 34, 1911, S. 608.

[3]) Wollte man die Maxwellsche Verteilung der Geschwindigheiten berücksichtigen, so wäre nur die Beizahl 0,92 vorzusetzen und c müßte die Wurzel aus dem quadratischen Mittel der Geschwindigkeiten bedeuten.

Auf eine Diskussion dieser Gleichungen verzichtend beschränken wir uns auf folgende Bemerkungen. Die zweckmäßigste Vergleichsgrundlage ist, wie wir ausführten, die zum gegebenen Druck p und dem Halbmesser des Tropfens r gehörende Gleichgewichtstemperatur T_{spr}. Für die Unterschiede der Dampf- und der Tropfentemperatur gegenüber T_{spr} führen wir hier die Zeichen

$$\tau = T - T_{spr}\,;\ \tau' = T' - T_{spr}$$

ein, so daß hiernach verglichen mit der alten Bezeichnung $\Delta T = -\tau$; $\delta T' = \tau'$ ist. Nach den kleinen Differenzen τ, τ' können die Grundgleichungen entwickelt werden und wir erhalten

$$\left.\begin{aligned} \frac{dr}{dz} &= -\lambda C(\varphi\tau + \tau') \\ r\frac{dT'}{dz} &= -\lambda C'(\psi\tau + \tau') \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (49)$$

wobei C, C' die gleichen Werte bedeuten wie oben, hingegen ψ angenähert durch den Ausdruck

$$\psi = \left[\frac{1}{2\,T_{spr}} - \left\{1 + \varepsilon\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)\frac{c_v}{\Delta u_s}\right\}\right]\frac{p}{\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (49\text{a})$$

dargestellt wird. Je nach der verhältnismäßigen Größe von ε und λ kann mithin ψ Null oder auch negativ werden. Ersteres würde eine Unempfindlichkeit der Tropfentemperatur von derjenigen der Dampfumgebung bedeuten; es bliebe aber die äußerst energische Reaktion auf jede Abweichung von der zu r und p gehörenden Gleichgewichtstemperatur T_{spr} bestehen. Der Tropfen würde praktisch stets diese Temperatur haben. Ein Negativwerden von ψ führt auf keine physikalischen Widersprüche, und beeinflußt in interessanter Weise den Temperaturausgleich nach einer eingetretenen Störung. Ist nämlich ψ positiv, so wird bei positivem τ, d. h. zu heißer Dampfatmosphäre T' anfänglich sinken — ist ψ negativ, steigen. Das letztere ist der Anschauung eigentlich genehmer, und die Werte der λ und ε nach Marcelin und Knudsen lassen diese Möglichkeit zu. Ob es sich so oder so verhält, die Zahl λ d. h. das Verhältnis der eindringenden Moleküle zur Gesamtzahl der aufprallenden, kann kaum unter den Wert $^1/_{10}$ sinken (der kleinste Wert, den Marcelin fand, den wir aber, wie erwähnt, nicht anerkennen, ist $^1/_{26}$) und so wird die Raschheit des Temperaturausgleiches am Tropfen, wie wir auseinandersetzten, nach wie vor eine außerordentlich große bleiben gegenüber der Ausdehnungsgeschwindigkeit des Dampfes.

Bei diesem Anlaß sei noch auf den großen Gegensatz zwischen der **gewöhnlichen** und der **molekularen Wärmeleitung** hingewiesen. Letztere wird wirksam, wenn die Tropfengröße klein ist gegenüber der mittleren Weglänge der Moleküle. Da unsere Versuche selbst bei kleineren Unterkühlungen auf Tropfenhalbmesser von der Größenanordnung 10^{-9} bis $10^{-8}\,m$ führen, so dürfte diese Voraussetzung nahe erfüllt sein. Sobald große Tropfen auftauchen, hat man mit dem gewöhnlichen „Leitungsvermögen" des Dampfes und den bekannten Wärmeleitungsgleichungen zu operieren. **Der Wärmeaustausch ist dann ein unendlich viel langsamerer.** Insbesondere bei Verdampfungsvorgängen bildet der neu entstehende Dampf eine **schwer durchdringliche Isolationshülle,** da doch beispielsweise bei 1 at Druck die Verdampfung einer Wasserlamelle von 1 mm Dicke über ebenem Wasserspiegel eine Schichte von 1,7 m Mächtigkeit erzeugt. Dies erklärt, warum trotz kräftiger mechanischer Mischung kalte Tropfen in überhitztem Dampf lange bestehen können, wie beispielsweise von Knoblauch und Jakob bei ihrer Bestimmung der spezifischen Wärmen beobachtet worden ist.

g) Umkehrbare (oder Kapillardruck-)Adiabate.

Wir haben festgestellt, daß in der Düse zwischen Dampf und Tropfen trotz der raschen Zustandänderung nahezu thermodynamisches Gleichgewicht herrscht. Wir gehen nun zum vollständigen Gleichgewicht über, indem wir voraussetzen, daß das unterkühlte Gemisch „unendlich" (d. h. sehr) langsam in wärmeundurchdringlichem Gefäß entspannt wird. Dabei soll sich nur an den Kernen ein Niederschlag bilden, während wir an der Wand einen solchen ausschließen wollen, Soll Gleichgewicht herrschen, so muß bei der Temperatur T zwischen dem tatsächlichen Druck p_{sr} und dem Sättigungsdruck am ebenen Spiegel $p_{s\infty}$ die Beziehung von Kelvin-Helmholtz:

$$\ln\frac{p_{sr}}{p_{s\infty}} = \frac{2\,\sigma}{\gamma_0 r\,R\,T} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (50)$$

bestehen. Ferner muß die Entropie unveränderlich dem Anfangswerte s_1 gleich sein

$$s'' - y\,(s'' - s_{T'}' - s_k) = s_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (50\text{a})$$

Die Dampfnässe y ist durch die Zahl z der Tropfen, d. h. der Kerne in 1 kg Gesamtgewicht, gegeben, indem

$$y = \frac{4}{3}\,\pi\,\gamma_0\,r^3 z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (50\text{b})$$

sein muß. Ist die Ausdehnung vom Anfangszustande p_1, T_1, s_1, y_1, z bei der Temperatur T angelangt, so bestimmen obige drei Gleichungen die Unbekannten p_{sr}, r, y als Abhängige von T.

Einfacher ist die Lösung mit Hilfe der weiter unten beschriebenen I-S Tafel, daher wir die weitere Erörterung dieser Adiabate auf Abschn. 179a verschieben.

h) Die Labilität des Unterkühlungszustandes.

Die geschilderte Art des molekularen Wärme- und Massenaustausches ist gut geeignet, den eigentümlichen Mechanismus zu veranschaulichen, auf dem die Labilität des unterkühlten Zustandes beruht. Es sei eine unterkühlte Dampfatmosphäre vom Zustande p, T gegeben, in der Tropfen vom Halbmesser r in thermodynamischem Gleichgewicht bestehen könnten. In diesem Dampf möge durch ein zufälliges Spiel der Molekülstöße ein Tropfen vom Halbmesser $r' < r$, aber gleicher Temperatur $T' = T$ entstehen. Die Wagerechte von A nach B auf der zu r' gehörenden Sättigungsdrucklinie in Abb. 980 liefert die erforderliche Gleichgewichtstemperatur T_{spr}'. Der Tropfen ist daher relativ, d. h. verglichen mit seiner Siedetemperatur überhitzt, obwohl temperaturgleich mit seiner Umgebung, und wird unter Abkühlung äußerst rasch verdampfen, wie man nach Gl. (44), (45) nicht bloß qualitativ, sondern streng zahlenmäßig feststellen kann. (Allerdings müßte man dabei zum mühsamen Differenzenrechnen Zuflucht nehmen.) Nun kann aber auch der andere Fall eintreten, daß nämlich durch die Zusammenstöße ein Tropfen erzeugt wird, dessen Halbmesser r'' größer als der zum Gleichgewicht erforderliche ist. Wenn auch immer noch $T' = T$ sein möge, so liegt der Tropfen nun unter seiner Siedetemperatur, er sendet weniger Moleküle aus, als ihm aus der dichteren Dampfumgebung zufliegen, er bildet einen Kondensationskern. Das Eigentümliche ist, daß seine Temperatur über diejenige des Dampfes hinauswächst und trotzdem immer mehr Dampfteilchen sich an ihm niederschlagen, weil der unterkühlte Dampf immer dichter ist als der zu gleichem Druck gehörende gesättigte, so daß der Tropfen bis zum Erreichen der Temperatur T_{spr}'' (wo r'' den jeweils erreichten Halbmesser bedeutet) mehr Moleküle auffängt als er aussendet. Mittlerweile wird die Dampfumgebung, sofern sie begrenzt ist, durch die vom Tropfen ausgehenden „heißeren" Moleküle erwärmt, und der Vorgang geht so lange vor sich, bis die Tropfen genügend groß geworden sind, damit der Kapillardruck vernachlässigbar sei (oder die Tropfen sich an einer ebenen Wand niedergeschlagen haben). Bei einem Druck von 1 at abs. wird also ein ursprünglich beliebig tief unterkühlter Dampf schließlich ein Wasser-Dampf-Gemisch von rd. 100° C bilden.

Abb. 980. Labilität der Unterkühlung.

Theoretisch reicht ein einziger Tropfen mit höherer Siedetemperatur hin, um das labile Gleichgewicht des unterkühlten Dampfes zum Kippen zu bringen. Merkwürdigerweise ist es ein Kippen nach oben, d. h. zu höherer Temperatur hin, und man könnte leicht stutzig werden, ob dabei der zweite Wärmesatz nicht verletzt wird. In der Tat geht hier ein Körper (auch bei unveränderlichem Rauminhalt) „von selbst" von niederer zu höherer Temperatur über. Doch werden wir leicht nachweisen können, daß dabei die Entropie zunimmt, also alles in bester Ordnung ist.

Über die Bildungsmöglichkeit solcher Tropfen läßt sich zur Zeit theoretisch nichts aussagen. Die Versuche von Wilson erbrachten für tiefe Drücke den Nachweis, daß bei vollkommen kernfreier Luft bis zu vierfacher Übersättigung die **gefährlich großen Tropfen** nicht entstehen, daß ihre Bildung dann häufiger wird und daß sie **bei 8facher Übersättigung unbedingt und in sehr großer Zahl erscheinen.** Aus **meinen Versuchen**, die mit **kernreichem Dampf** ausgeführt wurden, geht, wie ich unten nachweise, hervor, daß **in einer Düse schon bei 3,3facher Übersättigung ein äußerst starker Niederschlag** einsetzt. Es ist von vornhinein zu erwarten, daß in der dichten Unterkühlungs-Atmosphäre, wenn schon Kerne und kleine Tropfen vorhanden sind, die weitere Bildung zu neuen Tropfen sich mit Vorliebe an diese anschließen wird, z. B. durch Zusammenprall und Festhaften mehrerer kleiner Tropfen.

i) Der Endzustand der Umwandlung hängt von der auf 1 kg entstehenden Zahl der Tropfen ab, und umgekehrt.

Während, wie wir ausführten, ein einziger zu großer Tropfen hinreicht, um die vollständige Umwandlung des unterkühlten in normal gesättigten Dampf zu veranlassen, so verhält es sich anders, wenn gleichzeitig eine große Zahl gleichwertiger Tropfen entstehen, die alle gleichmäßig wachsen. Dann kann die schließliche Größe der Tropfen noch immer so klein sein, daß eine Unterkühlung verbleibt. Diese wichtige Tatsache verdient rechnerisch festgelegt zu werden.

Es sei 1 kg unterkühlten Dampfes beim Drucke p von der Temperatur T_1 gegeben. Die irgendwie eingeleitete Umwandlung möge bei stets gleichem Druck vor sich gehen und der Kampf der Tropfen untereinander so endigen, daß **schließlich z von gleicher Größe übrig bleiben.** Wie groß ist die verbleibende Unterkühlung?

Denkt man sich den Dampf in einem Zylinder durch masselosen Kolben eingeschlossen, so wird der Rauminhalt vom Werte v_1 auf v_2 steigen, also wird eine Arbeit $p(v_2-v_1)$ nach außen abgegeben. Der Energieumsatz lautet

$$u_1 = u_2 + Ap(v_2 - v_1) \quad \text{oder} \quad u_1 + Apv_1 = u_2 + Apv_2, \text{ d. h. } i_1 = i_2 \quad \ldots\ldots (50\text{c})$$

In Werten: **Während der Umwandlung bei stets gleichem Druck bleibt der Wärmeinhalt unverändert,** In mathematischen Zeichen (nach Gl. 13b)

$$i_1 = i_2'' - y_2(i_2'' - i_2' - i_{2\text{kap}}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (50\text{d})$$

nehmen wir Gl. (50), (50b) hinzu, so haben wir drei Beziehungen zur Berechnung der Unbekannten T_2, y_2, r_2 aus dem bekannten Anfangszustand i_1, dem Druck p und der schließlichen Tropfenzahl z. Die Tropfenzahl am Anfang ist beliebig.

Machen wir die Voraussetzung, daß T_2 bekannt sei, so ist eine unmittelbare Auflösung möglich, da sich $\sigma_2\, i_2''\, i_2'\, p_s$ aus T_2 ableiten, aus (50) r_2, aus (50d) y_2 und aus (50c) z_2 berechnet wird. Im umgekehrten Falle, wenn z_2 vorgeschrieben wäre, würde man T_2 versuchsweise annehmen, und so lange ändern, bis die sich ergebende Tropfenzahl mit der gegebenen übereinstimmt.

Beispiel: Der Dampf sei im Anfang tropfenfrei mit

$$p_1 = 1 \text{ at} = 10^4 \text{ kg/qm} \quad t_1 = 49{,}2^0 \text{ C}; \quad T_1 = 322{,}2;$$

wir berechnen die Tropfenzahl bei den nachfolgend angegebenen Temperaturen. Man findet

für $t_2 =$	52	60	70	80	90	99,1° C
$p_s{}^{at} =$	0,1385	0,202	0,317	0,482	0,714	1,00
$10^{10}\,r =$	4,56	5,42	7,16	10,75	22,12	∞
$y =$	0,0037	0,0137	0,0252	0,0336	0,0412	0,047
$10^{-20}\,z =$	94,2	205	162	65	9,1	0

Man bemerkt, daß, wie zu erwarten war, die Tropfenzahl anfänglich steigt, dann wieder sinkt denn wenn $t = 99{,}1$ geworden ist, muß ein ebener Spiegel vorhanden sein, d. h. die Tropfenzahl muß streng genommen auf Null sinken. Die Abnahme der Tropfenzahl kann darin begründet sein, daß einige durch Zufall rascher wachsen als die übrigen, so daß die letzteren später wieder verdampfen müssen; oder es vereinigen sich die Tropfen beim Zusammenprall, oder endlich, es entstehen von Anfang an nur wenige Tropfen von zu großem Halbmesser, die fortwährend wachsen, ohne daß es zu einem Zwischengleichgewicht kommt.

Innere Wärmeentwicklung. Es könnte auffallen, daß in der Energiegleichung der Umwandlung die innere Wärmeentwicklung nicht ausdrücklich ersichtlich gemacht wird, während bei der Reibung die Reibungsarbeit als Wärmezufuhr gebucht wurde. Dies liegt daran, daß wir die Kapillarenergie in die innere Energie hineingenommen haben. Man könnte indessen bei gesättigtem Endzustand den Vorgang auch so beschreiben, daß man sagt: die verschwundene Kapillarenergie dient (als wie eine von außen zugeführte Wärme) zur Steigerung der thermischen inneren Energie und zum Bestreiten der Ausdehnungsarbeit.

k) Rechnerische Auswertung von Versuchsergebnissen.

Wir wollen annehmen, daß für eine Düse von bekannten Abmessungen durch den Versuch bestimmt worden sind:

G das sekundliche Durchflußgewicht in kg,
p der Druck an beliebiger Stelle,
f der dazugehörende Querschnitt,
P der Rückdruck des austretenden Strahles bei dem Gegendruck, der sich an den Düsen einstellt, wenn weder ein Stoß noch eine Spaltausdehnung vorhanden ist.

Die Aufgabe ist, die Größe der Unterkühlung zu bestimmen. Die zur Lösung erforlichen und hinreichenden Gleichungen sind:

1. die Gleichung der Gesamtenergie zwischen dem Anfangszustand p_1, v_1, T_1 (mit $w_1 = 0$) und dem Zwischenzustand p, v, T, w

$$i_1 - i = A \frac{w^2}{2g} \qquad (51)$$

2. die Dampfdruckgleichung

$$\lg n \frac{p}{p_{s\infty}} = \frac{2\sigma}{\gamma_0 r R T} \qquad (52)$$

3. die Durchflußgleichung, die man in der genaueren Form

$$G = \beta_0 f w_a \gamma_a \qquad (53)$$

(s. Abschn. 175) verwenden müßte. Endlich

4. die Formel für den Rückdruck (allerdings nur für das Düsenende)

$$P = \frac{G\bar{w}}{g} = \frac{\beta_1 f w_a^2 \gamma_a}{g} \qquad (54)$$

Ist die Verteilung der Geschwindigkeit über den Querschnitt bekannt, so wären die in Abschn. 175 erklärten Größen β_0, β_1, β_2 graphisch bestimmbar; im andern Fall muß man sie rechnen oder einschätzen. w in Gl. (51) hat die Bedeutung von $\bar{\bar{w}}$ und auch i ist als Mittelwert über den Querschnitt verstanden. Die Auflösung wird zweckmäßigerweise folgenden Weg einschlagen. Aus Gl. (53) und (54) kann zunächst unmittelbar w_a, γ_a gerechnet werden. Indem man (54) durch (53) teilt, erhält man

$$w_a = \frac{\beta_0 P}{\beta_1 (G/g)} \qquad (55)$$

Dann folgt aus der Beziehung

$$G\bar{\bar{w}}^2 = \beta_2 f w_a^3 \gamma_a$$

zusammen mit Gl. (53)

$$\bar{\bar{w}}^2 = \frac{\beta_2}{\beta_0} w_a^2 \qquad (55)$$

aus (53)

$$v_a = \frac{1}{\gamma_a} = \frac{\beta_0 f w_a}{G} = v'' - y(v'' - v') \qquad (56)$$

und aus (51)

$$i = i_1 - A\frac{\bar{\bar{w}}^2}{2g} = i'' - y(i'' - i' - i_{\text{kap}}) \qquad (57)$$

Hierin sind i', i'', σ, $p_{s\infty}$, v'' (dies etwa angenähert $= RT/p$) Abhängige von p und T; demnach bilden (56), (57), (52) drei Gleichungen zur Bestimmung des Unbekannten T, y, r. Dabei ist die Gleichheit der Tropfen- und der Dampftemperatur vorausgesetzt. Für die numerische Rechnung wird am einfachsten T versuchsweise angenommen, die entsprechenden σ, $p_{s\infty}$ in (52) eingesetzt und daraus r berechnet. Dieses liefert den kapillaren Wärmeinhalt

$$i_{\text{kap}} = u_{\text{kap}} = \frac{8{,}16}{r} \cdot 10^{-8} \qquad (58)$$

Aus T folgen i', i'', also kann man aus (57) y berechnen und sich überzeugen, ob mit diesem Wert die Durchflußgleichung (56) erfüllt ist; T wird so lange abgeändert, bis dies der Fall ist. Aus y und r ergibt sich die vorhandene Tropfenzahl

$$z = \frac{3y}{4\pi\gamma_0 r^3} \qquad (59)$$

In der J-S-Tafel, Abschn. 179a wird man auf der Höhe von i nach (57) eine Wagerechte eintragen, wodurch ein geometrischer Ort des Endzustandes vorgeschrieben und jedem w

ein bestimmtes y zugeordnet wird. Man wählt in der Ebene p = konst. eine Temperatur (bzw. ein w) versuchsweise, so daß y aus (56) ermittelt werden kann. Der Zustand ist eine Lösung, wenn dieses y mit demjenigen des geometrischen Ortes übereinstimmt. Neben diesem mittleren Zustand kommt die eigentliche Unterkühlung, in der Achse des Strahles in Betracht. Man erhält sie, indem man aus w_a mittels Gl. (51) $i_a = i_1 - A w_a^2/2g$ berechnet. Mit $\gamma_a = 1/v_a$ aus Gl. (53) wird der wahre Zustand ähnlich wie soeben beschrieben ermittelt.

Versuchsergebnisse. An Versuchen liegen zunächst diejenigen des Verfassers vor, der die Strömung in der durch Abb. 981 dargestellten schlanken Glasdüse mit langem Einlauf untersuchte, in der ein zentrales Meßröhrchen von 2,84 mm Dmr., in bekannter Weise hin- und herbewegt, zur Ermittlung des Druckes diente. Die engste Stelle hatte 10,24 mm Dmr. und lag bei der Marke 152 mm. Bei einem Drucke vor der Düse von 4,99 at abs. und gesättigtem Zustand floß in der Sekunde $G_{sk} = 0{,}0536$ kg Dampf hindurch. Dies weist auf einen Energieverlust bis zum engsten Querschnitt von etwa 10 bis 11 vH. hin, was bei dem langen Einlauf und der Vermehrung der Reibung durch das Meßröhrchen nicht wunderzunehmen braucht. Die Bogenlichtbeleuchtung ließ erkennen, daß die Trübung an der Meßstelle mit 158 mm Achsenabszisse aufzutreten beginnt und sehr rasch so dicht wird, daß z. B. die kleine Meßbohrung im zentralen Röhrchen, die im hellen Düsenteile deutlich sichtbar war und sogar einen Durchblick durch das Röhrchen gestattete, alsbald im Nebel verschwand.

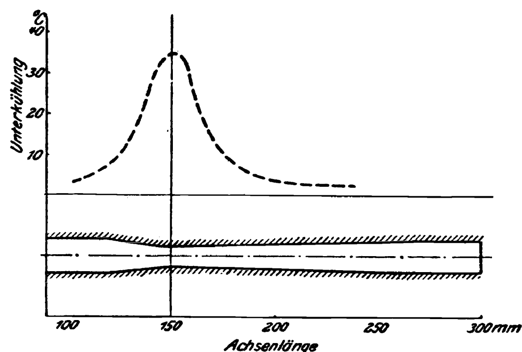


Abb. 981. Unterkühlung in der Versuchsdüse.

An jene Stelle wurde als Druck mittels des Meßröhrchens 2,71 at abs. abgelesen. Da man annehmen darf, daß die Unterkühlung unmittelbar vorher eine fast vollständige war, und da im Kern des Strahles eine nahezu adiabatische Ausdehnung stattfindet, so ergibt die bekannte Beziehung

$$\frac{T_x}{T_1} = \left(\frac{p_x}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (64)$$

mit $k = 1{,}3$ der Wert $T_x = 368{,}5$ oder $t_x = 95{,}5^0$ C. Zu dieser Dampftemperatur gehört ein Sättigungsdruck von rd. 0,875 at abs. mithin erhalten wir als **Übersättigungsgrad,** d. h. das **Verhältnis des wahren Druckes zum Sättigungsdruck der der Temperatur entspricht.**

$$\omega = \frac{p}{p_s} = 3{,}1 \text{ bis } 3{,}3 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (65)$$

je nachdem man den Beginn an eine mehr oder minder dichte Nebelstelle versetzt. Die Dampfdruckformel ergibt für die Größe einzelner Tropfen die vor dem Niederschlag im Dampfe vorkommen könnten etwa die **3,5fache der Molekülgröße.** Wenn wir annehmen, daß die Umwandlung in einen Unterkühlungsgleichgewichtszustand etwa bis zur Marke 180 vollendet wäre, so ergibt sich als zugehörige **Zeitdauer rd. $5{,}10^{-5}$ sek.** Die Versuche wurden auch zur Ausrechnung der Zustände in einigen Punkten der Düsenlänge benutzt und ergaben einen Verlauf der Unterkühlungstemperatur, besser des Unterschiedes zwischen der Sättigungs- und der wirklichen Temperatur, der in Abb. 981 eingezeichnet ist.

Da jene Rechnung auf die ungleiche Verteilung der Geschwindigkeit im Querschnitt keine Rücksicht nahm und die Glasdüsen stets etwas unregelmäßige Querschnitte aufwiesen, wurden später Versuche mit zwei Metalldüsen durchgeführt, bei denen es möglich war, gleichzeitig den Rückdruck zu messen[1]). Die Abmessungen und die Versuchsergebnisse sind in nachfolgender Zahlentafel zusammengestellt.

[1]) Schweiz. Bauztg. 1914, II. Halbjahr.

Versuchsergebnisse v. J. 1914.

	Düse 1	Düse 2
Engster Durchmesser . . . . mm	12,06	12,07
Enddurchmesser . . . . mm	18,00	25,12
Länge zwischen dem engsten und Enddurchschnittt . mm	150	150
Absoluter Anfangsdruck p . . . . kg/cm²	8,15	11,15
Anfangstemperatur . . . . °C	174	197,5
Absolute Anfangstemperatur	447	470,5
Absoluter Enddruck der Ausdehnung p_2 . . . . . kg/cm²	1,082	0,571
Ausdehnungsverhältnis . . . . p_1/p_2	7,53	19,52
Spezifischer Anfangsrauminhalt v_1 . . . . m³/kg	0,2440	0,1872
Sekundliche Dampfmenge G . . . . kg	0,1351	0,1809
Ausflußzahl χ in Formel $G = \chi f_m \sqrt{\frac{p_1}{v_1}}$	2,044	2,046
Strahlrückdruck P . . . . kg	10,85	17,60
Mittl. Dampfgeschwindigkeit am Düsenende $\overline{w} = \frac{P \cdot g}{G}$ m/sek	787,8	954,5
Anfänglicher Wärmeinhalt i_1 . . . . kcal	665,9	675,5
Anfängliche Entropie s_1	1,6046	1,5929

Messungen über den Verlauf der Geschwindigkeit, wie wir sie in Abschn. 78 mitgeteilt haben, fehlen. Die Durchrechnung der Ergebnisse mit Benützung der Formeln in Abschn. 175 führte indes von selbst zu Werten der Exponenten n die später durch den Versuch bestätigt wurden. Das Ergebnis der Rechnung war, daß bei Düse 1 mit rund 7,5-facher Ausdehnung eine **Unterkühlung, d. h. ein Unterschied zwischen der Sättigungs- und der wahren Dampftemperatur von etwa 8° C vorhanden ist,** mit $n \simeq 22$; bei **Düse 2 mit rund 20-facher Ausdehnung aber nur noch 3° C** und $n = 25$. Dementsprechend sind auch die Verluste aus der unvollständigen Kondensation weit geringer, als bei vollkommener Unterkühlung der Fall wäre; man kann sie für das kleinere Wärmegefälle der Düse 1 auf rund $2\,^1/_2$ v. H. für das größere Gefälle der Düse 2 auf $^3/_4$ v. H. einschätzen.

Um die Verluste richtig zu beurteilen ist jedoch ein Eingehen auf die Entropiedarstellung unerläßlich.

Während der Drucklegung erschienen die Versuche von Dr.-Ing. Fr. Müller[1]), der die Temperatur durch ein längs der Achse einer Lavaldüse gespanntes Thermoelement (ähnlich wie Batho) maß und die in Abb. 982 dargestellten bekannten starken Abweichungen fand.

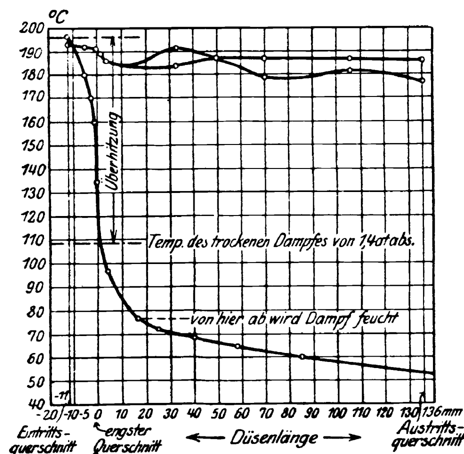


Abb. 982. Temperatur bei anfänglicher Überhitzung.

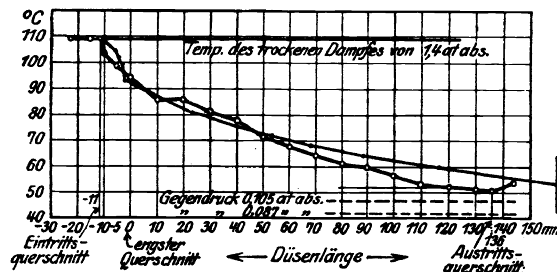


Abb. 983. Temperatur bei anfänglicher Sättigung.

Der Anfangszustand war 1,4 at abs. 196° C. Die Anzeige blieb angenähert der Anfangstemperatur gleich. Dies änderte sich, als man mit trocken gesättigtem Anfangszustand von 1,4 at abs. begann und zugleich als Meßvorrichtung ein von vorn in die Düse eingeschobenes Magnesiarohr, in

[1]) Über die Ermittlung des Temperaturverlaufes von Gasen oder Dämpfen in einer Lavaldüse. Dissertation, Oldenbourg 1919.

dessen Innerem die Thermodrähte untergebracht waren, verwendete. Die Temperatur stimmte dann gemäß Abb. 983 mit der theoretischen nahezu überein und es würde hiernach keine oder eine nur unwesentliche Unterkühlung festzustellen sein. Eigentümlich verändert sich das Bild durch die Beobachtung der Temperatur am Ende der Düse, bei veränderlicher Anfangsüberhitzung. Sobald der trocken gesättigte Zustand um ein ganz geringes überschritten wird, steigt die Endtemperatur gemäß Abb. 984 sprungweise von rd. 52° C auf rd. 93° C um bei 190° C Anfangstemperatur mit ihr fast übereinzustimmen. Müller führt dies vermutungsweise auf einen inneren heißeren Kern zurück, in dem schon Überhitzung besteht, während das Mittel der Temperatur vor der Düse „trocken" gesättigten Zustand anzeigt. Wie es sich damit in Wirklichkeit verhält, muß durch weitere Versuche aufgeklärt werden. Die gleichbleibende Temperatur bei Überhitzung kann durch die Abdrosselung und Überhitzung der am Drahte haftenden Dampfschichte erklärt werden. Aus ihr zu folgern, daß überhaupt keine Kondensation erfolgt, wäre unzulässig, da dann die gerechnete vorhandene Düsenerweiterung zum beobachteten Druck (wie ich in meinen Versuchen zeigte) nicht stimmen würde. Hingegen bildet die tiefe Temperatur bei gesättigtem Anfangszustand einen Beweis für Unterkühlung; die genaue Feststellung ihres Größenbetrages bedarf jedoch weiterer Untersuchungen.

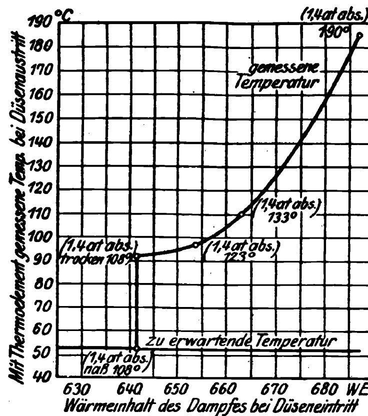


Abb. 984. Plötzliches Steigen der Endtemperatur bei beginnender Überhitzung.

Unmittelbar vor dem Abschluß teilt mir die A.-G. Brown, Boveri & Cie. die in nachfolgender Zahlentafel zusammengefaßten Versuchsergebnisse über die Unterkühlung in Düsen mit. Die Düsen I—III haben das gleiche Ausdehnungsverhältnis von rd. 8:1, aber wachsende Länge; Düse VII ein solches von rd. 80:1. Die Unterkühlung wurde mit der neuen *J-S*-Tafel II, die ich der Firma zur Verfügung stellte, ermittelt. Die Beobachtung des Staudruckes unmittelbar am Austritt erwies sich als ungeeignet, um den Verlauf der Geschwindigkeit mit Sicherheit festzulegen, so daß man mit dem Exponenten n gemäß Abschn. 175 rechnete.

Düsenversuche von Brown, Boveri & Cie.

Düse Nr.		I		II		III		VII			
Engster Durchm.	mm	12,01		12,01		12,00		12,10			
Austritts-Durchm.		18,04		18,00		18,12		42,00			
Querschn.-Verhältn. f_2/fm		2,25		2,25		2,28		12,03			
Erweiterungs-Kegel		1 : 5		1 : 10		1 : 20		1 : 5			
Länge zwischen f_m und f_2	mm	30,2		59,9		122,4		149,5			
Anfangsdruck P	at abs.	4,92	10,91	4,92	10,91	4,92	10,91	8,86	12,81	8,87	12,82
Anfangstemperatur t	°C	153,5	187	155,5	186	158	186	194	201,6	302	302
Enddruck P_2	at abs.	0,605	1,335	0,634	1,401	0,638	1,404	0,1115	0,159	0,100	0,146
Ausflußgewicht	kg/sk	0,0830	0,1793	0,0828	0,1794	0,0818	0,1783	0,1460	0,2120	0,1300	0,1885
Ausflußzahl	χ	2,065	2,066	2,066	2,065	2,051	2,051	2,063			
Rückdruck	kg	6,870	15,11	6,770	14,95	6,640	14,610	16,73	24,54	15,93	23,48
Exponent	n	45	38	30	28	23	17	20	200	40	75
Unterkühlung	°C	6	9	2	2	0	5	17	17	21	12

Wie ersichtlich, nimmt die Unterkühlung mit wachsender Düsenlänge unter sonst gleichen Umständen ab, was man mit der wachsenden Reibungsarbeit, also Durchwärmung des Dampfes, wie auch mit der verlängerten Ausdehnungszeit erklären könnte. Eine neue Erscheinung ist die erheblich größere Unterkühlung bei Düse VII, die offenbar nur durch die viel stärkere Ausdehnung, im Verhältnis von 80:1 bewirkt sein kann. Da uns die Zeit zu einer kritischen Verarbeitung dieser ungemein sorgfältigen Versuche nicht mehr zur Verfügung steht, begnügen wir uns mit dem Hinweis, daß der Unterkühlung bei Düsen eine reale Bedeutung zukommt, die weiterer Untersuchung wert ist.

179. Darstellung der Unterkühlung in einem dreidimensionalen Entropieschaubild.[1]

Wird die Gewichtseinheit flüssigen Wassers umkehrbar von 0° C auf die Temperatur t^0 C beim Drucke p unter Beibehaltung eines ebenen Wasserspiegels erwärmt, so nimmt

[1]) Wir zeigen weiter unten, daß für die praktische Verwendung unsere *J-S*-Tafel II zweckmäßiger ist; für das Verständnis der Unterkühlung ist indes die Darstellung im *T-S*-Schaubild sehr förderlich.

die Entropie gemäß der bekannten Grenzkurve g', Abb. 985 von A_0 nach B zu. Hierauf kann man bei stets gleicher Temperatur etwa mittels der in Abb. 986 abgebildeten Kolbenvorrichtung das Wasser isothermisch unter Wärme- und Arbeitszufuhr umkehrbar in Tropfen von bestimmtem Halbmesser r verwandeln, wobei die Entropie um den Wert

$$BC = s_{\text{kap}} = \frac{3\,A\,b}{\gamma_0\,r} \quad . \quad . \quad (1)$$

steigt. Verdampft man die Tropfen bei unveränderlicher Temperatur vollständig (oder genauer bis auf Molekülgröße) umkehrbar, und stellt CD die Entropievermehrung dar, so würde D auch den Punkt einer „Grenzkurve" g''_u bilden, von der man durch Wärmezufuhr bei stetsgleichem Druck den Zustand normaler Sättigung E auf der gewöhnlichen Grenzkurve g'' erreicht.

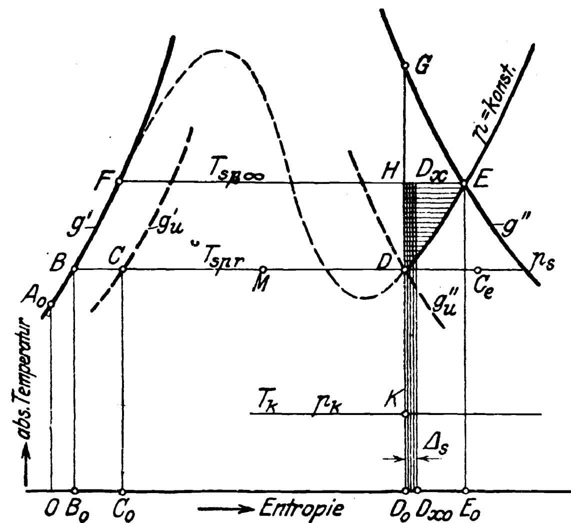


Abb. 985. Entropie-Temperatur-Schaubild.

Die Isotherme CD hat Eigentümlichkeiten in zwei Beziehungen. Ist nämlich die Tropfenzahl auf 1 kg klein, so bleibt die Unterkühlung im Anfange so gut wie unmerklich, man bewegt sich fast im gewöhnlichen Sättigungsgebiet und kommt der normalen Grenzlinie g'' sehr nahe. Erst zum Schluß der Verdampfung, wenn die Tropfen sehr klein geworden sind, macht sich die Unterkühlung stärker geltend und zwingt den Druck, zu steigen, selbst wenn im Grenzfall ein einziger Tropfen vorhanden wäre. Man muß also gegen den Schluß hin den Dampf isotherm verdichten, wobei Wärme abgeleitet und der Rauminhalt verkleinert wird. Dies tritt anschaulich an der Darstellung der **umkehrbaren Isotherme im p-v-Schaubild** Abb. 987 hervor. Man gewinnt diese wie folgt. In der Formel

$$v = v' + x(v'' - v') \approx x v''$$

setzt man angenähert $v'' = RT/p$ und zieht zum Vergleich das dem Sättigungsdruck p_s entsprechende Volumen $v_s = RT/p_s$ heran. Der Quotient

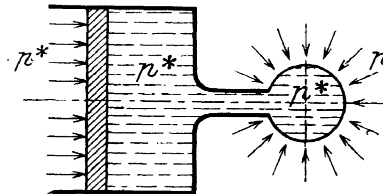


Abb. 986. Umkehrbare Tropfenerzeugung.

$$\frac{v}{v_s} = x\frac{p_s}{p} \quad \text{oder} \quad \lg n\frac{v}{v_s} = \lg n\, x - \lg n\frac{p}{p_s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

kann leicht ermittelt werden, wenn man für x den Wert $1 - 4z\pi\gamma_0 r^3/3$ und für $\lg n\, p/p_s$ den Ausdruck, den die Dampfdruckformel liefert, einschiebt. Bei festgehaltener Temperatur und Tropfenzahl z entspricht jedem Tropfenhalbmesser r ein bestimmter Druck p und ein bestimmter Rauminhalt v. Die Abbildung zeigt deren Abhängigkeit für die Temperatur $t = 100^\circ$ C und für die Werte $r_1 = 5r_0$; $10r_0$; $100r_0$, wo r_1 den anfänglichen Halbmesser und $r_0 = 1{,}85 \cdot 10^{-10}$ m den „Molekül"halbmesser bedeutet.

Umkehrbare Isotherme mit Entropie als Abszisse. Ebenso eigentümlich und grundsätzlich ähnlich ist der **Verlauf des Druckes,** wenn wir ihn über der Entropie als der Unabhängigen auftragen. Der Wert der Entropie ist allgemein

$$ds = \frac{dq}{T} = \frac{di - A\,v\,dp}{T} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Das Integral des ersten Gliedes rechts vom Celsius Nullpunkt bis zur Temperatur T ist die Entropie an der Grenzlinie g', d. h. s'. Dann tritt während der Umwandlung in Tropfen der Betrag s_{kap} hinzu. Während der Verdampfung bei stets gleicher Temperatur erhält man $(i_{\text{ende}} - i_{\text{anfang}})/T$ oder, da am Anfang $x = 0$ ist $x(i'' - i' - i_{\text{kap}})/T$. Das Integral des zweiten Gliedes ist für die Tropfenbildungsperiode in s_{kap} enthalten. Für die Verdampfungsperiode

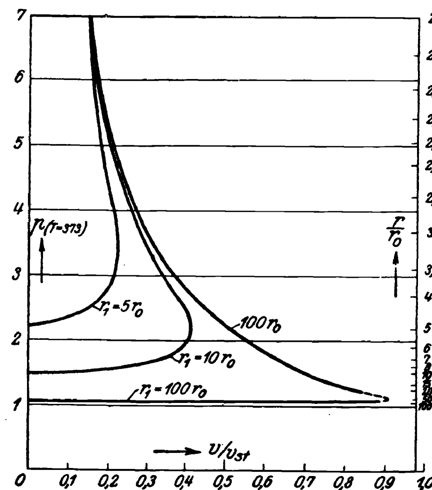


Abb. 987. Umkehrbare Kapillarisothermen im p-v-Schaubild.

führen wir $v \sim xv'' = xRT/p$ ein, so daß $\int A\,v\,dp/T = \int A\,R\,x\,d\,p/p$ wird. Um x auszudrücken, führen wir den anfänglichen Tropfenhalbmesser r_1 ein aus der Beziehung

$$1\,\mathrm{kg} = z\tfrac{4}{3}\pi r_1^3 \gamma_0 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Ist der Halbmesser auf r gesunken, so ist die Dampfnässe $y = z 4\pi r^3 \gamma^0/3 = 1 - x$, oder auch

$$x = 1 - \left(\frac{r}{r_1}\right)^3 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Die Dampfdruckformel liefert bei unveränderlichem T

$$\frac{dp}{p} = -\frac{2\sigma\,dr}{\gamma_0 R T r^2} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

somit wird

$$\int \frac{A\,v\,dp}{T} = -A\frac{2\sigma}{\gamma_0 T}\int_{r_1}^{r}\left[1-\left(\frac{r}{r_1}\right)^3\right]\frac{dr}{r^2}.$$

Dies ausgeführt, und die auftretenden Glieder mit Benutzung von Gl. (10) u. (12) in Abschn. 178

$$s_k - i_k/T = \frac{3A}{\gamma_0 r_1}\left(b - \frac{a}{T}\right) = -\frac{3A}{\gamma_0 r_1}\frac{\sigma}{T}$$

zusammengefaßt, ergibt schließlich

$$s = s' + \frac{x\,(i'' - i')}{T} - \frac{A\sigma}{\gamma_0 r_1 T}\left[2\frac{r_1}{r} - \left(\frac{3a}{\sigma} - 1\right)\left(\frac{r}{r_1}\right)^2\right] \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Die für $t = 100^0$ C und für $r_1 = 5r_0$; $10r_0$; $100r_0$ ermittelten Schaulinien Abb. 987a lassen erkennen, daß bei anfänglich großen Tropfen die Entropie fast wie bei Sättigung wächst, dann aber erheblich abnimmt. **In Abb. 985 wird daher von B ausgehend zunächst ein äußerster Punkt C_e erreicht, dann geht es unter Wärmeentzug nach D zurück.**

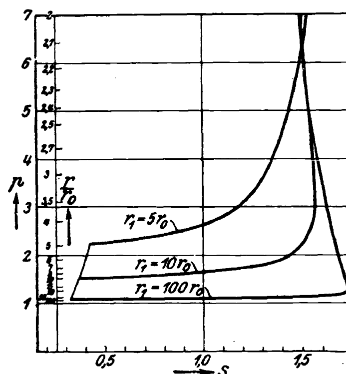


Abb. 987a. Druckverlauf der umkehrbaren kapillaren Isothermen mit s als Abszisse.

Eine weitere Eigentümlichkeit dieser Darstellung besteht in der **Unstetigkeit des Verdampfungsvorganges.** Die Tropfen können nur um ein ganzes Molekül ab- oder zunehmen. Enthielt ein Tropfen ursprünglich z. B. 10 Moleküle, so bedeutet die Abtrennung eines davon $^1/_{10}$ der ganzen Masse. Von der Verdampfungslinie kämen bloß 10 isolierte Punkte in Betracht, die Zwischenpunkte haben nur rechnerische Bedeutung, sie entsprechen nicht wirklichen Zuständen. Schon bei 1000 Molekülen in einem Tropfen, was noch immer einen kleinen Tropfen von rd. 10fachem Moleküldurchmesser bedeutet, sind jedoch die Lücken in der Tafel unmerklich klein.

Anschluß an die Sättigungsentropie. Da wir über die Oberflächenspannung aus wenigen Molekülen bestehender Tropfen nichts wissen, kann die Übersättigung knapp vor dem Übergang in den Molekularzustand nicht angegeben werden. Dies um so weniger, als nach Nernst[1]) und Levy[2]) in der Nähe der normalen Kondensation, und um so mehr im unterkühlten Zustand Doppelmoleküle gebildet werden, deren Dissoziation der eigentliche Grund für die Veränderung der spezifischen Wärme mit dem Druck bildet. Infolge dieser Schwierigkeit kann die Lage der Grenzlinie g''_u vorderhand nicht genau festgelegt werden. Wir wissen nur so viel, daß, wenn von D an Abb. 985 bei unverändertem Druck Wärme zugeführt wird, wir auf der Fortsetzung der Linien $p =$ konst. des Überhitzungsgebietes auf die Grenzlinie g'' treffen. **Das Grenzgebiet unmittelbar vor der gänzlichen Verdampfung oder unmittelbar nachdem die Kondensation eingesetzt hat, bleibt also der genauen Rechnung vorläufig unzugänglich.** Dieser Umstand beeinflußt indessen die Genauigkeit der Zahlenwerte für in weiterem Abstand von der Kondensierungsgrenze gelegene Zustände, selbst wenn man durch die Grenze hindurch müßte, nicht, da die Werte der Energie und Entropie im bekannten Gebiet unabhängig von den Vorgängen im unbekannten Gebiet festgesetzt sind.

Im übrigen bemerkt man, daß die Schaulinien in Abb. 987a sich in der Nähe des Tropfenhalbmessers $r = 2r_0$ durchdringen, daß also hier Widersprüche beginnen. Da, sobald volle Verdampfung erreicht ist, bei einer bestimmten Temperatur unabhängig von der vorhanden gewesenen Tropfenzahl der gleiche Übersättigungsdruck und der gleiche Entropiewert auftreten müssen, dürfte man **bis auf weiteres etwa den Wert $r = 2r_0$ (oder etwa Tropfen, die aus 8 Molekülen bestehen) als die äußerste Grenze ansehen, bis zu der die Oberflächenspannung wirksam ist,** während man annehmen könnte, daß sie bei weiterer Verkleinerung auf Null sinkt. **Bei 100⁰ C Temperatur wäre dann die größte erreichbare**

[1]) Z. f. physiol. Chem. 12, 565, 1910.

[2]) Thermodyn. Behandl. d. Wasserdampfes. Berlin 1910.

Übersättigung rd. 7fach. Diese Festlegung schlagen wir als eine vorläufige grobe Annäherung vor, die für die Rechnung bequem ist, und weichen muß, wenn die physikalische Forschung uns über das Abklingen der Kapillarkräfte genauer aufgeklärt haben wird.

Der Wärmeinhalt ist mittels der allgemeinen Formeln 13b Abschn. 178 für jeden Zustand berechenbar. Es unterstützt die Anschauung, wenn wir dessen Wert aus dem Anschlußpunkt E der Unterkühlung an die Sättigungsgrenze bestimmen. Dort muß nämlich der normale Wert i_s'' erreicht werden, und daraus folgt für den Unterkühlungspunkt D

$$i_a = i_s'' - \text{Fläche } E E_0 D_0 D \quad \ldots \quad (8)$$

Um i **im Naßdampfgebiet** durch Flächen darzustellen, müßte man die Linien $p =$ konst. ermitteln, was bedingt, daß zunächst für eine bestimmte Kern- (d. h. Tropfen)zahl z_1 der Druckverlauf längs jeder Isotherme, ähnlich wie in Abb. 987a berechnet worden sei. Statt z kann man nach Gl. (4) als Bestimmungsgröße auch den anfänglichen Tropfenhalbmesser

$$r_1 = \sqrt[3]{\frac{3z}{4\pi\gamma_0}} \quad \ldots \quad (9)$$

wählen. Wenn man T und s als Koordinaten in einer wagerechten Ebene wählt und über jeder Isotherme die zu z_1 gehörenden Drücke lotrecht aufträgt, entsteht eine Fläche $z_1 =$ konst. **im Koordinatensystem T, s, p**, deren Schnitte mit wagerechten Ebenen die Linien $p_1 =$ konst., $p_2 =$ konst.... darstellen. Sind hinlänglich viele Flächen $z =$ konst. entworfen, so entstehen in der wagerechten Ebene im Abstande p_1 Scharen von Linien $p_1 =$ konst. Aus dieser Schar kann eine neue Fläche gebildet werden, indem man sie auf die Grundebene projiziert und in jedem Punkte die zugehörige Tropfenzahl z als Ordinate aufträgt. Es entsteht die Fläche $p_1 =$ konst. im **Koordinatensystem T, s, z**. Je nach Umständen ist das eine oder das andere System anschaulicher. Es sei in Abb. 988 LD der Schnitt der $p_1 =$ konst.-Fläche im System Tsz mit der Ebene $z_1 =$ konst. FE ist der Schnitt derselben Fläche mit $z = 0$. Die Zustandsänderung zwischen L und D ist umkehrbar, da z_1 unverändert bleibt. Der Weg über FL hingegen ist nicht umkehrbar, weil z zunimmt. Man darf also den Wärmeinhalt im Punkt P, i_p nicht als Flächeninhalt A_0FLP ansprechen, sondern muß entweder von i_D, d. h. dem Wärmeinhalt in D die Fläche PDD_0P_0 abziehen, oder den umkehrbaren Integrationsweg A_0K, dann die Isotherme KL, endlich LP wählen. Da dabei längs KL die bei der Tropfenerzeugung aufgewendete kapillare Druckarbeit in Rechnung zu stellen ist, entbehrt jedoch das Ergebnis der Anschaulichkeit. Man kann nachweisen, daß diese Kapillararbeit durch Fläche $KFEDK$ dargestellt wird.

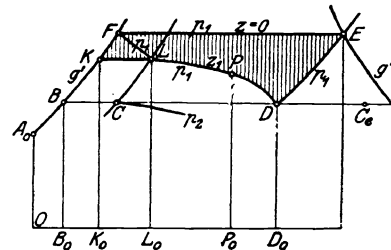


Abb. 988. Veranschaulichung von i.

Nicht umkehrbare Isotherme mit veränderlicher Tropfenzahl. Die Entropiedarstellung nimmt eine sehr einfache Gestalt an, wenn man in Abb. 985 längs der Linie CD nicht den Tropfenhalbmesser, sondern die Tropfenzahl veränderlich denkt. Die Strecke OD_0 bedeutet, wie wir gesehen haben, die Entropie reinen unterkühlten Dampfes vom Zustand pT; die Strecke OC_0 ebenso die Entropie reinen flüssigen Wassers von gleicher Temperatur und dem Tropfenhalbmesser r. Stellt man sich die Hälfte der ganzen Masse in Tropfen-, die andere in Dampfform vor, so fällt der darstellende Punkt in die Mitte M der Strecke CD, und ähnlich bei andern Gewichtsverhältnissen, was im vorigen Falle nicht zuträfe. Allein Linie CD ist nicht mehr Verdampfungslinie, sondern gewissermaßen eine tabellarische Zusammenstellung der Zustände bei stets gleichem T, p, und es gilt nicht mehr der Satz $dq = dsT$.

Da nun der letztere Umstand für die i-s-Tafel keine Bedeutung besitzt, empfiehlt sich offenbar ein Übergang zu diesen Zustandsparametern.

179a. I-S-Tafel für Unterkühlung.

Die dem Buche beigegebene erste Tafel für Wasserdampf enthält neben den Zustandslinien $p =$ konst. $x =$ konst. für normale Kondensation auch die Druck- und Temperaturlinien für Unterkühlung, jedoch nur in beschränktem Gebiet. Die beigegebene zweite Tafel hingegen ermöglicht die Untersuchung der Unterkühlung im gesamten Naßdampfgebiet. Bevor wir deren Gebrauch erläutern, sind zu erklären:

Die Kondensierungsgrenzen.

Bei trocken gesättigtem Anfangszustand beginnt der sichtbare Niederschlag, wie wir nachgewiesen haben, bei etwa 3,1- bis 3,3-facher Übersättigung. Wir wollen den geometrischen Ort dieser Zustände im p, v-Schaubild festlegen.

Die Grenzlinie g'' kann bekanntlich durch die Gleichung

$$p_s v_s^n = C \quad \text{mit} \quad n = \frac{16}{15} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

dargestellt werden. Ist im Punkt A (Abb. 989) bei vollständiger Unterkühlung (d. h. ohne Niederschlag) die Pressung p, und entspricht der durch A bis an die gewöhnliche Grenzkurve g'' fortgeführten Isotherme im Punkte B die Pressung p_s, so bedeutet „**Übersättigung**“ **das Verhältnis**

$$\omega = \frac{p}{p_s} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1a)$$

Insbesondere sagen wir die Übersättigung sei ω-fach. Anschaulicher wäre eigentlich der Vergleich des Raumgewichts bei gleichem Druck, d. h. v_{sp}/v. Bleiben wir bei der eingebürgerten Bezeichnung, so ist infolge $pv = RT$ auch

$$pv = p_s v_{sT} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Abb. 989. Linien gleicher Übersättigung.

Mit $p_s = p/\omega$ folgt $v_{sT} = \omega v$. Und wenn wir diese Werte in (1) einsetzen, so erhält man

$$\frac{p}{\omega}(\omega v)^n = C \quad \text{oder} \quad pv^n = C\omega^{1-n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

als **Gleichung der Kondensierungsgrenzlinie** g_k, falls man ω den Wert 3,1 bis 3,3 erteilt, den die Versuche ergaben.

Für v_{sp}, d. h. den Rauminhalt im Punkt C, erhält man nach (1): $C^{\frac{1}{n}} p^{-\frac{1}{n}}$; nach (3) ist in A: $v = C^{\frac{1}{n}} p^{-\frac{1}{n}} \omega^{\frac{1-n}{n}}$, daher wird

$$\nu = \frac{v_{sp}}{v} = \omega^{\frac{n-1}{n}} = \omega^{\frac{1}{16}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

War $p/p_s = \omega = 8$, so ist $\nu = 1{,}122$, und für $\omega = 3{,}3$ ist $\nu = 1{,}077$. Dabei ist ν auch das Verhältnis der Sättigungstemperatur T_{sp} zur Unterkühlungstemperatur T. Man erhält z. B. folgende Zahlenwerte

	$t =$	20	40	100° C
	$T =$	293	213	373
bei $\omega = 8$	$T_{sp} - T =$	35,8	38,2	45,5
„ $\omega = 3{,}3$	$T_{sp} - T =$	22,6	24,1	28,7

In die erste I-S-Tafel des Anhanges sind die Grenzlinien sowohl für $\omega = 8$ als auch für $\omega = 3{,}3$ eingetragen. Erstere bezieht sich, was hervorgehoben sei, auf die Versuche von **Wilson** mit gänzlich **staubfreiem** Dampf-Luftgemisch und einer **Ausdehnungszeit** von **mindestens** **$^1/_{100}$ Sekunden**; der Dampf in **meinen Versuchen** war **mit Kernen reichlich** versehen, die Ausdehnungsdauer betrug nur etwa $^1/_{5000}$ Sekunde, es ergab sich $\omega = 3{,}3$.

Wenn man übrigens die Zustände der vollkommenen Unterkühlung bei $p =$ konst. über D, Abb. 985, hinaus weiter verfolgen wollte, so steht hierfür die erweiterte Zustandsgleichung von van der Waals zu Gebote, nach der bekanntlich eine stetige Überführung des Dampfes in den flüssigen Zustand möglich wäre, wenn auch mit einer labilen Zwischenstrecke. Aus der bekannten Form der van der Waalsschen Isothermen kann auch gefolgert werden, daß die Kurve $p =$ konst. im Entropieschaubild die in Abb. 985 gestrichelt eingezeichnete S-Form haben müßte, ohne daß wir indessen ihren Verlauf genauer angeben könnten. Bei dieser Darstellung müßte der thermodynamischen Forderung Rechnung getragen werden, daß die über- und unterhalb FE, Abb. 985, gelegenen Flächenabschnitte, die die S-Kurve begrenzt, gleich seien.

I-S-Tafel Nr. II für unterkühlten Naßdampf.

Der Zustand des unterkühlten nassen Dampfes wird durch drei Zustandsgrößen bestimmt. Als solche kommen in Betracht: Der Druck p, die Temperatur T, der Rauminhalt v, die Dampfnässe y, die

Zahl der Tropfen z auf 1 kg, der Tropfenhalbmesser r, die Übersättigung ω, der Wärmeinhalt i, die Entropie s, allein nicht in freier Wahl, sondern nur, soweit sie nach den Grundformeln voneinander unabhängig sind. (So können z. B. p, T, r nicht willkürlich vorgeschrieben werden, da r durch die Dampfdruckformel von p und T abhängt.) Die Abhängigkeit von drei Veränderlichen würde auch hier, mathematisch gesprochen, eine Darstellung im Raum erforderlich machen; will man in der Ebene bleiben, so muß eine solche Wahl der Bestimmungsgrößen getroffen werden, daß ohne verwirrende Kurvenscharen jeder Zustand darstellbar bleibt. Es zeigt sich, daß es zweckmäßig ist, i, s, p als Unabhängige zu benützen.

Es sei in Abb. 990 ω_g die normale Grenzlinie gesättigten Dampfes, darin $A_{fl} B_s$ die

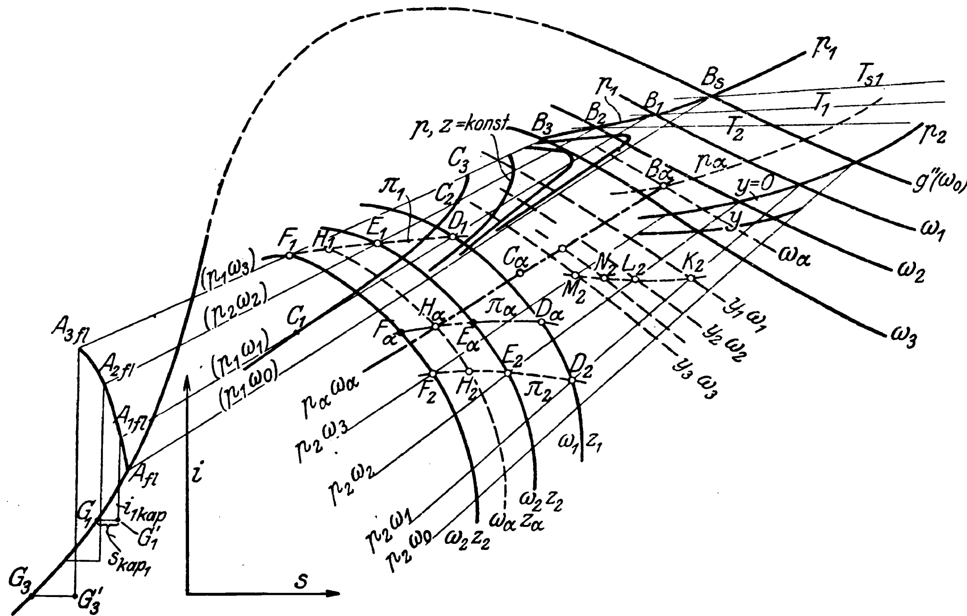


Abb. 990. Unterkühlungstafel für Naßdampf.

normale Verdampfungslinie beim Druck p_1 und der Temperatur T_{s1}. Der Übergang zur Unterkühlungstemperatur $T_1 < T_{s1}$ erfordert die Verwandlung des ganz verflüssigten Wassers bei der Temperatur T_1 in z_{1fl} Tropfen vom entsprechenden Halbmesser r_1, was eine Entropievermehrung $s_{\text{kap}} = G_1 G_1'$ und eine Zunahme der Wärmeeinhalte $i_{\text{kap}} = G_1' A_{1fl}$ bedingt. **Zwischen $A_{1fl} B_1$ ändern sich sowohl i und s als auch die Tropfenzahl z und die Dampfnässe y linear.** In B_1 ist $z = 0$, $y = 0$. Für einen Zwischenpunkt C_1 findet man mithin

$$y = \frac{B_1 C_1}{A_1 B_1}; \quad z = y z_{fl} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Für eine Unterkühlung T_2 mit der Übersättigung ω_2 ist in ähnlicher Weise $A_{2fl} B_2$ eine Linie auf der $p_1 T_2 \omega_2$ unveränderlich sind, und es ist der ganze Flächenstreifen $A_{fl} B_s B_3 A_3$ von lauter solchen Linien dicht erfüllt zu denken, er bildet eine Ebene $p_1 = \text{konst.}$, während T, ω, z veränderlich sind. Von besonderer Wichtigkeit sind darin die Linien

$$p = \text{konst.}; \quad z = \text{konst.} \quad (\omega = \text{veränderl.}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

da sie **umkehrbaren Zustandsänderungen** entsprechen und im folgenden viel gebraucht werden. Linie $A_{fl} B_s$ entspricht normaler Sättigung, also gewissermaßen einem einzigen großen Tropfen (den man freilich in der Nähe von B_s an einer flachen Wand zu einem ebenen Spiegel zwingen müßte). Je größer ω, desto größer ist z_{fl}. Die Linien $z = \text{konst.}$ werden daher die durch $C_1 C_2 C_3$ veranschaulichte Form haben und sich bei kleinem z der gebrochenen Linie $B_3 B_s A_{fl}$ nähern, d. h. sie werden von einer Lotrechten in zwei Punkten getroffen, was für die Adiabaten von Wichtigkeit ist. Das Einzeichnen jener z-Linien würde ein unentzifferbares Gewirre ergeben. Wir wählen daher ein System von Linien für die nicht $p = \text{konst.}$, sondern

$$\omega = \text{konst.}; \quad z = \text{konst.}; \quad (p = \text{veränderl.}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

ist. Um eine gute Interpolation zu ermöglichen, wurde z vermöge einer stetigen, in größerem Maßstabe auf die II. *I-S*-Tafel aufgenommenen Linie dem ω zugeordnet. Zu einem gewählten $\omega = \omega_1$ und dem zugehörigen z_1 ermittelte man nun die Sättigungslinie $A_{1fl}B_1$ und auf dieser den zu z_1 gehörenden Punkt D_1 und suchte in der Ebene von p_2 den zu denselben Werten $\omega_1 z_1$ gehörenden Punkt D_2, ferner bei p_3 Punkt D_3 usf. So wird die stetige Linie $D_1 D_2 \ldots$, die mit $\omega_1 z_1$ überschrieben ist, gewonnen. Ähnlich entstehen in $E_1 E_2 \ldots$ und $F_1 F_2 \ldots$ die Linie ω_2; $z_2 =$ konst.; ω_3; $z_3 =$ konst. usf. Die Verbindungslinien $D_1 E_1 F_1 \ldots$ und $D_2 E_2 F_2 \ldots$ sind je Linien gleichen Druckes, die in den Ebenen $p_1 =$ konst. und $p_2 =$ konst. liegen und mit $\pi_1 \pi_2 \ldots$ bezeichnet wurden. Diese ωz- und π-Linien sind fast die einzigen, die in der Tafel beibehalten wurden und die das Auffinden eines beliebigen Zustandspunktes dank dem Umstand erlauben, daß $A_{1fl}B_1$; $A_{2fl}B_2 \ldots$ gerade Linien sind. Die Zuordnung der z zu den gewählten ω-Kurven sind in der Tafel durch ein Kurvenschaubild dargestellt.

Die Dampfnässe.

Auf einer Linie $p =$ konst., $\omega =$ konst. ist die Dampfnässe, wie erwähnt, dem Abstand von der jeweiligen Sättigungsgrenze verhältnisgleich, somit ist für den Punkt C_1 in Abb. 990 $y = B_1 C_1 / A_{1fl} B_1$. Insbesondere ist an der Grenzlinie $B_s B_1 B_2 B_3 : y = 0$, an der Grenzlinie $A_{fl} A_{1fl} A_{2fl} A_{3fl}$: $y = 1$. Das Einzeichnen auch der Linien $y =$ konst. würde die Tafel noch mehr verwirren. Es sind daher nur die Linien $y = 0{,}1$ und $0{,}2$ zu verschiedenen Werten, $\omega =$ konst. aufgenommen worden, die ähnlich verlaufen wie die $y =$ konst.-Linien der gewöhnlichen Tafel; sie entstehen, indem man auf einer Reihe von Geraden $p =$ konst., $\omega =$ konst. die Punkte, die gleichem y entsprechen, verbindet.

Für Zwischenwerte genügt bei der Dichtheit der Linien $y =$ konst. die schätzungsweise Interpolation[1]). Da die Teilung eine gleichmäßige ist, so wird sich zu irgendeinem Zustandspunkt auf einer Linie $p =$ konst., $\omega =$ konst. die Dampfnässe durch das Verhältnis der vom (oberen) Sättigungspunkt der betreffenden Grenzlinie $\omega =$ konst. gemessenen Strecke zum Abstand des Schnittpunktes von $y = 0{,}1$ sofort ergeben, und umgekehrt.

Bestimmung eines Zustandspunktes durch Interpolation.

Der Zustand möge gegeben sein durch p_a, T_a, y_a. Dann ist beim Gebrauche der Tafel zunächst die Übersättigung ω_a zu bestimmen. Zu diesem Zwecke entnimmt man der Tafel auf der Grenzlinie g'', d. h. bei $\omega = 1$ (oder in Tabellenwerken) die zu T_a gehörende Sättigungstemperatur p_{sa} und erhält

$$\omega_a = \frac{p_a}{p_{sa}}.$$

Nun breitet man über die *J-S*-Tafel ein Pauspapier aus und zeichnet die Übersättigungs-Grenzlinie $\omega_a =$ konst. durch Interpolation ein (in Abb. 990 zwischen ω_2 und ω_3 liegend angenommen); ebenso die Linie $p_a =$ konst. (in der Abb. zwischen p_1 und p_2 liegend), so daß sich durch den Schnitt der ω_a- und p_a-Linien der obere Grenzpunkt B_a ergibt. Da die untere Grenzkurve nicht auf die Tafel fällt, also A_{afl} nicht abgegriffen werden kann, muß **die Neigung $B_a A_{afl}$ durch Ermittelung eines Zwischenpunktes** festgelegt werden. Zu diesem Zwecke sucht man unter den Linien ω, z, $=$ konst. diejenige, die zu ω_a gehört, bzw. man interpoliert diese Kurve nach dem Augenmaß. Nur in besonderen Fällen würde man zu einer zeichnerischen Interpolation schreiten, indem man auf Normalen zum Bogen $D_1 E_1 F_1$ die zugehörigen Werte $\omega_1 \omega_2 \ldots$ aufträgt, durch eine stetige Linie verbindet, mit ω_a einschneidet und auf den Bogen herabprojiziert. Auf diese Weise mögen sich auf $\pi_1 =$ konst. $\pi_2 =$ konst. ... die Punkte H_1, H_2, ... ergeben haben, die man durch die stetige Linie $\omega_a z_a$ verbindet, längs welcher nur der Druck veränderlich ist. Man interpoliert den Punkt H_a, der dem gegebenen p_a entspricht. **Die Verbindungsgerade $B_a H_a$ ist dann die gesuchte Linie** p_a, $\omega_a =$ konst. Man kann übrigens auch den Weg über π_a einschlagen, indem man auf $D_1 D_2$ den zu p_a gehörenden Punkt D_a, ebenso auf ω_2, ω_3, E_a und F_a einschätzt, durch deren Verbindung $\pi_a =$ konst. entsteht. Auf dieser Linie liefert die Interpolation (in der Abbildung zwischen ω_2 und ω_3) des zu ω_a gehörenden Punktes wieder H_a. Der Abschnitt zwischen B_a und der zu ω_a durch Interpolation aufzusuchenden Linie $y = 0{,}1$ liefert dann

[1]) Die in Abb. 990 eingezeichnete Hilfslinie $K_2 L_2 M_2$, die für eine Kurveninterpolation bestimmt war, wird überflüssig.

10fach vergrößert die Größe der unbekannten Strecke $\overline{B_a A_{a fl}}$; somit wird der Zustandspunkt C_a sich im Abstand

$$\overline{B_a C_a} = y_a \overline{B_a A_{a fl}} \quad (8)$$

von B_a befinden. Zur vollständigen Kenntnis des Zustandes kann man noch nach Gl. (4)

$$\sigma_a = 11{,}62 \cdot 10^{-3} - 1{,}45 \cdot 10^{-5} T_a \quad (8a)$$

die Oberflächenspannung, aus der Dampfdruckformel den Tropfenhalbmesser

$$r_a = \frac{2\sigma_a}{\gamma_0 R T_a \lg n\, \omega_a} \quad (8b)$$

und aus der Dampfnässe die auf 1 kg entfallende Tropfenzahl

$$z_0 = \frac{3 y_a}{4\pi \gamma_0 r_a^3} \quad (8c)$$

ermitteln.

a) Der Umwandlungsverlust bei einstufiger Ausdehnung.

Wir wollen in erster Linie den Verlust feststellen, der durch die Überführung des vollständig unterkühlten Dampfes in das stabile gesättigte Gleichgewicht entsteht. Es möge eine adiabatische Ausdehnung von Punkt G im T-S-Schaubild, Abb. 985, der gewöhnlichen Grenzkurve auf den Unterkühlungspunkt D beim Drucke p stattgefunden haben. Wird nun der unterkühlte Dampf bei stets gleichem Druck in gesättigten verwandelt (Punkt D_x) von solcher Tropfengröße, daß man die Kapillarwirkung = Null setzen darf, so muß, wie wir bewiesen haben, der Wärmeinhalt ungeändert bleiben. Daraus folgt, daß die wagerecht und senkrecht schraffierten Flächen DHE und $HD_x D_{x0} D_0$ einander gleich sind. Der unmittelbare Verlust der Umwandlung ist das Produkt aus der Entropievermehrung in die absolute Temperatur der „Umgebung". Als solche müssen wir, in der Annahme, daß der Dampf mit dem Zustande D nach vollbrachter Arbeit entweicht, die zugehörige Sättigungstemperatur ansehen. Demnach ist der unmittelbare Verlust gleich der Fläche $HD_x D_{x0} D_0$, also auch gleich der „Dreieck"-Fläche DHE.

Übereinstimmung mit der Darstellung im p-v-Schaubild.

In Abb. 990a stelle $G'H'$ die gewöhnliche und $G'D'$ die Adiabate mit vollständiger Unterkühlung

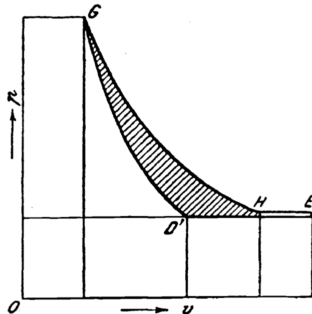


Abb. 990a. Verlust durch Umwandlung in gesättigten Dampf.

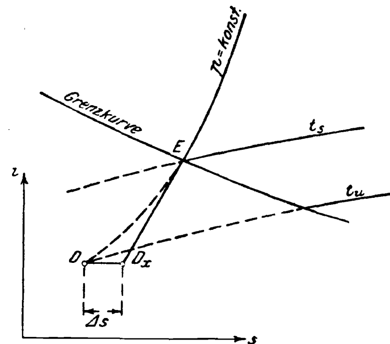


Abb. 990b. Umwandlung im I-S-Schaubild.

dar. Die bis an die Ordinatenachse reichenden Flächen sind als $-\int v\,dp$ den erzeugten kinetischen Energien gleich, und so ist der Verlust = Fläche $G'D'H'$. Da aber vorhin bewiesen worden ist, daß der Verlust im Entropieschaubild = Fläche HDE ist, so müssen auch die beiden Flächen $G'D'H'$ und HDE (in kcal ausgedrückt) einander gleich sein.

Dies kann leicht eingesehen werden, indem man folgenden umkehrbaren Prozeß durchführt und sowohl im Entropie- wie im p-v-Schaubild, Abb. 990a, verfolgt: adiabatische Ausdehnung mit Unterkühlung von G bis D (bzw. G' bis D'), Erwärmung des unterkühlten Dampfes bei konstantem Druck von D (bzw. D') aus bis zur normalen Sättigung in E (bzw. E'), Wärmeentzug bei gleichem Druck, aber normaler Kondensation von E bis H (bzw. E'-H'), adiabatische Kompression auf den Anfangszustand H-G (bzw. H'-G'). Im Entropieschaubild wird hierbei Linie GH, im p-v-Schaubild Linie $E'H'$ hin und zurück beschrieben, und die eingeschlossenen Flächen sind in der Tat inhaltsgleich.

Darstellung im J-S-Schaubild. In Abb. 990b bedeutet ED die ins Naßgebiet verlängerte Isobare vollständiger Unterkühlung. ED_x ist die Isobare der normalen Kondensation. Die Umwandlung

in gesättigten Zustand bedeutet ein Fortschreiten auf der Linie $i = $ konst. von D nach D_x. Mithin ist, im Sinne obiger Darlegungen der Arbeitsverlust $= T_s \Delta s$.

Geht die Ausdehnung auf den tieferen Kondensatordruck p_k hinab, so ist als Verlust nur noch das Produkt der Entropiezunahme mit der Kondensatortemperatur T_k zu rechnen, d. h. $H_z = T_k \Delta s$ und der verhältnismäßige Verlust ζ ist

$$\zeta = \frac{H_z}{H_0}, \qquad (9)$$

wo H_0 das gesamte adiabatische Gefälle bei normaler Kondensation bedeutet.

Gemäß dem Vorangehenden ist es wahrscheinlich, daß die Unterkühlung in der Düse im wesentlichen nur etwas unter den kritischen Druck, etwa zur Hälfte des Anfangsdruckes hinabreicht. Es ist dann beispielsweise bei 10 at Anfangsdruck der Inhalt der Deieckfläche bei Ausdehnung auf 5 at $= 1{,}05$ kcal, das adiabatische Gefälle (bei normaler Ausdehnung) $= 30{,}9$ kcal, daher der unmittelbare Verlust 3,2 vH. Die Rechnung mit Fläche $G'D'H'$ im p-v-Schaubild liefert 3,7 vH. Geht die Ausdehnung auf $p_k = 0{,}04$ at hinab, so ist $H_0 = 185$ kcal und der wahre Verlust

$$H_z = 1{,}05 \cdot \frac{301{,}8}{424} = 0{,}747 \text{ kcal}$$

oder

$$\zeta = 0{,}00403 \text{ des adiabatischen Gefälles.}$$

Hiernach darf man feststellen, daß in einer Hochdruckdüse für die praktisch in Betracht kommenden Gefälle der Verlust durch Unterkühlung selten 1 vH. des gesamten adiabatischen Gefälles erreichen wird.

In einer Niederdruckdüse müßte man, wenn die Schallgeschwindigkeit nur unwesentlich überschritten wird, mit 3—4 vH. Verlust, bezogen auf das verarbeitete Gefälle, rechnen.

b) Die umkehrbare oder Kapillardruckadiabate.

Die Adiabate bleibt umkehrbar, d. h. sie ist eine Isontrope, wenn die Zahl z der Tropfen sich nicht ändert, so daß mit stufenweise unendlich kleiner Zu- oder Abnahme des Halbmessers r und der Temperatur jeweil ein Gleichgewicht mit der sich ausdehnenden unterkühlten Dampfumgebung hergestellt werden kann.

Zu jeder Ebene $p = $ konst. gehört eine Linie, auf der z den vorgeschriebenen Wert $z = $ konst. einhält, und deren Gesamtheit bildet eine Fläche $z = $ konst. im Koordinatensystem i, s, p. Alle Zustände einer umkehrbaren Änderung bei der Tropfenzahl z müssen auf dieser Fläche enthalten sein; die Adiabate wird durch eine (zur Achse s) lotrechte Ebene herausgeschnitten.

Bei verhältnismäßig kleinen Tropfenzahlen (mit anfänglich sehr kleiner Dampfnässe) sind die $z = $ konst.-Linien in den $p = $ konst.-Ebenen hakenförmig gekrümmt, Abb. 991, daher biegt sich die $z = $ konst.-Fläche zu einer Falte, die der Adiabate zwei Wege darbietet: einen, der mit Wiederverdampfung der Tropfen und zunehmender Unterkühlung verbunden ist, und einen mit Zunahme der Tropfengröße und Abnahme der Unterkühlung. Bei der wirklichen Ausdehnung in einer Düse findet das letztere statt, und der erste der beiden Wege dürfte keine physikalische Bedeutung haben. Der Übergang vom Grenzzustand zu Tropfen von sehr kleiner Größe findet, wie schon erwähnt, im Gebiet der molekularen Wechselwirkung statt und kann derzeit rechnerisch nicht verfolgt werden. Würde man annehmen, daß sich der Dampf zunächst vollkommen unterkühlt ausdehnt, und daß plötzlich an den vorhandenen z-Kernen ein Niederschlag stattfindet, so müßte ein Entropiesprung eintreten, wie in Abb. 991 durch die Wagerechte AB ($i = $ konst.) für die Fläche $z_a = $ konst. angedeutet wurde. Der eine Weg der Adiabate würde über den Scheitel C zu Punkt D des punktiert dargestellten unteren Flächenblattes, der andere unmittelbar abwärts zu Punkt E des oberen Blattes führen, von dem aus Linie $E E_u$ (d. h. $p_e = $ konst.

Abb. 991. Die $z = $ konst.-Flächen.

$\omega_e =$ konst) im Schnitt mit der Unterkühlungslinie p_e, die erreichte Übersättigung ω_e ergibt. Der Entropiesprung AB könnte eine Erklärung für die beobachtete plötzliche Kondensation bilden, die eintritt, wenn die Unterkühlung $\omega_\alpha =$ rd. 3,3 erreicht wurde. Dabei könnte man annehmen, daß die Adiabate in Punkt B die zugehörige Linie $z_\alpha =$ konst. berührt, so daß einerseits die Ausdehnung auf dem durch Versuch als „real" erwiesenen Blatt sich nach E fortsetzen kann, anderseits die größte mit den Umständen vereinbare Entropievermehrung eintritt. Wie der Übergang bei Bildung von Doppel-, Tripel- und mehrfachen Molekülen sich vollzieht, ob etwa die Nebel nur wegen der Kleinheit dieser Molekülgruppe unsichtbar bleiben, läßt sich heute nicht entscheiden.

Ist die Unterkühlung beträchtlich, so können, wie im Versuch von Wilson, auch bei Abwesenheit von Kernen neue Tropfen entstehen, oder es können sich vorhandene Tropfen zusammenballen und so auf eine Umwandlung des unterkühlten Zustandes in weniger unterkühlten oder gesättigten hinwirken. Wir nennen eine derartige Zustandsänderung, wenn sie ohne Reibung und Wärmezufuhr vor sich geht:

c) Die Umwandlungsadiabate.

Nach welchen Gesetzen die Zunahme der Tropfenzahl erfolgt, ist unbekannt, und so wird man an Hand der Abb. 981 und der angeführten Versuchsergebnisse die jeweil vorhandene Unterkühlung in Abhängigkeit des Druckes vorderhand schätzungsweise annehmen müssen.

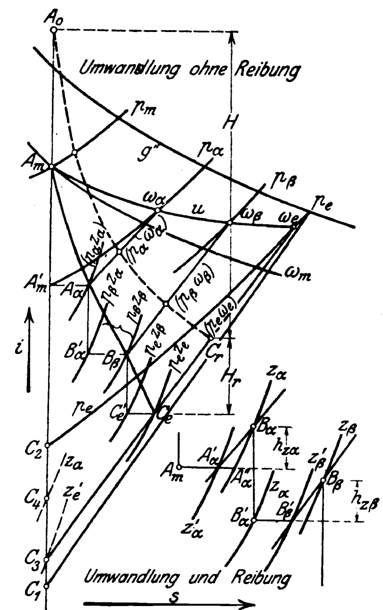


Abb. 991a. Die Umwandlungsadiabate.

Es sei in Abb. 991a A_0 der Ausgangspunkt (mit $\omega_0 = 1$); die Adiabate wird bis auf die Linie $\omega_m = 3{,}3$, die man im Punkte A_m erreicht, mit vollkommener Unterkühlung fortgeführt. Da die anfängliche Zahl der Kerne nicht bekannt ist, bleibt nichts übrig als sie $=$ Null vorauszusetzen. Von A_m an nimmt die Übersättigung infolge von Tropfenbildung ab, so daß sie bei den Drücken p_α, $p_\beta, \ldots$ die Beträge ω_α, $\omega_\beta, \ldots$ und beim Enddruck p_e den Betrag ω_e erreicht. Die Aufeinanderfolge dieser Punkte im Grenzgebiet bildet die Linie u. Wir teilen die Ausdehnung in kleine endliche Abschnitte und nehmen an, daß von p_m bis auf p_α die Ausdehnung zunächst nach der echten Adiabate vor sich geht, so daß wir zu A_m' auf der Linie p_α gelangen; dort möge die Umwandlung bei unveränderlichem Druck einsetzen, bis die Übersättigung ω_α erreicht ist. Der geometrische Ort für die Zustandspunkte mit $p_\alpha =$ konst.; $\omega_\alpha =$ konst. ist die mit $p_\alpha\,\omega_\alpha$ überschriebene Gerade; daher ist die Umwandlungslinie $i =$ konst. der wagerechte Abschnitt $A_m' A_\alpha$. Man liest an der durch A_α hindurchgehenden Linie $z_\alpha =$ konst. $\omega_\alpha =$ konst. ab, wie groß die entstandene Tropfenzahl ist, und läßt eine zweite echt adiabatische Ausdehnung auf den Teildruck p_β vor sich gehen, indem man die Linie $z_\alpha =$ konst., $p_\beta =$ konst. aufzeichnet und mit der Lotrechten durch A_α zum Schnitt in B_α' bringt. Die Wagerechte $B_\alpha' B_\beta$ stellt die Umwandlung bis zur vorgeschriebenen Übersättigung ω_β dar. Man liest die neue Zahl der Tropfen z_β ab und verfährt mit dem nächsten Absatz ebenso, bis man bei C_e den Enddruck p_e erreicht. Die stetige Verbindungslinie $A_m A_\alpha A_\beta \ldots C_e$ stellt die gesuchte Adiabate dar. Die Abweichung von der normalen Isentrope ist nicht groß; sie könnte negativ (also unmöglich) werden, wenn man über die ω ungeeignete Annahmen macht. Die Linie u muß daher je nach Umständen während des Entwurfes abgeändert werden.

Die Umwandlungsadiabate würde das bei der Ausdehnung tatsächlich zur Verfügung stehende Wärmegefälle und die theoretische Strömungsgeschwindigkeit ergeben, mit der man diejenige zu vergleichen hätte, die bei mit Reibung verbundener Strömung erzeugt wird. Infolge der vorläufig herrschenden Ungewißheit über die Unterkühlung und die Tropfenzahl kommen für den Vergleich mit der Reibungsströmung noch folgende Adiabaten in Betracht:

1. Die Ausdehnung mit normaler Kondensation, d. h. das Gefälle $A_0 C_1$;
2. die Ausdehnung mit vollkommener Unterkühlung, d. h. das Gefälle $A_0 C_2$, wo C_2 auf der Unterkühlungslinie p_e gelegen ist;

3. die isentropische Ausdehnung auf gleichen Druck und gleiche Temperatur, wie in der Wirklichkeit, d. h. Gefälle $A_0 C_3$, wo C_3 durch die zu ω_e gehörende $p_e =$ konst. Linie ausgeschnitten wird. An der durch C_3 gehenden Linie $z_e' =$ konst $p_e =$ konst. kann die Tropfenzahl z_e' abgegeben werden, die von Anfang an (als Kernzahl) hätte vorhanden sein müssen;
4. die Ausdehnung mit der tatsächlich am Anfang vorhandenen Kernzahl z_a, die in der Ebene $p_e =$ konst. den Punkt C_4 herausschneidet. Sobald man z_a praktisch wird bestimmen können, erhält diese Adiabate besondere Bedeutung.

d) Entwurf einer Düse mit Rücksicht auf die Reibung.

Die Reibungsarbeit kann dadurch berücksichtigt werden, daß man für jeden Abschnitt der Ausdehnung längs der Umwandlungsadiabate so viel an Reibungswärme zusetzt, wie bei einer Düse ohne Umwandlungsverlust unter sonst gleichen Umständen zuzufügen wäre. Dabei könnte man, wie im Nebenbilde der Abb. 991a angedeutet ist, annehmen, daß zuerst die Umwandlung von A_m bis A_a'' erfolgt, und daß dann umkehrbar, d. h. längs der Linie $p_a =$ konst. $z_a =$ konst. die Reibungswärme (genauer der Wärmewert des kinetischen Energieverlustes) zugefügt wird, wodurch man zu B_a auf der vorgeschriebenen Linie $p_a =$ konst.; $\omega_a =$ konst. gelangt. Oder man könnte einfacher als erste Umwandlung $A_m A_a'$, und als Wärmezufuhrlinie $A_a' B_a$ voraussetzen, so daß während der letzteren eine weitere Umwandlung mit Tropfenzunahme vom z_a' auf z_a erfolgen würde. Die Unterschiede sind praktisch belanglos, um so mehr als die Zunahme h_{za} des Wärmeinhalts erfahrungsgemäß zu schätzen ist, es sei denn, daß man ihn mit umständlicher Rechnung nach der Reibungsformel ermitteln will. Ähnlich würde man mit den folgenden Ausdehnungsabschnitten $B_a B_a'$ usw. verfahren.

Für eine praktisch wohl genügende Schätzung darf man den Energieverlust H_r, der unter sonst gleichen Umständen in einer Düse ohne Umwandlungsverlust auftreten würde und der als ein Bruchteil des normalen adiabatischen Gefälles ζH_{norm} mit $\zeta = 0{,}05-0{,}10$ berechnet wird, von C_e ab auftragen, wodurch sich C_r als schließlicher Endpunkt auf Linie $p_e =$ konst. $\omega_e =$ konst. das Gesamtgefälle H, die Endgeschwindigkeit w_e und der Rauminhalt v_e ergeben. Die nach Schätzung ergänzte Zustandslinie ist in Abb. 991a gestrichelt angedeutet.

e) Übergang zum p-v-Schaubild.

Drückt man in der Wärmegleichung alle Größen durch p und v aus, so kann die Zustandslinie auf graphischem Wege ermittelt werden. Voraussetzung ist, wie oben, Kenntnis der Unterkühlung $\tau = T_s - T$ in Abhängigkeit von p und Kenntnis des Energieverlustes **in Teilen der Ausdehnungsarbeit.**

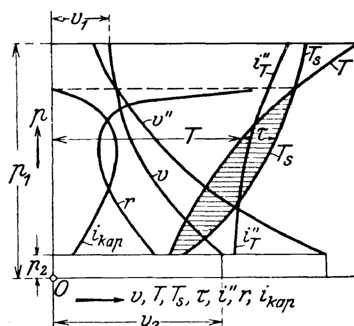


Abb. 991 b. Düse mit Unterkühlung im p-v-Schaubild.

Demgemäß wird im p-v-Schaubild, Abb. 991b, τ nach Schätzung eingetragen. Da T_s zu jedem p bekannt ist, ergibt sich daraus die Dampftemperatur

$$T = T_s - \tau \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

und damit i', i'', v'', r, i_{kap}, die man alle in das Schaubild einträgt. Der Energieverlust eines Elementarvorganges sei $-\zeta v\, dp$ (positiv, wenn p abnimmt); dann lautet die Wärmegleichung

$$dq = di - A v\, dp = -A \zeta v\, dp \quad . \; . \; . \quad (11)$$

oder mit

$$1 - \zeta = \eta; \quad di - A \eta v\, dp = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

Hierin bedeutet $i = i'' - y\,(i'' - i' - i_{\text{kap}})$ und es ist angenähert $v = (1 - y)\, v''$, mithin $y = 1 - v/v''$, welchen Wert man in i einsetzt. Dann sind in (12) alle Größen bis auf v graphisch darstellbare Funktionen von p. Die Gleichung kann auf die Form

$$\frac{dv}{dp} + v f(p) + \varphi(p) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

gebracht werden, die man in bekannter Weise mittels der Einschiebung $v = X\,Y$ integrieren

kann [1]). Mit Rücksicht auf die graphische Behandlung ist es angemessen, bestimmte Integrale einzuführen, und man erhält, da für $p=p_1$; $v=v_1$ sein muß, mit der Bezeichnung

$$X=e^{-\int_{p_1}^{p} f(p)\,dp}\;; \qquad v=X\left[-\int_{p_1}^{p}\frac{\varphi(p)}{X}\,dp+v_1\right]=\Phi(p) \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

Es liegt auf der Hand, daß hierbei auch ζ von p abhängig gemacht werden kann. Mit v bestimmt sich der Wärmeinhalt und die kinetische Energie aus der Wärmegleichung

$$di=A\,\eta\,v\,dp \quad \text{oder} \quad i_1-i=-\int_{p_1}^{p} A\,\eta\,\Phi(p)\,dp=A\,\frac{c_x^{\,2}-c_0^{\,2}}{2\,g} \quad \ldots \quad (14\text{a})$$

also schließlich die Düsenquerschnitte aus der Durchflußgleichung

$$f_x=\frac{G\,v_x}{c_x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14\text{b})$$

180. Unterkühlung bei mehrstufigen Turbinen.

In neuerer Zeit werden Versuchsergebnisse bekannt, die auf eine merkliche Unterkühlung des Abdampfes bei mehrstufigen Turbinen hinweisen. So teilt Martin [2]) mit, daß Ingenieur Chilton der Brush Electr. Eng. Co. folgende, mit größter Sorgfalt gemessene Werte festgestellt habe:

Abdampfdruck	0,0231 at abs.
Entsprechende Sättigungstemperatur .	19,50° C
Beobachtete Temperatur	16,10° C
Unterkühlung	3,40° C

Martin betont mit Recht, daß ein in unterkühlten Dampfstrom tauchendes Thermometer nie die wahre Temperatur angeben kann. Einerseits schlägt sich Dampf nieder oder die vorhandenen Tröpfchen bleiben haften, wodurch ein Spiegel mit geringer Krümmung entsteht, so daß, wie früher beschrieben, das labile Gleichgewicht des Dampfes örtlich gestört und eine Umwandlung bis zur normalen Sättigung veranlaßt wird. Da jedoch der Dampf mit 100—200 m/sek und mehr Geschwindigkeit ankommt, kann immerhin die sich bildende Flüssigkeitsschicht weggefegt und durch immer neue Teilchen ersetzt werden, so daß ein eigentliches Gleichgewicht nicht besteht. Anderseits wird nach den Beobachtungen von Lord Kelvin ein Körper in starker Gasströmung erwärmt, so daß die Thermometeranzeige aus zwei Gründen zu hoch ist. Leider kann auch nicht vermutungsweise angegeben werden, wie groß nun die Unterkühlung im angeführten Fall tatsächlich gewesen sein mag.

Diese Beobachtungen von Chilton werden teilweise bestätigt durch Messungen vom Oberingenieur Dresden in der Maschinenfabrik von Gebr. Stork (Hengelo, Holland), der nach freundlicher Mitteilung ein Eisen-Nickelin-Thermoelement mit 0,2 mm dicken Drähten etwa 100 mm hinter dem letzten Rade einer Turbine von 1700 kW mit 3000 Umdr./min in den Dampfstrom so stellte, daß der Draht einmal parallel, das andere Mal senkrecht zur Schaufelebene stand. In der einen Stellung ergab sich bei rd. 0,085 at abs. Luftleere eine höchste Unterkühlung von 3,6° C, im Mittel 1,9° C; in der anderen Lage eine starke Mehranzeige, bis zu 6,8° C über die Sättigungstemperatur.

Andere namhafte Firmen, die auf mein Ansuchen Messungen veranstaltet haben, teilen mir mit, daß im allgemeinen die Temperatur mit dem Vakuum genau übereinstimme, und daß, wenn Unterkühlungen beobachtet wurden, dies an der Undichtheit des Anschlusses zum Quecksilbermanometer lag, mit deren Beseitigung auch die Unterkühlung verschwand.

Baumann (Manchester) nimmt [3]) zur Unterkühlung mittelbar insofern Stellung, als er auf Grund von Versuchen den inneren Schaufelwirkungsgrad einer Stufe im Überhitzungsgebiet unter sonst gleichen Umständen unveränderlich, im Naßdampfgebiet hingegen im gleichen Verhältnis mit der Dampfnässe y kleiner, d. h. $\eta_{\text{naß}}=(1-y)\,\eta_{\text{überh.}}$ setzt. Diese Feststellung könnte zwar z. B. durch vermehrte Reibung der aus dem Strom herausgeschleuderten Tröpfchen erklärt werden. Allein auch von tatsächlicher, wenn schon kleiner Unterkühlung wird berichtet. So wurde an drei Turbinen von je 3000 kW Leistung von Brown, Boveri & Cie. bei 12 at abs. Aufdruck 320° C Temperatur folgendes beobachtet:

---

[1]) S. Hütte, 22. Aufl., S. 81.

[2]) A new theory of the steam Turbine, London 1918, und Engineering, Bd. CVI.

[3]) Engineering, April 1921.

Luftleere at abs.		0,04	0,06	0,08
Unterschied zwischen der wirklichen	3000 kW; $t - t_s$	+ 2,9	+ 1,4	+ 0,8
Dampftemperatur und der Sättigungs-	1700 „ „	+ 0,6	+ 0,2	0
temperatur, bei einer Leistung von	900 „ „	+ 0,3	0	— 0,2

Warum nun gerade bei kleiner Leistung und schlechter Luftleere Unterkühlung auftreten soll, ist nicht einleuchtend. Trotzdem neigen wir zur Auffassung, daß es angesichts der Beobachtungen von Chilton und Dresden angemessen ist, dem Gegenstande Aufmerksamkeit zuzuwenden, also auch die Theorie der mehrstufigen Turbine der Unterkühlung anzupassen.

Unterlagen der Theorie.

Nach dem Vorausgegangenen wird man annehmen dürfen, daß die Zustandsänderung zunächst **unabhängig von der Stufeneinteilung im Gebiete vollständiger Unterkühlung, d. h. ohne Niederschlag erfolgt, so lange man sich über der Kondensierungsgrenze, d. h. der Übersättigung $\omega = 3$ bis 3,3 befindet.** Von da ab nimmt der Unterschied zwischen der Sättigungs- und der wahren Dampftemperatur ab. Da keine bindenden Zahlen vorhanden sind, werden wir die Unterkühlung nach Schätzung bis auf einen Betrag von vielleicht 5° C am Ende der Turbine abnehmen lassen. Wir können so zu jedem Druck die Dampftemperatur graphisch als empirische Kurven festlegen. Die Stufeneinteilung erfolgt wie beim normalen Entwurf.

Darstellung in den *J*-*S*-Tafeln.

Die *J*-*S*-Tafel I wird bis zur Kondensierungsgrenze wie üblich benutzt. Den letzten außerhalb davor gelegenen Anfangszustand einer Stufe übertragen wir hierauf in die *J*-*S*-Tafel II und verfahren ähnlich wie in Abschn. 179a.

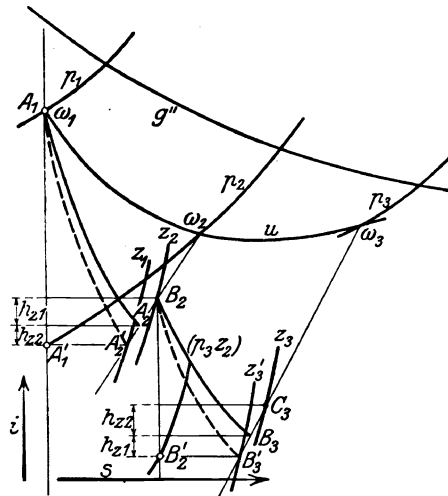


Abb. 992. Mehrstufige Turbine mit Unterkühlung.

Es sei in Abb. 992 A_1 jener Zustandspunkt auf der Linie $p_1 =$ konst. mit der Übersättigung ω_1. Es werde angenommen, daß ω gemäß Linie u anfangs zu-, später abnimmt. Ist der Ausdehnungssprung zum Drucke p_2 der nächsten Stufe groß, so müßte die Umwandlungsadiabate $A_1 A_2$ gemäß Abschn. 179a bis zur Übersättigung ω_2 konstruiert werden. Ist der Sprung klein, so genügt es anzunehmen, daß die Adiabate mit vollständiger Unterkühlung auf die Verlängerung der Linie $p_2 =$ konst. im Punkte A_1' trifft, und daß dort die Umwandlung gemäß $A_1' A_2'$ vor sich geht. Der kinetische Verlust h_{z1} im Leitrad nach oben abgetragen[1]), ergibt den geometrischen Ort für den Endzustand A_2. Dieser wird der Einfachheit halber nicht auf die Linie $z_2 =$ konst. $p_2 =$ konst., die durch A_2' hindurchgeht, sondern auf die Linie $(p_2, \omega_2) =$ konst. verlegt, so daß ein weiterer Umwandlungsverlust in h_{z1} eingeschlossen ist. Handelt es sich um eine Gleichdruckturbine, so wird der kinetische Verlust $A(w_1^2 - w_2^2)/2g = h_{z2}$ im Laufrad wieder am einfachsten auf der Linie $(p_2, \omega_2) =$ konst. eingeschnitten, denn bei der willkürlichen Annahme von ω_2 ist das an Hand der Nebenfigur in Abb. 991a geschilderte Verfahren doch übergenau und sehr zeitraubend. So ergibt sich der Endpunkt B_2, von dem aus man die adiabatische Ausdehnung auf den folgenden Stufendruck p_3 mit der Tropfenzahl z_2 die sich in B_2 ergeben hat, der Abkürzung halber ohne Zwischenumwandlung vor sich gehen läßt. Man sucht die Linie $(z_2, p_3) =$ konst. auf, erhält in B_2' den Endpunkt und in $B_2' B_3'$ die Umwandlung, woraus B_3 als Zustand am Ende der Leitschaufel und C_3 als Zustand am Ende der Laufschaufel wie vorhin erhalten werden. Die Gefälle können unmittelbar abgelesen werden; die Rauminhalte müssen jeweils nach Formel $v = (1 - y)\, v''_{p,\,T}$ berechnet werden.

---

[1]) In der Abbildung sind die Bezeichnungen h_{1z} und h_{2z} miteinander zu vertauschen.

Übergang zum p-v-Schaubild.

Es sei in Abb. 993 A_1 der Zustand am Ende derjenigen Stufe, von der aus die Ausdehnung die Kondensierungsgrenze erreichen wird. Wir tragen wieder in Abhängigkeit von p die nach Schätzung festgesetzte Unterkühlung, d. h. die Sättigungs- und die Unterkühlungstemperaturen $T_s T$ auf. Aus der letzteren berechnen sich i' i'' v''; aus T und ihrem Sättigungsdruck p_s der Tropfenhalbmesser r und i_{kap}, die man alle graphisch darstellen wird.

Die Stufeneinteilung setzt die aufeinanderfolgenden Drücke p_2 p_3 ... fest. Bedeutet $A_1 A_{2u}$ die Adiabate, die der Ausdehnung von p_1 auf p_2 und der vorgeschriebenen Unterkühlung entspricht, so wird die wirkliche Ausdehnungslinie $A_1 A_{2e}$ wegen der Reibung nach rechts abweichen. Wir beziehen die Reibungsarbeit statt auf die adiabatische **auf die wirkliche Ausdehnungsarbeit** L_{1e} und schreiben in Wärmemaß

$$q_r = A \zeta L_{1e} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (15)$$

L_{1e} wird durch die schräg schraffierte Fläche dargestellt. Bedeuten $i_1 i_{2e}$ die Wärmeinhalte in den Zuständen $A_1 A_{2e}$, so schreibt sich alsdann die Wärmegleichung

$$q_r = i_{2e} - i_1 + A L_{1e} = A \zeta L_{1e} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (16)$$

oder wenn $\eta = 1 - \zeta$ den „Wirkungsgrad" der Leitvorrichtung bezeichnet, so ist

$$i_{2e} - i_1 + A \eta L_{1e} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (17)$$

Hierin ist $i_{2e} = i_2'' - y_{2e}(i_2'' - i_2' - i_{2\,kap})$ bis auf y_{2e} bekannt. Aus dem Rauminhalt $v_{2e} \cong (1 - y_{2e}) v_2''$ bestimmt sich

$$y_{2e} = 1 - \frac{v_{2e}}{v_2''} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (18)$$

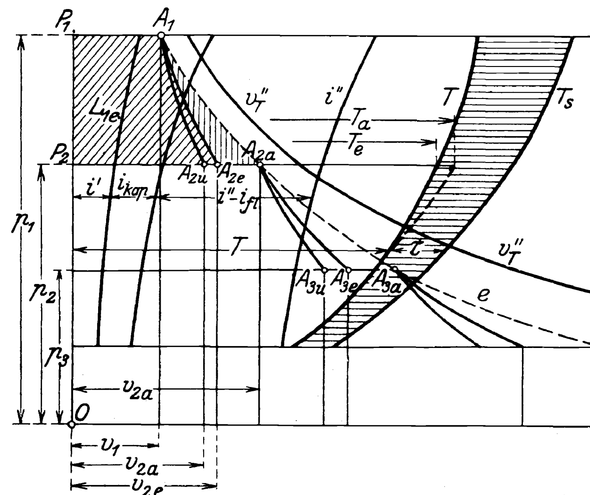


Abb. 993. Mehrstufige Turbine mit Unterkühlung im p-v-Schaubild.

Wir ersetzen nun die Ausdehnungslinie $A_1 A_{2e}$ durch eine Polytrope

$$p v^n = p_1 v_1^n \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (19)$$

so daß die Ausdehnungsarbeit

$$L_{1e} = -\int_{p_1}^{p_2} v\,dp = p_1 v_1 \frac{n}{n-1}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right] \quad \ldots \ldots \ldots (19a)$$

wird. Da jedoch n vorläufig unbekannt ist, ersetzen wir den genauen Wert (19a) durch die Annäherung

$$L_{1e} = \frac{(v_1 + v_{2e})}{\varepsilon}(p_1 - p_2) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (19b)$$

wobei in erster Annäherung $\varepsilon = 2$ bis 2,1 gewählt werden darf. Der richtige Wert folgt aus Gl. (19a)

$$\varepsilon = \frac{(v_1 + v_{2e})(p_1 - p_2)}{p_1 v_1 \frac{n}{n-1}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (19c)$$

und wird zum Schluß auf seine Übereinstimmung hin geprüft.

Mit der Bezeichnung

$$i_{2fl} = i_2' + i_{2\,\mathrm{kap}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

kann nach dem Einsetzen in (17) v_{2e} als einzige Unbekannte berechnet werden:

$$v_{2e} = \frac{i_1 - i_{fl2} - A\eta\,(p_1 - p_2)\,v_1/\varepsilon}{i_2'' - i_{fl2} + A\eta\,(p_1 - p_2)\,v_2''/\varepsilon}\,v_2'' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

Nun ergibt Gl. (19) L_{1e} und Gl. (17) das Wärmegefälle. Ist c_0 der Zufluß, c_1 die Austrittsgeschwindigkeit der Leitschaufel, so folgt

$$A\,\frac{c_{1e}^2 - c_0^2}{2g} = i_1 - i_{2e} = A\,L_{1e} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

Das Geschwindigkeitsdreieck liefert w_1, daraus folgt $w_2 = \psi w_1$. Wir nehmen an, daß die Zustandsänderung im Laufrad bei unveränderlichem p und T erfolgt, was eine Änderung der **Tropfenzahl** bedingt. Der Wärmeinhalt am Austritt ist unter allen Umständen

$$i_{2a} = i_{2e} + A\,\frac{w_1^2 - w_2^2}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (23)$$

Da anderseits $i_{2a} = i_2'' - y_{2a}\,(i_2'' - i_{2fl})$ sein muß, so ergibt ein Vergleich mit i_{2e}

$$i_{2a} - i_{2e} = (y_{2e} - y_{2a})\,(i_2'' - i_{2fl}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (24)$$

woraus die Abnahme der Dampfnässe bzw. y_{2a} berechnet wird. Nun ist

$$v_{2e} = (1 - y_{2e})\,v_{2a}''; \qquad v_{2a} = (1 - y_{2a})\,v_2'' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (25)$$

woraus sich

$$v_{2a} = \frac{1 - y_{2a}}{1 - y_{2e}}\,v_{2e} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (26)$$

ermittelt und den Endzustand A_2 der betrachteten Stufe ergibt. Es sind damit die Geschwindigkeiten und Rauminhalte an den Hauptpunkten bekannt, man kann die erhaltene Arbeit und die erforderlichen Querschnitte berechnen. Mit den folgenden Stufen wird ähnlich verfahren.

Wollte man auch im Rade eine Fortsetzung der Umwandlung annehmen, so würde die Dampftemperatur von T_e auf die geschätzte Temperatur T_a steigen. Hierdurch änderten sich für den Austritt die Zustandsgrößen in i_{2a}'' i_{2a}' i_{2ka} i_{2fla}. Nach Gl. (23) ist immer noch

$$i_{2a} = i_{2e} + A\,\frac{w_1^2 - w_2^2}{2g}, \qquad \text{anderseits ist auch:} \qquad i_{2a} = i_{2a}'' - y_{2a}\,(i_{2a}'' - i_{2fla}),$$

so daß man hieraus y_{2a} berechnen und in

$$v_{2a} = (1 - y_{2a})\,v_{2a}'' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

einsetzen kann.

Stetige Zustandslinie. Man kann den Verlust in der Leit- und Laufschaufel in einem Gesamtstufenwirkungsgrad zusammenfassen und eine stetige Zustandslinie e entwerfen, die durch die Ecken A_1 A_{2a} A_{3a} ... Abb. 993 hindurchgeht. Maßgebend sind die Temperaturen T_a. Die Linie wird wie die einzelne Ausdehnungslinie $A_1 A_{2e}$ entworfen. Man kann indes auch die graphische Integration wie in Abschn. 179a unter c zu Hilfe nehmen; oder umgekehrt jenes Verfahren durch die hier angewendete Annäherung ersetzen.

Zusammenhang zwischen φ und η. Bedeutet c_{1th} die „theoretische" Geschwindigkeit, die der **adiabatischen, indes hier mit Umwandlung** vor sich gehenden Ausdehnung entspricht, und c_{1e} die wirkliche, so ist

$$\varphi = \frac{c_{1e}}{c_{th}}$$

und der Energieverlust

$$\frac{c_{1th}^2 - c_{1e}^2}{2g} = \left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right)\frac{c_{1e}^2}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (28)$$

Nach den entwickelten Formeln kann **mit $\eta = 1$ die Umwandlungsadiabate** $A_1 A_{2u}$ entworfen werden. Bezeichnet man die adiabatische Arbeitsfläche $P_1 A_1 A_{2u} P_2$ mit L_0, so gilt, wenn c_0 die Zuflußgeschwindigkeit in A_1 bedeutet,

$$\frac{c_{1th}^2 - c_0^2}{2g} = L_0; \qquad \frac{c_{1e}^2 - c_0^2}{2g} = \eta\,L_{1e},$$

woraus

$$\varphi^2 = \frac{c_{1e}^2}{c_{1th}^2} = \frac{2g\eta L_{1e} + c_0^2}{2g\,L_0 + c_0^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (29)$$

Diese Formel vereinfacht sich, wenn $c_0 = 0$ ist zu

$$\eta = \varphi^2 \frac{L_0}{L_{1c}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

Wählen wir die **Arbeitsfläche der umhüllenden Ausdehnungslinie als Vergleichsmaß**, so ist gemäß der Wärmegleichung $q = i_{2a} - i_1 + A L_{exp}$ wo L_{exp} die ganze links von $A_1 A_{2a}$ befindliche Fläche bedeutet. Anderseits ist $q = A \zeta_i L_{exp}$ (hier die Summe aus dem kinetischen Energieverlust und der Fläche $\Delta F = A_1 A_{2a} A_{2u}$ zwischen der Umwandlungsadiabate und der wirklichen Ausdehnungslinie $= AZ + A\Delta F$. Daraus folgt

$$A \eta_i L_{exp} = i_1 - i_{2a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

Nach früheren Festsetzungen ist der Schaufelwirkungsgrad η_s das Verhältnis $(i_1 - i_{2a})/(i_1 - i_{2u})$ und bei gleich großer Zu- und Abströmgeschwindigkeit $(c_0 = c_2)$ ist die innere Arbeit der Stufe

$$A L_i = \eta_s (i_1 - i_{2u}) = \eta_s A L_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

wenn wieder L_0 die adiabatische Fläche bedeutet. Da infolge (31) zugleich

$$A L_i = i_1 - i_{2a} = A \eta_i L_{exp} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

ist, so erhält man

$$\eta_i = \eta_s \frac{L_0}{L_{exp}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

Rechnerisches Verfahren von Martin[1]).

Martin hat die Veränderung des Dampfverbrauches beim Übergang von Überhitzung zu Sattdampf in sinnreicher Weise benutzt, um auf die wahrscheinliche Größe der Unterkühlung zu schließen. Die hierzu erforderlichen Rechnungen sind zu verwickelt, um hier wiedergegeben zu werden. Seine Grundannahmen sind:

1. Der Mehrverbrauch bei gesättigtem Dampf hat seinen Grund nicht in der vermehrten Reibung des mit Tropfen durchsetzten Naßdampfes, sondern bloß in der Unterkühlung.
2. Die Unterkühlung ist bis zur „Wilsongrenze", d. h. bis zur 8 fachen Übersättigung eine vollständige. Darüber hinaus findet eine unvollständige Kondensation statt, aus der Martin das Wärmegefälle berechnet.

Zu diesem Verfahren ist in kritischer Hinsicht die Bemerkung zu machen, daß gemäß meinen Versuchen mit Glasdüsen erwiesenermaßen sichtbare Kondensation nicht erst bei 8-, sondern schon bei rd. 3,3 facher Übersättigung beginnt. Der Grund ist, daß **technischer Dampf viele Kerne** enthält, während **Wilson mit staubfreiem Dampf arbeitete.** Es kann nicht angenommen werden, daß bei mehrstufiger Entspannung, wo weit mehr Zeit zur Verfügung steht, der Niederschlag später auftreten sollte.

Ebenso scheint es mir noch keine ausgemachte Tatsache zu sein, daß die **Reibung des Naßdampfes gleiche Größe haben solle wie die des Heißdampfes.** Die Tropfen werden bei den scharfen Richtungsänderungen des Stromes in den Schaufeln sicher teilweise **heraus„zentrifugiert"**, wie durch den Beschlag mit Schlamm am Beginn der Kondensierungszone bewiesen wird. Dieses Herausschleudern wirkt reibungsvermehrend. Außerdem sprechen dafür die Versuche von Lewicki über Radreibung, wo keine Unterkühlungswirkung in Betracht kam.

Aus diesen Gründen glauben wir, daß man den Betrag der Unterkühlung vorläufig nicht so hoch ansetzen sollte wie Martin. Doch kann erst auf Grund weiterer Versuche ein abschließendes Urteil gefällt werden.

180a. Bildung von Doppelmolekülen im Dampf nach Nernst[2]).

Bezeichnet abkürzend M ein Kilogramm/Molekül oder „Mol" Wasserdampf, so findet nach der Theorie von Nernst[2]), die im einzelnen von Levy[3]) ausgearbeitet wurde, im Dampf die Bildung von Doppelmolekülen nach Gleichung

$$M + M = M_2 + 2519 \text{ kcal} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

statt. Bedeutet C_1 die Konzentration d. h. die Zahl der Mole in der Raumeinheit von M und C_2 die von M_2, so lautet die Gleichung von van t'Hoff (Abschn. 210)

$$K_c = \frac{C_1^2}{C_2} \quad \text{und} \quad \frac{d \lg n K_c}{dt} = \frac{W_v}{A \mathfrak{R} T^2} \quad \text{oder integriert} \quad \lg n K_c = -\frac{W_v}{A \mathfrak{R} T} + C \quad . \ (2)$$

[1]) A new theory of the Steam Turbine, London 1918 (auch Engineering 1918, Vol. CVI).

[2]) Z. f. physik. Chemie, Bd. 12, S. 565, 1910.

[3]) Thermodyn. Behandlung des Wasserdampfes, Berlin 1910.

wo $W_v = 2519$ kcal die Wärmetönung der Assoziation nach Gl. (1) bedeutet, die auf ein Kilogramm Mol M_2 d. h. 36 kg entfällt. Es mögen in einem Raume V bei der Temperatur T ursprünglich n Doppelmoleküle enthalten sein. Davon werde der Anteil xn, wo

x der Dissoziations- oder Spaltungsgrad

heißt, in einfache Moleküle gespalten, dann ist die Zahl der Doppelmoleküle $(1-x)n$ die Zahl der einfachen $2xn$, die Gesamtzahl $n' = (1+x)n$. Die Konzentrationen sind

$$C_1 = \frac{2xn}{V}; \qquad C_2 = \frac{(1-x)n}{V} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

und die Gasgleichung

$$pV = (1+x)n\Re T \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

also ist nach Gl. (2)

$$K_c = \frac{4x^2 n}{V(1-x)} \quad \text{oder mit (4):} \quad K_c = \frac{4x^2 p}{(1-x^2)\Re T} \quad \ldots \ldots (5)$$

Die Gewichtsdichte vor der Spaltung beim Zustand $p_1 T_1$ ist $\gamma_2 = \frac{G}{V} = \frac{Gp}{n\Re T}$; diejenige nach der Spaltung $\gamma' = \frac{G}{V'} = \frac{Gp}{n'\Re T}$, mithin ist $\gamma_2/\gamma' = n'/n = 1 + x$. Nernst führt die Dichtezahlen, d. h. die Verhältnisse der $\gamma_2 \gamma'$ zur Gewichtsdichte der Luft γ_l bei gleichem Druck und gleicher Temperatur ein, mit der Bezeichnung

$$\delta = \frac{\gamma_2}{\gamma_{\text{luft}}}; \quad \Delta = \frac{\gamma'}{\gamma_{\text{luft}}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (6)$$

Man erhält mithin

$$\frac{\gamma_2/\gamma_l}{\gamma'/\gamma_l} = \frac{\delta}{\Delta} = 1 + x; \quad \text{daraus} \quad x = \frac{\delta - \Delta}{\Delta} \quad \ldots \ldots \ldots (7)$$

Dieser Wert in Gl. (2) eingeschoben liefert

$$\text{lgn}\, \frac{4(\delta - \Delta)^2 p}{\Re(2\Delta - \delta)\delta T} = -\frac{W_v}{A\Re T} + C \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (8)$$

Darin ist

$$\delta = \frac{R_{\text{luft}}}{R_{\text{doppel}}} = \frac{M_{\text{doppel}}}{M_{\text{luft}}} = \frac{36}{28{,}9} = 1{,}243\,.$$

Nimmt man $4/\Re\delta$ in den Festwert C hinüber und teilt man die Gleichung mit 2,303, um den gewöhnlichen Logarithmus zu erhalten, so entsteht die Levysche Gleichung

$$\log \frac{(\delta - \Delta)^2}{2\Delta - \delta} = \log\left(\frac{\delta x^2}{1 - x^2}\right) = -\frac{551{,}04}{T} + 0{,}1384 + \log \frac{T}{p} \quad \ldots \ldots (9)$$

Hierin ist p der Druck in alten Atmosphären (1,033 kg/cm²).

Zu einem beliebigen Zustand p, T kann aus (9) der Spaltungsgrad x berechnet und die spezifische Wärme bei unveränderlichem Druck wie folgt abgeleitet werden. Die für einen Elementarvorgang der betrachteten Menge zuzuführende Wärme ist

$$dQ = dU + A\,p\,dV \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (10)$$

Sind $\mathfrak{U}_2 = \mathfrak{C}_{v2} T + K_2$; $\mathfrak{U}_1 = \mathfrak{C}_{v1} T + K_1$ die inneren Energien für ein Doppel- und ein einfaches Mol, so ist $U = (1-x)n\mathfrak{U}_2 + 2xn\mathfrak{U}_1$. Nernst macht die an sich wahrscheinliche Annahme $\mathfrak{C}_{v2} = 2\mathfrak{C}_{v1}$; dann wird die bei unveränderlichem Rauminhalt durch die Verbindung $M + M = M_2$ freiwerdende Wärme $\mathfrak{W}_v = 2\mathfrak{U}_1 - \mathfrak{U}_2 = 2K_1 - K_2$ und $U = (\mathfrak{C}_{v2} T + K_2 + x\mathfrak{W}_v)n$. Schieben wir diesen Wert in (10) ein und betrachten wir p als unveränderlich, so erhalten wir nach Teilung mit $n\,dT$ die spezifische Wärme des dissoziierten Dampfes bezogen auf ein (ursprüngliches) Doppelmol

$$\mathfrak{C}_p = \mathfrak{C}_{v2} + \mathfrak{W}_v \left(\frac{\partial x}{\partial T}\right)_p + A\,p\left(\frac{\partial V}{n\,\partial T}\right)_p \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (11)$$

Man bildet $(\partial V/\partial T)_p$ aus Gl. (4); $(\partial x/\partial T)_p$ aus Gl. (8) mit (7) und erhält

$$\mathfrak{C}_p = \mathfrak{C}_{v2} + (1+x)A\Re + \frac{x(1-x^2)}{T^2} A\Re\left[\frac{W_v}{A\Re} + T\right]^2 \quad \ldots \ldots \ldots (12)$$

Die spezifische Wärme $\mathfrak{C}_{v1}$ in der Beziehung $\mathfrak{C}_{v2} = 2\,\mathfrak{C}_{v1}$ bezieht sich auf „ideellen" Dampf ohne Doppelmoleküle und nimmt nach Levy

bei $t^0 C =$	100	150	210	300	500°
die Werte $\mathfrak{C}_{v1} =$	7,95	8,07	8,22	8,44	8,98

an. Die aus (12) berechneten Werte der spezifischen Wärme des wirklichen Dampfes, wobei auf 1 kg bezogen

$$c_p = \frac{\mathfrak{C}_p}{36} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

zu setzen ist, stimmen dem Charakter nach mit den Versuchswerten von Knoblauch sehr gut überein. Bei höheren Drücken wird die Abweichung jedoch beträchtlich.

Man kann die Bildung von Doppelmolekülen als den Beginn einer Kondensation ansehen. Sie besitzt gegenüber der Tropfenbildung eine besondere Eigentümlichkeit. Wenn von N Doppelmolekülen xN gespalten sind, so hat x offenbar die Bedeutung der „spezifischen Dampfmenge". Gemäß den entwickelten Formeln ist x eine Abhängige von p und T, die willkürlich bleiben. Bei der Tropfenkondensation ist bei gegebenem p und T bestimmt r, aber die Dampfmenge $(x = 1 - y)$ willkürlich. Man erkennt hieran, daß es keine leichte Aufgabe sein dürfte, den Übergang aus der einen Gesetzmäßigkeit in die andere zu finden.

181. Integration der Scheibengleichungen durch Reihen.

Die Differentialgleichungen für die Formänderung und Beanspruchung der Laufräder sind linear von zweiter Ordnung und können auf die Form

$$x^2 p_0(x) \frac{d^2\xi}{dx^2} + x\, p_1(x) \frac{d\xi}{dx} + p_2(x) \cdot \xi = p(x) \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

gebracht werden, wo $p_0\, p_1\, p_2\, p$ Polynome mit ganzen Potenzen in x bedeuten. Um die Gleichung zu integrieren, muß ein partikulares Integral ξ_0 bekannt sein, so daß durch Einschieben von

$$\xi = \eta + \xi_0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

das rechte Glied zum Verschwinden gebracht wird, und die Gleichung die homogene Form

$$x^2 p_0(x)\, \eta'' + x\, p_1(x)\, \eta' + p_2(x)\, \eta = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

annimmt. Für die Integration solcher Gleichungen, in der $p_0\, p_1\, p_2$ sogar Potenzreihen bedeuten dürfen, stellt die Theorie[1]) folgende Regeln auf:

Die Stellen, wo entweder x oder $p_0(x)$ verschwinden, heißen singuläre Stellen, und zwar wesentlich singuläre, falls bei der Reihenentwickelung von p_1/p_0 oder p_2/p_0 unendlich viele Glieder mit negativen Potenzen von x vorkommen, und unwesentlich singuläre, falls diese Anzahl endlich ist. Im letzteren Falle ist eine Lösung mittels Reihenansatz

$$\eta = x^r [a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

zulässig, d. h. konvergent, und führt auf folgende Formen. Bezeichnen wir mit mit $c_0\, c_0'\, c_0''$ die ersten Glieder, die nicht alle gleichzeitig verschwinden dürfen, in den Reihen $p_0\, p_1\, p_2$, so ist der Beiwert von x^r in Gl. (3), nachdem man (4) eingeführt hat, das Produkt aus a_0 und dem Ausdruck

$$f(r) = c_0\, r\,(r-1) + c_0'\, r + c_0'' \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Da a_0 nicht verschwinden darf, wenn (4) eine Lösung von (3) sein soll, muß

$$f(r) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

als sogenannte „determinierende" Gleichung erfüllt sein. Hieraus folgen für die Gleichung zweiter Ordnung zwei Werte $r_1\, r_2$ (bei höherer Ordnung entsprechend mehr Werte). Ist der Unterschied von r_1 und r_2 keine ganze Zahl, so sind die Integrale von (3)

$$\eta_1 = x^{r_1}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots); \quad \eta_2 = x^{r_2}(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots) \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

wobei die Beiwerte $a_0\, a_1 \ldots\, b_0\, b_1 \ldots$ in bekannter Weise durch Nullsetzen der Faktoren der Potenzen $x^r\, x^{r+1} \ldots$ bestimmt werden. Ist der Unterschied von $r_1\, r_2$ eine ganze Zahl und bedeutet r_1 den (algebraisch) größeren Wert davon, so bildet wieder η_1 das eine Integral; das andere wird in der Form

$$\eta_2 = \eta_1 \int z\, dx \quad \text{mit} \quad z = x^{r_2 - r_1 - 1}(b_0' + b_1' x + b_2' x^2 + \ldots) \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

gewonnen. Da $r_2 - r_1 - 1$ eine negative ganze Zahl $= -\nu$ ist, wird in z im allgemeinen ein Glied b/x vorkommen, und man wird $\int z\, dx = b \lg n\, x + b_0'' x^{-\nu+1} + b_1'' x^{-\nu+2} + \ldots$ setzen können. Denkt man

[1]) Heffter, Einleitung in die linearen Differentialgleichungen.

sich η_2 mit b geteilt, so bleibt es noch immer ein Integral, d. h. man kann $b = 1$ setzen. Das Produkt von η_1 mit der Reihe der $b_0'' b_1'' \ldots$ führt auf $x^{r_2} \times$ (neue Potenzreihe), so daß schließlich die Ansatzform

$$\eta_2 = \eta_1 \lg n\, x + x^{r_2} (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots) \qquad (9)$$

entsteht, die in (3) eingefügt, die Bestimmung der Beiwerte $b_0\, b_1 \ldots$ ermöglicht. Der Konvergenzbereich dieser Lösungen geht von $x = 0$ bis zu dem nächstbenachbarten Werte x_1 für den einer der Ausdrücke p_1/p_0; p_2/p_0 verschwindet. Um die Lösung in der Umgebung von x_1 zu finden, müßte man die Veränderliche $x' = x - x_1$ einführen und die Gleichung auf dieselbe Form wie (1) bringen.

Als Beispiel behandeln wir

a) Die Scheibe gleicher Festigkeit bei willkürlichen Randbedingungen.

Es liege eine Scheibe mit der Gleichung

$$y = y_0\, e^{\frac{-\mu \omega^2 x^2}{2\sigma}} \qquad (10)$$

vor, die ohne Bohrung ausgeführt in richtiger Weise mit der Spannung σ beansprucht wird, falls man den Kranz nach Gl. (18) in Abschn. 75 bemessen hat. Nun möge aus irgendeinem Grunde die Scheibe ohne jeden Kranz, als Schwungrad verwendet werden; wie groß ist deren Beanspruchung? Um diese Frage zu beantworten, müssen wir die Differentialgleichung (13) in Abschn. 75 für die radiale Ausdehnung ξ, die mit Rücksicht auf (10) die Form

$$x^2 \xi'' + x\left(1 - \frac{\mu \omega^2}{\sigma} x^2\right) \xi' - \left(1 + \frac{\nu \mu \omega^2}{\sigma} x^2\right) \xi + A x^3 = 0 \quad \text{mit} \quad A = (1 - \nu^2)\, \mu \omega^2 / E \qquad (11)$$

annimmt, allgemein integrieren. Man kennt das partikuläre Integral $\xi_0 = (1 - \nu)\, \sigma x / E$, also kann das Glied $A x^3$ durch den Ansatz $\xi = \eta + \xi_0$ weggebracht werden, und es bleiben die drei ersten Glieder als homogene Gleichung in $\eta''\, \eta'\, \eta$ übrig. Die determinierende Gl. (6) lautet

$$r(r-1) + (r-1) = (r+1)(r-1) = 0 \qquad (12)$$

und liefert die Wurzeln $r_1 = 1$; $r_2 = -1$, mithin das erste Integral

$$\eta_1 = x(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots) \qquad (13)$$

Da der Unterschied $r_1 - r_2$ ganzzahlig ist, gilt als Ansatz für das zweite Integral

$$\eta_2 = \eta_1 \lg n\, x + \frac{1}{x}(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots) \qquad (14)$$

Das Einsetzen der ersten Reihe ergibt $a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = 0$, und mit $\alpha = \mu \omega^2/\sigma$ die „Rekursionsformel" $n(n+2)\, a_n = (n - 1 + \nu)\, \alpha\, a_{n-2}$ aus der einerseits die Konvergens der Reihe bestätigt, anderseits die Beiwerte

$$a_2 = \frac{(1+\nu)}{8} \alpha a_0; \qquad a_4 = \frac{(3+\nu)\alpha}{24} a_2 = \frac{(3+\nu)(1+\nu)}{24 \cdot 8} \alpha^2 a_0 \qquad (15)$$

abgeleitet werden können.

Für eine **Scheibe ohne Bohrung genügt dies erste Integral;** denn die Bedingung für den Mittelpunkt $\xi' = (\xi/x)_{x=0}$ ist durch $\xi = \eta_1 + \xi_0$ erfüllt; und die Vorschrift am Außenrand, die allgemein $\sigma_r = \sigma_{ra}$ heißen möge, kann durch die Wahl des unbestimmt gebliebenen Beiwertes a_0 befriedigt werden.

Man erhält mit $E' = E/(1 - \nu^2)$

$$\sigma_{ra} = E'\left(\xi' + \nu \frac{\xi}{x}\right)_{x=r} = \sigma + a_0 E' F(\alpha x^2)_{x=r}$$

wenn

$$F(\alpha x^2) = (1+\nu) + \frac{(1+\nu)(3+\nu)}{8} \alpha x^2 + \frac{(1+\nu)(3+\nu)(5+\nu)}{8 \cdot 24} \alpha^2 x^4 + \ldots \qquad (16)$$

bedeutet. Daraus folgt $a_0 = \frac{(\sigma_{ra} - \sigma)}{E' F(\alpha r^2)}$ und die größte Spannung, die im Mittelpunkte ($x = 0$) vorkommt

$$\sigma_0 = \sigma_{r0} = \sigma_{t0} = \sigma - (\sigma - \sigma_{ra}) \frac{1+\nu}{F(\alpha r^2)} \qquad (17)$$

Für den Fall des freien Randes ($\sigma_r = 0$) ist das Verhältnis σ_0/σ in Abhängigkeit von $\mu \omega^2 r^2/\sigma$ durch Abb. 994 dargestellt. Bei kleinen Werten der Winkelgeschwindigkeit sinkt die Spannung σ_0 auf kleine Werte hinab. **Bei großen Winkelgeschwindigkeiten** ist die Abnahme unbedeutend; die **Scheibe wird durch Weglassung des theoretisch erforderten Kranzes nur wenig entlastet.**

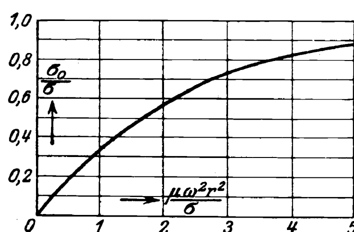


Abb. 994.
Spannungen der kranzlosen „Scheibe gleicher Festigkeit".

Besitzt die Scheibe eine Bohrung, so ist das zweite Integral heranzuziehen, wobei sich b_0 als ebenfalls willkürlich erweist. Man kann daher $\eta_1 = a_0 f_1(x)$ und $\eta_2 = f_2(a_0 b_0 x)$ setzen, und die vollständige Lösung lautet

$$\xi = \xi_0 + a_0 f_1(x) + f_2(a_0 b_0 x) \quad \ldots \ldots \quad (18)$$

Die zwei Beiwerte $a_0 b_0$ dienen zur Befriedigung der Randbedingungen, die entweder in einer Vorschrift für die Spannungen oder für den Zusammenhang mit einem Kranz und der Nabe bestehen. Da für diese Lösung praktisch kein Bedürfnis vorhanden ist, gehen wir auf dieselbe nicht näher ein.

b) Allgemeine Differentialgleichung für eine der Hauptspannungen.

Will man mit den anschaulichen Spannungsgrößen, statt mit den mikroskopisch kleinen Dehnungen ξ rechnen, so empfiehlt es sich, σ_t mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingung auszuscheiden. Man erhält aus der allgemeinen Gleichgewichtsgleichung (die Ableitungen durch Striche angedeutet)

$$\sigma_t = x\,\sigma_r' + \left(1 + x\frac{y'}{y}\right)\sigma_r + \mu\,\omega^2 x^2 \quad \ldots \ldots \quad (19)$$

Dies in die Verträglichkeitsgleichung

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{\sigma_r - \nu\,\sigma_t}{E} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sigma_t - \nu\,\sigma_r}{E}\,x\right) \quad \ldots \ldots \quad (20)$$

eingesetzt, führt auf

$$x^2\sigma_r'' + x\left(3 + x\frac{y'}{y}\right)\sigma_r' + \left[(2+\nu)\,x\frac{y'}{y} + x^2\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{y}\right)\right]\sigma_r + (3+\nu)\,\mu\,\omega^2 x^2 = 0 \quad \ldots \quad (21)$$

Dies ist wieder eine Gleichung von der Form (1), die mithin nach dem gleichen Verfahren mittels Reihen integriert werden kann.

182. Zeichnerische Integration nach Meißner[1]).

Es bezeichne p die abhängige, u die unabhängige Veränderliche, und es sei die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$R(u, p, p', p'') = 0 \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

zu integrieren, mit den Anfangsbedingungen

$$\text{für } u = 0 \quad p = p_0 \quad p' = p'_0 \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Nach Meißners Verfahren wird das zugehörige Integral graphisch wie folgt gefunden:

Man löst (1) nach p'' auf

$$p'' = f(u, p, p') \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

und bestimmt den Anfangswert

$$p_0'' = f(0, p_0, p_0') \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Man trägt p und u als Polarkoordinaten auf, wodurch in Abb. 995 der Anfangspunkt Q_0 entsteht. Nun wird eine Hilfskurve C (von Meißner „Liniendiagramm" genannt) entworfen, indem man senkrecht zu p_0 von O aus die Länge $O\,Q_0' = p_0'$ abträgt, und den vierten Eckpunkt P_0 des Parallelogrammes aus p_0 und p_0' konstruiert. Die Länge

$$\varrho_0 = p_0 + p_0'' = P_0\,P_0' \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

von P_0 abgetragen, bildet den Krümmungshalbmesser der Kurve C, so daß ein Kreisbogen von P_0' auf einem Zentriwinkel $\alpha_0 = 5$ bis 15 die Kurve von P_0 bis P_1 mit guter Annäherung wiedergibt. Das Lot $O\,Q_1' = p_1'$ liefert den neuen Wert der ersten Ableitung, und der vierte Eckpunkt Q_1 des Parallelogrammes $P_1\,Q_1'\,O\,Q_1$ bildet einen Punkt der Integralkurve J, d. h. es ist $O\,Q_1 = p_1$; $\sphericalangle\, Q_0\,O\,Q_1 = u_1$. Mit diesen Werten berechnet man aus (3) die zugehörige zweite Ableitung

$$p_1'' = f(u_1, p_1, p_1') \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

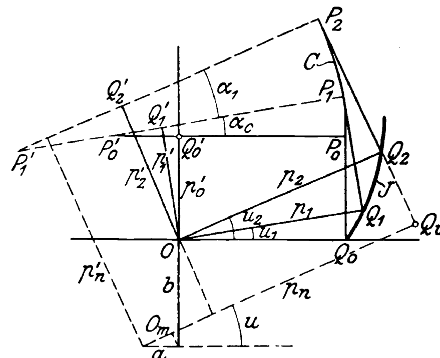


Abb. 995. Meißnersche Integration.

und den Krümmungshalbmesser

$$\varrho_1 = p_1 + p_1'' \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

Dieser liefert als $P_1\,P_1'$ abgetragen in P_1' den Mittelpunkt für den neuen Kreisbogen $P_1\,P_2$, woraus $O\,Q_2' = p_2'$ die erste Ableitung $O\,Q_2 \parallel P_2\,Q_2' = p_2$ den neuen Funktionswert, daraus $p_2'' = f(u_2, p_2, p_2')$ und der neue Krümmungshalbmesser $\varrho_2 = p_2 + p_2''$ usf. sich ergeben.

[1]) Sonderabdruck aus Schweiz. Bauztg. 1913, Bd. LXII, Nr. 15 u. 16.

Um die Genauigkeit zu erhöhen, wird nach Abb. 995a der **mittlere** Krümmungshalbmesser ϱ_m benützt. Man muß zunächst den alten Punkt P_1 ermitteln, und nun

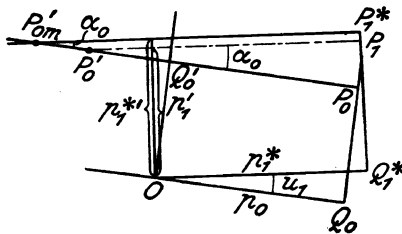


Abb. 995a. Genaueres Verfahren.

$$\varrho_m = \frac{\varrho_0 + \varrho_1}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

als Strecke $P_0 P'_{m0}$ auftragen. Von hier aus wird der neue Bogen $P_0 P_1^*$ mit dem gleichen Winkel α_0 beschrieben usf.

Ich verdanke Prof. Meißner die nachträgliche Mitteilung, wie man gewisse Aufgaben durch **Verlegung des Anfangspunktes** einer schon entworfenen C-Linie lösen kann. Ist in Abb. 995 der neue Anfangspunkt O_m, so gehören zum Winkel u (der dem alten Winkel u_2 gleich angenommen wurde) die neuen Funktionswerte

$$\left.\begin{aligned} p_{\text{neu}} &= p_{\text{alt}} + a \cos u + b \sin u \\ p'_{\text{neu}} &= p'_{\text{alt}} - a \sin u + b \cos u \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

Es sei nun die **Schwingung einer elastisch befestigten Masse** m unter dem Einfluß einer periodischen Kraft $f(t)$ zu untersuchen. Die Bewegungsgleichung lautet

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -\alpha y + f(t) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

Die „**Eigenschwingung**" wird bekanntlich durch das Integral $y = A \cos kt + B \sin kt$ mit $k^2 = \alpha/m$ dargestellt. Wählen wir als Unabhängige

$$u = kt \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

so geht, wenn wir $\frac{1}{k^2} f(t) = \frac{1}{k^2} f(u/k) = \varphi(u)$ und $y(t) = p(u)$ setzen, die Gleichung in

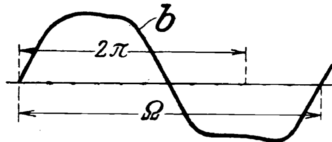
$$p'' = -p + \varphi(u) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

über. Das Integral hiervon bestimmt sich sehr einfach, da der jeweilige Krümmungshalbmesser

$$\varrho = p'' + p = \varphi(u) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

ohne Rechnung der graphisch gegebenen Kraftkurve entnommen wird.

Die Bewegung ist eine **Überlagerung der erzwungenen** und der **Eigenschwingung**. Wäre eine kleine Dämpfung vorhanden, so verschwände die letztere im Laufe der Zeit und die erzwungene Schwingung von gleicher Periode wie die Kraft bliebe allein übrig. Sie kann nach Meißner auf bemerkenswert einfache Weise gefunden werden, indem man ein erstes Integral mit willkürlichen Anfangswerten ermittelt und dieser Bewegung **eine weitere Eigenschwingung von solcher Art überlagert,** daß die **resultierende Schwingung am Anfang und am Ende der Kraftperiode gleiche Auslenkungen und Geschwindigkeiten besitzt.** Dies kommt gemäß (9) darauf hinaus, den Anfangspunkt zu verschieben, denn $a \cos u + b \sin u$ stellt eine Eigenschwingung dar, da gemäß (11) deren Periode in der Variablen u gerade 2π beträgt. Es sei nun C in Abb. 996 die mit O als Anfangspunkt und $p_0 = C A_1$; $p_0' = 0$ gewonnene Hilfskurve. Kurve b stelle die periodische Kraft mit einer Periode $\Omega > 2\pi$ dar, d. h. wir befinden uns unterhalb der Resonanz. Ist O^* der neue Anfangspunkt, so stellen die Lote $p_1 p_2$ von O^* auf die Anfangs- und Endtangenten $t_1 t_2$ die Auslenkungen, — und die Lote auf die Normalen $n_1 n_2$ die Geschwindigkeiten $p_1' p_2'$ dar. Diese müssen je gleich sein, also muß O^* auf einer Halbierungslinie sowohl des Winkels von $t_1 t_2$ wie des Winkels von $n_1 n_2$ liegen. Welcher Schnittpunkt der vorhandenen vier Halbierungslinien zu wählen sei, muß **mit Rücksicht auf die Vorzeichen** entschieden werden, die je für $p_1 p_2$ und für $p_1' p_2'$ gleich sein müssen. Man verfolgt zu diesem Zwecke die Lagenänderung der Tangente; wo diese durch O^* hindurchgeht, findet ein Zeichenwechsel von p statt; dasselbe gilt für die Normale hinsichtlich p'. In der Abbildung sind alle vier positiv.



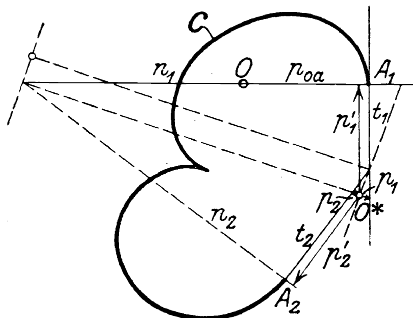


Abb. 996. Erzwungene Schwingung.

Die gleiche Lösungsart kann bei **mit Dämpfung verbundenen Schwingungen** angewendet werden, sofern die Dämpfung mit der Geschwindigkeit verhältnisgleich wächst. Die Bewegungsgleichung (12) lautet dann

$$p'' = -p - \lambda p' + \varphi(u) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

Sie möge mit den Anfangswerten $p_{0a}\, p'_{0a}$ integriert p_0 heißen und für das Ende der Periode $\Omega\, p_{0e}\, p'_{0e}$ ergeben haben. Man bildet das Integral der Gleichung

$$p'' = -p - \lambda p' \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

was auf dem Wege der Rechnung in bekannter Weise bei nicht zu großer Dämpfung, d. h. $\lambda^2/4 < 1$ mit den Abkürzungen $\lambda/2 = \mu$; $\sqrt{1 - \lambda^2/4} = \nu$ auf den Ausdruck

$$p_1 = e^{-\mu u}(A \cos \nu u + B \sin \nu u) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

führt. Man berechnet für $u = 0$ und $u = \Omega$ die Werte p_{a1}; p_{e1} wie auch p'_{a1}; p'_{e1} und stellt die Forderung auf, daß

$$p_{a0} + p_{a1} = p_{e0} + p_{e1}; \quad p'_{a0} + p'_{a1} = p'_{e0} + p'_{e1} \quad \ldots \ldots \quad (17)$$

sein müsse. Aus diesen Gleichungen werden die Beiwerte $A\, B$ bestimmt; die Überlagerung

$$p = p_0 + p_1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

bildet dann die verlangte Lösung.

Das Verfahren von Meißner kann mit Vorteil zur Integration der im vorigen Abschnitt aufgestellten Differentialgleichungen verwendet werden. Dabei ist, wie beim gewöhnlichen Differenzrechnen, die Durcharbeitung von mindestens zwei Annahmen erforderlich, um den Randbedingungen genügen zu können.

Als weiteres Beispiel für die Verwendung des graphischen Verfahrens führen wir die von Honegger[1]) gegebene Lösung der verwickelten simultanen Differentialgleichungen zweiter Ordnung (a. a. O. S. 78) an, die bei der Untersuchung der Festigkeit von Kegelschalen auftreten.

183. Beanspruchung der Scheibenräder über die Streckgrenze.

Neuerdings nimmt die Gepflogenheit mehr und mehr überhand, die Laufräder, insbesondere bei Kreiselverdichtern durch das sogenannte „Ausschleudern“ mit Übergeschwindigkeiten bis zu 50 v. H. zu prüfen. Dabei pflegt man als Beanspruchung die Streckgrenze σ_s oder sogar darüber liegende Werte zuzulassen, was für die normale Geschwindigkeit $\sigma_s/2{,}25$, also auch erhebliche Spannungen bedeutet. Beispielsweise kommen bei 7000 kg/cm² Festigkeit und einer Streckgrenze von etwa 3800 kg/cm² Beanspruchungen beim Ausschleudern von 4000 bis 4200 kg/cm² und normale Beanspruchungen von 1780 bis 1870 kg/cm² an der Nabe, als der meist beanspruchten Stelle, vor. Da nun bei Kreiselverdichtern die Scheiben zur Befestigung der Schaufeln mit vielen Bohrungen versehen werden, so liegt ein Fall von ungewöhnlicher Beanspruchung vor, da an jeder solchen Bohrung schon im Normalbetrieb ein Fließen des Baustoffes eintreten dürfte. Es ist wichtig, sich über die hierdurch bedingten Änderungen des Spannngsverlaufes zahlenmäßig Rechenschaft ablegen zu können. Wir behandeln als Beispiel die Überbeanspruchung im vollen Material der Scheibe bei Überschreitung der Streckgrenze an der Nabe und den angrenzenden Teilen.

a) Theorie des „plastischen“ Zustandes.

Das „Fließen“ des Baustoffes findet durch Rutschungen längs der Flächen der größten Schubspannungen statt, sobald deren Höhe einen gewissen Betrag überschritten hat[2]). Die größten Schubspannungen treten in den sechs Ebenen auf, die je durch die Richtung einer der Hauptspannungen $\sigma_1\, \sigma_2\, \sigma_3$ hindurchgehen und gegen die anderen um 45° geneigt sind. Ihre Größe in den beiden Ebenen, die σ_1 enthalten, ist

$$\tau_1 = \tfrac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3); \quad \text{ähnlich } \tau_2 = \tfrac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1); \quad \tau_3 = \tfrac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2).$$

Bei der Scheibe ist $\sigma_1 = \sigma_r$; $\sigma_2 = \sigma_t$; $\sigma_3 = 0$. Da σ_r im Anfang klein ist, wird τ_2 klein, τ_1 groß, τ_3 etwas kleiner als τ_1 sein. Beim einfachen Zug ist $\tau_{max} = \frac{1}{2}\sigma_{\text{streckgr}}$. Nehmen wir an, daß beim Eintreten des Fließens die Spannung für ein gewisses Gebiet der Dehnung unverändert bleibt (wie das bei Flußeisen fast die Regel ist), so wird, da zuerst τ_1 den Wert τ_{max} erreicht, ein Fließen nur in den Ebenen eintreten, die durch einen Halbmesser gehen und mit der Achse Winkel von 45° einschließen. **Ein Ringstück der Scheibe wird in Richtung der Achse einschrumpfen, sich im Umfang ausdehnen, die radiale Dicke bliebe ungeändert.** Wenn jedoch beim Fließen die Spannung mit der Dehnung zunimmt, so wird alsbald auch τ_3 den Wert τ_{max} erreichen, und das Fließen in den Ebenen beginnen, die durch eine Tangente an den Breitenkreis gehen und mit der Achse Winkel von 45° einschließen. Dann findet **auch eine Schrumpfung in Richtung des Halbmessers statt.** Wir führen im folgenden die Rechnung unter dieser Annahme durch und setzen der Einfachheit halber sogar voraus, daß die Schrumpfung radial und

---

[1]) Festigkeitsberechnung von Kegelschalen, Dissertation, Zürich 1919.

[2]) Über eine verallgemeinerte Annahme vergleiche man Prandtl, Härte plastischer Körper. Göttinger Nachrichten 1920.

axial gleich groß ist, ferner daß **durch die bleibende Formänderung das spezifische Gewicht, d. h. der Rauminhalt nicht geändert wird.** Dies bedeutet, daß, wenn ε_{tb} die bleibende Dehnung im Umfang ist, radial und axial

$$\varepsilon_{rb} = \varepsilon_{ab} = -\varepsilon_{tb}/2$$

sein soll.

b) Die überbeanspruchte Scheibe.[1])

Der Ringausschnitt der Scheibe sei nach erfolgter Formänderung durch a in Abb. 997 dargestellt. Durch die Überbeanspruchung wird bekanntlich **die Elastizitätsgrenze bis auf die Höhe der erreichten Spannung gehoben.** Löst man den Ring aus der Scheibe heraus, so schrumpft er in der Ruhelage b im Maße der verschwundenen Spannungen „vollkommen" elastisch zusammen, jedoch so, daß gegenüber der ursprünglichen Form c eine bleibende Erweiterung η zurückbleibt. Denkt man sich die ganze Scheibe in solche Ringe aufgeteilt, so werden diese innerhalb der Überbeanspruchung im Ruhezustande nicht mehr zusammenpassen, es bleibt jeweils ein **Schrumpfunterschied** $d\zeta$ auf die Länge dx bestehen. Die Überführung in den gespannten Zustand a vom Zustand b aus kann jedoch mit Hilfe der Elastizitätsgleichungen beschrieben werden. Bedeutet ξ die Aufweitung des Innenhalbmessers, so ist für die lotrecht schraffierte Faser die Umfangsdehnung offenbar.

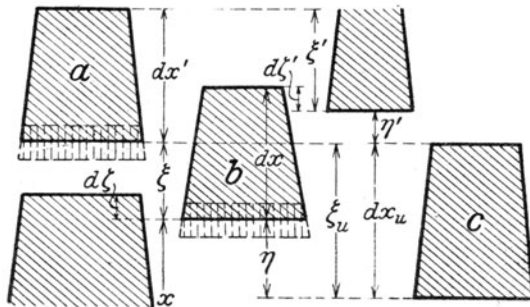


Abb. 997. Über die Streckgrenze beanspruchte Scheiben.

$$\varepsilon_t = \frac{\xi}{x} = \frac{\sigma_t - \nu\sigma_r}{E} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Als radiale Dehnung erhalten wir

$$\varepsilon_r = \frac{dx' - dx}{dx}.$$

Nun ist nach der Abbildung $\xi + dx' = dx + \xi' - d\zeta'$, somit, da man bis auf höhere kleine Größen $d\zeta$ mit $d\zeta'$ vertauschen kann, und wenn man statt der zerhackten Variablen dx eine stetige einführt, also eigentlich dx mit $dx - d\zeta'$, weil $d\zeta'$ klein gegen dx ist, vertauscht:

$$\varepsilon_r = \frac{d\xi}{dx} - \frac{d\zeta}{dx} = \frac{\sigma_r - \nu\sigma_t}{E} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Hierzu tritt die Gleichgewichtsbedingung der Spannungen und Fliehkräfte (Abschn. 74)

$$\frac{d(xy\sigma_r)}{dx} - y\sigma_t + \mu\omega^2 x^2 y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Ferner besteht eine Beziehung zwischen der Umfangsspannung σ_t und der bleibenden Umfangsdehnung $\varepsilon_{tb} = \eta/x$ die dem Schaubild 998 einer Zerreißprobe zu entnehmen wäre

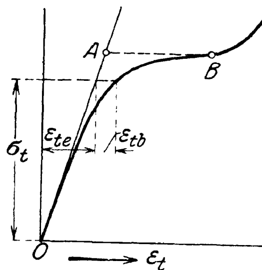


Abb. 998. Fließgrenze.

$$\sigma_t = f(\varepsilon_{tb}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Endlich ist der Zusammenhang zwischen der verzerrten und der ursprünglichen Form der Scheibe abzuleiten. Nach der Bemerkung am Schlusse von (a) führen wir die Annahme $\varepsilon_{rb} = -\varepsilon_{tb}/2$ ein, d. h. es muß gemäß Abb. 997

$$-\varepsilon_{rb} = \frac{dx_u - dx}{dx_u} = \frac{1}{2}\frac{\eta}{x_u} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

sein. Da ferner $dx_u + \eta' = \eta + dx - d\zeta'$, so folgt $(\eta' - \eta) + dx_u - dx + d\zeta' = 0$ oder mit (5)

$$\frac{d\eta}{dx} + \frac{\eta}{2x} + \frac{d\zeta}{dx} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5a)$$

wobei $d\zeta'$ durch $d\zeta$ ersetzt und statt der Variablen x_u die oben erläuterte stetige Größe x benutzt wurde. Gleichungen (1) bis (5a) sind (mathematisch gesprochen) genügend um die Veränderlichen $\sigma_r\ \sigma_t\ \xi\ \eta\ \zeta$ als Abhängige von x darzustellen. In Wirklichkeit wird die Integration nur bei großer Vereinfachung möglich, als die sich die Annahme empfiehlt, die Spannungslinie in Abb 998 verlaufe nach dem Linienzug OAB, was mit der Wirklichkeit oft gut übereinstimmt. Dann geht Gl. (4) in die Forderung

$$\sigma_t = \text{konst.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

---

[1]) Man vergleiche Brown, Boveri & Cie., Revue, 1919, S. 260.

über, und man kann für eine gegebene Scheibe aus (3), wenn der Bohrungshalbmesser r_1 ist, mit $\sigma_{r_1} = 0$ das Integral

$$x y \sigma_r = \sigma_t \int_{r_1}^{x} y\, dx - \mu \omega^2 \int_{r_1}^{x} x^2 y\, dx \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

graphisch bilden. Durch Einsetzen von ξ aus (1) in (2) erhält man

$$\frac{d\zeta}{dx} = \frac{1}{E}\left[\frac{d}{dx}(\sigma_t - \nu\sigma_r) x - (\sigma_r - \nu\sigma_t)\right] = \Phi(x) \text{ oder } \zeta = \zeta_1 + \int_{r_1}^{x} \Phi(x)\, dx \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

Schließlich kann man (5a) in bekannter Weise integrieren, indem man vorübergehend $\eta = uv$ einführt, $v' + v/2x = 0$ setzt, woraus $v = 1/\sqrt{x}$ und

$$\eta = -\frac{1}{\sqrt{x}} \int \Phi(x) \sqrt{x}\, dx + \frac{C}{\sqrt{x}}$$

folgt. Ist $\eta = \eta_1$ für $x = r_1$, so wird

$$\eta \sqrt{x} - \eta_1 \sqrt{r_1} = -\int_{r_1}^{x} \Phi(x) \sqrt{x}\, dx = \zeta_1 - \zeta = F(x) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

Diese Gleichungen gelten bis zur Grenze des plastischen Zustandes, d. h. bis zum Halbmesser $r = r_o$, wo $\eta = 0$ wird. Dies in Gleichung (9) eingeführt, ergibt

$$\eta_1 \sqrt{r_1} = -F(r_o) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

die Bestimmungsgleichung für r_0, falls η_1 gegeben ist, oder umgekehrt. Aus 1 ermittelt man schließlich

$$\xi = (\sigma_t - \nu\sigma_r) \frac{x}{E} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

Bei **einer gegebenen Scheibe,** von der durch vorherige Rechnung festgestellt ist, daß sie beim Ausschleudern über die Streckgrenze beansprucht werden wird, müßte am besten r_o versuchsweise angenommen werden. Die graphische Lösung (7) wird von r_o an mit dem sich dort ergebenden σ_{r_o} nach dem Differenzenverfahren (Abschn. 81) bis an den Außenrand fortgesetzt, wobei sich die radiale Außenspannung als verschieden vom vorgeschriebenen Wert erweisen wird. Eine andere Annahme über r_o liefert einen zweiten Wert, mit Hilfe dessen man den richtigen Wert von r_o durch Interpolation bestimmt. Aus (10) und (11) findet man die bleibende und die elastische Aufweitung $\eta_1\, \xi_1$.

Es ist schon erwogen worden, die **Scheiben durch übermäßiges Ausschleudern in dem Sinne tragfähiger** zu machen, daß die an der Nabe meist in eine scharfe Spitze ausgehende Umfangsspannung herabgesetzt, und infolge der gleichzeitigen Erhöhung der Elastizitätsgrenze, die Ausbildung bleibender Formänderungen während des Betriebes verhindert würde. Dies setzt voraus, daß die Scheibe nach dem Ausschleudern auf die richtige Bohrung ausgedreht wird, und die bleibende Formänderung nicht so stark war, daß die Spannungen im Ruhezustand an irgendeiner Stelle etwa die Fließgrenze überschreite, überhaupt daß die Arbeitsfähigkeit durch das Fließen nicht übermäßig erschöpft worden sei.

c) Bohrung in unendlich ausgedehnter, allseitig gespannter Platte.

In einer überall gleich dicken ruhenden Scheibe mit einer Bohrung vom Halbmesser r_1 erzeugt eine im unendlichen angebrachte Randspannung σ die Beanspruchungen

$$\sigma_r = \sigma\left(1 - \frac{r_1^2}{x^2}\right); \qquad \sigma_t = \sigma\left(1 + \frac{r_1^2}{x^2}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

Wächst hierbei σ_t über die Streckgrenze σ_{to}, so entsteht nach Gl. (3) im gestreckten Teil die Beanspruchung

$$\sigma_r = \sigma_{to}\left(1 - \frac{r_1}{x}\right); \qquad \sigma_t = \sigma_{to} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

Der Schrumpfbetrag ist nach (8)

$$\zeta - \zeta_1 = \frac{\sigma_{to} r_1}{E} \operatorname{lgn}\left(\frac{x}{r_1}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

Die bleibende Dehnung nach (9)

$$\eta \sqrt{x} = \eta_1 \sqrt{r_1} - \frac{2\sigma_{to} r_1}{E}\left(\sqrt{x} - \sqrt{r_1}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

Wenn im Abstand $x = r_o$ die bleibende Dehnung verschwindet, so gelten von da ab die Werte

$$\sigma_r' = \sigma - (\sigma - \sigma_{ro}) \frac{r_o^2}{x^2}; \qquad \sigma_t' = \sigma + (\sigma - \sigma_{ro}) \frac{r_o^2}{x^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

Mithin ist bei $x = r_o$ nach (13) und (16)

$$\sigma_{ro} = \sigma_{to}\left(1 - \frac{r_1}{r_o}\right); \qquad \sigma_{to} = 2\sigma - \sigma_{ro}$$

Daraus folgt

$$\frac{r_o}{r_1} = \frac{\sigma_{to}}{2(\sigma_{to} - \sigma)}; \qquad \sigma_{ro} = 2\sigma - \sigma_{to} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Die Tiefe, in die das Fließen eindringt, hängt somit vom Verhältnis σ_{to}/σ ab; z. B. erhält man für $\sigma_{to} = 1{,}1$; 1,2; 1,5; 2; 3 die Werte $r_o/r_1 = 5{,}5$; 3,0; 1,5; 1,0. Bedeutet $\varepsilon_{to} = \sigma_{to}/E$ die elastische Dehnung an der Streckgrenze, so sind nach (15) die bleibende Dehnung am Innenrand, d. h. η_1/r_1 für $x = r_1$ in gleicher Reihenfolge wie oben $= 2{,}70$; 1,46; 0,45 ε_{to}. Da ε_{to} unter 2 v. T. gelegen sein wird und die Dehnung im Bereiche der Abb. 998 mehrere Hundertstel ausmacht, so wird hiernach die **Arbeitsfähigkeit des Baustoffes nur in äußerst geringem Maße verbraucht, selbst wenn die mittlere Spannung σ einen Betrag von 10/11 der Fließgrenze erreicht.**

Die entwickelte Lösung wird angenähert auch auf eine nicht zu große Bohrung in einer Scheibe anwendbar sein, falls die radiale und tangentiale Spannung die dort in der vollen Scheibe auftreten würden, gleich groß sind. Bei ungleichen Spannungen ist die mathematische Lösung wohl äußerst verwickelt; doch darf nach dem Dargelegten vermutet werden, daß die Arbeitsfähigkeit des Baustoffes auch dann keine wesentliche Einbuße erleidet.

184. Beanspruchung eines umlaufenden Ellipsoides nach C. Chree[1]).

Es seien $\sigma_x \sigma_y \sigma_z$ die Normal-, $\tau_x \tau_y \tau_z$ die Schubspannungen für drei zu den Koordinatenebenen parallele Schnitte, und es seien a, b, c die nach X, Y, Z gerichteten Halbachsen des Ellipsoides. Um die Formeln symmetrisch zu gestalten, werde mit Chree zunächst eine Massenkraft, deren Komponenten für die Raumeinheit Px, Qy, Rz sind, vorausgesetzt. ϱ sei die Masse der Raumeinheit, ν das Verhältnis der Querzusammenziehung zur Längendehnung. Chree stellt die bekannten allgemeinen Elastizitätsgleichungen auf und beweist, daß sich dieselben mit allen Grenzbedingungen durch den Ansatz

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= A + A_1 x^2 + A_2 y^2 + A_3 z^2 & \tau_x &= 2Lyz\\
\sigma_y &= B + B_1 x^2 + B_2 y^2 + B_3 z^2 & \tau_y &= 2Mzx\\
\sigma_z &= C + C_1 x^2 + C_2 y^2 + C_3 z^2 & \tau_z &= 2Nxy
\end{aligned}$$

befriedigen lassen.

Um die Konstanten auszudrücken, bedarf es der Berechnung der Determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

und ihrer Unterdeterminanten D_{11}, D_{12}, D_{13}, D_{21} . . ., wobei

$$\begin{aligned}
a_{11} &= 3b^4 + 2b^2c^2 + 3c^4 & a_{12} &= a_{21} = c^4 - \nu(b^2c^2 + c^2a^2 + 3a^2b^2)\\
a_{22} &= 3c^4 + 2c^2a^2 + 3a^4 & a_{13} &= a_{31} = b^4 - \nu(b^2c^2 + 3c^2a^2 + a^2b^2)\\
a_{33} &= 3a^4 + 2a^2b^2 + 3b^4 & a_{23} &= a_{32} = a^4 - \nu(3b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2)
\end{aligned}$$

Es ergibt sich alsdann

$$\begin{aligned}
L = \frac{\varrho}{2D}\Big\{ & Pa^2[\nu(b^2 + c^2)D_{11} + (\nu c^2 - a^2)D_{12} + (\nu b^2 - a^2)D_{13}]\\
& + Qb^2[(\nu c^2 - b^2)D_{11} + \nu(c^2 + a^2)D_{12} + (\nu a^2 - b^2)D_{13}]\\
& + Rc^2[(\nu b^2 - c^2)D_{11} + (\nu a^2 - c^2)D_{12} + (\nu a^2 + b^2)D_{13}]\Big\}
\end{aligned}$$

und ähnlich M und N durch zyklische Vertauschung der Zeichen 1, 2, 3. Die Spannungen selbst sind

$$\sigma_x = a^2\left[\left(\frac{1}{2}P\varrho + M + N\right)\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) - \left(\frac{1}{2}P\varrho + M + 3N\right)\frac{y^2}{b^2} - \left(\frac{1}{2}P\varrho + 3M + N\right)\frac{z^2}{c^2}\right]$$

$$\sigma_y = b^2\left[-\left(\frac{1}{2}Q\varrho + 3N + L\right)\frac{x^2}{a^2} + \left(\frac{1}{2}Q\varrho + N + L\right)\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) - \left(\frac{1}{2}Q\varrho + N + 3L\right)\frac{z^2}{c^2}\right]$$

$$\varrho_z = c^2\left[-\left(\frac{1}{2}R\varrho + L + 3M\right)\frac{x^2}{a^2} - \left(\frac{1}{2}R\varrho + 3L = M\right)\frac{y^2}{b^2} + \left(\frac{1}{2}R\varrho + L + M\right)\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)\right]$$

$$\tau_x = 2Lyz; \qquad \tau_y = 2Mzx; \qquad \tau_z = 2Nxy.$$

[1]) Proceed. of the Royal Soc. of London, Bd. LVIII, 1895, S. 39, und Quarterly Journal of Pure and Applied Mathem., Nr. 108, 1895.

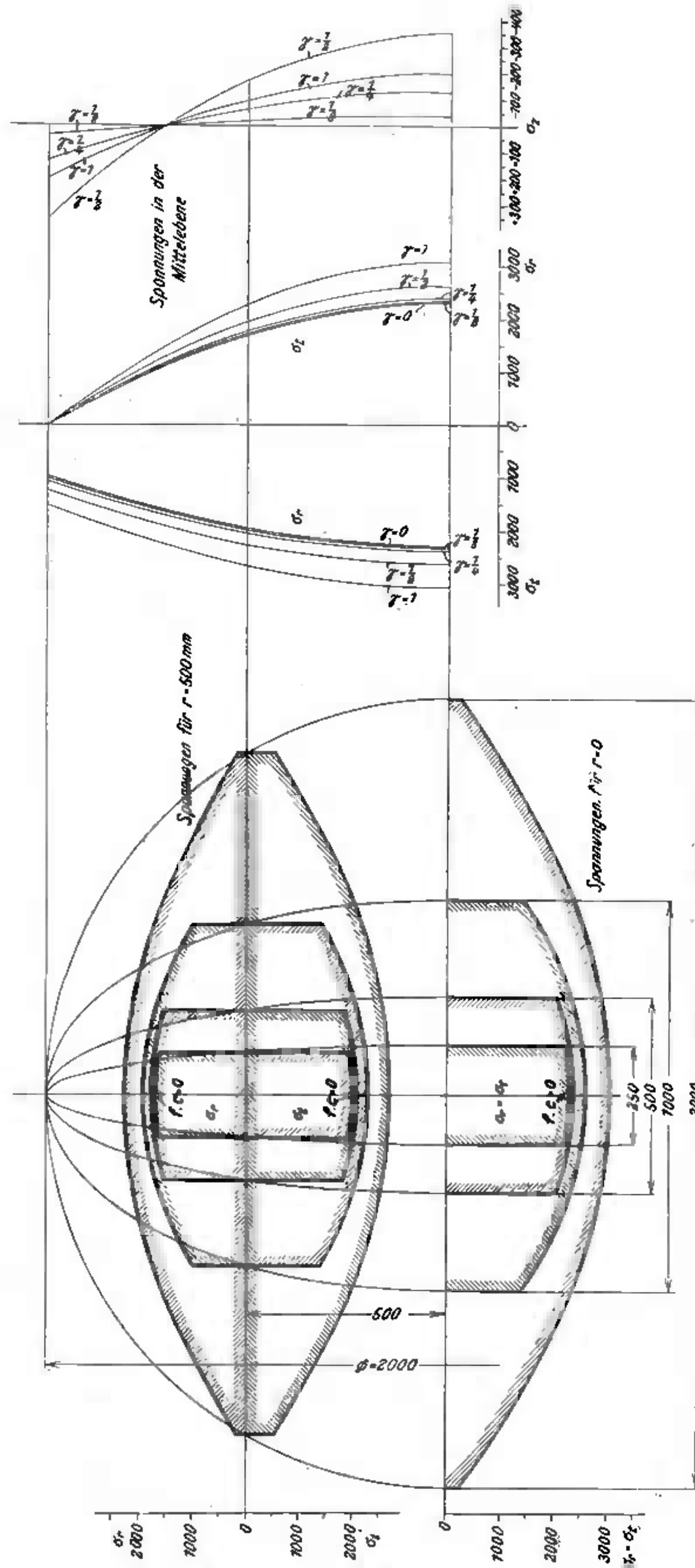


Abb. 999. Spannungen in einem flachen Umdrehungsellipsoid.

Auch die Ausdrücke der Dehnungen und Schiebungen sind vollständig entwickelt. Ihre Angabe unterbleibt, da wir unser Endziel schon mit den Werten der Spannungen erreichen können. Wir sind nämlich in der Lage, die Spannungsverteilung eines um die Z-Achse rotierenden Ellipsoides anzugeben, wenn wir $P = Q = 0$ und $R = \omega^2$ setzen. Wenn noch $a = b$ vorausgesetzt wird, so erhalten wir ein Umdrehungsellipsoid, d. h. eine umlaufende Scheibe, deren Querschnitt eine Ellipse ist.

Das Hauptinteresse betrifft die Frage, **wie stark gleichartige Spannungen im Mittelpunkte der Scheibe und im Endpunkte der Halbachse c voneinander abweichen.** Je kleiner das Verhältnis c/a, d. h. je flacher das Ellipsoid ist, um so mehr muß schon der Schätzung nach die Verschiedenheit abnehmen. Bezeichnet man die gleich großen Radial- und Umfangsspannungen im Mittelpunkte mit σ_o, im Endpunkte der Drehachse mit σ_c, so findet man für

$c/a =$	0	$^1/_8$	$^1/_4$	$^1/_2$	1
$\frac{\sigma_o}{\sigma_c} =$	1	1,05	1,15	1,83	13,6.

Übersichtlich findet man die Spannungen in Abb. 999 dargestellt, in der noch σ_r und σ_t in der Mitte des Halbmessers für alle Punkte einer zur Achse parallelen Geraden, und in den Nebenbildern außerdem σ_r und σ_t für alle Punkte der Scheibenmittelebene sowie schließlich σ_z ebenfalls für die Mittelebene dargestellt sind. Merkwürding ist im Nebenbild das Auftreten einer axialen Zugspannung im oberen Viertel des Halbmessers. Die Spannungen beziehen sich auf eine Umlaufzahl von 3000 i. d. Min. Aus dieser Darstellung darf man folgenden Satz ableiten:

Beträgt die Scheibendicke weniger als $^1/_8$ des Durchmessers, so darf die Ungleichmäßigkeit der Spannungsverteilung auf einer mit der Welle koaxialen Zylinderfläche bei technischen Anwendungen vernachlässigt werden, da die größte und die kleinste Spannung sich nur um etwa 5 v. H. unterscheiden.

Selbst bei einem Verhältnis von 1 : 4 ist die Abweichung des Größtwertes vom Mittelwert nur etwa 7,5 v. H. Die technisch wichtigen Scheibenformen weisen wohl eine raschere Zunnahme der Dicke gegen die Mitte zu als das Ellipsoid auf. Statt dessen liegt das Verhältnis der Dicke zum Durchmesser meist wesentlich unter $^1/_8$, so daß obiger Ausspruch sich verallgemeinern läßt.

Der Verfasser hat in der Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1907, S. 1269, eine Studie über die Spannungsverteilung in anderen Scheibenformen veröffentlicht, die mit dem Grade der Annäherung, die diese schwierige Aufgabe zuläßt, auf ähnliche Ergebnisse führt wie die obige strenge Lösung für das Ellipsoid.

185. Kreiselwirkungen der Scheibenmassen bei einer Schiffsturbine.

Die umlaufenden Turbinenmassen bilden einen Kreisel, dem während des Stampfens des Schiffes oder bei scharfen Wendungen eine erzwungene Bewegung auferlegt wird, wodurch Reaktionskräfte in den Lagern wachgerufen werden, deren Größe der Sicherheit halber nachzuprüfen empfehlenswert ist.

Abb. 1000. Kreiselwirkung bei Schiffsturbinen.

Ein rein lotrechtes Auf- und Abschwingen beansprucht die Turbinenwelle bloß durch die Trägheitskräfte, die man als Produkt aus der Masse der Räder und der größten Beschleunigung leicht ermittelt. Die Größe der bei dieser Schwingung erreichten Geschwindigkeit ist gänzlich einflußlos. Ganz anders bei einer drehenden Schwingung, wie sie durch das Stampfen, d. h. dem Schwanken um eine zur Fahrtrichtung senkrechte Querachse gegeben ist. In der höchsten und tiefsten Stellung wird die Welle auch hier durch die Trägheitskräfte in einer lotrechten Ebene gebogen; wegen der veränderlichen Neigung des Schiffskörpers treten aber noch die dem Kreisel eigentümlichen Querbiegungen in einer wagrechten Ebene hinzu. Wir beschäftigen uns nur mit den letzteren und denken uns die Turbinenmasse in Abb. 1000 durch eine um die X-Achse umlaufende Scheibe dargestellt. Obschon wir in Abschn. 89 die Kreiselwirkung allgemein untersucht haben, dürfte die hier gegebene anschauliche Darstellung manchem Leser willkommen sein. Die zur Zeit $t = 0$ wagrechte Achse sei nach Verlauf der Zeit dt um den Winkel $d\varphi$ geneigt, der durch Drehung um die Y-Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ε beschrieben wird. Die Drehung um die eigentliche Turbinenwelle erfolge mit der stets gleichen Winkelgeschwindig-

keit ω. Es ist nun wichtig, einzusehen, daß das auftretende biegende Moment in der Tat um die Z-Achse dreht. Zu diesem Behufe beachte man, daß die nach X gerichtete Geschwindigkeitskomponente eines in der Gegend des Scheitels bei B gelegenen Punktes sich ungemein wenig ändert, daher auf diesen Punkt nur ganz kleine Beschleunigungskräfte nach der Wagrechten zu wirken haben. Der bei A gelegene Massenpunkt wird hingegen durch die veränderte Radscheibe aus seiner Bewegungsrichtung gewaltsam herausgelenkt und beschreibt eine gegen die positiven X konvexe Bahn. Hier ist nun eine Beschleunigungskraft im Sinne der negativen X notwendig, deren Summe mit den Kraftkomponenten der Gegenseite ein um die Z-Achse drehendes Moment mit dem in das Bild eingezeichneten Sinn ergibt, das von außen, d. h. durch Vermittlung der Lagerdrücke auf die Welle übertragen werden muß.

Zur numerischen Berechnung dient der Satz, daß die Zunahme des „Impulsmomentes" in der Zeiteinheit (d. h. die Ableitung des Impulsmomentes nach der Zeit) dem um die betreffende Achse drehenden äußeren Kraftmomente gleich ist. Zur Zeit $t = 0$ ist das Impulsmoment für die Z-Achse $= 0$, für die X-Achse $\Theta_0\omega$, wo Θ_0 das Massenträgheitsmoment für diese Achse bedeutet. Nach Verlauf der Zeit dt ist das Impulsmoment für die unter $d\varphi$ geneigte X-Achse noch immer $\Theta_0\omega$; wir zerlegen dasselbe in die Komponenten $\Theta_0'\omega \cos d\varphi$ und $\Theta_0\omega \sin d\varphi$. Letztere bildet die Zunahme des Impulsmomentes für Z während der Zeit dt; die Ableitung ist mithin

$$\frac{\Theta_0 \omega \sin d\varphi - 0}{dt} = \Theta_0 \omega \frac{d\varphi}{dt}$$

und wir erhalten mit $\varepsilon = d\varphi : dt$ das Kreiselmoment

$$\mathfrak{M}_z = \Theta_0 \omega \varepsilon \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Die Winkelgeschwindigkeit ε wird aus der Zeitdauer T einer (Hin- und Her-)Schwingung des Schiffskörpers und der Weite φ_0 des Neigungswinkels durch die Formel

$$\varepsilon = \frac{2\pi\varphi_0}{T} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

bestimmt. Wenn das Schiff im Manöver eine scharfe Schwenkung ausführt, so ist ε als die Winkelgeschwindigkeit um die Z-Achse aufzufassen, und das Kreiselmoment dreht um die Y-Achse.

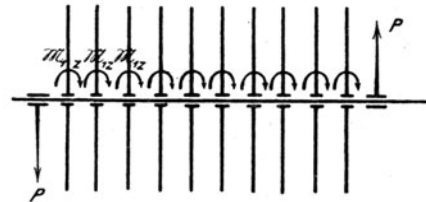


Abb. 1001. Wellenbiegung durch die Kreiselmomente.

Bei einer vielstufigen Turbine mit dicht stehenden Einzelrädern (Abb. 1001), entsteht durch die Gesamtheit der $\mathfrak{M}_z$ eine merkwürdige Beanspruchung der Welle. Die Einzelmomente $\mathfrak{M}_{1z}$ rufen in den Lagern zwei gleich große entgegengesetzt gerichtete Kräfte hervor, deren Moment der Summe der $\mathfrak{M}_z$ gleich ist. Mit der Entfernung von der Lagerstelle nimmt die Summe der $\mathfrak{M}_z$ ebenso gleichmäßig zu, wie das Moment des Lagerdruckes, so daß die Welle, auch **wenn sie noch so lang wäre, im wesentlichen nur auf Abscherung durch P beansprucht ist.**

186. Biegung einer hyperboloidischen Scheibe durch Außendruck und Eigengewicht.

Es sei eine Scheibe hyperboloidischer Form in wagerechter Aufstellung ruhend vorausgesetzt. Die Dicke der Scheibe im Abstande x heiße h. Die nach abwärts positiv gezählte Durchbiegung z. Ein äußerer Rand sei nicht vorhanden, die Nabe so klein, daß man die Scheibe auch als voll ansehen kann. Das Profil der Scheibe entspreche der Gleichung

$$h x^a = c \quad \text{oder} \quad h = c x^{-a} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

und es sei die Neigung der Tangente an die Profillinie gegen die Mittelebene des Rades so klein, daß man in den Gleichgewichtsbedingungen der Spannungen an einem Scheibenelement den Kosinus des Neigungswinkels $= 1$ setzen dürfe. Bei Abwesenheit eines Zuges am Rand werden in irgendeinem zur Mittelebene der Scheibe senkrechten Schnitte nur Biegungs- und Schubspannungen vorhanden sein. Erstere dürfen wir, wie bei der ebenen Scheibe, dem Abstande des fraglichen Flächenelementes von der Mittelebene verhältnisgleich setzen, und sei

σ_x der Absolutwert der Biegungsspannung in der äußersten Faser eines zum Halbmesser senkrecht stehenden Schnittes,

σ_y dasselbe in einem Meridianschnitt.

Das Biegungsmoment M, das auf die Stirnfläche $x\,d\varphi\,h$ des in Abb. 1002 dargestellten Scheibenelementes im Sinne der Pfeile ausgeübt wird, hat den Wert: Widerstandsmoment $\times$ Biegungspannung der äußersten Faser, d. h.

$$M = \frac{1}{6}(x\,d\varphi)h^2\sigma_x \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Dasjenige auf die gegenüberliegende Stirnfläche

$$M' = \frac{1}{6}(x' d\varphi) h'^2 \sigma_x'.$$

In den Seitenflächen $dx \cdot h$ wirkt das Moment

$$M_1 = \frac{1}{6} dx h^2 \sigma_y \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

mit dem durch seine „Achse" im Grundriß angedeuteten Sinn.

Außerdem wirkt in den Stirnflächen je eine Schubkraft, und zwar in $x d\varphi h$ die Kraft

$$S = x d\varphi h \tau_m \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

wo τ_m den Mittelwert der Schubspannung bedeutet. Ebenso ist $S' = x' d\varphi h' \tau'_m$.

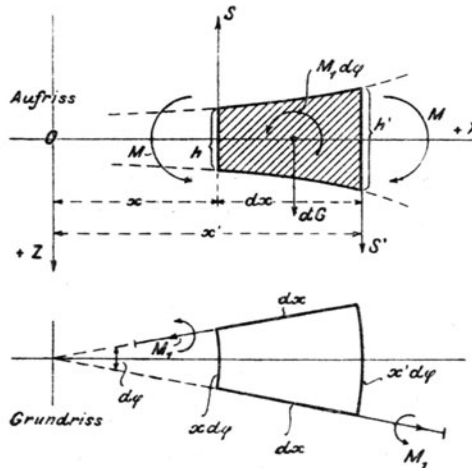


Abb. 1002. Kräfte am Scheibenelement.

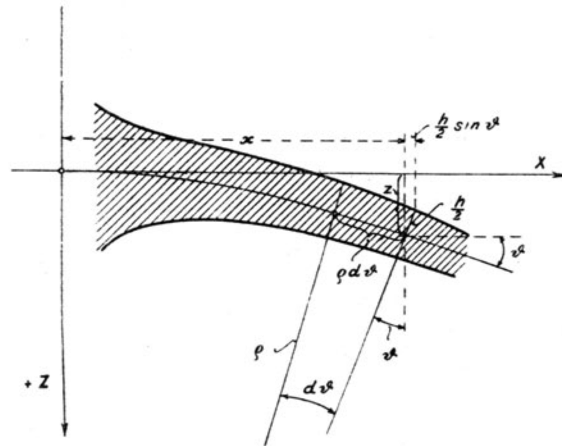


Abb. 1003. Formänderung.

In den Seitenflächen ist die Schubkraft aus Gründen der Symmetrie gleich Null. Schließlich wirken nach abwärts die Eigenschwere und der Außenüberdruck p

$$dQ = x d\varphi dx (h\gamma + p) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (5)$$

sofern γ das spezifische Gewicht bedeutet.

Die angeführten Kräfte müssen miteinander im Gleichgewichte stehen, es muß also in erster Linie die Summe der Momente beispielsweise für die zur XOZ-Ebene senkrecht stehende Schwerpunktsachse verschwinden. Die Zusammensetzung der Momente M_1 ergibt ein um diese Achse drehendes Moment $M_1 d\varphi$, dessen Sinn im Aufrisse eingetragen ist, und die erste Gleichgewichtsbedingung lautet mithin

$$M' - M - M_1 d\varphi + S dx = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (6)$$

oder nach dem Einsetzen der Einzelwerte, da $M' - M = \frac{dM}{dx} dx$ ist,

$$\frac{d(x h^2 \sigma_x)}{dx} - h^2 \sigma_y + 6 x h \tau_m = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (7)$$

Die zweite Gleichgewichtsbedingung beziehen wir nicht auf ein Element, sondern auf die ganze von einem lotrechten Zylinder mit dem Halbmesser x begrenzte Scheibe. Die Gesamtbelastung derselben ist

$$Q_x = \int_0^x 2\pi x dx h \gamma + \pi x^2 p \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (8)$$

Wir nehmen an, daß in der Mitte lotrecht nach oben eine Stützkraft P wirkt, die gleich ist der Gesamtbelastung der ganzen Scheibe, d. h.

$$P = \int_0^{x_2} 2\pi x dx h \gamma + \pi x_2^2 p \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (9)$$

Lotrecht nach abwärts haben wir endlich die gesamte Schubkraft $2\pi x h \tau_m$. Das Gleichgewicht fordert

$$Q_x + 2\pi x h \tau_m = P \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (10)$$

Hieraus berechnet sich

$$x h \tau_m = \frac{1}{2\pi}(P - Q_x) = \left(\int_0^{x_2} x\,dx\,h\gamma - \int_0^{x} x\,dx\,h\gamma\right) + \frac{p}{2}(x_2^2 - x^2)$$

oder auch

$$x h \tau_m = \frac{P_0}{2\pi} - \frac{\gamma h x^2}{2-\alpha} + \frac{p}{2}(x_2^2 - x^2) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (11)$$

wenn wir mit

$$P_0 = \int_0^{x_2} 2\pi x\,dx\,h\gamma = \frac{2\pi\gamma h_2 x_2^2}{2-\alpha} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (12)$$

das „ideelle" Gewicht der bis an die Achse ausgedehnt gedachten Scheibe bezeichnen, wobei indessen $\alpha < 2$ vorausgesetzt wird, und die Scheibe gleicher Dicke $\alpha = 0$, wie sich später zeigt, ausgeschlossen werden muß. Durch Einsetzen von $x h \tau_m$ aus Gl. (11) in Gl. (7) wird die Schubspannung ausgeschieden und man erhält

$$\frac{d(x h^2 \sigma_x)}{dx} - h^2 \sigma_y = -\frac{3 P_0}{\pi} + \frac{6\gamma h x^2}{2-\alpha} - 3p(x_2^2 - x^2) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (13)$$

Nun ist die Ausdehnung eines Scheibenelementes auf der Zugseite bei der in Abb. 1003 dargestellten Verbiegung im Abstande $h/2$ in radialer Richtung

$$\varepsilon_x = \frac{(\varrho + h/2)d\vartheta - \varrho d\vartheta}{\varrho d\vartheta} = \frac{h}{2\varrho} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (14)$$

und nach der Richtung von y, d. h. im Umfange gemessen

$$\varepsilon_y = \frac{2\pi[x + (h/2)\sin\vartheta] - 2\pi x}{2\pi x} = \frac{h}{2x}\sin\vartheta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (14\text{a})$$

oder mit der zulässigen Näherung

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d^2 z}{dx^2} = z''; \quad \sin\vartheta = \sim \operatorname{tg}\vartheta = \frac{dz}{dx} = z' \quad \text{wird} \quad \varepsilon_x = \frac{h}{2} z'', \ \varepsilon_y = \frac{h z'}{2x} \quad \ldots \ldots (14\text{b})$$

Hieraus ergibt sich

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(z'' + \nu\frac{z'}{x}\right)\frac{h}{2}; \qquad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\nu z'' + \frac{z'}{x}\right)\frac{h}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (15)$$

und die Differentialgl. (13) lautet

$$\frac{d}{dx}[h^3(x z'' + \nu z')] - h^3\left(\nu z'' + \frac{z'}{x}\right) = \frac{12(1-\nu^2)\gamma h x^2}{E(2-\alpha)} - \frac{6(1-\nu^2)}{E}\left[\frac{P_0}{\pi} + p(x_2^2 - x^2)\right] \quad \ldots (16)$$

oder mit Rücksicht auf Gl. (1), indem wir von nun ab $p = 0$ setzen, d. h. **uns auf die Biegung durch das Eigengewicht beschränken,**

$$z''' + (1 - 3\alpha)\frac{z''}{x} - (1 + 3\alpha\nu)\frac{z'}{x^2} = a_1 x^{n_1} - a_2 x^{n_2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (17)$$

mit den Bezeichnungen

$$n_1 = 2\alpha + 1 \qquad n_2 = 3\alpha - 1 \qquad a_1 = \frac{12(1-\nu^2)\gamma}{(2-\alpha)E c^2} \qquad a_2 = \frac{6(1-\nu^2)P_0}{\pi E c^3} \quad \ldots (18)$$

Zum Zwecke der Integration setzen wir $z = u + b_1 x^{k_1}$ und bezeichnen die linke Seite von Gl. (17) mit $f(z)$; es entsteht dann

$$f(u) + b_1[k_1(k_1 - 1)(k_1 - 2) + (1 - 3\alpha)k_1(k_1 - 1) - (1 + 3\alpha\nu)k_1]\,x^{k_1 - 3} = a_1 x^{n_1} - a_2 x^{n_2}.$$

Man bringt x^{n_1} zum Verschwinden, wenn man $k_1 = n_1 + 3$ setzt, und b_1 aus der Gleichung

$$(n_1 + 3)[(n_1 + 2)(n_1 + 2 - 3\alpha) - (1 + 3\alpha\nu)]\,b_1 = a_1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (19)$$

bestimmt. Ebenso wird durch den Ansatz

$$u = v + b_2 x^{n_2 + 3}$$

das zweite Glied rechts beseitigt, wobei b_2 aus Gleichung

$$(n_2 + 3)[(n_2 + 2)(n_2 + 2 - 3\alpha) - (1 + 3\alpha\nu)]\,b_2 = -a_2 \quad \ldots \ldots \ldots (19\text{a})$$

zu rechnen ist. Die verbleibende Gleichung

$$f(v) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (17\text{a})$$

wird durch den Ansatz $v = b_0 x^\lambda$ integriert, wobei λ der Gleichung

$$\lambda^3 - (2 + 3\alpha)\lambda^2 + 3\alpha(1 - \nu)\lambda = 0$$

genügen muß. Die drei Wurzeln sind

$$\left.\begin{matrix}\lambda\\ \lambda'\end{matrix}\right\} = \left(1+\frac{3\alpha}{2}\right) \pm \sqrt{\left(1+\frac{3\alpha}{2}\right)^2 - 3\alpha(1-\nu)}; \qquad \lambda'' = 0 \quad \ldots \ldots \ldots (20)$$

somit das vollständige Integral von Gl. (17)

$$z = b_0 x^{\lambda} + b_0' x^{\lambda'} + b_0'' x^0 + b_1 x^{n_1+3} + b_2 x^{n_2+3}.$$

Im Falle, daß $n_1 + 3$ oder $n_2 + 3$ gleich einer der Wurzeln λ, λ', λ'' ist, wird als Ansatz zur Integration $z = u + b x^{\lambda} \lg n\, x$, wo λ die betreffende Wurzel ist, zu wählen sein, worauf wir wegen der Seltenheit solcher Sonderwerte nicht weiter eintreten. Zur Bestimmung der Integrationskonstanten dienen bei der vollen Scheibe folgende Bedingungen:

Für $x = 0$ fordern wir $z = 0$ und dies gibt $b_0'' = 0$; ebenso soll für $x = 0$ $z' = 0$ sein, was nur möglich ist, wenn $b_0' = 0$. Es ist nämlich $(\lambda' - 1)$ stets negativ reell, wie man leicht einsehen kann, und wir erhielten, falls b_0' nicht $= 0$ wäre, bei $x = 0$ unendlich große Werte von z'.

Die der Aufgabe entsprechende Lösung ist mithin

$$z = b_0 x^{\lambda} + b_1 x^{n_1+3} + b_2 x^{n_2+3} \quad \ldots \ldots \ldots (21)$$

Den noch willkürlichen Beiwert b_0 bestimmen wir durch die Randbedingung, daß für $x = x_2 = r$ die Biegungsspannung σ_x verschwinden, d. h.

$$\left(z'' + \nu \frac{z'}{x}\right)_{x=r} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots (21\,a)$$

sein müsse. Das Verschwinden der Schubspannungen ist schon dadurch erfüllt, daß P_0 gleich dem „ideellen" Radgewichte gemacht wurde. Die Ausführung der Rechnung ergibt

$$b_0 = -\frac{1}{\lambda(\lambda - 1 + \nu)}\left[(n_1+3)(n_1+2+\nu) b_1 r^{n_1+3-\lambda} + (n_2+3)(n_2+2+\nu) b_2 r^{n_2+3-\lambda}\right] \quad \ldots (22)$$

wodurch die Aufgabe vollkommen gelöst ist. Die Spannungen selbst finden wir durch Einschieben der Ableitungen von Gl. (21) in Gl. (15).

Die Formeln sind zwar umständlich, erheischen indes wenigstens kein mühsames Probieren. Wenn der Raddurchmesser mehrere Meter erreicht, so zählt bei der wagrechten Scheibe die Durchbiegung schon nach Millimetern, und die Rechnung sollte nicht unterlassen werden.

Zur Übersicht sei die Reihenfolge des Rechnungsganges hier nochmals zusammengestellt. Durch den Entwurf des Rades ist Gl. (1) gegeben. Wir rechnen aus Gl. (12) P_0, aus Gl. (18) n_1, n_2, a_1, a_2, aus Gl. (19) und (19a) b_1, b_2, aus Gl. (20) λ, aus Gl. (22) b_0 und erhalten in Gl. (21) die Durchbiegung.

Für die Scheibe von unveränderlicher Dicke ist die Integration getrennt auszuführen und ergibt mit $\alpha = 0$, $h = \text{konst.} = h_0$,

$$z = \frac{a_1 x^4}{32} - \frac{a_2 x^2}{4}(\operatorname{logn} x - 1) + \frac{a_3 x^2}{4} \quad \ldots \ldots \ldots (23)$$

mit den Abkürzungen

$$a_1 = \frac{6(1-\nu^2)\gamma}{E h_0^2}, \qquad a_2 = \frac{6(1-\nu^2) P_0}{\pi E h_0^3} \quad \ldots \ldots \ldots (24)$$

welche Formeln schon Grashof entwickelt hat.

Zur Bestimmung von a_3 dient wieder Bedingung (21a) und man erhält

$$a_3 = -\frac{3+\nu}{4(1+\nu)} a_1 r^2 + \left[\operatorname{logn} r + \frac{1-\nu}{2(1+\nu)}\right] a_2 \quad \ldots \ldots \ldots (25)$$

und schließlich die Durchbiegung am Rande

$$(z)_{x=r} = \frac{3(1-\nu)(7+3\nu)}{16} \frac{\gamma r^4}{E h_0^2} = 1{,}037 \frac{\gamma r^4}{E h_0^2} \quad \ldots \ldots \ldots (26)$$

Reine Biegung der hyperbolischen Scheibe durch Randmomente.

a) Die **volle Scheibe** soll **am Außenrand für $x = r$ gleichmäßig verteilten biegenden Momenten** vom Betrage $\mathfrak{M}_1$ für die Längeneinheit des Umfanges ausgesetzt sein, die bei einer äußeren Randdicke h die Biegungsspannung

$$\sigma_b = \frac{\mathfrak{M}_1}{\frac{1}{6} 1 \cdot h^2} = \frac{6\,\mathfrak{M}_1}{h^2} \quad \ldots \ldots \ldots (27)$$

hervorrufen würden. Sind keine weiteren äußeren Kräfte tätig, so ist in obigen Formeln $\gamma = 0$ zu setzen, was $a_1 = a_2 = 0$ und $b_1 = b_2 = 0$ zur Folge hat, und die Lösung auf das Glied

$$z = b_0 x^{\lambda} \quad \ldots \ldots \ldots (28)$$

beschränkt. Zur Bestimmung von b_0 dient die Randbedingung, daß für $x = r$; $\sigma_x = \sigma_b$ sein muß, woraus

$$b_0 = \frac{(1-\nu^2)\,2\sigma_b}{E(\lambda - 1 + \nu)\,\lambda h r^{\lambda - 2}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (29)$$

folgt, und für die Biegungsspannungen erhält man nach Formel (15) die Werte

$$\sigma_x = \sigma_b \left(\frac{x}{r}\right)^{\lambda - 2}; \qquad \sigma_y = \frac{(\lambda - 1)\nu + 1}{\lambda - 1 + \nu}\left(\frac{x}{r}\right)^{\lambda - 2} \cdot \sigma_b \quad \ldots \ldots \ldots \quad (30)$$

Da der Exponent stets positiv bleibt, werden die Spannungen für $x = 0$ stets $= 0$.

b) **Durchlochte Scheibe mit inneren Randmomenten.** Sofern $\alpha > 1$ tritt der Einfluß der Wurzel λ zurück, und als Lösung darf angenähert

$$z = b_0' x^{\lambda'} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (31)$$

benutzt werden. Die Spannungen sind

$$\sigma_x = \frac{E\lambda' h}{2(1-\nu^2)}\left[\lambda' - 1 + \nu\right] b_0' x^{\lambda' - 2}; \quad \sigma_y = \frac{E\lambda' h}{2(1-\nu^2)}\left[\nu\lambda' + 1 - \nu\right] b_0' x^{\lambda' - 2} \quad \ldots \quad (32)$$

Ist die Spannung $\sigma_{x_1} = \sigma_{b_1}$ am Innenrand vorgeschrieben, so bestimmt sich hieraus mit $x = r_1$ der Beiwert b_0'. Da $\lambda' > 1$ zu sein pflegt, so ist z gegen die x-Achse konkav, jedoch nur schwach gekrümmt. Bemerkenswert ist das im allgemeinen hohe Verhältnis der Spannungen

$$\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = -\frac{1 - \nu + \nu\lambda'}{1 - \nu - \lambda'} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (33)$$

c) **Durchlochte Scheibe mit Außenmomenten.** Ist der Innenrand eingespannt, so dürfen bei kleinem Bohrungshalbmesser angenähert Gl. (30) als Lösung angesehen werden. Eine eigentümliche Änderung greift Platz, wenn man die Einspannung aufhebt. Dies kann in der Weise geschehen, daß man nach Herausnahme der Welle das Einspannungsmoment durch ein entgegengesetztes gleich großes Moment aufhebt. Dann müssen die nach b) gerechneten Spannungen den schon vorhandenen überlagert werden. Am Innenrand wird $(\sigma_x)_{\text{nach } b} = -(\sigma_x)_{\text{nach } a}$, es tritt aber ein σ_y hinzu, das gemäß Gl. (33) ein Vielfaches der Spannung σ_x ist. Auf diese Weise können bei **Turbinen-Laufscheiben,** wenn infolge der **Fliehkraftdehnung die Einspannung aufgehoben wird,** durch etwa eintretende **Biegungsbeanspruchung gefährliche Überspannungen erzeugt werden.**

187. Biegungsschwingungen der Laufscheiben[1]).

Die hauptsächlichen Ursachen für die Entstehung von Biegungsschwingungen, d. h. senkrecht zur Scheibenmittelebene gerichteten Auslenkungen sind die folgenden:

1. Die Turbine ist teilweise beaufschlagt, so daß jede Schaufel periodisch vom Dampfstrahl getroffen, daher (im allgemeinen) in der Richtung der Achse einem Druck ausgesetzt ist, und dann wieder in ein kräftefreies Gebiet austritt. Eine ähnliche Kraftwirkung kann auftreten durch Ungenauigkeiten der Ausführung, wenn Leit- und Laufschaufeln nicht genau konzentrisch sind, so daß ein Teil des Dampfstrahles die Scheiben oder das Deckband trifft.

2. Durch die Saugwirkung des aus dem Leitrad tretenden Strahles wird im Spalt zwischen Scheibe und Leitradboden eine wenn auch geringe Verdünnung erzeugt. Wird durch den entstehenden Überdruck die Scheibe gegen das Leitrad hin verbogen, verringert sich der Durchströmungsquerschnitt; dadurch wird die angesaugte Dampfmenge und der Unterdruck verkleinert, die Scheibe kann wieder zurückfedern, worauf sie durch verstärkte Injektorwirkung wieder angesaugt wird und so im Resonanzfall eine Verstärkung der Schwingungen möglich ist.

3. Die Wellenschwingungen, die nie ganz verschwinden und bei unvollkommener Auswuchtung sehr bemerkbar sind, ziehen die Scheiben in Mitleidenschaft.

4. Die beweglichen Kupplungen, insbesondere wenn sie ausgelaufen sind, übertragen auf die Welle, wie ein Hookesches Gelenk, nicht bloß ein veränderliches Drehungs-, sondern

[1]) Die Biegungsschwingungen umlaufender Scheiben wurden in der Literatur behandelt vom Verfasser in Schweiz. Bauztg. 1914, I. Bd., S. 112, und Rev. de Mécanique 1914. Während des Druckes erschien eine Abhandlung von Lamb und Southwell in Proc. of the Royal Soc. A. Vol. 99, 1921, S. 272, die sich jedoch nur mit der Schwingung einer Scheibe von gleichbleibender Dicke befaßt.

auch ein veränderliches Biegungsmoment, und zwar wie bekannt mit der doppelten Frequenz der Umlaufszahl.

Über das Kräftespiel bei teilweiser Beaufschlagung gibt Abb. 1004 Auskunft. Darin bedeuten die schraffierten Bogenstücke die Leitkanalgruppen, die zugleich die Gesamtkraft darstellen sollen, die von jeder Kanalgruppe ausgeübt wird. Denken wir uns den Umfang abgewickelt, jedoch auf ωt als Abszisse bezogen, so bildet a_m die mittlere Kraft während einer Umdrehung, und man kann die Kraftwirkung auch so darstellen, als ob sie aus jenem

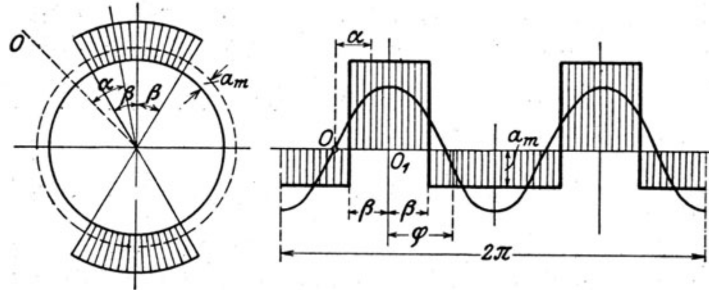


Abb. 1004. Störende Kräfte bei teilweiser Beaufschlagung.

Mittelwert und aus den schraffierten positiven und negativen Kräften bestünde, da die Summe der beiden die ursprüngliche Kraft ergibt. Die unveränderliche Mittelkraft würde eine unveränderliche und unschädlich kleine allseitig gleiche Biegung hervorrufen, die periodische Kraft verursacht die Schwingung. Man kann sie bekanntlich in eine Sinus- und Cosinusreihe zerlegen. Betrachten wir die Wirkung der in Abb. 1004 eingezeichneten Grundsinuslinie. Sie ergibt eine auf die Winkeleinheit bezogene Kraft

$$P = P_0 \sin 2\,\omega t,$$

wenn wir die Zeit vom Punkte O aus zählen. Für die zur Zeit t um den Winkel α von O abstehende Schaufel ist die Einheitskraft

$$P = P_0 \sin 2\,(\omega t + \alpha) = (P_0 \sin 2\,\omega t) \cos 2\,\alpha + (P_0 \cos 2\,\omega t) \sin 2\,\alpha.$$

Betrachten wir die Kräfte an sämtlichen Schaufeln zu einer bestimmten Zeit t, so ist t als fest, α als veränderlich anzusehen. Man erkennt, daß diese Gesamtheit zwei gegenüber dem Rade „stehende" Felder ergibt, die längs des Umfanges mit $\cos 2\,\alpha$ und $\sin 2\,\alpha$ verhältnisgleich sind, also die „Phasenverschiebung" $\pi/2$ aufweisen. Ist $\sin 2\,\omega t = 0$, so verschwindet das erste, das zweite erreicht den Höchstwert, und umgekehrt. So wird das in Wahrheit „umlaufende" Feld durch zwei stehende, d. h. stets an denselben Teilen der Scheibe angreifende Felder erzeugt. Demgemäß setzt sich auch die Schwingung aus zwei stehenden Teilschwingungen zusammen, deren Zusammenwirken freilich eine im Kreise an der Scheibe umlaufende Welle (die aus zwei Bergen und zwei Tälern besteht) ergibt. Dies wird noch klarer, wenn man beachtet, daß im Laufe der Zeit für den Punkt des Umfanges, wo $\omega t + \alpha = \text{konst}$, d. h. für den der Winkel $\alpha = \text{konst} - \omega t$ ist, die Kraft je den unveränderlichen Wert $P = P_0 \sin 2\,(\omega t + \alpha)$ annimmt, daß also in der Tat das Feld mit der Winkelschnelle $-\omega$ relativ gegenüber der Scheibe umläuft, was wieder nur soviel bedeutet, daß es unserer Annahme gemäß im Raume feststeht. Nach der allgemeinen Schwingungslehre erzeugt jedes der relativ gegen die Scheibe feststehenden Felder, wenn man von der Dämpfung absieht und vorerst Resonanz mit der Eigenschwingung ausschließt, eine Schwingung, die bei tiefliegender Kraftfrequenz mit der Kraft phasengleich ist (bei über der Resonanz liegender Kraftfrequenz eine um 180^0 verschobene Phase besitzt). Daraus folgt, daß die resultierende Schwingungsform der Scheibe ebenfalls im Raume feststehen und dem Schwingungsfelde ähnlich sein wird. Wenn jedoch, in der Nähe der Resonanz, die Dämpfung bemerkbar wird, tritt eine Phasenverschiebung ein, die für diejenige Harmonische, die sich gerade in Resonanz befindet, 90^0 ausmacht. In solchen Fällen besteht mit dem Felde keine Ähnlichkeit mehr. Noch verwickelter sind die Verhältnisse, wenn die erregende Kraft nicht von so einfacher Beschaffenheit ist, wie oben vorausgesetzt, also z. B., wenn sie von Wellenschwingungen oder von unregelmäßigen Stößen in der Kupplung herstammt.

In allen Fällen wird die erste Aufgabe die Ermittelung der harmonischen Kraftkomponenten sein. Zu diesem Zwecke wird man die durch Abb. 1004 dargestellte axiale Kraft als Fourierreihe des Winkels φ entwickeln, und erhält, wenn a_m den Mittelwert der Kraft, β den halben Zentriwinkel der Beaufschlagungsgruppe bedeutet, für die Schaufel, die mit der Lage O_1 den Winkel φ einschließt, zur Zeit t die Kraft

$$f(\varphi+\omega t)=\frac{2\,a_m}{\beta}\left[\sin\beta\cos(\varphi+\omega t)+\frac{\sin 2\beta}{2}\cos 2(\varphi+\omega t)+\frac{\sin 3\beta}{3}\cos 3(\varphi+\omega t)+\ldots\right].$$

Das erregende Feld enthält mithin alle Harmonischen vom einfachen $\cos\omega t$ hinauf; die Periode der erregenden Teilkräfte ist der Reihe nach 1, $^1/_2$, $^1/_3$, ... der Dauer einer Umdrehung, oder die Zahl der Impulse beträgt 1, 2, 3, ... für je eine Umdrehung. Die wichtigste Aufgabe, die zu lösen ist, besteht daher in der Bestimmung der Eigenschwingungszahl und der Feststellung, ob ihre Frequenz mit einer der Harmonischen übereinstimmt oder nicht.

a) Die Eigenschwingungszahl.

Die Eigenschwingungszahl eines sich drehenden Turbinenlaufrades kann mittels des Satzes von Rayleigh bestimmt werden. Man berechnet aus einer angenommenen, den Grenzbedingungen tunlichst genügenden, im übrigen willkürlichen Formänderung der Scheibe die potentielle Energie der Biegung Φ_i, ferner die Arbeit der Fliehkräfte, die während der Biegung geleistet worden ist Φ_z, endlich die kinetische Energie der Scheibenmasse beim Durchgang durch die spannungslose Mittellage unter Annahme einer einfachen, harmonischen Schwingung, so daß die Auslenkung irgendeines Scheibenpunktes durch den Ausdruck $w=v.\cos\lambda t$ gegeben würde, wo v nur eine Funktion der Koordinaten ist. Die kinetische Energie Φ_k wird sich alsdann als

$$\Phi_k=K_0\,\lambda^2$$

darstellen. Die Gesamtenergie der Scheibe in der äußersten Grenzlage ist die Summe $\Phi_i+\Phi_z$; anderseits ist sie in der Mittellage $=K_0\,\lambda^2$. Der Energiesatz fordert die Gleichheit dieser beiden Werte, also folgt

$$\lambda^2=\frac{\Phi_i+\Phi_z}{K_0}$$

und aus λ die sekundliche Schwingungszahl

$$N_{\text{sek}}=\frac{\lambda}{2\pi}.$$

Der so berechnete Wert kommt der wahren Schwingungszahl um so näher, je genauer die angenommene Form der Verbiegung mit der tatsächlichen übereinstimmt. Nach dem von Rayleigh bewiesenen Satz ist die wahre Schwingungszahl ein Mindestwert, sofern es sich um die tiefste Schwingung handelt. Wenn wir also mindestens drei verschiedene Biegungsformen untersuchen und die erhaltenen Schwingungszahlen als Abhängige irgendeines die Form kennzeichnenden Parameters auftragen, so kann durch die erhaltenen drei Punkte eine Parabel hindurchgelegt werden, deren kleinste Ordinate, wie Proberechnungen zeigen, den wahren Wert der Schwingungszahl mit praktisch sehr befriedigender Genauigkeit wiedergibt. Jede Art analytischer Rechnung versagt indessen erfahrungsgemäß wegen der außerordentlichen Umständlichkeit des rechnerischen Apparates. Wir entwickeln daher eine graphische Methode, die in gleicher Weise bei einfachen und verwickelten Scheibenformen anwendbar ist, unabhängig von den Bedingungen, denen hinsichtlich der Einspannung oder der Schaufelkräfte die Nabe und der Kranz unterworfen sind.

1. Graphische Bestimmung der Formänderungsarbeit.

Es bedeute

h' die veränderliche halbe Dicke der Scheibe im Abstande r.

$\varrho_1\,\varrho_2$ die Hauptkrümmungsradien der verbogenen Mittelfläche in einem beliebigen Punkte.

$\sigma_1\,\sigma_2$ die in den Hauptschnitten je in der äußersten Faser herrschenden Biegungsspannungen.

ν das Verhältnis der Querzusammenziehung zur Längendehnung.

Wir führen ferner die Bezeichnung ein

$$E' = \frac{E}{1-\nu^2} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

wo E die gewöhnliche Elastizitätszahl bedeutet. Dem Krümmungshalbmesser ϱ_1 entspricht in der äußersten Faser die Hauptdehnung

$$\varepsilon_1 = \frac{h'}{\varrho_1}, \text{ ebenso im zweiten Hauptschnitt } \varepsilon_2 = \frac{h'}{\varrho_2} \quad \dots\dots\dots \quad (1a)$$

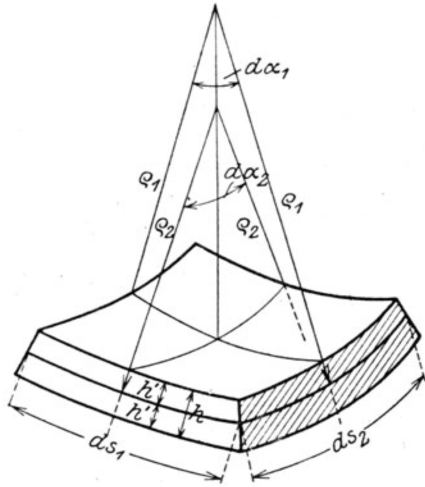


Abb. 1005. Biegung eines Scheibenelementes.

(die Fliehkraftdehnung fällt als während der Biegung angenähert unveränderlich außer Betracht). Daraus ergeben sich für die Hauptspannungen die bekannten Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= E'(\varepsilon_1 + \nu\,\varepsilon_2) = E'\cdot h'\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{\nu}{\varrho_2}\right) \\ \sigma_2 &= E'(\nu\,\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = E'\,h'\left(\frac{\nu}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right) \end{aligned}\right\} \quad \dots \quad (2)$$

Schneiden wir durch zu den Hauptabschnitten parallele Ebenen ein Parallelepiped mit den Seitenlängen $d s_1 = \varrho_1\, d\alpha_1$, $d s_2 = \varrho_2\, d\alpha_2$ (Abb. 1005) heraus, so ist das Widerstandsmoment in der zum ersten Hauptschnitt senkrechten Stirnfläche $ds_2(2h')^2/6$. Demnach ist das Moment der Biegungsspannungen in jenem Schnitt $M_1 = d s_2 (2h')^2\cdot\sigma_1/6$. Der Biegungswinkel $d\alpha_1$, den dieses Moment hervorruft, ist dem Momente verhältnisgleich; die Arbeit, die das Moment vom spannungslosen Zustande aus geleitet hat, ist mithin

$$\frac{1}{2} M_1\, d\alpha_1 = \frac{1}{2} M_1 \frac{d s_1}{\varrho_1} = \frac{E' h'^3}{3}\left\{\frac{1}{\varrho_1}+\frac{\nu}{\varrho_2}\right\}\frac{1}{\varrho_1}\, d s_1\, d s_2 \quad \dots\dots\dots$$

Ebenso erhalten wir für die Arbeit des in der zweiten Stirnfläche wirkenden Momentes den Ausdruck

$$\frac{1}{2} M_2\, d\alpha_2 = \frac{1}{2} M_2 \frac{d s_2}{\varrho_2} = \frac{E' h'^3}{3}\left\{\frac{\nu}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right\}\frac{1}{\varrho_2}\, d s_1\, d s_2 \quad \dots\dots\dots \quad (3)$$

Die Summe dieser beiden Arbeiten ist aber nichts anderes als die Formänderungsarbeit, die das Element aufgenommen hat, oder mit $d s_1\, d s_2 = d f$:

$$d\Phi_i = \frac{E' h'^3}{3}\left\{\frac{1}{\varrho_1^2}+\frac{2\nu}{\varrho_1\varrho_2}+\frac{1}{\varrho_2^2}\right\} d f = \frac{E' h'^3}{3}\left[\left\{\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right\}^2 - \frac{2(1-\nu)}{\varrho_1\varrho_2}\right]\cdot d f \quad \dots \quad (4)$$

Nun ist bei der vorauszusetzenden Kleinheit der Neigung der Biegungsfläche, d. h. bei Vernachlässigung der ersten Ableitung der Auslenkung w nach den Koordinaten, bekanntlich (Hütte, 22. Aufl., S. 119), wenn mit den Fußzeichen $x\ y$ die betreffenden Ableitungen bezeichnet werden:

$$\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2} = w_{xx} + w_{yy}; \qquad \frac{1}{\varrho_1\cdot\varrho_2} = w_{xx} w_{yy} - w_{xy}^2 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (5)$$

Diese Ausdrücke lauten, in Polarkoordinaten $r\varphi$ umgerechnet, wenn die Ableitung nach r mit dem Fußzeichen 1, diejenige nach φ mit 2 bezeichnet wird (Föppl, Mechanik, Bd. 5, 1. Aufl., S. 70).

$$\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2} = w_{11} + \frac{w_1}{r} + \frac{w_{22}}{r^2}; \qquad \frac{1}{\varrho_1\varrho_2} = w_{11}\left(\frac{w_1}{r}+\frac{w_{22}}{r^2}\right) - \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{w_2}{r}\right)\right]^2 \quad \dots \quad (6)$$

Das Flächenelement der Mittelfläche in Polarkoordinaten ist $df = r\,dr\,d\varphi$, demnach die potentielle Energie der ganzen Scheibe

$$\Phi_i = \iint \frac{E' h'^3}{3}\left[\left\{w_{11} + \frac{w_1}{r} + \frac{w_{22}}{r^2}\right\}^2 - 2(1-\nu)\left\{w_{11}\left(\frac{w_1}{r}+\frac{w_{22}}{r^2}\right) - \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{w_2}{r}\right)\right]^2\right\}\right] r\,dr\,d\varphi \quad (7)$$

Als Ansatz für die Auslenkung eines Scheibenpunktes aus der spannungslosen Mittellage wählen wir den Ausdruck

$$w = f(r) \sin k\varphi \cos \lambda t \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

Die Biegungsfläche besitzt hiernach k **„Knotendurchmesser“**. $f(r)$ stellt die Schnittlinie der Biegungsfläche mit der in der Winkelhalbierenden zweier Knotendurchmesser liegenden axialen Schnittebene dar. Die Zahl ihrer Schnittpunkte mit der Abszissenachse liefert die Zahl der Knotenkreise. Die Randbedingungen besprechen wir weiter unten und nehmen an, daß die Form der Biegungslinie $f(r)$ graphisch angenommen werde.

Für die Bestimmung der gesamten Formänderungsarbeit ist die äußerste Lage der verbogenen Scheibe, d. h. $\lambda t = 0$, $\cos \lambda t = 1$, also $w = f(r) \sin k\varphi$ maßgebend. Daraus ergeben sich die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} &= \left\{f_{11} + \frac{f_1}{r} - \frac{k^2 f}{r^2}\right\} \sin k\varphi = A \sin k\varphi \quad \ldots \ldots \\ \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} &= f_{11}\left\{\frac{f_1}{r} - \frac{k^2 f}{r^2}\right\} \sin^2 k\varphi - \left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{f}{r}\right)\right\}^2 k^2 \cos^2 k\varphi \quad \ldots \ldots \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

$$= B \sin^2 k\varphi - C \cos^2 k\varphi$$

$$\text{mit } A = f_{11} + \frac{f_1}{r} - \frac{k^2 f}{r^2}; \quad B = f_{11}\left(\frac{f_1}{r} - \frac{k^2 f}{r^2}\right); \quad C = \left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{f}{r}\right)\right\}^2 k^2 = k^2\left(\frac{f_1}{r} - \frac{f}{r^2}\right)^2 \quad \ldots \quad (10)$$

Also ist der Ausdruck für die Formänderungsarbeit nach Gl. (4) oder (7)

$$\Phi_i = \iint \frac{E' h'^3}{3} F(r, \varphi)\, r\, dr\, d\varphi \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

Darin bedeutet gemäß Gl. (9)

$$F(r, \varphi) = A^2 \sin^2 k\varphi - 2(1 - \nu)\{B \sin^2 k\varphi - C \cos^2 k\varphi\} \quad \ldots \ldots \quad (11\text{a})$$

Die Integration nach φ kann sofort vollzogen werden. Wir beschränken uns für alles weitere auf den halben zwischen zwei Knotenhalbmessern eingeschlossenen Kreisausschnitt, d. h. wir haben zwischen den Werten $k\varphi = 0$ und $k\varphi = \pi/2$ zu integrieren, und erhalten mit

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 k\varphi\, d(k\varphi) = \int_0^{\pi/2} \cos^2 k\varphi\, d(k\varphi) = \frac{\pi}{4} \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

und wenn wir schreiben

$$F(r\varphi) = [A^2 - 2(1 - \nu) B] \sin^2 k\varphi + 2(1 - \nu) C \cos^2 k\varphi \quad \ldots \ldots \quad (13)$$

$$\Phi_i = \int_{x_0}^{R} \frac{E' h'^3}{3} r\, dr \left\{[A^2 - 2(1 - \nu) B] \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 k\varphi\, dk\varphi}{k} + 2(1 - \nu) C \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 k\varphi\, dk\varphi}{k}\right\}$$

oder mit der Abkürzung

$$F_i(r) = \frac{E' h'^3}{3} \frac{\pi}{4k} [A^2 - 2(1 - \nu)(B - C)]\, r =$$

$$= \frac{E' h'^3 \pi}{12k} \left[\left\{f_{11} + \frac{f_1}{r} - \frac{k^2 f}{r^2}\right\}^2 - 2(1 - \nu)\left\{f_{11}\left(\frac{f_1}{r} - \frac{k^2 f}{r^2}\right) - k^2\left(\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{f}{r}\right]\right)^2\right\}\right] r \quad \ldots \quad (14)$$

die Integralform

$$\Phi_i = \int_{r_0}^{R} F_i(r)\, dr \quad \ldots \ldots \quad (15)$$

Man wird hiernach aus der angenommenen Biegungslinie zunächst graphisch die Ableitungen f_1 f_{11} ermitteln, mit ihrer Hilfe die Funktion A, B, C nach Gl. (10) bilden, $F_i(r)$ nach Gl. (14) berechnen, längs des Halbmessers auftragen, und Φ_i als Flächeninhalt nach Gl. 15 bestimmen.

2. Die kinetische Energie.

Bedeutet c die maximale Schwingungsgeschwindigkeit eines Massenelementes, so ist

$$c = \frac{dw}{dt} = -f(r)\sin k\varphi \sin\lambda t\cdot\lambda$$

und nimmt für $\lambda t = \pi/2$ den Absolutwert $c = f(r)\lambda\sin k\varphi$ an. Ferner ist das Massenelement $dm = \mu r\,dr\,d\varphi\,2h'$; demnach wird der Höchstwert der kinetischen Energie durch den Ausdruck

$$\Phi_k = \frac{1}{2}\int dm\,c^2 = \int_{r_0}^{R} f(r)^2\mu r\,dr\,\lambda^2 h' \int_0^{\pi/2}\sin^2 k\varphi\,\frac{dk\varphi}{k}$$

dargestellt. Die Integration nach der Variablen $k\varphi$ liefert den Wert $\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$; demnach ist mit den Bezeichnungen

$$F_k(r) = \frac{\pi}{4}\,\frac{\mu h'}{k}[f(r)]^2\cdot r \quad . . . (16) \qquad \Phi_k = \lambda^2 K_0 \quad . . . . . . (17)$$

$$K_0 = \int_{r_0}^{R} F_k(r)\,dr \quad . . . . (18)$$

3. Die Arbeit der Fliehkräfte.

Die an einem Massenelement im Punkte A_0 (Abb. 1006) angreifende Fliehkraft δQ leistet

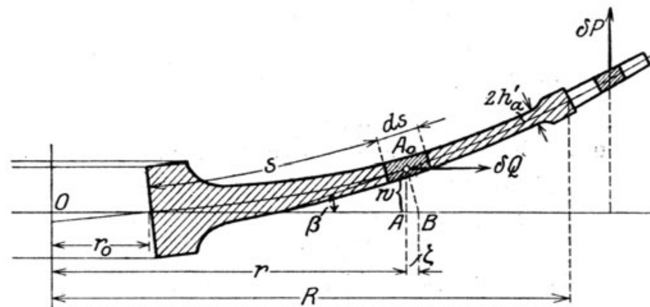


Abb. 1006. Arbeit der Fliehkräfte.

beim Übergang aus der äußersten Stellung der Scheibe in die Mittellage die Arbeit $\delta Q\zeta$, wo ζ der Unterschied der Längen $OB = r'$ und $OA = r$ ist.

Es wird also die Fliehkraftarbeit

$$\Phi_z = \int\delta Q\zeta = \int_0^R\int_0^{\pi/2k}(\mu r\,dr\,d\varphi\,2h')\,r\omega^2\zeta \quad . . . . (19)$$

In der V. Auflage wurde ζ unter der Annahme berechnet, daß die Dehnung der Mittelfläche in der gebogenen und der gestreckten Lage gleich sei. Nähere Untersuchung zeigt, daß der Unterschied allerdings klein zweiter Ordnung ist, wenn man die Biegungsauslenkung erster Ordnung klein annimmt. Da aber ζ selbst zweiter Ordnung klein ist, kommt die Fliehkraftarbeit um einen endlichen Bruchteil ihres wahren Wertes zu klein heraus.

Wie im „Nachtrag“ entwickelt wird, kann für Φ_z der folgende streng richtige Ausdruck abgeleitet werden

$$\Phi_z = \frac{1}{2}\iint\left[\sigma_r\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \sigma_t\left(\frac{\partial w}{r\,\partial\varphi}\right)^2\right] r\,dr\,d\varphi\,h \quad . . . . (20)$$

worin $\sigma_r\,\sigma_t$ die in der unverbogenen Lage durch die Fliehkraft erzeugten Spannungen bedeuten. Wie die Fliehkraft der Schaufeln zu berücksichtigen ist, wird im Nachtrag gezeigt. Für die äußerste Lage, auf die es in Gl. (20) ankommt, ist $\partial w/\partial r = (\partial f/\partial r)\sin k\varphi$; $(\partial w/r\,d\varphi) = (f k/r)\cos k\varphi$. Indem man nach φ integriert, entsteht für den halben Sektor

$$\Phi_z = \int_0^R F_z(r)\,dr \qquad (21)$$

mit der Bezeichnung

$$F_z(r) = \frac{\pi}{4k}\left[\sigma_r\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \sigma_t\left(\frac{k f}{r}\right)^2\right] h' r \qquad (22)$$

Die Gleichheit der Gesamtenergie für die äußerste und für die Mittellage wird, wie schon oben ausgeführt, durch die Gleichung $\Phi_k = \Phi_i + \Phi_z$ ausgedrückt; also folgt mit $\Phi_k = \lambda^2 K_0$

$$\lambda^2 = (2\pi N_{sek})^2 = \frac{\Phi_i + \Phi_z}{K_0} \qquad (23)$$

4. Die Randbedingungen.

Den inneren Rand der Nabe wird man im allgemeinen wohl als spannungsfrei ansehen; allein bei stark aufgezogenen Rädern darf aus dem Unterschied der effektiven kritischen Umlaufzahl gegenüber derjenigen der frei biegsamen Welle mit nicht klemmenden Scheiben auf eine gewisse Einspannung der Nabe geschlossen werden. Man wird daher wohl am besten die beiden Grenzannahmen nacheinander durchrechnen, nämlich die Nabe entweder vollkommen spannungsfrei oder dann so eingespannt voraussetzen, daß während der Schwingung zwar die gleichmäßig verteilte radiale Spannung 0 ist, daß aber die elastische Linie die Abszissenachse berührt. Im ersten Fall ist die Kirchhoffsche Randbedingung[1])

$$w_{11} + \nu\left(\frac{w_{22}}{x^2} + \frac{w_1}{r}\right) = 0 \qquad \text{oder} \qquad \frac{\nu}{1-\nu}\left(w_{11} + \frac{w}{r} + \frac{w_{22}}{r^2}\right) + w_{11} = 0 \qquad (24)$$

In unserem Fall ergibt sich also mit $\cos\lambda t = 1$

$$\left\{f_{11} + \nu\left[\frac{f_1}{r} - \frac{k^2 f}{r^2}\right]\right\}_{\text{für } r=r_0} = 0 \qquad (25)$$

Aus Formel 25 kann für den willkürlich angenommenen Anfangswert von f bzw. f_1 bei $r = r_0$ der entsprechende Wert von f_{11}, d. h. der Krümmungsradius am inneren Rand berechnet werden. Setzen wir die Nabe als vollkommen eingespannt voraus, so wird der Randbedingung durch die Annahme einer im innersten Punkte berührenden Biegungslinie von selbst Genüge getan. Die Abwesenheit von Schubspannungen und Drillungsmomenten würde die Erfüllung der zweiten Kirchhoffschen Randbedingung erfordern[2]). Diese Gleichung ist indessen so verwickelt, daß wir von ihrer Anwendung absehen wollen. Es ist in der Tat der Hauptvorzug des Verfahrens von Rayleigh, daß die Grenzbedingungen nicht im mathematisch strengen Sinn erfüllt zu werden brauchen, da der Mindestwert sich durch die graphische Interpolation von selbst ergibt. Auch zeigt die Übereinstimmung des Ergebnisses bei der ruhenden Scheibe gleicher Dicke mit den mathematisch strengen Rechnungen von Kirchhoff, daß eine befriedigende Genauigkeit erreicht werden kann.

Am Außenrande ist bei großen Schaufeln, deren Fliehkraftarbeit und kinetische Energie nicht vernachlässigbar sind, zunächst zu Φ_k und zu Φ_z ein Zuschlag anzufügen, der am einfachsten in der Weise berechnet wird, daß man die Schaufeln durch einen zusammenhängenden Ring ersetzt, dessen radiale Breite gleich der Schaufellänge ist und dessen axiale Stärke $2h'$ so bemessen wird, daß im Durchschnitt jedem seiner Elemente dieselbe Masse zukommt, wie den in demselben Bezirk enthaltenen Schaufeln. Dieser Ring trägt selbstverständlich nichts zur potentiellen Energie bei, und wir müssen ihn der Schaufelstellung entsprechend mit radialen Schlitzen versehen denken. —

---

[1]) Schweiz. Bauztg. 1914, Bd. I, S. 172, Formel (9). [2]) Desgl. Formel (13).

Die Randbedingung bezieht sich eigentlich auf den Scheibenkranz, den wir durch ein Viereck von gleichem Flächeninhalt versehen. Auf diesen Kranz wird durch die Trägheitskräfte der Schaufeln ein Biegungsmoment und eine Schubkraft übertragen. Die elementare Masse δm in Abb. 1006 entwickelt eine Trägheitskraft vom Absolutbetrag $\delta P = \delta m \cdot \ddot{w}$. In der äußersten Lage während der Bewegungsumkehr der Schwingung ist die Beschleunigung nach einwärts, also die Trägheitskraft nach auswärts gerichtet. Die Resultierende der Trägheitskräfte ist mit r_1, r_2 als Grenzhalbmesser

$$P = \int_{r_1}^{r_2} \delta m \, \ddot{w} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (26)$$

das Moment derselben in bezug auf den Endquerschnitt des Kranzes

$$M = \int_{r_1}^{r_2} \delta m \, \ddot{w} \, (r - r_1) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (27)$$

Hierin ist $\ddot{w} = -\lambda^2 f(r) \sin k\varphi \cos \lambda t$, der Absolutbetrag bei äußerster Auslenkung $= \lambda^2 f(r) \sin k\varphi$.

Auch diese Rechnung darf man vereinfachen, indem man den Schwerpunktsabstand w_s der Schaufeln von der Mittelfläche bei äußerster Auslenkung der Schaufel bestimmt und als Trägheitskraft $\lambda^2 w_s m$ einführt, wo m die Masse der Schaufel bedeutet. Das Produkt dieser Kraft mit dem radialen Abstand des Schwerpunktes vom Kranze liefert das Gesamtmoment einer Schaufel, zu welcher man mit Rücksicht auf das Zentrifugalmoment der Trägheitskräfte der einzelnen Schaufelelemente einen gewissen Zuschlag machen könnte. Durch Division mit der Teilung am Kranzumfang ergibt sich das Moment

$$M_{1s} \sin k\varphi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (28)$$

Nun ist die radiale Biegungsspannung

$$\sigma_{rb} = E' h_a' \left(\frac{1}{\varrho_r} + \frac{\nu}{\varrho_t}\right) = E' h_a' \left\{f_{11} + \nu\left(\frac{f_1}{r} - \frac{k^2 f}{r^2}\right)\right\} \sin k\varphi \quad \ldots \ldots \quad (29)$$

also erhält man als erste Grenzbedingung, da $M_{1s} \sin k\varphi = \frac{2}{3} h_a'^2 \sigma_{rb}$

$$f_{11} + \nu\left(\frac{f_1}{r} - \frac{k^2 f}{r^2}\right) = \frac{3}{2 E' h_a'^3} M_{1s} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (30)$$

Im übrigen darf wohl, ohne im Endergebnis merkliche Fehler zu verursachen, auch die Grenzbedingung (30) vernachlässigt werden. Höchstens werden wir ihrem Einfluß durch eine etwas vermehrte Krümmung der Biegungslinie am Kranzende Rechnung tragen.

Der Beitrag der Schaufeln zur kinetischen Energie und zur Fliehkraftarbeit hingegen wird streng berücksichtigt durch Ausdehnung der betreffenden Integrale bis zur Schaufelspitze.

5. Umgestaltung der Formeln auf dimensionslose Integrale.

Bezeichnen wir die Auslenkung im äußersten Scheibenpunkte mit $y_0 = f(R)$, so bildet der Quotient

$$\frac{f(r)}{f(R)} = \frac{f(r)}{y_0} = \varphi(r) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (30\text{a})$$

eine dimensionslose Größe. Wir führen ferner das ebenfalls dimensionslose Verhältnis

$$x = r/R, \quad \text{also} \quad r = Rx \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (31)$$

in die Gleichung ein und erhalten dadurch

$$f(r) = y_0 \varphi(r) = y_0 \cdot \varphi(x \cdot R) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (32)$$

Die Funktion $\varphi(xR)$ kann abgekürzt als $\psi(x)$ bezeichnet werden, und die Ableitungen von $f(r)$ sind dann

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{d\,[y_0 \psi(x)]}{dx} \cdot \frac{1}{R} = \frac{y_0}{R} \psi_1(x) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (33)$$

$$f_{11} = \frac{y_0}{R} \frac{d\psi_1(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dr} = \frac{y_0}{R^2} \psi_{11}(x) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (34)$$

Durch Einführung dieser Werte in die Gleichungen (10) erhalten wir

$$A = \frac{y_0}{R^2}\left(\psi_{11} + \frac{\psi_1}{x} - \frac{k^2\psi}{x^2}\right) = \frac{y_0}{R^2}\cdot A_x \quad (35)$$

$$B = \frac{y_0^2}{R^4}\,\psi_{11}\left(\frac{\psi_1}{x} - \frac{k^2\psi}{x^2}\right) = \frac{y_0^2}{R^4}\cdot B_x \quad (36)$$

$$C = \frac{y_0^2 k^2}{R^4}\left(\frac{\psi_1}{x} - \frac{\psi}{x^2}\right)^2 = \frac{y_0^2}{R^4}\cdot C_x \quad (37)$$

Bezeichnen wir ferner mit h_0' die **halbe** Dicke der eigentlichen Radscheibe (nicht des Kranzes) am Außenumfang, so wird für den Abstand r

$$\frac{h'}{h'_0} = \text{Funktion von } r = \text{Funktion von } x \quad (38)$$

ein reines Zahlenverhältnis (identisch mit dem in einem bestimmten Maßstab aufgetragenen h') und kann ebenfalls als Funktion von x aufgezeichnet werden. Dann stellt sich nach Gl. (14) die Funktion $F_i(r)$ als

$$F_i(r) = \frac{E' h_0'^3 y_0^2}{R^3}\,\Psi_i(x)$$

dar, mit der Bezeichnung

$$\Psi_i(x) = \frac{\pi}{12\,k}\left[A_x^2 - 2(1-\nu)(B_x - C_x)\right]\left(\frac{h'}{h_0'}\right)^3 x \quad (39)$$

Demnach wird die innere Energie gemäß Gl. (15)

$$\Phi_i = \frac{E' h_0'^3 y_0^2}{R^2}\int_0^1 \Psi_i(x)\,dx \quad (40)$$

Für die kinetische Energie ist gemäß Formel (16) mit

$$\Psi_k(x) = \frac{\pi}{4\,k}\left(\frac{h'}{h_0'}\right)\psi^2(x)\cdot x \quad (41)$$

$$F_k(r) = \mu\, h_0'\, y_0^2\, R\, \Psi_k(x) \quad (41a)$$

also weiterhin die Funktion

$$K_0 = \int_0^R F_k(r)\,d(Rx) = \mu\, h_0'\, y_0^2\, R^2 \int_0^1 \Psi_k(x)\,dx \quad (42)$$

Hiernach der Höchstwert der kinetischen Energie selber

$$\Phi_k = \lambda^2 K_0 \quad (43)$$

Um die Fliehkraftarbeit auszudrücken, führen wir die Umfangsspannung eines frei mit ω umlaufenden Ringes vom Halbmesser R

$$\sigma_u = \mu\,\omega^2 R^2 \quad (44)$$

ein. Dann wird mit der Bezeichnung

$$\Psi_z(x) = \frac{\pi}{4k}\left[\frac{\sigma_r}{\sigma_u}\psi_1^2(x) + \frac{\sigma_t}{\sigma_u}\left(\frac{k\psi}{x}\right)^2\right]\frac{h'}{h_0'}\,x \quad (45)$$

die Fliehkraftarbeit

$$\Phi_z = \mu\,\omega^2 R^2 y_0^2 h_0' \int_0^1 \Psi_z(x)\,dx \quad (46)$$

Die in obigen Gleichungen vorkommenden bestimmten Integrale sind von der Scheibenform

abhängige reine Zahlen. Wir führen die Bezeichnungen ein

$$\int_0^1 \Psi_i(x)\,dx = C_i; \quad \int_0^1 \Psi_k(x)\,dx = C_k; \quad \int_0^1 \Psi_z(x)\,dx = C_z \quad \dots\dots (47)$$

Die Formel zur Berechnung der Schwingungszahl lautet dann

$$\lambda^2 = (2\pi N_{sek})^2 = \frac{\Phi_i + \Phi_z}{K_0} = \frac{E' h_0'^2}{\mu R^4} \frac{C_i}{C_k} + \omega^2 \frac{C_z}{C_k} \quad \dots\dots\dots (48)$$

6. Schwingung ohne Knotendurchmesser.

Um die Formeln dieser besonderen Schwingungsform zu erhalten, darf man nicht etwa $k = 0$ setzen, sondern muß alle Abgleitungen nach φ als verschwindend betrachten. Die nötigen Integrationen sind mit dem neuen Ansatz

$$w = f(r) \cos(\lambda t)$$

unter Benützung des Raumelements $2\pi r\,dr\,2h'$ über die ganze Scheibe auszudehnen. Die Umformung auf dimensionslose Funktionen, mit $f(r) = y_0 \psi(x)$ und $r = Rx$ führt zu folgenden Ergebnissen:

Potentielle Energie

$$\Phi_i = \frac{E' h_0'^3 y_0^2}{R^2} \int_0^1 \Psi_i(x)\,dx \quad \text{mit} \quad \Psi_i(x) = \frac{2\pi}{3}\left(\frac{h'}{h_0'}\right)^3 \left[\left(\psi_{11} + \frac{\psi_1}{x}\right)^2 - 2(1-\nu)\frac{\psi_1 \psi_{11}}{x}\right] x. \,(49)$$

Kinetische Energie

$$\Phi_k = \lambda^2 K_0; \quad \text{mit} \quad K_0 = \mu h_0' y_0^2 R^2 \int_0^1 \Psi_k(x)\,dx; \quad \Psi_k(x) = \frac{\pi}{4k}\left(\frac{\sigma_r}{\sigma_u}\right) \psi_1'^2 \left(\frac{h'}{h_0'}\right) x \;.\; (50)$$

Fliehkraftarbeit

$$\Phi_z = \mu h_0' R^2 y_0^2 \omega^2 \int_0^1 \Psi_z(x)\,dx \quad \text{mit} \quad \Psi_z(x) = 2\pi\left(\frac{h'}{h_0}\right) x^2 \int_0^x \psi_1^2(x)\,dx \;.\; (51)$$

und wenn man die Abkürzungen

$$\int_0^1 \Psi_i(x)\,dx = C_i; \quad \int_0^1 \Psi_k(x)\,dx = C_k; \quad \int_0^1 \Psi_z(x)\,dx = C_z \quad \dots\dots (52)$$

einführt, so erhält man wie unter Gl. (48)

$$\lambda^2 = (2\pi N_{sek})^2 = \frac{\Phi_1 + \Phi_z}{K_0} = \frac{E' h_0'^2}{\mu R^4} \frac{C_i}{C_k} + \omega^2 \frac{C_z}{C_k} \quad \dots\dots\dots (53)$$

7. Bemerkungen über die praktische Durchführung der Rechnung.

Da die Biegungsenergie im wesentlichen von der Krümmung ψ_{11} abhängt, wird man in erster Linie diese als ungefähr parabelförmige Kurve annehmen, durch eine erste Integration ψ_1, durch eine zweite ψ bestimmen, und die Maßstäbe zum Schluß so abändern, daß für $r = R$; $\psi = 1$ wird. Als einer der die Kurvenform kennzeichnenden „Parameter" kann der Abstand des Scheitels der ψ_{11}-Kurve von der Achse gelten. Um die „Variation" zu einer vollständigen zu machen, sollte eine Reihe von Parabeln mit breiter Kuppe und eine zweite Reihe mit schmaler Kuppe untersucht werden. Ist eine Scheibe gründlich bearbeitet, so hat man die Anhaltspunkte, um bei einer anderen von ähnlicher Form die Zahl der Annahmen wesentlich einzuschränken.

Die Biegungsspannung σ_x wird bei schroffem Übergang des Scheibenkörpers in eine lange Nabe offenbar nur allmählich die Nabe in Mitleidenschaft zu ziehen vermögen. Man wird daher die Ecken des die Nabe bildenden Rechteckes außen nach Schätzung abrunden.

b) Einfluß ungleicher Scheibenerwärmung auf die Eigenschwingungszahl. Gefahr des Einknickens des Scheibenrandes.

Für die gleichmäßig erwärmte Scheibe konnte die durch radiale und Umfangsdehnung hervorgerufene Energie der elastischen Kräfte von der durch Schwingungen bewirkten Formänderung als unabhängig angesehen werden. Bei ungleicher Erwärmung ist dies nicht mehr der Fall. Es sei beispielsweise der Kranz heißer als die Nabe; bei ruhender Scheibe entstehen dann im Kranze tangentiale Druckspannungen, die man leicht durch Erhöhung der Temperatur so weit steigern könnte, daß der Rand (nach Art verunglückter Fahrradkränze) einknicken müßte. Schon bevor dies eintreten kann, wird jedoch die Schwingungszahl beeinflußt, und zwar für alle Formen, wo sich Knotendurchmesser bilden, herabgesetzt. In der äußersten Auslenkung nimmt der Kranz in der Tat die Form einer Schlangenlinie an, deren gestreckte Länge größer ist als in der ebenen Mittellage der Scheibe. Die Kranzfasern können sich daher ausdehnen; die Druckspannung und die ihr entsprechende potentielle Energie nehmen ab. Im Sinne des Satzes von Rayleigh ist aber die kinetische Energie und die Dehnungsenergie in der Mittellage gleich der Biegungsenergie und der Dehnungsenergie in der äußersten Lage. Da man die Biegungsenergie bei gleich- und bei ungleichmäßiger Erwärmung als im wesentlichen gleich groß ansehen kann, so wird hiernach bei heißem Kranz die kinetische Energie kleiner, und die Eigenschwingungszahl wird herabgesetzt.

Erreicht die Kranztemperatur die „Knickgrenze", so sinkt die Eigenschwingungszahl auf Null herab; denn an dieser Grenze befindet sich ja die Scheibe bei beliebigen Auslenkungen, sofern diese unendlich klein sind (und der vorausgesetzten Knickungsform genügen), im indifferenten Gleichgewicht (sie schwingt also aus der ausgelenkten Lage weder vor noch zurück).

Durch die Fliehkraft wird im Betriebe die Ausbildung einer erheblicheren Druckkraft im Kranze meist verhindert und die Knickgefahr beseitigt. Der Einfluß auf die Eigenschwingungszahl bleibt bestehen. Wir behalten uns die Veröffentlichung der etwas umständlichen rechnerischen Untersuchung dieser wichtigen Fragen an anderer Stelle vor.

c) Einfluß der Nabeneinspannung.

Ist die Nabe im Betriebe, wenn nicht locker, so doch nicht „eingespannt", so daß die elastische Linie während der Schwingung einen Winkel mit der Normalen zur Welle bilden kann, so wird hierdurch die Schwingungszahl gegenüber der Annahme voller Einspannung herabgesetzt. Bei glockenförmiger Mittelfläche (ohne Knotendurchmesser) kann die Erniedrigung, wie hier nicht mitteilbare umständliche Rechnungen dartun, erheblich sein, z. B. 30 v. H. und mehr betragen. Bei Schwingungen mit 2 und mehr Knotendurchmessern dürfte der Einfluß geringer sein. Die neuerdings mehr und mehr in Gebrauch kommende Scheibenbefestigung mit **Schrumpf auf konischen Büchsen** oder der **konisch gedrehten Welle** bietet erhöhte Gewähr, daß die Scheiben im Betriebe nicht locker werden, ja vielleicht so viel Anpressungsdruck zurückbehalten, daß man sie als eingespannt ansehen darf.

d) Gekoppelte Schwingungen; Schwebungen.

Da alle Scheiben auf einer und derselben Welle sitzen, so sind sie durch diese „gekoppelt" und können zur bekannten Erscheinung der „Schwebungen" führen[1]). Bei zwei und mehr Knotendurchmessern besteht zwar die Schwingung für sich. Bei einem Knotendurchmesser oder der schirmförmigen Biegung hingegen ruft die Schwingung irgendeiner Scheibe eine synchrone Schwingung aller übrigen hervor, so daß in diesen Fällen nicht von der Eigenschwingung einer Scheibe für sich, sondern nur von einer bestimmten Grundschwingung des ganzen Systemes gesprochen werden kann. Denken wir uns immerhin eine bestimmte Scheibe mit der Frequenz erregt, die ihr als Eigenschwingung bei festgehaltener Welle entspricht, während die übrigen Scheiben ruhen. Dann wird diese Schwingung eine Nachbarscheibe zum Mitschwingen mit gleicher Frequenz anregen. Gleichzeitig wird diese Scheibe infolge der „Störung" auch mit derjenigen Frequenz zu schwingen bestrebt sein, die ihr selbst als „Eigenschwingung" bei fester Welle entspricht. Sind nun die beiden Schwingungszahlen nahe benachbart, so werden sie sich eine Weile unterstützen; sobald aber der Phasenunterschied in die Nähe von 180^0 rückt, sich entgegenwirken und

[1]) Vgl. Rayleigh, Theorie des Schalls 1880, I, S. 165.

sich für einen Augenblick ganz aufheben können, es entstehen die bekannten „Schwebungen“. Die zweite Scheibe wirkt nun in gleicher Weise auf die erste zurück, so daß auch an dieser die Schwingung eine periodische Verstärkung und Schwächung erfährt, wobei erst noch, bei sich selbst überlassenem System, infolge der unveränderlichen Gesamtenergie, der Höchstwert der einen Schwingung mit dem Mindestwert der andern verbunden sein muß. So geht die Schwingung durch Vermittelung der Welle wechselweise von der einen zur andern Scheibe über.

Hieraus ergibt sich die Forderung, die „Eigenschwingungen“ der Scheiben (im oben benutzten Sinn) mit Absicht merklich ungleich zu machen.

e) Verfahren von Ritz. Begründung des Satzes von Rayleigh.

Das Verfahren von Ritz[1]) beruht auf dem bekannten Lehrsatz der Mechanik, daß die potentielle Energie eines abgeschlossenen, sich im Gleichgewicht befindlichen Systems einen extremen Wert besitzt, — für den Fall stabilen Gleichgewichtes, insbesondere einen Kleinstwert erreicht. Erteilt man nämlich dem elastischen System eine kleine Verschiebung (wobei die Stützpunkte unverändert bleiben), so leisten die äußeren Kräfte eine Arbeit $\Sigma P\delta y$, wobei δy die in die Richtung von P fallende Verrückungskomponente bedeutet. Diese Arbeit ist gleich der Abnahme der potentiellen Energie der äußeren Kräfte $-\delta\Phi_a$; sie erscheint wieder als Zunahme der Energie der inneren Kräfte $\delta\Phi_i$ und so erhält man $\Sigma P\delta y = -\delta\Phi_a = \delta\Phi_i$, oder wenn Φ die Gesamtmenge bedeutet, so muß

$$\delta(\Phi_i + \Phi_a) = \delta\Phi = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

sein, womit der erste Teil des Satzes, auf den es uns allein ankommt, bewiesen ist. Die potentielle Energie Φ_i kann man, wie besonders v. Kármánn klar auseinandergesetzt hat[2]), entweder mit den wirklichen Werten der Kräfte rechnen, oder mit denjenigen unveränderlichen Werten, die sie in der Lage des eingetretenen Gleichgewichtes besitzen, denn in Gleichung $\delta\Phi = 0$ kommt nur das Differential $\delta\Phi_a$ vor. Wächst die Kraft mit der Einsenkung proportional, so ist

$$P = \alpha y; \quad \Phi_a = -\Sigma\int P\delta y = -\Sigma\int \alpha y\delta y = -\Sigma\frac{\alpha y^2}{2} = -\frac{1}{2}\Sigma P y + \text{konst.} \quad (2)$$

und hieraus folgt umgekehrt

$$\delta\Phi_a = -\frac{1}{2}\Sigma(P\delta y + y\delta P) = -\frac{1}{2}\Sigma(\alpha y\delta y + y\alpha\delta y) = -\Sigma P\delta y \quad \ldots \quad (3)$$

also genau dasselbe, als wenn die Kräfte von Anfang an die Endwerte P besessen hätten so daß

$$\Phi_a = -\Sigma P y + \text{konst.} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

gewesen wäre. Benutzt man Ausdruck (4), so wird nur nach y differenziert, bei Ausdruck (2) muß man P mit differenzieren, ein Umstand, dessen Nichtbeachtung große Mißverständnisse hervorgerufen hat. Im allgemeinen empfiehlt sich die Benutzung von Gl. (2).

Das Verfahren von Ritz besteht nun darin, daß man für die Einsenkungen y angenäherte Ausdrücke mit gewissen unbestimmten Parametern $a_1, a_2, a_3, \ldots$ aufstellt und die a aus den elastischen Grundgleichungen ableitet. Gelingt es, für $\Phi_i\,\Phi_a$ voneinander unabhängige Ausdrücke in den $a_1, a_2, \ldots$ aufzustellen, so wird nach Gl. (1) die Forderung aufgestellt, daß Φ ein extremer Wert werde, was auf die Bedingungen

$$\frac{\partial\Phi}{\partial a_1} = 0; \quad \frac{\partial\Phi}{\partial a_2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

führt, die ebensoviel Gleichungen als es Unbekannte $a_1, a_2, \ldots$ hat, zu deren Bestimmung bilden.

Verfasser gab eine Anwendung des Verfahrens auf die Bestimmung von Scheibenschwingungen[3]), die jedoch dem oben erläuterten graphischen Verfahren an Schmiegsamkeit

---

[1]) Crelles Journal 1908. Das Verfahren hat durch die Arbeiten von v. Kármán (Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1911, S. 1889), Pöschl (Armierter Beton, 1912), Lorenz (Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1913, S. 543), Nadai (Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1915, S. 173) große Bedeutung gewonnen.

[2]) Physik. Zeitschr. 1913, S. 253.

[3]) Schweiz. Bauztg. 1914, Bd. 63, S. 274 u. f.

nachsteht und nicht weiter erörtert werden soll. Hingegen verdient der am gleichen Orte erbrachte Nachweis von der **nahen Verwandtschaft des Rayleighschen und des Ritzschen Satzes** Erwähnung.

Es werde für eine schwingende, ruhende Scheibe für die Verbiegung der Mittelfläche der Näherungsausdruck

$$w = f(a_1\, a_2 \ldots r,\, \varphi) \cos \lambda t \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (6)$$

angenommen. Die potentielle Energie der elastischen Kräfte wird sich dann als

$$\Phi_i = E\,(a_1\, a_2\, a_3 \ldots) \cos^2 \lambda t \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (7)$$

darstellen lassen. Auch die Fliehkräfte haben eine potentielle Energie, die von der gestreckten Lage der Scheibe aus gerechnet, nichts anderes ist als die negative Fliehkraftarbeit, die sich nach Gl. 19 in der Form

$$\Phi_z = Z\,(a_1\, a_2 \ldots) \cos^2 \lambda t \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (7\,\mathrm{a})$$

darstellen läßt. Demnach ist die gesamte potentielle Energie der schwingenden Scheibe (abgekürzt)

$$\Phi_p = (E + Z) \cos^2 \lambda t = F \cos^2 \lambda t \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (8)$$

Die kinetische Energie ist

$$= \Sigma\, dm w^2/2 = \frac{1}{2} \Sigma\, dm\, [\lambda f\,(a_1 \ldots r \varphi) \sin \lambda t]^2 \qquad \text{oder} \qquad \Phi_k = \lambda^2 G\,(a_1,\, a_2,\, a_n \ldots) \sin^2 \lambda t \ldots (9)$$

Nach dem Energiesatz müssen die Höchstwerte der potentiellen und der kinetischen Energie einander gleich sein, d. h. es ist in abgekürzter Schreibweise

$$F = \lambda^2 G, \quad \text{woraus} \quad \lambda^2 = \frac{F}{G} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (10)$$

nach **Rayleigh** muß λ^2 ein Minimum werden, also müssen die Gleichungen

$$\frac{\partial \lambda^2}{\partial a_1} = 0; \quad \frac{\partial \lambda^2}{\partial a_2} = 0; \ldots$$

oder nach (10)

$$G \frac{\partial F}{\partial a_1} - F \frac{\partial G}{\partial a_1} = 0; \quad G \frac{\partial F}{\partial a_2} - F \frac{\partial G}{\partial a_2} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (11)$$

oder wenn man $F/G = \lambda^2$ überall einsetzt:

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} - \lambda^2 \frac{\partial G}{\partial a_1} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial a_2} - \lambda^2 \frac{\partial G}{\partial a_2} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (12)$$

erfüllt werden. War der Ansatz (6) in den $a_1, a_2, \ldots$ linear, so sind es auch Gl. (12), und sie sind homogen. Die Auflösung ist also nur möglich, wenn die Determinante der Beiwerte verschwindet, was eine Bestimmungsgleichung für die verschiedenen Werte von λ^2 bildet. Mit jedem der λ^2 bestimmen Gl. (12) die Verhältnisse der Parameter $a_1, a_2, \ldots$

Wenn man nach **Ritz** vorgeht, so ist zunächst durch Anbringung der Trägheitskräfte ein Gleichgewichtszustand herzustellen. An jedem Massenteilchen dm greift die Trägheitskraft $\delta P = -dm\ddot{w}$ an, deren potentielle Energie im ganzen (wie man einsieht, wenn man sich diese Kräfte mit von Null an wachsender Größe während der mit Null beginnenden Verbiegung an der Scheibe angreifend denkt)

$$\Phi_a = \frac{1}{2} \sum \delta P w = \frac{1}{2} \sum (-dm\, \ddot{w}\, w) = -\frac{1}{2} \sum dm\, \lambda^2 f^2\,(a_1 a_2 \ldots r, \varphi) \cos^2 \lambda t = -\lambda^2 G\,(a_1 a_2 \ldots) \cos^2 \lambda t \quad (13)$$

Es ergibt sich also die wichtige Tatsache, daß Φ_a mit Φ_k der Größe nach jederzeit gleich, jedoch von entgegengesetztem Vorzeichen ist. Nun ist nach Ritz die Summe der inneren und äußeren potentiellen Energie

$$\Phi = \Phi_p + \Phi_a = (F - \lambda^2 G) \cos^2 \lambda t$$

zu einem Mindestwert zu machen, d. h. es sind die Gleichungen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_1} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a_2} = 0; \ldots$$

oder da λ^2 ein Festwert ist

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} - \lambda^2 \frac{\partial G}{\partial a_1} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial a_2} - \lambda^2 \frac{\partial G}{\partial a_2} = 0; \ldots \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (14)$$

zu erfüllen. Hieraus ergibt sich zunächst für λ^2 derselbe Ausdruck wie (10); denn wir können Gl. (14) der Reihe nach mit $da_1, da_2 \ldots$ vermehren und zusammenzählen und erhalten

$$\left(\frac{\partial F}{\partial a_1} d a_1 + \frac{\partial F}{\partial a_2} d a_2 + \ldots\right) - \lambda^2 \left(\frac{\partial G}{\partial a_1} d a_1 + \frac{\partial G}{\partial a_2} d a_2 + \ldots\right) = 0.$$

Die Klammern enthalten die vollständigen Differentiale dF und dG, so daß durch Integration von den Werten $F = 0$; $G = 0$, die der eben gesuchten Mittelfläche entsprechen, bis F und G

$$F - \lambda^2 G = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda^2 = \frac{F}{G} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (15)$$

entsteht, was zu beweisen war. Im übrigen sind Gl. (14) und (12) identisch, werden also auch dieselben Werte für λ^2 und die Verhältnisse der $a_1, a_2, \ldots$ ergeben.

Ist die Beziehung (15) erkannt, so kann man die Gl (14) als die Bedingung deuten, daß λ^2 ein extremer Wert sein müsse, und so ist aus dem Satz von Ritz ein Beweis für den Satz von Rayleigh abgeleitet worden. Rayleigh selbst bewies die Minimumseigenschaft von λ^2 nur für die tiefste Schwingungszahl; nach obigem ist jede Schwingungszahl ein „Extremum".

f) Messende Beobachtungen von Scheibenschwingungen.

Die General-Electric-Company in Schenectady ermächtigt mich zu nachfolgenden Mitteilungen über die von dieser großen Firma veranstalteten Beobachtungen über Scheibenschwingungen. Es wurden Versuche mit Kautschukscheiben, in deren Kränze man leichte

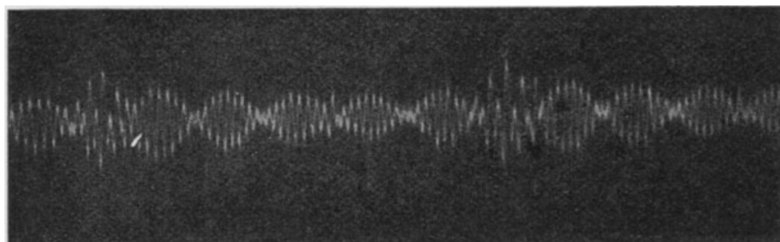


Abb. 1006 a.

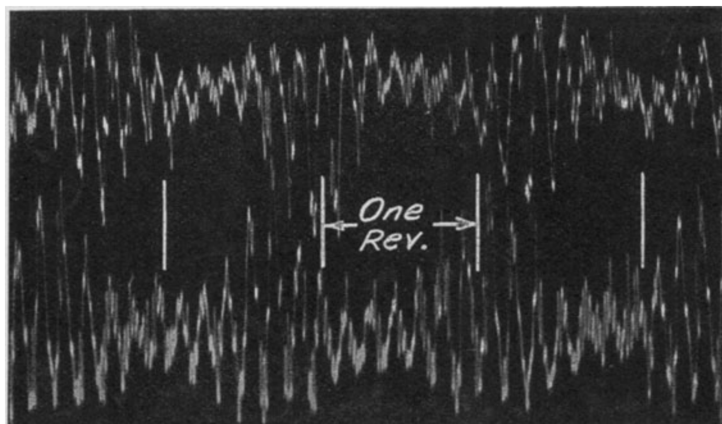


Abb. 1006 b.
Mit dem Oszillograph ermittelte Schwingungsformen.

Stahlschaufeln einsetzte, ferner mit Stahlblechschaufeln und endlich an Scheiben der größten Turbinen während des Betriebes vorgenommen. Als Meßgeräte dienten Magnetspulen, die man mit den Scheiben bewegte oder in knapper Nähe des Kranzes fest aufstellte. Die durch die Scheibenschwingung bewirkte Änderung des magnetischen Flusses induziert in der Spule einen Strom, dessen zeitlicher Verlauf mit Hilfe des bekannten, äußerst empfindlichen elektrischen Oszyllographen aufgezeichnet wird.

Auf diese Weise entstand Abb. 1006 a, aufgenommen an einer Stahlblechscheibe von 710 mm Durchm., 1,65 mm Dicke, die mit 130 Umdr./Min. umlief und durch einen mitumlaufenden Elektromagnet zu einer Schwingung mit 6 Knotenhalbmessern erregt wurde. Die Beobachtungsspule war fest; der Stromverlauf zeigt die Ruhepunkte in den jeweiligen Knoten, mit einer Schwingungszahl von etwa 54 auf 1 Umdrehung oder 117 in 1 Sekunde.

Abb. 1006b zeigt die Schwingung an der 23. Scheibe einer 20000 kW-Turbine bei 1500 Umdr./Min. und 13000 kW Belastung. Die Kurven entsprechen zwei festen Spulen, die um 30° im Umfang versetzt waren. Wie ersichtlich ist eine hohe und eine tiefe Schwingung vorhanden. Die Frequenz der letzteren scheint eigentümlicherweise (falls wir Ungenauigkeiten ausschließen) kein einfaches Vielfaches der Drehzahl zu sein, obwohl angegeben wird, daß eine Schwingung mit 6 Knotenhalbmessern vorlag. Die G. E. Co. unterscheidet die einfache Schwingung, und das sog. „Wellenphänomen", worunter die im Raume feststehende (am Rad fortschreitende) Schwingung verstanden wird. Hier soll dies „Phänomen" eingetreten sein. Die Rekonstruktion der Schwingung aus dem Stromverlauf von bloß zwei Spulen ist wohl eine recht heikle Aufgabe, deren Eindeutigkeit näherer Untersuchung bedarf.

188. Kritische Drehzahlen höherer Ordnung.

Prof. Meißner verweist mich auf folgendes, teilweise bei Rayleigh (Theorie des Schalles) vorgearbeitetes Verfahren höhere Schwingungs- also auch kritische Drehzahlen zu ermitteln. Bei Vernachlässigung der Kreiselwirkung ist die Differentialgleichung der elastischen Linie einer bei der tiefsten kritischen Winkelgeschwindigkeit ω_1 im indifferenten Gleichgewicht sich befindlichen Welle (Abschn. 91) (wenn mit Strichen die Ableitung nach x bezeichnet wird)

$$(By_1'')'' = \omega_1^2 m_1 y_1 \quad \text{mit} \quad B = JE \;\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Es sei das Integral y_1 bekannt: ebenso y_2, das zur nächsthöheren Geschwindigkeit ω_2 gehört, so daß Gleichung

$$(By_2'')'' = \omega_2^2 m_1 y_2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

für die gleichen Grenzbedingungen erfüllt ist. Indem man Gl. (1) mit y_2 vermehrt und die mit y_1 vermehrte Gl. (2) abzieht, sodann mit dx vermehrt und über die Länge L der Welle integriert, entsteht

$$\int_0^L y_2 (By_1'')'' dx - \int_0^L y_1 (By_2'')'' dx = (\omega_1^2 - \omega_2^2) \int_0^L m_1 y_1 y_2 dx \;\ldots\ldots (3)$$

Das erste Integral partiell integriert, liefert $[y_2 (By_1'')']_0^L - \int_0^L y_2' (By_1'')' dx$; das hier vorkommende Integral ist wieder partiell integrierbar und ergibt $[y_2' (By_1'')]_0^L - \int_0^L y_2'' B y_1'' dx$. Die außerhalb der Integrale stehenden Ausdrücke verschwinden an den Grenzen, falls entweder freie Auflage ($y_2 = 0$; $y_2'' = 0$) oder Einspannung ($y_2' = 0$) vorhanden ist. Behandelt man das zweite Integral in Gl. (3) ähnlich, so bleibt $\int_0^L y_1'' B y_2'' dx$ übrig, das sich gegen das obenstehende identische Integral weghebt. Daraus folgt für die rechte Seite in (3)

$$\int_0^L m_1 y_1 y_2 dx = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

als die Beziehung, in der die elastischen Linien y_1, y_2 der ersten und zweiten kritischen Drehzahlen zueinander stehen. Um die zweite kritische Drehzahl zu bestimmen, muß daher die elastische Linie y_1 vorher bekannt sein. Man nimmt dann die elastische Linie y_2 bei freier Auflage, die wir im folgenden voraussetzen, als ungefähre S-Linie an, indem man die Verteilung der Massen in Rücksicht zieht. Die obere (halbe) Welle zwischen 0 und L_1 bleibt fest; die Ordinaten der unteren werden mit einem Faktor k vermehrt, der so zu bestimmen ist, daß Gl. (4) erfüllt wird. Diese selbst kann man sich anschaulicher machen, indem man die von der ersten kritischen Drehzahl her bekannten Fliehkräfte $P_\alpha = m_\alpha y_{\alpha_1} \omega_1^2$; $P_\beta = m_\beta y_{\beta_1} \omega_1^2 \ldots$ benutzt. Man mißt die Ordinaten $y_{2\alpha}$, $y_{2\beta} \ldots$ an derselben Stelle, wie $y_{1\alpha}$; $y_{1\beta} \ldots$ Dann ist (4) offenbar nichts anderes als

$$\sum (P_\alpha y_{2\alpha} + P_\beta y_{2\beta} + \ldots) = \sum_{\text{von } 0}^{\text{bis } L_1} Py + k \sum_{\text{von } L_1}^{\text{bis } L} Py = 0$$

und man erhält

$$k = -\frac{\sum_0^{L_1} (Py)}{\sum_{L_1}^{L} (Py)} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Die mit k vermehrte untere Linienhälfte bildet bei L_1 naturgemäß einen Knick. Ist dieser nicht groß, so darf man von freier Hand nachhelfen, ohne daß es nötig wäre, einen berichtigten Wert von k auszurechnen. Nun wird im Sinne der Schlußbemerkung vom vorhergehenden Abschnitt der erweiterte Satz von **Rayleigh** angewendet. Man bestimmt den Ausdruck der maximalen inneren (elastischen) und der kinetischen Energie zur Biegungsform y_2

$$\Phi_i = \frac{1}{2}\int_0^L J E y_2''^2 dx; \qquad \Phi_k = \frac{1}{2}\int m_1 \omega_2^2 y_2^2 dx =$$

$$\frac{1}{2}\sum\left(m_\alpha y_{2\alpha}^2 + m_\beta y_{2\beta}^2 + \ldots\right)\omega_2^2 = \frac{1}{2} K w_2'^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

und erhält aus deren Gleichsetzung

$$\omega_2^2 = \frac{\Phi_i}{K} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Nun muß ω_2 unter Einhaltung der Bedingungen (4) einen Mindestwert bilden. Es ist mithin erforderlich, noch mindestens zwei andere Annahmen über y_2 zu machen, die zugehörigen k und ω_2 zu bestimmen, und letztere als Abhängige eines die Linien y_2 kennzeichnenden Parameters (z. B. des Abstandes L_1 des Knotenpunktes) aufzutragen. Eine durch die drei Punkte hindurchgelegte stetige Linie (Parabel) wird erkennen lassen, wo der Mindestwert liegt und ob er mit genügender Genauigkeit abgreifbar ist. Wäre das nicht der Fall, so müßte eine weitere Annahme über y_2 versucht werden.

Ist es in einfacheren Fällen möglich analytische Ausdrücke für Φ_i und K zu bilden, so wird der wahre Wert von ω_2 bestimmt, indem man das Minimum von Φ_i/K nach den Regeln der Differentialberechnung ermittelt d. h. indem man die Ableitungen jener Funktion nach den in y_2 unbestimmt gelassenen Parametern der Null gleich setzt, und die Parameter daraus berechnet.

189. Hahns Untersuchung über die Formel von Dunkerley [1]

Eine beliebig gelagerte Welle trage vollkommen zentrisch befestigte Massen $m_1, m_2 \ldots$ deren Schwerpunkte bei der kritischen Geschwindigkeit ω um die Beträge $y_1, y_2, \ldots$ abgelenkt sind. Zwischen diesen und den Fliehkräften $P_1 = m_1 y_1 \omega^2$; $P_2 = m_2 y_2 \omega^2$; ... bestehen die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \alpha_{11}P_1 + \alpha_{12}P_2 + \ldots + \alpha_{1n}P_n \\ y_2 &= \alpha_{21}P_1 + \alpha_{22}P_2 + \ldots + \alpha_{2n}P_n \\ y_n &= \alpha_{n1}P_1 + \alpha_{n1}P_2 + \ldots + \alpha_{nn}P_n \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Die Beiwerte α heißen Einflußzahlen und genügen der Gleichung

$$\alpha_{rs} = \alpha_{sr} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Schiebt man die Werte der P in (1) ein, so entsteht

$$\left.\begin{aligned} (\alpha_{11}m_1\omega^2 - 1)y_1 + \alpha_{12}m_2\omega^2 y_2 + \ldots\ldots &= 0 \\ \alpha_{21}m_1\omega^2 y_1 + (\alpha_{22}m_2 w^2 - 1)y_2 + \ldots\ldots &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Eine Möglichkeit für endliche Durchbiegungen besteht nur, wenn die Determinante der Beiwerte verschwindet, d. h. wenn

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_{11}m_1\omega^2 - 1, & \alpha_{12}m_2\omega^2, & \ldots\ldots & \alpha_{1n}m_n\omega^2 \\ \alpha_{21}m_1\omega^2, & (\alpha_{22}m_2\omega^2 - 1), & \ldots\ldots & \alpha_{2n}m_n\omega^2 \\ \cdot & \cdot & \ldots\ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots\ldots & \cdot \\ \alpha_{n1}m_1\omega^2, & \alpha_{n2}m_2\omega^2, & \ldots\ldots & (\alpha_{nn}m_n\omega^2 - 1) \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

[1] Schweiz. Bauztg. 1918, Bd. 72, S. 191 u. f.

ist, welche Gleichung vom n^t Grade in ω^2, im allgemeinen n Werte der kritischen Winkelgeschwindigkeit zu berechnen gestattet. Die Determinante hat die symmetrische Form

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} + \xi, & a_{12}, \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22} + \xi, \ldots\ldots a_{2n} \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdots\cdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, \ldots\ldots \quad a_{nn} + \xi \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots (5$$

die nach einem Lehrsatz der Algebra in die Form

$$A = A_n + A_{n-1}\,\xi + A_{n-2}\,\xi^2 + \ldots A_2\,\xi^{n-2} + A_1\xi^{n-1} + \xi^n \quad \ldots\ldots (6)$$

entwickelt werden kann, wobei

$$A_1 = a_{11} + {}_{21} + a_{nn} + \ldots a_{nn} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

$$A_2 = \left\{ \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{1n} \\ a_{22}, & a_{2n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22}, & a_{23} \\ a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. + \ldots + \begin{vmatrix} a_{22}, & a_{2n} \\ a_{n2}, & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots \begin{vmatrix} a_{n-1,\,n-1}, & a_{n-1,\,n} \\ a_{n,\,n-1}, & a_{nn} \end{vmatrix} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

bedeuten. A_3 ist die Summe aller Determinanten 3. Grades, die man mit den Elementen der Diagonale und den rechts davon befindlichen Elementen bilden kann; ähnlich definiert sind A_4, A_5 ... Angewendet auf die Determinante D mit $\xi = -1$, und wenn man beachtet, daß alle Glieder einer Zwischendeterminante mit der gleichen Potenz von ω zu vermehren sind, erhält man:

$$D = D_n\,\omega^{2n} - D_{n-1}\,\omega^{2\,(n-1)} + \ldots + D_2(-1)^{n-2}\omega^4 + D_1(-1)^{n-1}\omega^2 + (-1)^n = 0 \quad . (9)$$

und es ist

$$D_1 = \alpha_{11} m_1 + \alpha_{22} m_2 + \ldots \alpha_{nn} m_n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Denkt man sich die Welle massenlos und nur mit der Masse m_1 belastet, so bleibt von Gl. (3) bloß die eine

$$(\alpha_{11} m_1 \omega_1^2 - 1)\; y_1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

übrig, die bei endlichen y_1 nur bestehen kann, wenn der Klammerausdruck verschwindet, woraus sich

$$\omega_1^2 = \frac{1}{\alpha_{11} m_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

als die kritische Geschwindigkeit der Masse m_1 für sich bestimmt. In gleicher Weise bedeuten

$$\omega_2^2 = \frac{1}{\alpha_{22} m_2}; \qquad \omega_3^2 = \frac{1}{\alpha_{33} m_3}; \ldots \quad \ldots\ldots\ldots (13)$$

die kritischen Geschwindigkeiten der Massen m_2, m_3, ... je für sich. Daraus folgt für D_1 der Ausdruck

$$D_1 = \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \ldots + \frac{1}{\omega_n^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Soll nun die in Abschn. 94 eingeführte Formel von Dunkerley, d. h. $D_1 = 1/\omega^2$ bestehen, so bedeutet dies, wie man, an Hand von Gl. (9) erkennt, daß alle höheren Determinanten D_2, D_3 ... als verschwindend klein gegen D_1, anzusehen sind.

Bei schiefgestellten Scheiben werden auf die Welle der Reihe nach die Fliehkraftmomente $M_1 = -\tau_1 \Theta_1 \omega^2$; $M_2 = -\tau_2 \Theta_2 \omega^2$, ... ausgeübt wo τ die Neigungswinkel, Θ die auf einen Durchmesser bezogenen Trägheitsmomente der Scheiben bedeuten und das negative Zeichen den Sinn des Momentes so festlegt, daß bei positivem τ das Moment den Winkel zu verkleinern strebt. Um die elastischen Gleichungen anschreiben zu können, ist die Kenntnis der Einflußzahlen einer Kraft für die Neigung τ und eines Momentes für y und τ erforderlich. Gemäß Gl. (1) bedeutet α_{xs} die Einsenkung, die die an der Stelle „s" angreifende Einheitskraft an der Stelle „x" hervorruft. Möge x den Abstand von einem festen Punkt bedeuten und $x' = x + dx$ sein. Dann ist $\alpha_{x',s}$ die Einsenkung bei

x' von $P=1$, welches bei s angreift; demnach $(\alpha_{x',s}-\alpha_{xs}):dx$ die Neigung der elastischen Linie die $P=1$ erzeugt. Von P selbst wird also die Neigung $(d\alpha_{xs}/dx)P$ erzeugt, und die Einflußzahl ist

$$\beta_{xs}=\frac{d\alpha_{xs}}{dx} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

Ein positives Moment wird erzeugt, wenn wir bei $x=s$ die Kraft $-P$ und bei $x=s+ds$ die Kraft $+P$ angreifen lassen. Die Einsenkungen bei x sind $(-\alpha_{xs}+\alpha_{xs}')P=(d\alpha_{xs}/ds)Pds$: allein Pds ist, wenn man P unendlich wachsen läßt, das Moment, und so ist dessen Einflußzahl für die Einsenkung:

$$\gamma_{xs}=\frac{d\alpha_{xs}}{ds} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

Nun vergleichen wir die von dem bei s angreifenden Moment M hervorgerufenen Einsenkungen $\gamma_{xs}M$ bei x und $\gamma_{x's}M$ bei $x+dx$; die Neigung der elastischen Linie ist $(\gamma_{x's}-\gamma_{xs})M:dx$ also ist die Einflußzahl des Momentes in bezug auf die Neigung

$$\delta_{xs}=\frac{d\gamma_{xs}}{dx} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

Wenn auf diese Weise die Einflußzahlen bestimmt sind, so kann man die Gleichungen für y und τ wie folgt aufstellen:

$$\left.\begin{aligned}
y_1&=\alpha_{11}P_1+\alpha_{12}P_2+\ldots+\gamma_{11}M_1+\gamma_{12}M_2+\ldots\\
y_2&=\alpha_{21}P_1+\alpha_{22}P_2+\ldots+\gamma_{21}M_1+\gamma_{22}M_2+\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\tau_1&=\beta_{11}P_1+\beta_{12}P_1+\ldots+\delta_{11}M_1+\delta_{12}M_2+\ldots\\
\tau_2&=\beta_{21}P_1+\beta_{22}P_2+\ldots+\delta_{21}M_1+\delta_{22}M_2+\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (18)$$

Nach dem Einsetzen der Werte für die P und M wird in ähnlicher Weise wie oben das Verschwinden der Determinante der Beiwerte gefordert werden müssen, die hier vom n^{ten} Grad in ω^2 ist. Ihre Entwicklung führt auf die Form

$$D_{2n}'\omega^{4n}-D'_{2n-1}\omega^{4n-2}+\ldots+D_2'\omega^4-D_1'\omega^2+1=0 \quad \ldots \quad (19)$$

Dabei ist

$$D'_1=\alpha_{11}m_1+\alpha_{22}m_2+\ldots+\alpha_n m_n-\delta_{11}\Theta_1-\ldots-\delta_{nn}\Theta_n \quad \ldots \quad (20)$$

Die negativen Glieder haben folgende Bedeutung: Es sei eine (ideelle) Scheibe gegeben die ein endliches Θ_1, aber die Masse $m_1=0$ habe, während alle anderen Scheiben entfernt sind. Dann bleibt von (18) nur die Gleichung

$$\delta_{11}\Theta_1\omega^2+1=0$$

und liefert die kritische Geschwindigkeit dieser ideellen Scheibe

$$\Omega_1^2=-\frac{1}{\delta_{11}\Theta_1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (21)$$

die also als imaginäre Größe aufzufassen ist. Führt man sie (als negatives Quadrat), um die Einheitlichkeit der Bezeichnung aufrecht zu erhalten, dennoch in D_1' ein und setzt man in Gl. (19) voraus, daß von D_2' nach aufwärts alle Determinanten verschwindend klein sind, so bleibt die Gleichung $-D_1'\omega^2+1=0$, die wieder die Dunkerleysche Formel

$$\frac{1}{\omega^2}=\frac{1}{\omega_1^2}+\frac{1}{\omega_2^2}+\ldots+\frac{1}{\Omega_1^2}+\frac{1}{\Omega_2^2}+\cdots\frac{1}{\Omega_n^2} \quad \ldots \ldots \quad (22)$$

in einer verallgemeinerten Gestalt liefert.

Hahn macht Anwendungen davon auf stetig verteilte Massen, und bespricht den Genauigkeitsgrad der Formel. Betreffs dieser Gegenstände verweisen wir auf die Originalabhandlung selbst.

190. Wellenschwingung unter dem Einfluß der Kreiselkräfte und der Schwere.

a) Kreiselkräfte[1]).

Wir beschränken uns auf die Annahme genau zentrischer Scheiben, und es bedeute mit Rücksicht auf Abb. 1007

$x, y, z =$ die Koordinaten des Scheibenmittelpunktes;

$\beta, \gamma =$ die sehr kleinen Neigungswinkel der Drehachse gegen die ZOX- und XOY-Ebenen;

$\Delta l =$ die Nabenlänge;

$S_y', S_z' =$ die Komponenten der Scherkräfte in einem um $\Delta l/2$ im Sinne der X-Achse gegen die Scheibenmitte vorstehenden Querschnitt;

$S_y, S_z =$ desgl. im Abstande $\Delta l/2$ hinter der Scheibe;

M_y', M_z' und M_y, M_z die auf die gleichen Querschnitte wie die $S' S$ bezogenen Biegungsmomente in der wagrechten bzw. senkrechten Ebene;

$\Theta =$ das polare Trägheitsmoment der Scheibe in bezug auf die Achse;

$\Theta_D =$ das polare Trägheitsmoment der Scheibe in bezug auf einen Durchmesser. so daß angenähert $\Theta = 2\,\Theta_D$.

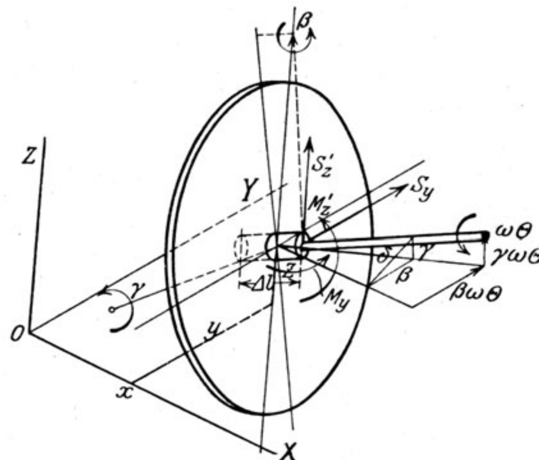


Abb. 1007. Zu den Bewegungsgleichungen des Kreisels.

Wir wenden den Satz vom Drall an und betrachten die Drehgeschwindigkeit ω als unveränderlich, während die Winkel $\beta\gamma$ Funktionen der Zeit sind, und durch ihre Ableitungen

$$\frac{d\beta}{dt} = \dot\beta; \quad \frac{d\gamma}{dt} = \dot\gamma$$

zwei weitere Drehungen um den Schwerpunkt ergeben. Von Rechts wegen müßten wir $\dot\beta\,\dot\gamma$ nach den Hauptachsenrichtungen zerlegen, doch sind die Komponenten nach der Wellenrichtung als Produkte $\dot\beta\gamma$ und $\dot\gamma\beta$ unendlich klein zweiter Ordnung, können also neben ω vernachlässigt werden. Mithin ist der Drall um die Parallelen zu Z bzw. Y im Sinne wachsender Winkel β, γ

$$\mathfrak{D}_z = \Theta_D\dot\beta + \Theta\omega\gamma \quad \ldots\ldots (1) \qquad \mathfrak{D}_y = \Theta_D\dot\gamma - \Theta\omega\beta \quad \ldots\ldots (2)$$

Die Ableitungen nach der Zeit liefern die erforderlichen treibenden Momente

$$\frac{d\mathfrak{D}_z}{dt} = \Theta_D\ddot\beta + \Theta\omega\dot\gamma = M_\beta; \qquad \frac{d\mathfrak{D}_y}{dt} = \Theta_D\ddot\gamma - \Theta\omega\dot\beta = M_\gamma \quad \ldots\ldots (3)$$

Hierzu treten die Bewegungsgleichungen des Schwerpunktes

$$m\ddot y = P_y; \qquad m\ddot z = P_z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

wobei P_y, P_z die im Sinne von y, z erforderlichen resultierenden Kräfte bedeuten. Ist auf der Welle bloß eine einzelne Scheibe vorhanden, so wird man die treibenden Kräfte durch die elastischen Größen ausdrücken, und es werden sich Gleichungen von der Form

$$\left.\begin{aligned} M_y &= a'y + b'\beta; & P_y &= ay + b\beta \\ M_z &= a'z + b'\gamma; & P_z &= az + b\gamma \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

aufstellen lassen. — Das Einsetzen von (5) in (3) und (4) führt auf vier lineare simultane Differentialgleichungen in y, z, β, γ mit unveränderlichen Beizahlen, die durch in der Zeit

[1]) Verf. in Zeitschr. f. d. gesamte Turbinenwesen 1918, S. 253 f.; 1920, S. 1 f.

periodische Funktionen befriedigt werden können, wie ich das beispielsweise in Dinglers Polytechn. Journal 1918, S. 118, gezeigt habe. Wir halten uns mit dieser keine Schwierigkeit bietenden Rechnung nicht auf, sondern gehen über zu einer

Welle mit vielen gleichmäßig verteilten Scheiben.

Wir stellen uns vor, daß in Abb. 1007 die Länge $\Delta l = dx$ sei und bezeichnen **für die Einheit der Länge** mit

Θ_{p1} = das polare Massenträgheitsmoment;
Θ_1 = das Moment, bezogen auf einen Durchmesser;
m_1 = die Masse von Scheiben samt Welle.

Dann wird in Gl. (3) (4) zu ersetzen sein: Θ durch $\Theta_{p1}\,dx = 2\,\Theta_1\,dx$; Θ_D durch $\Theta_1\,dx$; m durch $m_1\,dx$; β durch y'; γ durch z'. Für das treibende Moment M_β erhalten wir mit $S_y + S_y' \cong 2\,S_y$

$$M_\beta = M_y' - M_y + S_y\,dx \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Nach der Biegungsgleichung ist

$$M = JEy'' \quad \text{also} \quad M_y' - M_y = dM_y = JEy'''\,dx \quad \ldots \ldots \quad (6\text{a})$$

Der Unterschied der Bedeutung: daß Punkte Ableitungen nach der Zeit, Striche Ableitungen nach der Koordinate x darstellen, ist wohl zu beachten. Wir nehmen nun an, daß in der Kraft P_y ein periodischer von außen kommender Anteil

$$dQ = m_1\,P_0 \cos \lambda t \sin kx \cdot dx \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

enthalten ist. Daher wird

$$P_y = S_y' - S_y + dQ \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7\text{a})$$

und aus Gl. (3) und (4) folgt

$$\Theta_1\,[\ddot{y}' + 2\,\omega\,\dot{z}'] - JEy''' = S_y; \qquad m_1\,\ddot{y} = \frac{dS_y}{dx} + m_1\,P_0 \sin kx \cos \lambda t.$$

Setzt man S_y aus der ersten in die zweite Gleichung ein, so entsteht (umgestellt)

$$\left.\begin{aligned} -\,m_1\,\ddot{y} + \Theta_1\,(\ddot{y}'' + 2\,\omega\,\dot{z}'') - JEy^{\mathrm{IV}} + m_1\,P_0 \sin kx \cos \lambda t &= 0 \\ \text{ähnlich für } z \qquad -\,m_1 \ddot{z} + \Theta_1\,(\ddot{z}'' - 2\,\omega \dot{y}'') - JEz^{\mathrm{IV}} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (8)$$

Bei freier Auflagerung der Wellenenden müssen y, z zu $\sin kx$ verhältnisgleich sein, sofern kL mit L als ganzer Wellenlänge die Bedingung erfüllt:

$$kL = \pi; \quad 2\pi; \quad 3\pi. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8\text{a})$$

Denn dann verschwinden am Anfang und am Ende sowohl y, z wie auch gemäß (6a) die Momente M_y, M_z. Wir setzen demgemäß

$$y = B \sin kx \cos \lambda t; \quad z = C \sin kx \cos \lambda t \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

teilen Gleichung (8) mit m_1 und führen die Abkürzungen

$$h = \frac{\Theta_1}{m_1}\,k^2 \qquad \text{und} \qquad \frac{JEk^4}{m_1} = \omega_k^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

ein, wo ω_k eine der „gewöhnlichen“ kritischen Geschwindigkeiten bedeutet. Dann entsteht durch Einsetzen von (9) in (8)

$$\left.\begin{aligned} [(1 + h)\,\lambda^2 - \omega_k^2]\,B + 2\,h\,\omega\lambda C + P_0 &= 0 \\ +\,2\,h\,\omega\lambda\,B + [(1 + h)\,\lambda^2 - \omega_k^2]\,C &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

Die Auflösung ergibt, wenn wir die „Determinante“ mit

$$D = [(1 + h)\,\lambda^2 - \omega_k^2]^2 - 4\,h^2\,\omega^2\,\lambda^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

bezeichnen:

$$B = -\,\frac{(1 + h)\,\lambda^2 - \omega_k^2}{D}\,P_0; \qquad C = -\,\frac{2\,h\,\omega\,\lambda}{D}\,P_0 \quad \ldots \ldots \quad (13)$$

Wird hier P_0 kleiner und kleiner, so nehmen auch B und C ab, es sei denn, daß zugleich D gegen Null konvergiert. Letzteres findet statt, wenn der periodische Antrieb eine Winkelschnelle λ besitzt, die aus der Nullsetzung der Gleichung (12) berechnet wird.

Die Bedingung $D=0$ erlaubt nach Hinübernehmen des zweiten Gliedes die Quadratwurzel zu ziehen und liefert

$$(1+h)\lambda^2-\omega_k^2=\pm 2h\omega\lambda \quad \ldots \quad (14)$$

oder

$$(1+h)\lambda^2\mp 2h\omega\lambda-\omega_k^2=0 \quad \ldots \quad (14a)$$

Die Auflösung lautet

$$\lambda=\frac{1}{1+h}\left[\pm h\omega\pm\sqrt{h^2\omega^2+(1+h)^2\omega_k^2}\right] \quad \ldots \quad (15)$$

Es gibt also vier Wurzeln, die der Zeichenzusammenstellung $\lambda_1=++$; $\lambda_2=+-$; $\lambda_3=-+$, $\lambda_4=--$ entsprechen. Daher ist $\lambda_3=-\lambda_2$ und $\lambda_4=-\lambda_1$, also gibt es nur zwei Werte der gefährlichen Periodendauer. Dabei ist gemäß (11) stets

$$\frac{B}{C}=-\frac{(1+h)\lambda^2-\omega_k^2}{2h\omega\lambda} \text{ und dies nach } (14)=\mp 1 \quad \ldots \quad (16)$$

In der Nähe der „Resonanz" beschreibt der Schwerpunkt stets einen Kreis, trotz einseitigen Kraftangriffes.

Sind B und C und λ positiv, so bedeutet $y=B\sin kx\cos\lambda t$ und $z=C\sin kx\sin\lambda t$ eine Drehung gleichen Sinnes wie ω, — ist C oder λ negativ, eine solche entgegengesetzten Sinnes. Indem man sich dies an Hand der obigen Zeichenzusammenstellung vergegenwärtigt, wird man feststellen, daß den Wurzeln mit großem Absolutbetrag der Gleichlauf, den mit dem kleinen der Gegenlauf der Präzession entspricht.

Zu der in (9) gewonnenen Lösung sind bekanntlich diejenigen Glieder beizufügen, die der „Eigenschwingung" des Systems entsprechen. Diese kommt zustande, wenn man das System bei Abwesenheit von periodischen Kräften einer einmaligen anfänglichen Störung aussetzt. Dann befriedigt, wie man sich leicht überzeugt, der allgemeine Ansatz

$$\left.\begin{aligned} y&=\sin kx\left[B_1\cos(\lambda_1 t+\varepsilon_1)+B_2\cos(\lambda_2 t+\varepsilon_2)\right]\\ z&=\sin kx\left[B_1\sin(\lambda_1 t+\varepsilon_1)+B_2\sin(\lambda_2 t+\varepsilon_2)\right]\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (17)$$

die Differentialgleichungen (8), wobei man nur die Wurzeln

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1&=\frac{1}{1+h}\left[h\omega+\sqrt{h^2\omega^2+(1+h)\,\omega_k^2}\right]\\ \lambda_2&=\frac{1}{1+h}\left[h\omega-\sqrt{h^2\omega^2+(1+h)\,\omega_k^2}\right]\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (18)$$

der Gleichung (12) zu benutzen braucht und die Konstanten B_1, B_2, ε_1, ε_2 aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen sind.

Ist $B_2=0$, so erhält man die reguläre Präzession des Gleichlaufs mit $\varrho_{1x}=B_{1x}\sin kx$ als dem Halbmesser der Drehung. Ist $B_1=0$, so entsteht die Präzession im Gegenlauf mit $\varrho_{2x}=B_2\sin kx$ als Halbmesser. Im allgemeinen Fall ist die Bewegung eine Verbindung von zwei Kreisdrehungen, die man sich am besten durch die getrennte Zusammensetzung der zu B_1 und B_2 gehörenden Glieder in Gleichung (17) anschaulich macht. Für $kx=\pi/2$ liefern die ersteren einen Fahrstrahl von der Länge B_1 der mit der absoluten Winkelschnelle λ_1 rotiert, an den der mit der absoluten Winkelschnelle λ_2 sich drehende Strahl B_2 anzuschließen ist. Das Ergebnis sind offenbar mannigfaltige Zykloiden, je nach dem Verhältnis von λ_1 zu λ_2. Faßt man die relative Bewegung von B_2 gegen B_1 ins Auge, so erfolgt diese mit der (algebraisch zu verstehenden) Winkelschnelle $\lambda_2-\lambda_1$; in jenem relativen Raum wird daher die vom Anfangspunkt gerechnete Fahrstrahllänge zwischen B_1-B_2 und B_1+B_2 wechseln, mit der Periodenzahl $(\lambda_1-\lambda_2)/2\pi$, und dieser Ausdruck ist nichts anderes als die Periodenzahl der Nutationsbewegung[1]).

---

[1]) Die gleiche Feststellung kann auf rein rechnerischem Wege gemacht werden, wenn man zu Polarkoordinaten ϱ, φ übergeht. Leicht zu bilden sind die Ausdrücke für

$$\varrho^2=y^2+z^2$$

und der für das Impulsmoment der Schwerpunktsbewegung. Die Umfangskomponente der Geschwindig-

Benutzt man Gleichung (18), so ergibt sich jene sekundliche Schwankungszahl

$$N_{\text{nut}} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2\pi} = \frac{1}{\pi(1+h)} \sqrt{h^2\omega^2 + (1+h)\,\omega_k^2} \quad \ldots \ldots \text{(20)}$$

Die gefährlichen Gebiete.

Die **Gleichungen (18) liefern bei sonst feststehenden Verhältnissen diejenigen Frequenzen einer von außen wirkenden Kraft, bei welcher „Resonanz", also gefährliche Störungen auftreten können.** Die Verhältnisse sind ähnlich wie bei der gewöhnlichen kritischen Drehzahl bei vollkommener Auswuchtung. Die Welle wird von sich aus nicht ausschlagen, allein sie hat jeden Halt verloren und muß der geringsten Außenkraft widerstandslos nachgeben. Wir werden später sehen, daß unter besonderen Umständen auch eine selbsttätige Zunahme des Ausschlages eintreten kann. Da man in die Formeln für ω_k die bekannten unendlich vielen Werte der gewöhnlichen kritischen Winkelschnelle einsetzen darf, so gibt es auch unendlich viele Störungsmöglichkeiten (λ_1, λ_2) durch die Kreiselwirkung. Am häufigsten wird die störende Kraft die Periode einer Umdrehung zeigen, z. B. beim Streifen der Welle. Außerdem können alle ganzzahligen Vielfachen der Drehzahl auftreten, etwa infolge teilweiser Beaufschlagung. Durch geeignete Abänderung der Rad- und Wellenabmessungen wird man es immer so einrichten können, daß der Betrieb von einer Gefahrzone hinlänglich weit entfernt bleibt. Schwieriger liegt der Fall, wenn die Drehzahl stark verändert werden muß. Man wird dann die Drehzahlen, bei welchen Resonanz mit der einfachen, doppelten usw. Frequenz zu befürchten ist, am besten unmittelbar berechnen. Beispielsweise liefern für das Zusammenfallen

$$\lambda = \omega$$

bei der stetig belasteten Welle, Gleichungen (14a), für den Gleich- bzw. Gegenlauf die beiden Vorschriften

$$\left.\begin{aligned} (1+h)\,\omega_{gl}^2 - 2\,h\,\omega_{gl}^2 - \omega_k^2 = 0 \\ (1+h)\,\omega_{gn}^2 + 2\,h\,\omega_{gn}^2 - \omega_k^2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \text{(21)}$$

aus welchen

$$\omega_{gl}^2 = \frac{\omega_k^2}{1-h}; \qquad \omega_{gn}^2 = \frac{\omega_k^2}{1+3h} \quad \ldots \ldots \text{(22)}$$

als Winkelgeschwindigkeiten für die synchrone Präzession sich ergeben.

Für $\lambda = 2\,\omega$ erhält man

$$\omega_{gl}^2 = \frac{\omega_k^2}{4}; \qquad \omega_{gl} = \frac{\omega_k}{2}; \qquad \omega_{gn}^2 = \frac{\omega_k^2}{4\,(1+2h)} \quad \ldots \ldots \text{(23)}$$

oder allgemein, wenn man $\lambda = \nu\omega$ setzt:

$$\left.\begin{aligned} \omega_{gl}^2 \\ \omega_{gn}^2 \end{aligned}\right\} = \frac{\omega_k^2}{\nu\,[\nu + h\,(\nu \mp 2)]} \quad \ldots \ldots \text{(24)}$$

Die Formeln gelten, wie nochmals hervorgehoben sei, für Wellen, die der ganzen Länge nach (bis zur Lagermitte) mit Scheiben besetzt sind. In der Wirklichkeit pflegt nur etwa die Hälfte der Wellenlänge belegt zu sein. Da ferner h (Gl. 10) im allgemeinen tief unter 1 zu liegen pflegt, beeinflußt bei der normalen Turbine die Kreiselkraft die gewöhnliche kritische Drehzahl nur in geringem Maße, wie wir dies in Abb. 413a, b zur Anschauung gebracht haben.

Versuche an einer mit gleichmäßig verteilten Scheiben belasteten Welle.

Auf einer gezogenen Stahlwelle von 16 mm Durchm und 800 mm Lagermittenabstand wurden zehn Scheiben von je 250 mm Durchm. bei rd. 7 mm Dicke befestigt. Die Lager waren als Kugellager ausgebildet und das, gegen den Antrieb zu gelegene zu einer Kreuzgelenkkupplung ausgebildet. Die rich-

keit ist $\varrho\varphi$; ihr Moment für den Nullpunkt $\varrho^2\dot{\varphi}$ muß dem Moment der rechtwinkligen Komponenten $\dot{y}$, $\dot{z}$ gleich sein, d. h. es ist

$$\varrho^2\dot{\varphi} = y\dot{z} - z\dot{y}.$$

Die leicht erledigte Ausrechnung liefert

$$\left.\begin{aligned} \varrho^2 &= 2\,(B_1^2 + B_2^2) + 2\,B_1 B_2 \cos\left[(\lambda_1 - \lambda_2)\,t + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\right] \\ \varrho^2\dot{\varphi} &= B_1^2\lambda_1^2 + B_2^2\lambda_2^2 + B_1 B_2\,(\lambda_1 + \lambda_2)\cos\left[(\lambda_1 - \lambda_2)\,t + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \text{(19)}$$

tige Anordnung der Scheiben wäre die, den Lagermittenabstand in 10 Teile zu teilen und in der Mitte jeder Teilung eine Scheibe zu unterbringen. Der Raumbedarf der Kreuzgelenkkuppelung verhinderte dies. Daher wurde die Wellenlänge in 11 gleiche Teile geteilt und in jedem Teilpunkt eine Scheibe befestigt. Hierdurch geht die Kreiselwirkung der im idealen Falle auch im Lagermittelpunkt anzubringenden Scheiben, die durch ihre Schrägstellung wirken, verloren.

Durch ein mit einer Kurbel versehenes paralleles Vorgelege wurde mittels einer mehr oder weniger gespannten Feder eine sinusförmig veränderliche Kraft auf die Welle in der Mitte zwischen den Lagern ausgeübt. Durch passende Wahl der Übersetzung konnte jede Periodenzahl eingestellt werden.

Durch Ermittlung des wirklichen Ausschlages und graphisches Auftragen desselben in Abhängigkeit von der Drehzahl erhält man Schaubilder wie Abb. 1008, die sich auf eine Drehzahl des Vorgeleges, die das 0,47fache der Drehzahl der Welle ausmacht, bezieht. Man erblickt die normale kritische Drehzahl des Gleichlaufes und zwei kritische Drehzahlen des Gegenlaufes. Nachdem man dieselben für zwei weitere Drehzahlen des Vorgeleges, die dem 1,4- resp. 2fachen der Drehzahl der Welle entsprechen, bestimmt hatte, konnten in Abb. 1010 die kritischen Drehzahlen als Abhängige des Übersetzungsverhältnisses (punktiert) eingetragen werden.

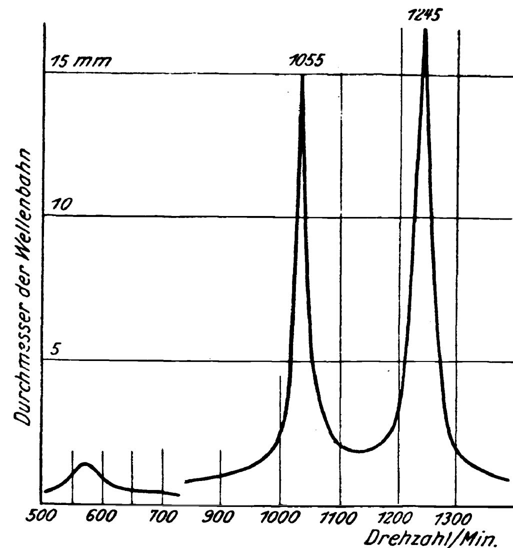


Abb. 1008. Kritische Drehzahlen bei 47 Impulsen auf 100 Umdrehungen und 250 mm Scheibendurchmesser.

Hierauf wurden die Scheiben durch solche von 500 mm Durchm., bei rd. 2 mm Dicke, ersetzt. In Abb. 1009 ist der Verlauf der Auslenkungen in Abhängigkeit von der Drehzahl dargestellt, für den Fall,

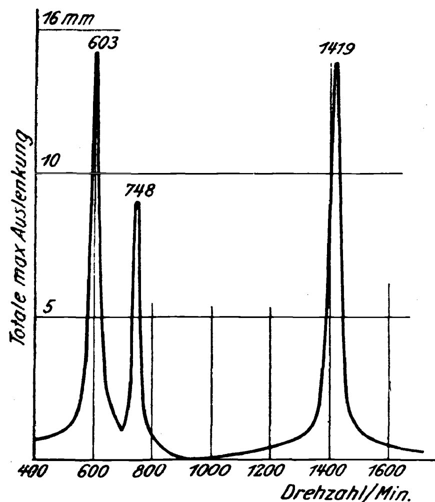


Abb. 1009. Kritische Drehzahlen wie in Abb. 1008 mit Scheiben von 500 mm Durchm.

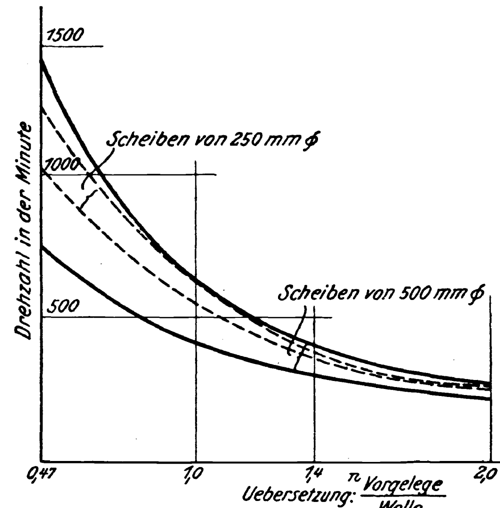


Abb. 1010. Kritische Drehzahlen der gegenläufigen Präzession in Abhängigkeit von der Impulsfrequenz.

daß das Vorgelege 0,47 so viele Umläufe macht wie die Welle. In Abb. 1010 sind die kritischen Drehzahlen (fest ausgezogen) in Abhängigkeit des Übersetzungsverhältnisses dargestellt.

Die Übereinstimmung mit den theoretischen Werten ist qualitativ gut. Zahlenmäßig zeigen sich Abweichungen, die hauptsächlich durch das Weglassen der Scheiben über den Auflagern bedingt sind.

Locker sitzende Scheiben.

Man kann nachweisen, daß eine Schiefstellung der Scheiben infolge Lockerwerdens der Nabe um einen Winkel ϑ mit Bezug auf die Wirkung der Kreiselkräfte dieselbe Rolle spielt wie die Exzentrizität des Schwerpunktes mit Bezug auf die Wirkung der Fliehkräfte. Wenn wir nämlich von Reibungskräften absehen, kann bei endlichen Werten des Winkels ϑ eine stationäre Bewegung mit endlichen Auslenkungen bei beliebiger Winkel- und Präzessionsgeschwindigkeit bestehen, solange ω oder λ nicht einen Wert besitzt, den wir als den

kritischen bezeichnet haben. Bei der Annäherung an ein solches (einander zugeordnetes) kritisches Wertepaar von ω, λ wachsen die Ausschläge der stationären Bewegung ins Unendliche. Genau so ist es mit den Fliehkräften bei exzentrisch liegendem Schwerpunkt: mit der Annäherung an die (gewöhnliche) kritische Winkelgeschwindigkeit wachsen die Ausschläge der stationären Bewegung ins Unendliche. Im Falle der Fliehkräfte glauben wir jedoch das Entstehen dieser unendlich großen Ausschläge vermittelst der Energiezufuhr seitens der Fliehkräfte (die Bewegung von einem mit der Winkelgeschwindigkeit ω sich drehenden Raume aus als relative betrachtet) durch die Anschauung unmittelbar übersehen zu können. In Wahrheit ist der Übergang aus einem Beharrungszustand in den andern eine höchst verwickelte Bewegung, die rechnerisch noch überhaupt nicht bewältigt worden ist[1]). Ebenso ist im Falle der Kreiselwirkung nicht klar, wie eine Steigerung insbesondere der gegenläufigen Präzession durch Beschleunigung der Winkelschnelle ω zustande kommt. Ist eine Exzentrizität des Schwerpunktes vorhanden, so tritt die Schwerpunktsfliehkraft gleichzeitig ins Spiel und ist bestrebt, die synchrone Präzession des Gleichlaufes hervorzurufen, **indem alle sonst noch vorhandenen Bewegungszustände, die anfangs vorhanden sein mochten, infolge der Reibung allmählich ausklingen.**

Die Untersuchung über den Endausgang im Streite dieser widersprechenden Einflüsse würde eine eigene Abhandlung beanspruchen. Wir zogen vor, rasche und sichere Auskunft durch das Experiment zu erlangen. Zu diesem Zwecke wurde eine fliegende Scheibe von 500 mm Durchm. bei rd. 8 mm Dicke und einem Gewicht (samt Befestigungsteilen) von 12,17 kg am freien Ende einer 20 mm starken Welle in einem Abstand von 500 mm von der Lagermitte angeordnet. Die Welle war durch ein weiteres in 120 mm Abstand befindliche Lager gehalten, das indes die Einspannung auch zu keiner vollkommenen zu machen vermochte. Drei radialstehende Blattfedern, die um einige Millimeter von der Scheibe abstanden, zentrierten sie gegen eine feste Nabe. Die Federn waren so schwach, daß ihre Elastizität vernachlässigt werden kann. Die Scheibe besaß in axialer Richtung im ganzen 1,5 mm Spiel zwischen zwei festen Scheibchen von 50 mm Durchm., so daß sie sich um einen Winkel $\vartheta = 0{,}03$ (Bogenmaß) schiefstellen konnte. Abb. 1011 zeigt die Auslenkung in Abhängigkeit von der Drehzahl. Das bei ungefähr 446 auftretende Maximum ist die gewöhnliche, d. h. die Umlaufzahl des Gleichlaufes. Bei rd. 415 Uml. i. d. Min. zeigt sich die kritische Drehzahl des Gegenlaufes, die auch an den von der Welle beschriebenen Bahnen als solche deutlich erkennbar war. **Bei der ersten Versuchsreihe fehlte jede Krafteinwirkung von außen.** Die Abbildung beweist, daß auch ohne periodische Außenkräfte bei unserer Versuchsanordnung auf eine vorläufig nicht näher angegebene Weise die Präzession des Gegenlaufes, wenn die ihm zukommende Drehzahl eingestellt wird, ausgelöst werden kann, eine sehr wichtige Erfahrung, die sich auch bei größeren Ausführungen wiederholen könnte. Der Wechsel der Schrägstellung, der zur Bewegung des Schwerpunktes in entgegengesetztem Sinn verläuft, wobei die Scheibe, wie oben erläutert, an der hubbegrenzenden Unterlagsscheibe abrollt, erfolgt mit einem hörbaren, charakteristischen Rasseln, welches aufhört, sobald man aus dem gefährlichen Gebiet herauskommt. Bei einer **Wiederholung der Versuche** zeigte sich, nachdem die Vorrichtung inzwischen **umgebaut worden war, daß sich die kritische Störung nicht mehr von selbst einstellt.** Damit wird die Tatsache der ersten Beobachtung nicht widerlegt, doch muß es weiteren Untersuchungen vorbehalten bleiben, zu ermitteln, in welchen Umständen das ursprüngliche Auftreten der selbsttätigen Erregung begründet sein konnte.

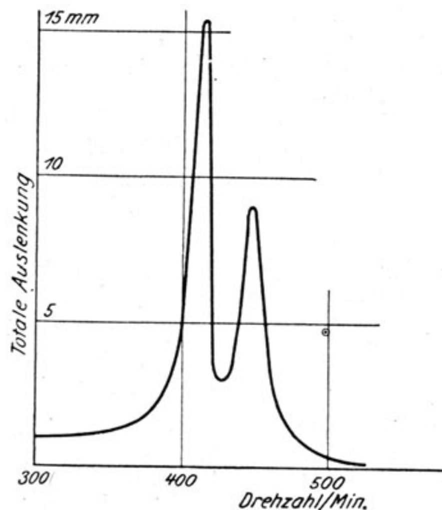


Abb. 1011. Vereinzelt selbsttätiges Auftreten der Gegenlauf-Störung bei locker sitzender Scheibe.

b) Kreiselwirkung und Schwere.

Bei einer wagrecht aufgestellten Welle muß die Wirkung der Schwere in die Bewegungsgleichungen eingeführt werden. Dies hat in der Schwerpunktsgleichung (4) für die Z-Koor-

[1]) Für endliche Auslenkung gab Behrens (Z. f. Math. u. Phys. 1911, Bd. 59, S. 337) eine mathematisch höchst verwickelte Darstellung. O. Föppl leitet mit Hilfe von Näherungsbetrachtungen gewisse Beziehungen zwischen Schwerpunktsabstand und Neigung der Exzentrizität ab (Z. f. d. gesamte Turb.-Wesen 1916, Heft 6 u. 7), jedoch ohne die explizite Darstellung in Funktion der Zeit. All diese Ableitungen können aber das Erreichen der schließlichen stationären Bewegung (des relativen Gleichgewichtes) nicht veranschaulichen, denn dies ist nur möglich, **wenn man die Reibungswiderstände der Umgebung in die Rechnung einbezieht,** wodurch aber die Betrachtung ungemein verwickelt wird.

dinate zu geschehen, wobei wir uns auf den Fall einer mit vielen gleichmäßig verteilten Scheiben belasteten Welle beschränken. Die Schwerkraft des Elementes dx ist $m_1 g dx$, die, weil nach abwärts gerichtet, mit dem negativen Vorzeichen einzusetzen ist. Man erhält mit Rücksicht auf Gleichung (7a) mit $dQ = 0$

$$m_1 dx \ddot{y} = P_y = dS_y; \qquad m_1 dx \ddot{z} = P_z = dS_z - m_1 g\, dx \quad \ldots\ldots (25)$$

Die Drehungsgleichungen (3) behalten mit Rücksicht auf Gleichung (6), (6a) ihre frühere Form

$$\Theta_1 (\ddot{y}' + 2\,\omega \dot{z}') - JEy''' = S_y; \qquad \Theta_1 (\ddot{z}' - 2\,\omega \dot{y}') - JEz''' = S_z \quad \ldots (26)$$

bei. Indem wir die Schubkräfte aus diesen letzteren in die Schwerpunktsgleichungen (25) einschieben, entstehen (mit Umstellung der Vorzeichen):

$$-m_1 \ddot{y} + \Theta_1 (\ddot{y}'' + 2\,\omega \dot{z}'') - JEy^{\mathrm{IV}} = 0; \qquad -m_1 \ddot{z} + \Theta_1 (\ddot{z}'' - 2\,\omega \dot{y}'') - JEz^{\mathrm{IV}} = m_1 g \quad (27)$$

Befände sich die Welle in Ruhe, so wäre y überall gleich 0 und für z bliebe die Differentialgleichung

$$JEz_s^{\mathrm{IV}} = -m_1 g \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (28)$$

übrig, die leicht zu integrieren ist, und auf

$$JEz_s = -\frac{m_1 g x^4}{24} + \frac{c_1 x^3}{6} + \frac{c_2 x^2}{2} + c_3 x + c_4 \quad \ldots\ldots (29)$$

führt. Die Fußnote s bei z soll ausdrücken, daß es sich um die statische Verbiegung durch die Schwere allein handelt. Die Größe der Festwerte $c_1 \ldots c_4$ ist für das Weitere ohne Belang. Schreiben wir abkürzend

$$z_s = f(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (30)$$

so kann in den Gleichungen (27) das Glied $m_1 g$ durch Einschieben von

$$z = \zeta + z_s; \qquad y = \eta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (31)$$

weggeschafft werden (wobei für y nur symmetriehalber ein anderer Buchstabe gewählt wird). Die Ableitungen von z_s nach der Zeit verschwinden, und mit Rücksicht auf Gleichung (28) erhält man die neuen Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} -m_1 \ddot{\eta} + \Theta_1 \ddot{\eta}'' + 2\,\Theta_1 \omega \dot{\zeta}'' - JE\eta^{\mathrm{IV}} &= 0 \\ -m_1 \ddot{\zeta} + \Theta_1 \ddot{\zeta}'' - 2\,\Theta_1 \omega \dot{\eta}'' - JE\zeta^{\mathrm{IV}} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (32)$$

die, abgesehen von den veränderten Bezeichnungen, wenn man $P_0 = 0$ setzt, mit den Gleichungen (8) vollkommen übereinstimmen, aber hier der Eigenschwingung der Welle entsprechen. Die Lösung für die Eigenschwingung ist nun bereits in Gleichungen (17) und (18) angegeben, und möge hier mit $\eta_e \zeta_e$ bezeichnet werden. Die vollständigen Integrale der Gleichungen sind daher

$$y = \eta_e; \quad z = z_s + \zeta_e \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (33)$$

Wir erkennen somit, daß die Wirkung der Schwere lediglich darin besteht, der Welle eine Verbiegung zu erteilen, die genau gleich ist, als ob sie ruhte. Um diese krumme Biegungslinie herum finden Eigenschwingungen statt, deren Auslenkungen dieselben sind, als ob die Schwere nicht vorhanden wäre, mit anderen Worten, die Wirkung der Schwere und diejenige der Kreiselkräfte können einander überlagert werden.

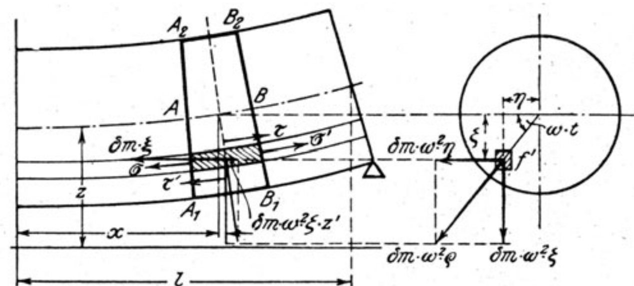


Abb. 1012. Dehnung eines Faserstückes während des Umlaufes.

Dieses Ergebnis ist ein strenger mathematischer Schluß aus der linearen Natur der die Erscheinungen beherrschenden Differentialgleichungen, steht jedoch im Widerspruch mit einer **Vorstellung, die uns die Anschauung anscheinend zwingend nahelegt,** sobald wir es auf die glatte Welle, die lediglich durch die Eigenmasse belastet

ist, übertragen. Aus einer solchen frei aufgelagerten Welle können wir gemäß Abb. 1012 ein unendlich dünnes Fadenelement der Länge nach herausschneiden. Dieser Faden wird während der Drehung wechselweise gespannt und zusammengepreßt. Steigern wir die Winkelgeschwindigkeit, so kann die Eigenschwingungsdauer der longitudinalen Schwingung des Fadens erreicht werden, wodurch der Stab gewissermaßen seinen Biegungswiderstand verlieren müßte und eine kritische Drehzahl vorhanden wäre. Das Irrtümliche dieser Auffassung liegt erstens darin, daß eine „freie Schwingung" überhaupt nicht auftreten kann, da längs des Fadens immer auch Schubkräfte tätig sind. Schneiden wir aus dem ganzen Faden gemäß Abb. 1012 das zwischen den Querschnitten AB gelegene Element heraus und ist ξ die Auslenkung des Schwerpunktes, gerechnet von der durch den Schwerpunkt gehenden senkrechten Ebene, so ist die Beschleunigung $\ddot{\xi}$. Die wirkenden Kräfte sind, insofern wir die Stirnfläche des Elementes mit f, die obere und untere Seitenfläche mit $f_1 f_1'$ bezeichnen $f(\sigma' - \sigma)$ und $(f_1 \tau - f_1' \tau')$; daher erhalten wir **scheinbar** die Bewegungsgleichung

$$\delta m \ddot{\xi} = f(\sigma' - \sigma) + (f_1 \tau - f_1' \tau') \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (34)$$

Nun ist die elastische Dehnung $= \partial\xi/\partial x$ daher die Spannung $\sigma = E \frac{\partial \xi}{\partial x} = E\xi'$; ferner ist $d m = \mu f dx$. Indem wir mit fdx teilen, entsteht die Gleichung

$$\mu \ddot{\xi} = E\xi'' + \frac{f_1 \tau - f_1' \tau'}{f dx} = E\xi'' + \frac{d(f_1 \tau)}{f dx} \quad \ldots \ldots \ldots (35)$$

Die ersten Glieder links und rechts bilden die wohlbekannte Gleichung der freien longitudinalen Schwingung. Das Zusatzglied stellt eine Störung dar, die immer vorhanden ist. Allein, diese Gleichung ist unvollständig, wie man erkennt, wenn man die Welle nicht in faden- sondern in scheibenförmige Elemente $A_1 A_2 B_2 B_1$, Abb. 1012, aufteilt. Bei der durch die Anschauung als unbedingt möglich geforderten Bewegung, bei welcher die Durchbiegung der Welle während der Drehung unveränderlich bleibt, und unter der weiteren allgemeinen üblichen Annahme, daß die Querschnitte bei der Biegung eben bleiben, werden die in einem solchen Querschnitt enthaltenen Massenelemente beständig eine reine Kreisbewegung mit der Tangente an die elastische Linie als Drehachse beschreiben. Hierdurch wird das Element radial gespannt, und die Fliehkräfte sind an jedem Teilchen davon mit den radialen Spannungen im Gleichgewicht. Die Bewegungsgleichung des Elementes δm muß die wagrechte Komponente jener radialen Spannungen oder (negativ) die der mit ihnen gleichwertigen Fliehkräfte enthalten. Die Zerlegung von $\delta m \varrho \omega^2$ liefert zunächst (in der Seitenfigur) eine wagrechte und die schräg nach abwärts gerichtete Komponente $\delta m \omega^2 \zeta$, die in der Mittelebene des Scheibenelementes angreift. Die weitere Zerlegung ergibt dann die wagrechte Axialkomponente $\delta m \omega^2 \zeta z'$, nach rechts gerichtet. Statt der Beschleunigungskraft $\delta m \ddot{\xi}$ können wir deren Negativwert als Trägheitskraft (nach links gerichtet) eintragen. Da

$$\xi = \zeta z' = z' \varrho \sin \omega t,$$

so ist

$$\delta m \ddot{\xi} = -\delta m \omega^2 \varrho \sin \omega t \cdot z' = -\delta m \omega^2 \zeta z'.$$

Man erkennt, daß die Trägheitskraft der axialen Beschleunigung durch die entsprechende Komponente der Fliehkraft aufgenommen wird, oder, was dasselbe ist, daß die axiale Bewegungskraft durch die entsprechende Komponente der durch die Kreisbewegung erzwungenen Zentripetalkraft geliefert wird. Die übrig bleibenden Glieder der Bewegungsgleichung sagen dann nichts anderes aus, als daß die Schubkräfte die Zunahme der Normalspannung (von σ auf σ') besorgen.

Das Vorhandensein der Fliehkraftkomponente wurde von mir bei der Herleitung der kritischen Drehzahl „zweiter Art" in „Dampfturbinen", 4. Aufl., S. 621, übersehen, worauf mich Herr Prof. Dresden (Delft) aufmerksam gemacht hat. **Diese kritische Drehzahl fällt nun auf Grund der oben gemachten Feststellungen dahin.**

Allerdings bleiben noch zwei Einwände übrig; erstens der, daß zwar im Element AB irgendein Massenpunkt beständig eine Kreisbahn beschreibt, daß aber trotzdem die Bogenlänge AB in der Tiefstellung sich auf die Größe $A_1 B_1$ ausdehnt, in der Höchststellung auf die Größe $A_2 B_2$ verkürzt wird, daß also ein Transport von elastischer Energie stattfindet, dessen Raschheit an die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elastischen Störung gebunden ist, so daß sich bei einer großen aber endlichen Drehzahl eine „kritische" Störung ergeben müßte. Der mathematische Beweis, daß dem nicht so ist, hat seine

Schwierigkeiten[1]), wird jedoch durch folgende **physikalische Überlegung** überflüssig gemacht. Die Welle besteht aus Molekülen, die fernwirkende (massenlose) Kräfte aufeinander ausüben. Denken wir uns die Moleküle in Scheiben angeordnet, die zur Wellenachse senkrecht stehen. Während der Drehung ändert sich der Seiten- (d. h. der in der Achse gemessene) Abstand der Moleküle periodisch, allein **ohne daß Materie hin und her transportiert wurde,** jedes Molekül beschreibt eine **im Raume feststehende Kreisbahn,** es liegt keine Veranlassung für die Fntstehung von axial gerichteten Beschleunigungs- bzw. Trägheitskräften vor. Es ist als ob die Welle aus schmalen starren Scheiben bestände, die **durch massenlose axiale Federn miteinander verbunden** (und wegen der Schubkräfte mit zentralen Kugelgelenken versehen) sind. Die Federn dehnen sich jeweils um so viel aus, als das im Querschnitt wirkende Biegungsmoment der Schwere (und der Auflagerdrücke) erfordert.

Der zweite Einwand ist, daß **die Querschnitte bei der Biegung nicht eben bleiben.** Wie ich am angegebenen Ort nachgewiesen habe, wird hierdurch jedoch nur die Ermittelung der Form der elastischen Linie erschwert; die Verbiegung der Welle bleibt dieselbe, als ob sie sich in Ruhe befände.

191. Kritische Störungen 2. Ordnung hervorgerufen durch Eigengewicht[2]), ungleiche Elastizität[3]), ungleichmäßigen Antrieb[4]).

Die hier zu besprechenden Störungen haben die Bedeutung von Nebenerscheinungen, die nie die hohe Gefahrsklasse erreichen können, wie die früher beschriebenen Störungen durch die freien Fliehkräfte und die Kreiselwirkung der Scheiben. Sie sind der Größe nach 2. Ordnung klein, obwohl man sie also als „**sekundär**" bezeichnen darf, können sie trotzdem im Betriebe Sorgen verursachen. Eine vorläufige Übersicht zeigt folgendes.

Das Eigengewicht kann auf folgende Weise Resonanzschwingungen hervorrufen. Die Bewegung einer einzelnen Scheibe, auf deren Betrachtung wir uns beschränken, besteht in der ziemlich gleichmäßigen Drehung mit der Geschwindigkeit ω um den Schwerpunkt S. Dieser selbst beschreibt bei der „stationären" Bewegung, eine Kreisbahn mit der Geschwindigkeit ω und eine elastische Schwingung mit der Kreisfrequenz ω_k, die geradlinig, elliptisch oder kreisförmig sein kann, und in letzterem Fall im gleichen oder im entgegengesetzten Sinne wie ω durchlaufen wird. **Die relative Bewegung von S gegen einen mit ω umlaufenden Raum** kann eine Drehung mit der Geschwindigkeit $\omega_k - \omega$ sein, die man als **Zusammensetzung zweier harmonischen Schwingungen auffassen** darf. Das Eigengewicht G verwandelt sich im Raume ω zu einer sich drehenden Kraft mit den Komponenten $G \sin \omega t$ und $G \cos \omega t$, die mit der relativen Schwingung in Resonanz tritt, falls die Frequenzen $\omega_k - \omega$ und ω übereinstimmen, d. h. wenn

$$\omega_k - \omega = \omega \quad \text{oder} \quad \omega = \frac{\omega_k}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

ist[5]). Sobald infolge endlichen polären Trägheitsmomentes die Schwere auch Schwankungen der Drehschnelle ω hervorruft, wird der Zusammenhang, wie die Rechnung zeigt, noch verwickelter.

Die ungleiche Elastizität des **Wellenbaustoffes** wird bewirken, daß für eine bestimmte Richtung das Biegungsmoment als JEy'' für eine andere als $JE'y''$ zu rechnen ist, was auf dasselbe herauskommt, als ob die Welle z. B. zwei Hauptträgheitsachsen mit den Momenten J und J' bei gleichem E besitzen würde, wie dies bei einer durchgehenden Längsnute tatsächlich der Fall ist. Eine derartige zentrisch belastete und frei gestützte Welle kann aber nur ein Gleichgewicht erreichen, wenn die Belastung in einer der Hauptebenen des Querschnittes gelegen ist. Sie besitzt zwei kritische Drehzahlen, für die Biegungen in der einen und der anderen Hauptebene. Es stellt sich heraus, daß **bei dazwischen gelegenen Drehzahlen das Gleichgewicht kein stabiles ist.** Außerdem aber macht sich, wie Prandtl a. a. O. festgestellt hat, eine neue kritische Störung bemerkbar bei rd. **dem halben Werte der gewöhnlichen kritischen Drehzahl.**

Der ungleichmäßige Antrieb der Welle kann von einer periodischen Änderung der Umfangskraft oder vom Dazwischenschalten **einer beweglichen Kupplung herrühren,** die bei ungenauem Zusammenbau (wenn die Wellen einen kleinen Winkel bilden) ähnlich wie ein Kreuzgelenk wirken muß. Thoma hat gezeigt, daß ein Kreuzgelenk auch biegende Momente auf das Wellenende überträgt, was bis anhin übersehen worden war, und ebenfalls kritische Erscheinungen hervorzurufen vermag. Föppl gab a. a. O. an,

---

[1]) Meine eigene Darstellung in Ztschr. f. d. gesamte Turbinenwesen 1920, S. 2, befriedigt mich nicht ganz und sei mathematischen Köpfen zur Durchsicht und Verbesserung empfohlen.

[2]) Verfasser in Dingl. Polyt. Journ. 1918 S. 1. 17. 117. 135. Schweiz. Bauztg. Bd. 69. 1917. S. 93. 229. Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1919. S. 867. 870. Gümbel, D. P. J. 1917. S. 235. 1918. S. 71. Lorenz Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1919. S. 240. 888. Föppl, Z. f. gesamte Turb.-Wesen 1918. Heft 18 u. 19.

[3]) Dingl. Polyt. Journ. 1918. S. 182.

[4]) Föppl, O., Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1919. S. 866.

[5]) Auf das Vorhandensein einer Störung bei dieser Geschwindigkeit wurde ich von den Siemens-Schuckert-Werken bereits im J. 1910 aufmerksam gemacht.

daß, wenn die Ungleichförmigkeit der Dehnung ν Impulse auf einen Umlauf aufweist, eine neue kritische Störung bei der Geschwindigkeit

$$\omega_1 = \frac{\omega_k}{\nu + 1} \quad \ldots \ldots \ldots (2)$$

auftaucht. Die vollständige Lösung zeigt, daß auch die Störung

$$\omega_2 = \frac{\omega_k}{\nu - 1} \quad \ldots \ldots \ldots (3)$$

vorhanden ist. Biegungsmomente an den Wellenenden rufen, falls $\nu = 1$ ist, eine Störung bei $\omega_b = \omega_k/2$ hervor. Die rechnerische Behandlung führt zu folgenden Ergebnissen.

a) Eigengewicht.

Zum Zwecke der zahlenmäßigen Bestimmung der neuen kritischen Drehzahlen betrachten wir vorerst eine Scheibe Abb. 1013, wobei W den Wellendurchstoßpunkt, S den Schwerpunkt bedeutet. Wir beziehen die Bewegung auf einen mit ω um den Punkt O' sich drehenden Raum, in dem $y\,z$ die Koordinaten von S sind. Die Projektion der Lagermittel ist O; die elastische Gegenkraft der Welle P sei in solchem Maßstab aufgetragen, daß sie durch Strecke WO darstellbar ist. Wir zerlegen P in $-G = O'O =$ dem negativen Eigengewicht der Scheibe, und in $WO' = P'$, dann ist O' ein fester Punkt und die wirkenden Kräfte sind P' und das Moment der Kräfte $+G - G$. Wären letztere nicht vorhanden, so könnte die Scheibe eine „stationäre" Drehung um O' beschreiben z. B. mit $W_0\,S_0$ als den Lagen von W, S, wobei die Auslenkung y_0 aus dem relativen Gleichgewicht sich zu

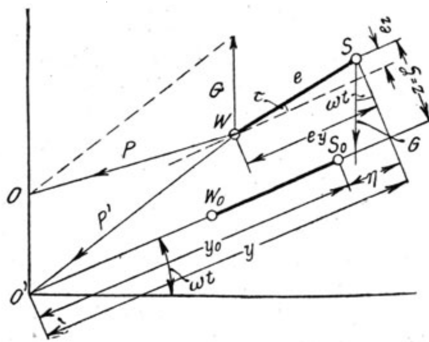


Abb. 1013. Kräfte und Verschiebungen an einer Einzelscheibe.

$$y_0 = \frac{\omega_k^2\, e}{\omega_k^2 - \omega^2} \quad \ldots \ldots \ldots (4)$$

berechnet. Um die Bewegungsgleichungen der „gestörten" Bewegung aufzustellen, fügen wir die Ergänzungskräfte der relativen Bewegung hinzu. Diese sind: die Fliehkraft, mit den Komponenten $m\,y\,\omega^2$ und $m\,z\,\omega^2$ und die Corioliskraft, mit den Komponenten $2\,m\,\omega\,\dot z$ $-2\,m\,\omega\,\dot y$ nach der y- und z-Richtung. Die elastische Gegenkraft $P' = \alpha\,\varrho' = \alpha\,(\overline{WO'})$ liefert die Komponenten $Y = -\alpha\,(y - e_y)$ und $Z = -\alpha\,(z - e_z)$. Bedeutet τ den relativen Drehungswinkel, so lauten die Schwerpunkts- und die Drehungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} m\,\ddot y &= m\,y\,\omega^2 + 2\,m\,\omega\,\dot z - \alpha\,(y - e_y) \\ m\,\ddot z &= m\,z\,\omega^2 - 2\,m\,\omega\,\dot y - \alpha\,(z - e_z) \\ \Theta\,\ddot\tau &= Y\,e_z - Z\,e_y - G\,e\cos(\omega\,t + \tau) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (5)$$

Wir setzen

$$y = y_0 + \eta;\; z = \zeta \quad \ldots \ldots \ldots (6)$$

wobei $\eta\,\zeta\,\tau$ als kleine Größen behandelt werden, so daß das Verfahren der **„unendlich kleinen Schwingungen"** angewendet werden darf, bei welchen man Produkte und Potenzen der kleinen Größen vernachlässigt. Mit Rücksicht auf Gl. (4) und da $e_y \sim e$; $e_z \sim e\,\tau$; $\cos(\omega\,t + \tau) \simeq \cos\omega\,t$, ferner mit $\Theta = m\,q^2\,\alpha = m\,\omega_k^2$ entsteht

$$\left.\begin{aligned} \ddot\eta &= (\omega^2 - \omega_k^2)\,\eta + 2\,\omega\,\dot\zeta \\ \ddot\zeta &= (\omega^2 - \omega_k^2)\,\zeta - 2\,\omega\,\dot\eta + \omega_k^2\,e\,\tau \\ q^2\,\ddot\tau &= -\omega_k^2\,y_0\,e\,\tau + \omega_k^2\,e\,\zeta - g\,e\cos\omega\,t \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (7)$$

Die Vernachlässigung von τ innerhalb von $\cos(\omega\,t + \tau)$ erweist sich auf Grund meiner Ausführungen in Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1919, S. 870 für die praktischen Verhältnisse, die bei Dampfturbinen vorkommen, als zulässig. Die Entwickelung $\cos(\omega\,t + \tau) \simeq \cos\omega\,t - \tau\sin\omega\,t$ würde auf ungemein verwickelte Rechnungen führen. — Zum Zwecke der Auflösung ist es nicht erforderlich, eine Differentialgleichung für eine Veränderliche aus (7) aufzustellen;

mit Hilfe unbestimmter Beiwerte kann man die „**simultanen**“ **Gleichungen simultan lösen,** indem man

$$\tau = A\cos\omega t;\quad \eta = B\sin\omega t;\quad \zeta = C\cos\omega t \quad \ldots\ldots (8)$$

setzt. Durch Einführung in (7) entsteht:

$$\left.\begin{aligned} (2\omega^2-\omega_k^2)B - 2\omega^2 C &= 0\\ -2\omega^2 B + (2\omega^2-\omega_k^2)C + \omega_k^2 e A &= 0\\ -\omega_k^2 e C + (q^2\omega^2 - \omega_k^2 y_0 e)A &= ge \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (9)$$

Die hieraus zu berechnenden Beiwerte A, B, C werden unendlich groß, wenn die Determinante der Beiwerte verschwindet. Dies bedeutet, daß

$$D = \frac{\omega^2\omega_k^2 q^2}{\omega_k^2-\omega^2}\left[(\omega^2-\omega_k^2)(4\omega^2-\omega_k^2) + \frac{e^2}{q^2}\omega_k^2(2\omega^2+\omega_k^2)\right] = 0 \quad \ldots (10)$$

sein solle. Daraus ergeben sich zwei Werte für die **Drehschnelle** der **Gewichtsstörung**

$$\left.\begin{matrix}\omega_{g1}^2\\ \omega_{g2}^2\end{matrix}\right\} = \frac{\omega_k^2}{4}\left[\left(\frac{5}{2}-\varepsilon^2\right) \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}-\varepsilon^2\right)^2 - 4(1+\varepsilon^2)}\right] \quad \ldots\ldots (11)$$

Darin bedeutet $\varepsilon = e/q$ und ist praktisch so klein, daß man die Quadratwurzel entwickeln kann, was auf die vereinfachten Werte

$$\omega_{g1}^2 = \frac{\omega_k^2}{4}(1+2\varepsilon^2);\qquad \omega_{g2}^2 = \omega_k^2(1-\varepsilon^2) \quad \ldots\ldots (12)$$

führt. Von diesen Werten scheidet ω_{g2} grundsätzlich aus, weil in so naher Nachbarschaft von ω_k die Ausschläge nicht mehr als „unendlich klein“ betrachtet werden dürfen. Was ω_{g1} anbelangt, so wird man ε^2 praktisch vernachlässigen dürfen, und erhält

$$\omega_{g1} = \frac{\omega_k}{2} \quad \ldots\ldots (13)$$

d. h. die Gewichtsstörung tritt ein, wenn die Drehzahl fast genau die Hälfte der normalen kritischen Drehzahl erreicht hat.

Gegen Formel (11) wurde von Gümbel[1]) der grundsätzliche Einwand erhoben, daß im kritischen Zustand die Auslenkungen groß (theoretisch unendlich groß) werden, und daß die Eigenschwingung in diesem Fall von der als sehr klein vorausgesetzten Exzentrizität e nicht abhängen kann, was auf Grund der in der Einleitung wiedergegebenen Erwägung streng auf den Wert $\omega_g = \omega_k/2$ führt. Hierzu ist zu bemerken, daß die Theorie der kleinen Schwingungen naturgemäß nur die im Anfang der Störung sich einstellende Schwingungszahl ergeben kann. Aber es liegt hier allerdings der interessante Fall vor, daß bei einer **Vergrößerung des Ausschlages, ähnlich wie beim physischen Pendel, eine Verlangsamung der Schwingung eintritt.** Für die praktische Beurteilung der Betriebszuverlässigkeit kommen im übrigen nicht die großen, sondern die kleinen Ausschläge, **der Beginn der Störung,** in Betracht. Große Ausschläge sind überhaupt unzulässig, und von der mehr oder minder ausgeprägten Größe der kleinen Ausschläge hängt die **Ruhe des Ganges** der Dampfturbine ab.

Die theoretisch unbegrenzte Zunahme der Ausschläge wird praktisch durch die Zähigkeit der Umgebung unmöglich gemacht. Versuche zeigten, daß die Auslenkung nur dann merkliche Beträge erreicht, wenn die Überwucht so bedeutend ist, wie man praktisch nie zulassen würde. Die Störung macht sich daher, nach mannigfachen Mitteilungen aus der Praxis, nur ab und zu, als leichte Unruhe des Ganges geltend.

b) Ungleiche Wellen-Elastizität.

Den Biegungen in den beiden Hauptebenen mögen die (gewöhnlichen) kritischen Drehgeschwindigkeiten ω_1, ω_2 entsprechen. Wir sehen von der Schwere ab, so daß in Abb. 1013 O' in O hineinfällt. Für die stationäre Drehung sei $O'Y$ die Biegungsrichtung bei der Geschwindigkeit ω_1; dann wird die Gegenkraft $Y = -\alpha_1(y-e_y) = -m\omega_1^2(y-e_y)$ ähnlich $Z = -m\omega_2^2(z-e_z)$. Setzen wir ferner $\Theta = \infty$ voraus, so daß τ ständig $=0$ sein muß, so vereinfachen sich Gl. (7) zu

$$\left.\begin{aligned} \ddot\eta &= (\omega^2-\omega_1^2)\eta + 2\omega\dot\zeta\\ \ddot\zeta &= (\omega^2-\omega_2^2)\zeta - 2\omega\dot\eta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (14)$$

[1]) Dingl. Polyt. Journ. 1918, S. 71. Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1919, S. 869.

Untersuchen wir die Eigenschwingung der Scheibe mittels des Ansatzes

$$\eta = B \cos \lambda t; \quad \zeta = C \sin \lambda t \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (15)$$

so erhält man

$$\left.\begin{aligned}(\lambda^2 + \omega^2 - \omega_1^2) B + 2\,\omega\,\lambda\, C = 0\\ 2\,\omega\,\lambda\, B + (\lambda^2 + \omega^2 - \omega_2^2) C = 0\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (16)$$

Das Verhältnis B aus der 1. in die 2. Gl. eingesetzt, führt auf die Bedingung

$$\lambda^4 - (2\,\omega^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2)\,\lambda^2 + (\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2) = 0 \quad \ldots \ldots (17)$$

deren Auflösung

$$2\,\lambda^2 = (2\,\omega^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2) \pm \sqrt{(2\,\omega^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - 4\,(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)} \;.\; (18)$$

ergibt. Soll λ^2 positiv bleiben, muß $(\omega^2 - \omega_1^2)\,(\omega^2 - \omega_2^2) > 0$ sein. Ist $\omega_1 < \omega_2$, so bedeutet dies, daß entweder $\omega < \omega_1$ oder $\omega > \omega_2$ sein müsse. Für Zwischenwerte wäre λ^2 negativ, d. h. man müßte zu einem Ansatz für $\eta\zeta$ mit der Exponentialfunktion $e^{\lambda t}$ greifen. Dies bedeutet, daß für jene Zwischenwerte eine Störung des ursprünglichen Gleichgewichts nicht eine Schwingung auslöst, sondern daß $\eta\zeta$ **ständig zunehmen, d. h. daß das Gleichgewicht labil war.**

In Verbindung mit dem Eigengewicht gelten die sinngemäß umgeformten Gl. (7). In der 3. davon darf man näherungsweise die zwei mittleren Glieder vernachlässigen, so daß

$$q^2\,\ddot{\tau} = -g\,e \cos(\omega t) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (19)$$

übrig bleibt, und für τ eine einfache Cosinusfunktion ergibt, die in die 2. Gl. eingesetzt, ein Störungsglied mit ω als Kreisfrequenz darstellt. Die Lösung wird daher die Form

$$\eta = B_0 \sin \omega t; \quad \zeta = C_0 \cos \omega t \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (20)$$

haben. Die Determinante der Beiwerte in den sich ergebenden Gleichungen lautet

$$(2\,\omega^2 - \omega_1^2)(2\,\omega^2 - \omega_2^2) - 4\,\omega^4 = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (21)$$

aus der die kritische Geschwindigkeit

$$\omega_u^2 = \frac{\omega_1^2\,\omega_2^2}{2\,(\omega_1^2 + \omega_2^2)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (22)$$

folgt. Ist der Unterschied von ω_1 ω_2 klein und ist ω_k ihr Mittelwert, so kann man angenähert

$$\omega_u^2 = \frac{\omega_k^2}{4} \quad \text{oder} \quad \omega_u = \frac{\omega_k}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (22\,\text{a})$$

schreiben, was zum vorhin ermittelten Wert der Gewichtsstörung führt.

c) Ungleiche Elastizität bei vielen Scheiben.

Die Scheiben sollen gleichmäßig zwischen den Lagermitten verteilt sein, das Trägheitsmoment sei so groß, daß ω unveränderlich bleibt. Wir betrachten die Bewegung von einem um die geometrische Achse sich mit ω drehenden Raum, dessen XOY-Ebene der Hauptachse I des Querschnittes parallel ist. Die relativen Koordinaten bezeichnen wir mit η, ζ, den Abstand längs der Achse mit x. Die Exzentrizität sei $= 0$. Ein Wellenelement dx trägt eine Scheibenmasse $m_1\,dx$, an der, wie unter a) die Ergänzungskräfte und wie in Abschn. 90 die Scherkräfte und Momente von der Welle her angreifen. Zieht man die dort gemachten Entwicklungen heran, so ergibt sich die Bewegungsgleichung für die Koordinate η:

$$m_1\,dx\,\ddot{\eta} = m_1\,dx\,\eta\,\omega^2 + m_1\,dx\,2\,\omega\,w_z + dS_y,$$

oder mit Rücksicht auf $dM_y/dx = -S_y$ und $J_y E \eta'' = M_y$ für η und ζ

$$\left.\begin{aligned}\ddot{\eta} &= \eta\,\omega^2 + 2\,\omega\,\dot{\zeta} - \frac{J_y E}{m_1}\,\eta^{\text{IV}}\\ \ddot{\zeta} &= \zeta\,\omega^2 - 2\,\omega\,\dot{\eta} - \frac{J_z E}{m_1}\,\zeta^{\text{IV}}\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (23)$$

Für die kritischen Drehzahlen ν-ter Ordnung der frei aufliegenden Welle von der Länge L erhält man nach Abschn. 90:

$$\omega_{y\nu}^2 = \frac{J_y E}{m_1 k^4}; \qquad \omega_{z\nu}^2 = \frac{J_z E}{m_1 k^4} \quad \text{mit} \quad k = \frac{\nu \pi}{L} \quad \ldots\ldots \quad (23\text{a})$$

Die entsprechenden elastischen Linien sind $\sin(kx)$ proportional. Daher versuchen wir, ob der Ansatz

$$\eta = B \sin kx \cos \lambda t; \qquad \zeta = C \sin kx \sin \lambda t$$

eine Lösung der Gl. (23) bildet. Man erhält mit Gl. (23a) die Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}(\lambda^2 + \omega^2 - \omega_{y\nu}^2) B + 2\omega\lambda C = 0 \\ 2\omega\lambda B + (\lambda^2 + \omega^2 - \omega_{z\nu}^2) C = 0\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23\text{b})$$

Diese sind aber mit Gl. (16) identisch, wenn wir ω_1, ω_2 mit $\omega_{y\nu}$, $\omega_{z\nu}$ vertauschen. Man kann somit die Lösung für λ nach Gl. (18) sofort hinschreiben und das Ergebnis wie folgt aussprechen:

Bei der gleichmäßig mit Scheiben besetzten Welle ist das Gleichgewicht zwischen je zwei kritischen Drehzahlen ν-ter Ordnung, die den beiden Hauptachsen entsprechen, labil, dazwischen stabil.

Zieht man die Wirkung des Eigengewichts in Betracht, so werden sich wahrscheinlicherweise weitere kritische Zwischendrehzahlen ergeben, ähnlich wie Gl. (22).

Versuche im Maschinenprüffeld der Eidgen. Techn. Hochschule haben das Vorhandensein des eigentümlichen Gebietes der Labilität bestätigt. Ebenso die kritische Drehzahl infolge Eigengewichtes, Gl. (22), bei einer Scheibe, und wenigstens den tiefsten Wert derselben bei mit vielen Scheiben besetzter Welle.

d) Ungleichmäßiger Antrieb.

Es werde durch eine äußere Ursache eine Schwankung der Winkelabweichung τ Abb. 1013 hervorgerufen, so daß man

$$\tau = A \cos \lambda t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

mit bekanntem A setzen darf. Diese Gl. vertritt ein Integral der 3 Gl. in Gl. (7) und es bleiben die beiden ersten übrig, die wir mit $A_0 = A\,\omega_2^2 e$, verallgemeinert gemäß (14) als

$$\left.\begin{array}{l}\ddot{\eta} = (\omega^2 - \omega_1^2)\,\eta + 2\,\omega\,\zeta \\ \ddot{\zeta} = (\omega^2 - \omega_2^2)\,\zeta - 2\,\omega\,\dot{\eta} + A_0 \cos \lambda t\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

anschreiben können. Der Ansatz

$$\eta = B \sin \lambda t; \quad \zeta = C \cos \lambda i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

führt auf ähnliche Bestimmungsgleichungen wie (16). Unendlich große Werte ergeben sich wenn die Determinante, die mit (17) identisch ist, verschwindet. Beschränken wir uns auf den Fall $\omega_1 = \omega_2 = \omega_k$, so erhält man die Wurzeln

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1 \\ \lambda_2\end{array}\right\} = \pm\,\omega_k - \omega; \quad \left.\begin{array}{l}\lambda_2 \\ \lambda_3\end{array}\right\} = \pm\,\omega_k + \omega \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

Da es auf das Vorzeichen von λ nicht ankommt, bedeuten obige Wurzeln nur zwei kritische Erregungen. Setzt man noch $\lambda = \nu\,\omega$, wobei z. B. für das Kreuzgelenk $\nu = 2$ ist, so sind die Wurzeln

$$\lambda_1 = \nu\,\omega_{a1} = \omega_k - \omega_{a1}; \quad \lambda_2 = \nu\,\omega_{a2} = \omega_k - \omega_{a2}$$

daraus die kritischen Geschwindigkeiten

$$\omega_{a1} = \frac{\omega_k}{\nu + 1}; \quad \omega_{a2} = \frac{\omega_k}{\nu - 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27\text{a})$$

Am Ende der Welle angreifende periodische Biegungsmomente üben, wie man nachweisen kann, genau denselben Einfluß wie Drehmomente aus, d. h. ergeben kritische Drehzahlen nach Gl. (27a).

e) Kritische Drehungsschwingungen und ihr Einfluß auf die Biegungsschwingung.

Zum Versuchsbericht am Ende des 95. Abschn. sind folgende theoretischen Bemerkungen anzufügen. Eine Drehungsschwingung wird im allgemeinen durch äußere Kraftmomente hervorgerufen. Die allgemeinen Gleichungen zur Beurteilung dieses Falles für eine mit vielen

Scheiben besetzte Welle habe ich in Dingl. Pol. Journ. 1918, S. 17 abgeleitet, deren Integration und Deutung noch aussteht. Bei der gedrungenen Form normaler Turbinenwellen mit gegen die Mitte zusammengeschobenen Scheiben dürfte die Verdrehung innerhalb des Scheibenteiles vernachlässigbar sein.

Kommt es hingegen zu einer **Drehschwingung zwischen der Masse des Turbinenläufers und der Dynamomasse,** was eher im Bereich der Möglichkeit liegt, dann wird man die Scheiben zu einer einzigen Masse mit dem Trägheitsmoment Θ_1 zusammenfassen dürfen, die mit dem Dynamomoment Θ_2 durch eine Welle vom Durchmesser D und der Länge L gekoppelt ist. Sind φ_1 φ_2 die von einer spannungslosen Lage aus zurückgelegten Winkel, so ist $M = \frac{J_p G}{L}(\varphi_1 - \varphi_2)$ das Verdrehungsmoment, und die Bewegungsgleichungen lauten

$$\Theta_1 \ddot{\varphi}_1 = - M + M_1; \quad \Theta_2 \ddot{\varphi}_2 = + M - M_2 \quad \quad (28)$$

worin M_1 M_2 das treibende und das widerstehende Moment bedeuten. Um die Eigenschwingung zu erhalten, setzt man $M_1 = M_2 = 0$, teilt die Gl. durch Θ_1 und Θ_2 und zieht die 2. von der 1. ab. Setzt man $\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi$, so folgt

$$\ddot{\varphi} = - M\left(\frac{1}{\Theta_1} + \frac{1}{\Theta_2}\right) = - \frac{J_p G (\Theta_1 + \Theta_2)}{L \Theta_1 \Theta_2} \varphi \quad \quad (29)$$

Hieraus ergibt sich in bekannter Weise die sekundliche Schwingungszahl

$$N_{sek} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{J_p G (\Theta_1 + \Theta_2)}{L \Theta_1 \Theta_2}} \quad \quad (30)$$

Diese kann nur gefährlich werden, falls in M_1 oder M_2 eine Komponente gleicher Periode vorhanden ist, in welchem Fall theoretisch unendlich große, praktisch durch die Reibung auf endliche Weite beschränkte Ausschläge zustande kommen.

Nehmen wir an, die **Turbine und die Dynamo seien durch zwei Lager getrennt,** dann sind ihre kritischen Drehzahlen voneinander zwar so gut wie unabhängig, sie werden jedoch durch die Drehungsschwingung, sobald sich eine solche ausgebildet hat, in der durch die Formeln (27a) unter c dargestellten Weise beeinflußt. Je nach Umständen kann hierdurch die kritische Biegungs-Schwingungszahl erheblich herabgesetzt werden.

Lorenz gab[1]) die Theorie derjenigen **kritischen Drehungsschwingungen, die durch die Schwerkraft der exzentrisch sitzenden Scheiben hervorgerufen werden** können. Sind bloß zwei schwere Massen an massenloser Welle angeordnet, so stimmt jene kritische Drehzahl mit dem Wert N_{sek} Gl. (30) überein. Es ist vorauszusehen, daß in der Wirklichkeit infolge der Kleinheit der Exzentrizität und der Reibungen die Schwingungsweite selbst bei Resonanz einen nur geringen Betrag wird anzunehmen vermögen.

f) Unaufgeklärte sekundäre Störungen.

Eine Welle von 16 mm Durchm. und 800 mm Spannweite, die entweder beidseitig eingespannt oder in Kugelschalen frei gestützt und durch ein Kreuzgelenk, dessen Mittelpunkt in den Schalenmittelpunkt verlegt war, von einem Elektromotor angetrieben wurde, trug in gleichen Abständen 10 Scheiben von 250,6 mm Durchm. 8,5 mm Dicke. Die Auslenkung der Welle wurde durch einen die Welle umgreifenden Aluminiumhebel, der durch Gelenk in einem Zwischenpunkt gestützt war und am Ende einen Schreibstift trug, aufgezeichnet. Die Beobachtung der kritischen Geschwindigkeiten ergab folgendes.

1. Verhalten unter der tiefsten kritischen Drehzahl gewöhnlicher Art.

a) Welle wagrecht aufgestellt, frei aufliegend. Die Störung trat bei rund der Hälfte der kritischen Drehzahl ein, sobald jede Scheibe mit einer Überwucht von 0,60 kg versehen wurde, wodurch die Schwerpunktsverlegung den Betrag $e = 0{,}74$ cm erreichte.

b) Welle wagrecht, beidseitig eingespannt (durch Hinzufügung je eines weiteren Endlagers). Die Störung trat bei je 0,915 kg Überwucht und $e = 1{,}26$ cm ein.

c) Welle senkrecht aufgestellt. Die bei Abwesenheit von künstlicher Überwucht ermittelte tiefste kritische Drehzahl unterscheidet sich bis auf die Fehlergrenzen nicht von derjenigen der wagerechten Welle, und zwar unabhängig davon, ob die Welle im Spurlager aufgehängt, oder von unten gestützt wurde. Nach dem Anbringen von gleichgroßen Überwuchtmassen wie unter a) und b) wächst der Ausschlag naturgemäß, allein die Bahnen bleiben nahezu kreisförmig, und die Auslenkungen nehmen gleichförmig mit wachsender Drehzahl zu. Die Störung durch das Eigengewicht ist verschwunden. Das Kreuzgelenk kann keine Wirkung ausüben, da keine Schwingung vorhanden ist. Erregt man eine solche durch einen Stoß von außen, so verschwindet sie alsbald.

---

[1]) Z. f. d. gesamte Turbinenwesen 1919, S. 149.

2. Verhalten der Welle zwischen der ersten und zweiten kritischen Drehzahl gewöhnlicher Art.

a) Wagerechte Welle mit freier Auflagerung und Kreuzgelenkantrieb. Die unter a) beschriebene Welle zeigte bei je 37 g Übergewicht im Abstande von je 100 mm vom Mittelpunkte, zwischen 1000 und 1600 Umdrehungen zunächst keine Anzeichen eines kritischen Zustandes. Eine Steigerung auf rund 48 g für die Scheibe ergab hingegen auffallende Störungen, insbesondere in der Gegend von 1450 Umdrehungen. Die eigentümlichen Bahnen, die der Wellenmittelpunkt beschreibt, sind in Abb. 1014 dargestellt, u. zw. entfallen etwa sechs Umläufe auf 1 Sekunde, gegenüber 22 bis 25 Umdrehungen der Welle in 1 Sekunde. Da gleichzeitig wegen Verschiebung des Endlagers, die Mitte des Kreuzgelenkes aus der Mitte der Kugelschale herausrückte, wurde ein neues Gelenk hergestellt, bei dem das Wellenende selbst kugelig abgedreht war und in einer feststehenden Kugelschale lief. Das Gelenk war im Kugelkopfe untergebracht, und es

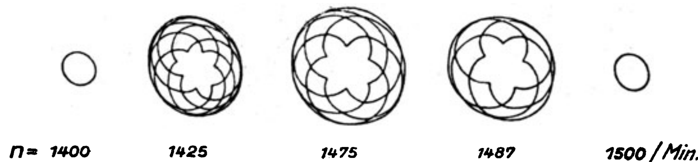


Abb. 1014. Wellenbahnen, Mitte zwischen den Lagern (natürl. Größe).

konnte ein Zwang durch exzentrische Stellung des Kopfes nicht mehr auftreten. Eine neue Versuchsreihe bestätigte das Vorkommen der tiefsten Gewichtsstörung n_{g1}, ebenso auch das einer zweiten Störung n_{g2}, wenn genügend große Überwuchtmassen angebracht wurden. Je 20 g am Halbmesser von 100 mm zeigten keine Wirkung. Bei je 28,4 g trat ein ausgeprägter Höchstwert bei 1450 Uml/min ein, mit etwa 5,5 bis 6 mm Durchmesser der ovalen Wellenbahn gegenüber etwa 2 mm vor und nach der Störung. Bei 37,2 g Übergewicht für jede Scheibe erreichte die Auslenkung in der Mitte der Wellenlänge die Hubbegrenzung mit einem Bahndurchmesser von 14 mm. Die Auslenkung in den äußeren Vierteln der Wellenlänge betrug bloß 7 bis 9 mm, und von einer Knotenbildung, wie sie der zweiten kritischen Drehzahl gewöhnlicher Art entspricht, konnte nichts bemerkt werden.

Es tritt also eine zweite kritische Drehzahl neuer Art in Erscheinung, die aber nicht in der einfachen Beziehung $n_{g2} = n_{k2}/2$ zur kritischen Drehzahl „I. Art" steht. Da $n_{k1} = 584$ war, sollte das theoretische $n_{k2} = 4 \times 584 = 2336$, und $n_{g2} = 1168$ sein. Statt dessen ist $n_{g2} = 1450$, also $n_{g2} : n_{k2} = 0{,}62$; oder $\boldsymbol{n_{g2} : n_{k1} = 2{,}49}$ **statt 2,0.**

Eine weitere, aber viel geringere Störung trat bei etwa 1650 Uml/min, also rund dem 2,8 fachen der ersten kritischen Drehzahl auf. Von dieser Störung berichten meine Freunde in der Praxis, daß sie wiederholt beobachtbar war, ohne daß eine Erklärung dafür in schwankenden Fundamenten oder ähnlichen Resonanzerscheinungen gefunden werden konnte. Dabei soll jedoch die Unruhe über dem 2,8 fachen Betrag von n_{k1} bis zur zweiten normalen kritischen Drehzahl n_{k2} stetig zugenommen haben, während bei meinen Versuchen die an sich höchst geringfügige Störung wieder ganz verschwand, und erst bei etwa 1900 Uml/min scharf wachsende Ausschläge einsetzten.

Es schien mir ferner ein Versuch Wert zu besitzen, bei dem die Überwucht derart untergebracht wird, daß die Exzentrizität dem Gesetze

$$e = e_0 \sin 2\pi \frac{x}{l}$$

gehorcht, wo x den Abstand von einem Lager l die ganze Wellenlänge bedeutet. Eine so ausgewuchtete Welle besitzt keine kritische Geschwindigkeit erster Ordnung, wohl aber eine solche zweiter Ordnung. Sie müßte demgemäß durch den Geschwindigkeitspunkt der ersteren ohne jede Störung hindurchgehen. Die Überwucht betrug der Reihe nach für die Scheiben

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	Gramm (Gewicht) am Halbmesser von 100 mm									
	14	37,5	47	37,5	14	— 14	— 37,5	— 47	— 37,5	— 14

Die Ausschläge wachsen gemäß den Schaulinien in Abb. 1015, wobei sich *a* auf die Mitte, *b* auf ein Viertel der Wellenlänge beziehen, und die Ordinaten die mittleren Durchmesser der beschriebenen ovalen Bahnen bedeuten. Bei etwa 1350 Uml/min beginnt die neue Störung sich bemerkbar zu machen, erreicht bei 1430 den Höchstwert und klingt in der Wellenmitte ganz ab; im Wellenviertel beginnt bei 1600 Umdrehungen der zur zweiten kritischen Drehzahl gehörende scharf wachsende Ausschlag, der eine Steigerung über 1700 Umdrehungen verbietet[1]). Hier, wie bei den früheren Versuchen ist im übrigen die Unstabilität des Gleichgewichtes im kritischen Gebiet keine große. Man kann die Welle durch leichten Druck mittels

[1]) In einer späteren Versuchsreihe ohne Überwuchtmassen, mit ziemlich ruhig laufender Welle, glaubten wir in Anbetracht der die Welle mit wenig Spiel umfassenden Führungsringe die Drehzahl auf die zweite kritische hinaufsteigern zu dürfen. Das Ergebnis war ein **explosionsartiges Auseinanderschleudern der Vorrichtung und Zusammenreißen der Führungen mit den Lagern.**

einer Stange beruhigen, so daß sie eine Weile mit kleinem Ausschlag läuft. Umgekehrt kann man unterhalb oder bei 1300 Umdrehungen durch leichten Stoß einen Ausschlag hervorrufen, der längere Zeit oder überhaupt stehen bleibt, — ein Zeichen, daß dem labilen ein indifferentes Gleichgewicht vorausgeht. Eigentümlich ist für das kritische Gebiet zwischen etwa 1350 und 1500 Umdrehungen, daß die Bahn des Wellenmittelpunktes in der Mitte der Wellenlänge eine nahezu einfache elliptische bis kreisförmige Kurve ist. Im Viertel der Wellenlänge hingegen erscheinen der Abb. 1014 ähnliche Bahnen, die wir als Übereinanderlagerung einer einfachen „Kreisbewegung" und einer hinzutretenden Schwingung zu betrachten haben.

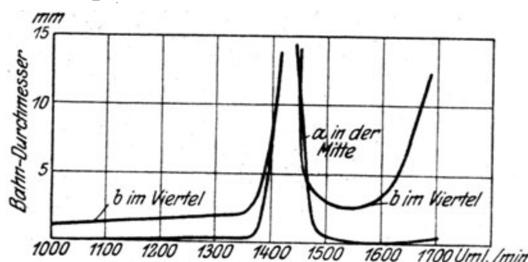


Abb. 1015.
Unaufgeklärte Störung beim etwa 2,5 fachen der tiefsten gewöhnlichen kritischen Drehzahl.

Da die Welle bei der ersten kritischen Drehzahl nicht ganz ruhig blieb, bestand die Überwucht offenbar aus der Übereinanderlagerung einer über die ganze Welle verteilten und einer sinuslinienförmigen. Der ersteren kommt dann bis zur zweiten kritischen Drehzahl eine sinuslinienähnliche Durchbiegung zu, was man häufig übersieht. Hiernach wäre zwar das Vorhandensein einer Durchbiegung in der Mitte begreiflich, nicht aber ihre äußerst rasche gleichzeitge Zunahme mit dem Ausschlag im Wellenviertel.

b) Wagerechte Welle mit beidseitiger Einspannung. Hier ist das Verhältnis $n_{k_1} : n_{k_2} = 1 : 2{,}8$, daher würde die Gewichtsstörung, wenn sie aufträte, bei $n_{g_2} = 0{,}5\, n_{k_2} = 1{,}4\, n_{k_1}$ zu erwarten sein. Im Versuch konnte keine beobachtet werden, es machte sich nur bei je 43 g Überwucht eine Labilität des Gleichgewichtes bis zu $n = 1{,}4\, n_{k_1}$ bemerkbar, indem die kleine kreisrunde Bahn des Wellenmittelpunktes bei leichter Störung von außen sich vergrößerte, bis Streifen eintrat.

c) Senkrecht aufgestellte Welle mit freier Auflagerung. Die Welle zeigte bei gleichmäßig verteilter Überwucht von 33 g für jede Scheibe die gleiche Störung wie bei wagerechter Welle, mit gleichen Bahnformen des Wellenmittelpunktes. Bei sinusförmiger Verteilung bleibt der Halbierungspunkt der Wellenlänge fast völlig ruhig, die Welle bildet eine leicht geschwungene Sinuslinie und zeigt keinerlei Anzeichen einer selbständigen Störung. Im Viertel der Wellenlänge geht die kreisförmige Bahn bei rund 1200 Uml/min in Zykloidenformen über, ohne daß ein Zwischenhöchstwert des Ausschlages feststellbar wäre. Offenbar kommt neben dem Kreuzgelenk auch der Größe und der Verteilung der Überwucht eine besondere Rolle zu, denn wenn die Schuld am Kreuzgelenk allein liegt, so ist zu fragen, warum die Störung in senkrechter Lage bei sinusförmiger Verteilung verschwindet?

Zusammenfassend ist also festzustellen:

Die wagerecht gelagerte Welle mit vielen gleichmäßig verteilten Scheiben weist zwischen der 1. und 2. kritischen Drehzahl erster Art bei Kreuzgelenkantrieb und freier Auflagerung (Kugelschalen) ein weiteres Störungsgebiet aus vorläufig unaufgeklärten Gründen auf, dessen Drehzahl rund das 2,5 fache der tiefsten kritischen Drehzahl erster Art ist. Die Störung erscheint bei wagerechter und senkrecher Wellenlage, hängt jedoch ab von der Größe und Verteilung der Überwucht. Bei sinusförmiger Verteilung (wobei e in der einen Wellenhälfte nach unten, in der andern nach oben gerichtet ist) und bei gleichzeitiger senkrechter Wellenstellung gelang es, die Störung zu beseitigen.

Es darf vermutet werden, daß an den in der Praxis beobachteten Störungen im gleichen Gebiet der Antrieb durch bewegliche Kupplungen mitbeteiligt war, daher sich vom Standpunkte der Ruhe des Ganges die **Benützung fester Kupplungen empfiehlt.**

192. Kritische Drehzahlen bei auf axialen Zug oder Druck beanspruchten Wellen.

Bei Kreiselverdichtern oder großen hydraulischen Turbinen kommt es vor, daß die Welle eine axiale Zug- oder Druckkraft übertragen muß, deren Einfluß auf die kritische Drehzahl Melan[1]) als erster untersucht hat. Seine das Verfahren von Ritz in instruktiver Weise benützende Entwicklung kann wie folgt wiedergegeben werden. Betrachten wir der Einfachheit halber eine überall gleich dicke Welle von der Länge $L = 2\,l$, die in der Mitte eine Scheibe trägt und frei aufgelagert ist. Vom Eigengewicht sehen wir ab. Die Fliehkraft des um $y_0 + e$ ausgelenkten Schwerpunktes bezeichnen wir mit P. Im Abstand x vom Ende sei die Verbiegung y, die axiale Druckkraft sei Q; dann lautet die Biegungsgleichung

$$E\,J\,y'' = -\,Q\,y - \frac{P}{2}\,x \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

[1]) Z. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1917, Heft 44 u. 45.

mit dem Integral

$$y = A\cos kx + B\sin kx - \frac{P}{2Q}x; \quad \text{worin} \quad k^2 = \frac{Q}{JE} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Aus den Bedingungen $y = 0$ für $x = 0$ und $y' = 0$ für $x = l$ ermitteln sich die Festwerte A und B, und man erhält als Einsenkung in der Mitte

$$y_0 = \frac{Pl}{2Q}\left[\frac{\operatorname{tg}(kl)}{(kl)} - 1\right]. \quad \text{In } P = \alpha y \text{ bedeutet also} \quad \alpha = \frac{2Q}{l\left[\frac{\operatorname{tg}(kl)}{(kl)} - 1\right]} \quad \ldots \quad (3)$$

und die kritische Drehzahl ermittelt sich, wenn m die Scheibenmasse bedeutet, wie üblich zu

$$\omega_k = \sqrt{\frac{\alpha}{m}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Nähert sich kl dem Wert $\pi/2$, so wächst $\operatorname{tg}(kl)$ gegen ∞, und ω_k sinkt gegen Null herab, d. h. die Welle nähert sich dem Knickungsfall. Ist Q der Absolutwert einer Zugkraft, so erhält man nach Melan

$$\alpha = \frac{2Q}{l\left[1 - \frac{\operatorname{tg}h(kl)}{(kl)}\right]} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Für eine mit vielen Scheiben besetzte Welle von ungleichmäßiger Dicke wird man das graphische Verfahren Abschn. 92 benützen, indem man zu den Momenten der Fliehkräfte jeweils das Moment Qy der Axialkraft hinzufügt. Melan teilt Schaubilder mit, aus welchen sich für praktisch vorkommende Verhältnisse eine nur geringfügige Änderung der gewöhnlichen kritischen Drehzahl ergibt.

193. Stabilität des Gleichgewichtes über der kritischen Geschwindigkeit.

Ist W der Wellendurchstoßpunkt, S der Schwerpunkt einer Scheibe, O die Projektion der Lagermitte, so liegen bei stationärer Bewegung über der kritischen Drehzahl die Punkte in der Reihenfolge $O\,S\,W$ auf einer Geraden. Es erregt immer wieder die Verwunderung des Anfängers, warum die Strecke SW, die wie eine Nadel „auf der Spitze balanciert", nicht kippt. Wir haben früher erläutert, daß dies im Beharrungsvermögen der Scheibendrehung um ihren Schwerpunkt begründet ist. Es hat jedoch trotzdem ein Interesse, auch mathematisch festzustellen, daß und unter welcher Bedingung jenes „Gleichgewicht" ein stabiles ist.

Die Anweisung, die uns hierfür die analytische Mechanik gibt, ist, der „stationären" Bewegung eine kleine Störung aufzuerlegen und nach dem Verfahren der kleinen Schwingungen zu ermitteln, ob die Störung zu- oder abnimmt. Wir werden sehen, daß hierbei gewisse Vorsichtsmaßregeln zu beobachten sind.

Abb. 1016. Störung des „Gleichgewichtes" über der kritischen Drehzahl.

Es sei ϱ_0 der Schwerpunktsabstand der stationären Bewegung für die Drehschnelle $\omega_0 > \omega_k$, der sich aus der Gleichsetzung der Fliehkraft $m\,\varrho_0\,\omega_0^2$ und der elastischen Gegenkraft $\alpha(e + \varrho_0) = m\,\omega_k^2(e + \varrho_0)$ zu

$$\varrho_0 = \frac{\omega_k^2\, e}{\omega_0^2 - \omega_k^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

ergibt. Abb. 1016 stelle eine Zwischenlage der gestörten Bewegung dar. Vor der Störung wurden die Winkel φ und ψ mit gleichförmiger Geschwindigkeit beschrieben, konnten also

$$\varphi_0 = \omega_0 t; \qquad \psi_0 = \omega_0 t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1a)$$

gesetzt werden. Nach der Störung wird man

$$\varrho = \varrho_0 + z; \qquad \varphi = \varphi_0 + \varepsilon; \qquad \psi = \psi_0 + \vartheta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

setzen, wo $z\,\varepsilon\,\vartheta$ sehr kleine Größen bedeuten, und gemäß der Abb. $\psi = \varphi + \tau$, also

$$\vartheta = \varepsilon + \tau \quad \text{(2a)}$$

ist. Würde man nun die Störung, d. h. $z\,\varepsilon\,\vartheta$ willkürlich wählen, so würde die Rechnung grundsätzlich auf ein Labilität[1]) führen. Man könnte sich nämlich vorstellen, daß die hervorgebrachte Schwankung durch eine Reibung allmählich ertötet wird, die nur die (interne) Schwankung beeinflußt. War nun der Drall durch die Störung z. B. vergrößert worden, so würde die neue stationäre Bewegung ein größeres ϱ_0 und ω_0 ergeben, und die Bewegung würde sich vom ursprünglichen $\varrho_0\,\omega_0$ entfernen, um um die neuen Werte dieser Größen herumzupendeln. Man muß daher **die Größen $z\,\varepsilon\,\vartheta$ der Bedingung unterwerfen, daß der Drall derselbe sei wie vor der Störung.** Dies führt, wenn m die Masse der Scheibe, $\Theta = m q^2$ das Trägheitsmoment, $\dot{\varepsilon}\,\dot{\vartheta}$ Ableitungen nach der Zeit bedeuten, auf die Gleichung

$$m\,(\varrho_0 + z)^2\,(\omega_0 + \dot{\varepsilon}) + \Theta\,(\omega_0 + \dot{\vartheta}) = m\,\varrho_0^2\,\omega_0 + \Theta\,\omega_0$$

oder bei Vernachlässigung der Produkte und Potenzen der kleinen Größen auf

$$2\,\varrho_0\,\omega_0\,z + \varrho_0^2\,\dot{\varepsilon} + q^2\,\dot{\vartheta} = 0 \quad \text{(3)}$$

womit eine erste Differentialgleichung gewonnen ist. Als zweite leiten wir die Gleichung der radialen Bewegung des Schwerpunktes ab.

Die elastische Kraft P sei $\alpha\,\overline{WO}$; da aber WO als Strecke die Resultierende aus $\overline{WU}$ und $\overline{UO}$, wobei $\overline{WU} \perp \overline{UO}$ ist, so kann diese Kraft als Resultierende der Kräfte $P_\varphi = \alpha\,\overline{WU}$ und $P_\varrho = \alpha\,\overline{OU}$ mit den entsprechenden Richtungen aufgefaßt werden. Bei der Kleinheit von τ und σ ist dann

$$P_\varrho = \alpha\,(\varrho + e) \quad \text{und} \quad P_\varphi = \alpha\,e\,\tau \quad \text{(3a)}$$

welche Kräfte in der Figur an den Schwerpunkt übertragen worden sind.

Nun betrachten wir die relative Bewegung des Schwerpunktes in einem mit dem Fahrstrahl mitumlaufenden (gewichtlosen) radialen Schlitze. Wir müssen zu diesem Behufe die Ergänzungskräfte der relativen Bewegung hinzufügen, von welchen indessen nur die „Fliehkraft" $m\,\varrho\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$ für die bezeichnete Bewegung in Betracht kommt, und wir erhalten

$$m\,\frac{d^2\varrho}{dt^2} = m\,\varrho\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - \alpha\,(e + \varrho)$$

oder mit Rücksicht auf (2) mit der Abkürzung

$$\Delta = \omega_0^2 - \omega_k^2 \quad \text{(3b)}$$

$$\ddot{z} - \Delta\,z - 2\,\varrho_0\,\omega_0\,\dot{\varepsilon} = 0 \quad \text{(4)}$$

Endlich hat man für die Drehung um den Schwerpunkt das Moment $\alpha\,\overline{WO}\,e\sin(\tau - \sigma) = 2\,\alpha \times$ Dreieckinhalt OSW, oder anders ausgedrückt $= \alpha\,e\,\tau\,\varrho$, somit die Gleichung

$$\Theta\,\frac{d^2\psi}{dt^2} = \alpha\,e\,\varrho\,\tau\,.$$

Führt man die Bezeichnungen

$$\frac{e^2}{q^2} = \nu^2\,; \qquad \frac{\omega_k^4\,\nu^2}{\Delta} = \beta \quad \text{(4a)}$$

ein, so wird die Drehungsgleichung nach (2)

$$\ddot{\vartheta} + \beta\,(\varepsilon - \vartheta) = 0 \quad \text{(5)}$$

Um Gl. (3), (4) und (5) aufzulösen, setzt man mit $e_0 = 2{,}718\ldots$

$$z = a\,e_0^{\lambda t}\,; \qquad \varepsilon = b\,e_0^{\lambda t}\,; \qquad \vartheta = c\,e_0^{\lambda t} \quad \text{(6)}$$

und erhält das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} 2\,\varrho_0\,\omega_0\,a + \varrho_0^2\,\lambda\,b + q^2\,\lambda\,c &= 0 \\ (\lambda^2 - \Delta)\,a - 2\,\varrho_0\,\omega_0\,\lambda\,b &= 0 \\ \beta\,b + (\lambda^2 - \beta)\,c &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{(7)}$$

dessen Determinante verschwinden muß, wenn es endliche Lösungen für a, b, c geben soll. Dies führt auf die Form

$$\lambda\,(\lambda^4 + 2\,B\,\lambda^2 + C) = 0 \quad \text{(8)}$$

---

[1]) In der 4. Auflage war die Lösung noch mit einer solchen behaftet. Die Bewegungsgleichungen ließen Integrale mit ständig wachsenden Zeitgliedern zu, worauf mich Prof. A. Föppl aufmerksam gemacht hat. In der Schweiz. Bauzeitung 1917, Bd. 69, S. 200 habe ich dann nachgewiesen, daß dies notwendigerweise der Fall ist, solange der Drall der Bewegung bei der Störung nicht unverändert belassen wird.

Man erhält mithin eine Wurzel $\lambda_0 = 0$, die zugehörigen Teilintegrale sind Festwerte, und zwar ergeben Gl. (7) $a_0 = 0$, $b_0 = c_0 =$ beliebig. Die übrigen folgen aus der Auflösung

$$\lambda^2 = (-B \pm \sqrt{B^2 - C}) \quad \ldots \quad (9)$$

Wäre diese Größe komplex, so würde die Quadratwurzel daraus ebenfalls komplex und ergäbe die Form

$$\left.\begin{matrix}\lambda_1 \\ \lambda_2\end{matrix}\right\} = \pm(\alpha + \beta i)$$

ähnlich für λ_3, λ_4. Es würde also jedenfalls eine Wurzel vorhanden sein, deren reeller Teil positiv ist, und im zugehörigen partikulären Integral $e^{(\alpha+\beta i)t} = e^{\alpha t} e^{\beta i t}$ würde das erste Glied mit wachsender Zeit über alle Grenzen zunehmen, die Stabilität wäre nicht vorhanden. Wäre λ^2 reell positiv, so würde der gleiche Fall eintreten. Es kann also Stabilität nur bestehen, falls λ^2 reell negativ, λ rein imaginär ist, so daß die partikulären Integrale in reine Kosinus- und Sinusschwingungen übergehen. Die Bedingungen hierfür sind[1])

$$B > 0, \qquad C > 0, \qquad B^2 - C > 0 \quad \ldots \quad (10)$$

Die Ausrechnung zeigt, daß man diese für kleine Werte des Unterschiedes $\omega_0 - \omega_k$ näherungsweise durch

$$\left(\frac{\omega_0^2 - \omega_k^2}{\omega_0^2}\right)^3 > 4\frac{e^2}{q^2} \quad \ldots \quad (11)$$

ersetzen kann. Ist das Verhältnis des Trägheitsradius zur Exzentrizität e sehr groß, so wird ν^2 klein und die Stabilität wird schon bei ganz kleiner Überschreitung der kritischen Geschwindigkeit vorhanden sein. Dies ist der praktisch ausnahmslos eintretende Fall. **Ist aber das Trägheitsmoment verschwindend klein, $\Theta = 0$, so ist das Gleichgewicht überhaupt unstabil,** es sei denn, daß gleichzeitig $e = 0$ wird. Die Größe des Trägheitsmomentes ist mithin von ausschlaggebender Bedeutung. Das gleiche Ergebnis könnte auch mit Hilfe rechtwinkliger Koordinaten aus Gl. (7) Abschn. 191 abgeleitet werden.

Eine Untersuchung der Stabilität vom Standpunkte des Energiesatzes findet man in Dingl. Pol. Journ. 1918, S. 117.

Bewegung bei der kritischen Drehzahl.

Man kann die Welle unter Benützung künstlicher Stützen auf die kritische Drehzahl bringen und freigeben. Welcher Art ist die entstehende Bewegung? O. Föppl[2]) und Lorenz[3]) haben die Lösung angegeben; es gibt eine Bewegung, bei der sich WS dauernd senkrecht zu OW stellt. WS dreht sich mit ω_k und möge zur Zeit t den Winkel $\omega_k t$ mit der X-Achse einschließen. Dann erhalten die Schwerpunktsgleichungen in den Koordinaten x, y die Form:

$$\ddot{x} = -\omega_k^2 x + e\,\omega_k^2 \cos\omega_k t; \qquad \ddot{y} = -\omega_k^2 y + e\,\omega_k^2 \sin\omega_k t \quad \ldots \quad (1)$$

Sonder-Integrale hiervon sind, wie man sich durch Einsetzen überzeugt,

$$x = +\frac{e\,\omega_k}{2} t \sin\omega_k t; \qquad y = -\frac{e\,\omega_k}{2} t \cos\omega t \quad \ldots \quad (2)$$

Sie entsprechen für $t = 0$ der Anfangslage $x = 0$; $y = 0$ und den Geschwindigkeiten $\dot{x} = 0$; $\dot{y} = -\omega_k e/2$. Die **Bahn ist eine archimedische Spirale mit dem der Zeit proportional wachsenden Fahrstrahl**

$$\varrho = \frac{\omega_k e t}{2} \quad \ldots \quad (3)$$

der sich mit der Geschwindigkeit ω_k dreht. Das von der Welle auszuübende Drehmoment $M = m e \varrho \omega^2$ wächst unbegrenzt mit der Zeit.

193a. Leblancs Vorschläge für selbsttätigen Massenausgleich bei hoher Umlaufzahl.

Der bekannte hervorragende Erfinder äußert sich[4]) über die Möglichkeiten, die bis dahin üblichen Umlaufzahlen wesentlich zu steigern wie folgt.

1. Um den Läufer und dessen Lagerung von Fliehkräften möglichst zu entlasten, sollten die Lager elastisch, in Federn, aufgehängt werden, damit sich der Schwungkörper, als starrer Körper aufgefaßt,

---

[1]) S. auch Routh, Dynamik II, § 289.

[2]) Z. f. d. gesamte Turb.-Wesen 1918, Heft 18.

[3]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1919, S. 890.

[4]) In seiner Studie über „Machines rotatives à très grandes vitesses“. Mémoires de la Soc. des Ing. civils de France 1913, p. 171.

um seine „freie Achse“ drehen kann, wobei die kleinen Auslenkungen der Achse durch die federnde Lagerung unschädlich gemacht werden.

2. Um auf die hohe Endgeschwindigkeit zu kommen, muß die kritische Geschwindigkeit überschritten werden, die der Elastizität der Federn und des Läufers entspricht. Damit dies ohne Erschütterungen vor sich geht, können die Lager durch bewegliche Stützen zeitweilig festgelegt und dann wieder freigemacht werden.

Während dieser Festlegung könnte sich die dem elastischen Läufer an sich zukommende kritische Drehzahl ausbilden. Doch liegt diese so hoch, daß man Zeit genug hat, die Geschwindigkeit genügend weit über die oben erwähnte kritische Drehzahl zu steigern, worauf die Lager gefahrlos freigegeben werden können.

3. Zum Zwecke selbsttätigen Massenausgleiches soll an jedem Wellenende ein mit Quecksilber teilweise gefülltes, zylindrisches Hohlgefäß fest aufgekeilt werden. Nach den im Zentrifugenbau gemachten Erfahrungen stellt sich das durch Reibung mitgenommene Quecksilber bei exzentrischem Lauf der Welle von selbst so ein daß die Schwerpunktlage der Drehachse nähergebracht wird. Da bis jetzt keine anschauliche

Theorie des selbsttätigen Massenausgleiches

vorliegt, widmen wir ihr folgende kurze Betrachtung. Abb. 1016a stellt links die Lage des Quecksilberspiegels bei langsamer Drehung (die immerhin rasch genug sein muß, um den Quecksilberspiegel zu einem zylindrischen zu gestalten) dar. Es bedeutet

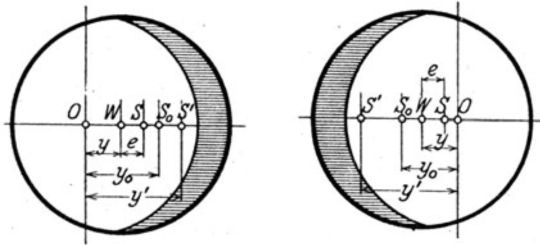


Abb. 1016a. Selbsttätiger Massenausgleich mittels Quecksilberfüllung.

O die geometrische, im Raume feste Drehachse;
W den Wellendurchstoßpunkt, zugleich Mittelpunkt des zylindrischen Hohlgefäßes;
S Schwerpunkt der mit dem Gehäuse fest verbunden gedachten Schwungmasse m (wir betrachten also eine Welle mit nur einer Scheibe und einem Gehäuse);
S' Schwerpunkt der Quecksilbermasse m';
S_0 den gemeinsamen Schwerpunkt der ganzen Masse $m_0 = m + m'$.

Bedeutet $P = \alpha y$ die elastische Gegenkraft der Welle, so erhält man mit den eingeschriebenen Bezeichnungen

$$m_0 y_0 \omega^2 = \alpha y \quad \ldots \quad (1)$$

Nach dem Schwerpunktssatz ist

$$m_0 y_0 = (y + e) m + y' m'.$$

Von y' wissen wir, daß es mit y zugleich Null wird, da, wenn O in W hineinfällt, der Spiegel einen koaxialen Zylinder bildet. Ist die Auslenkung klein, so daß sich der Spiegel inwendig zum vollen Zylinder mit dem Halbmesser r_0 schließt, und bedeutet $G = \pi r^2 h \gamma$ das Gewicht des ganz gefüllten Gehäuses; $G_0 = \pi r_0^2 h \gamma$ das aus dem Zylinder r_0 entfernte negative Gewicht, so gilt als Momentensatz für O:

$$(G - G_0) y' = G y \quad \text{oder} \quad y' = \beta y \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{r^2}{r^2 - r_0^2} \quad \ldots \quad (2)$$

Dann ergibt Gl. (1):

$$y = \frac{m e \omega^2}{\alpha - (m + \beta m') \omega^2} \quad \ldots \quad (3)$$

Hieraus folgt die kritische Drehzahl

$$\omega_k = \sqrt{\frac{\alpha}{m + \beta m'}} \quad \ldots \quad (4)$$

die bei $\beta = 0$ in die gewöhnliche übergeht. Sobald nun $(m + \beta m') \omega^2 > \alpha$ gewählt wird, d. h. bei überkritischen Drehzahlen, wird y negativ, und dies entspricht dem in Abb. 1016a rechts dargestellten Zustand, für den man die Gleichgewichtsbedingung auch unmittelbar ansetzen kann. Diese umgestellte Lage von S und S' wird in älteren Lehrbüchern, wie wir sehen, fälschlicherweise allein in Betracht gezogen; sie ist indes maßgebend für die Wirkung der Vorrichtung.

Je höher ω über ω_k liegt, um so kleiner wird y, um so kleiner die auf die Lager übertragenen Fliehkräfte. Es kommt darauf an, $\beta m'$ groß zu machen, und dies erfordert nach Gl. (2)

$$\beta m' = \frac{r^2}{r^2 - r_0^2} \pi (r^2 - r_0^2) h \mu = \pi r^2 h \mu \quad \ldots \quad (5)$$

groß. Durch Vergrößerung von r allein könnte also, theoretisch gesprochen, jede erwünschte Verminderung von y erreicht werden.

193b. Mitschwingen des Fundamentes: Ungefährlichkeit der „Resonanz".

Die von Erschütterung nie ganz freie Welle überträgt auf das Fundament der Turbine eine periodisch wechselnde Kraft, durch die ersteres in Mitschwingung versetzt werden muß. Das Fundament, zu dem auch das Gehäuse und der Rahmen der Turbine zu rechnen sind, dürfen wir uns als eine starre Masse vorstellen, die auf einer elastischen Unterlage aufruht (z. B. den schmiedeeisernen Trägern der Betongewölbe, auf die man die Turbinen aufzustellen pflegt), und es liegt die Befürchtung nahe, daß unter Umständen die Umdrehungszahl der Turbine mit der natürlichen Schwingungszahl des Fundamentes übereinstimmen, und daß die bei anderen Schwingungsvorgängen so gefährliche „Resonanz“ auftreten könnte. Es hat nun Wichtigkeit, festzustellen, daß diese Resonanz für die Turbine ungefährlich ist und keineswegs zu außergewöhnlich gesteigerter Erschütterung führen kann, und zwar aus dem Grunde, weil deren Welle kein starrer Körper, sondern selbst elastisch nachgiebig ist. Hingegen gewinnt das Mitschwingen Bedeutung durch den Umstand, daß die kritische Geschwindigkeit der Welle vergrößert oder verkleinert wird.

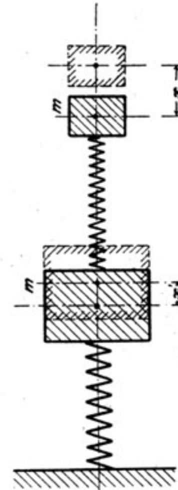


Abb. 1017. Mitschwingen des Fundamentes.

Am einfachsten überzeugt man sich von der Richtigkeit obiger Behauptung am „elastischen Doppelpendel“, z. B. an der in Abb. 1017 dargestellten Verbindung der Masse m durch eine Feder mit der Masse m', die ihrerseits durch eine Feder mit einem festen Punkte verbunden ist.

Die Masse m versinnbildlicht die Welle mit ihrer Federung, m' desgleichen das Fundament mit seiner Nachgiebigkeit. Lassen wir auf m die periodische Kraft

$$P = a \cos \omega t \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

einwirken, durch die eine Schwingung in der Richtung der Federachse eingeleitet wird. Die Auslenkung von m und m' aus der Lage, wo die Federn spannungslos sind, sei x und x', dann wirken in den Federn die Kräfte X und X', die man der Verlängerung proportional, d. h.

$$X = \alpha (x - x'); \quad X' = \alpha' x' \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

setzen kann. Die Bewegungsgleichungen der Massen sind

$$m \frac{d^2 x}{d t^2} = - X + P; \quad m' \frac{d^2 x'}{d t^2} = - X' + X \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

Setzen wir voraus, daß eine, wenn auch kleine, mit der Geschwindigkeit verhältnisgleiche Reibung als sog. „Dämpfung“ mitwirkt, so bleibt nach hinlänglich langer Zeit nur die mit P synchrone Schwingung übrig, d. h. die Lösung der beiden Gleichungen wird durch den Ansatz $x = A \cos \omega t$, $x' = A' \cos \omega t$ wiedergegeben, durch deren Einsetzen man die Beiwerte wie folgt ermittelt:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{\beta' \alpha}{\alpha^2 - \beta \beta''}; \qquad & A' &= - \frac{\alpha a}{\alpha^2 - \beta \beta'} \\ \text{mit} \quad \beta &= m \omega^2 - \alpha; & \beta' &= m' \omega^2 - (\alpha + \alpha') \end{aligned}\right\} \ldots \ldots \ldots (5)$$

Kritische Schwingungszahlen, d. h. unendlich große Werte von A und A' ergeben sich mithin, wenn

$$\alpha^2 - \beta \beta' = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (5)$$

Würde m allein schwingen, bei festgelegtem m', so hätte man die kritische Zahl aus der Gleichung

$$\beta = m \omega_1^2 - \alpha = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (6)$$

zu bestimmen. Würde die Kraft P an der Masse m' in Abwesenheit von m angreifen, so hätte man in gleicher Art

$$m' \omega_2^2 - \alpha' = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (7)$$

zu setzen. Weder die eine noch die andere Bedingung bewirkt indessen, daß Gl. (5) erfüllt wäre.

Es gibt mithin für das elastische Doppelpendel kritische Schwingungszahlen, allein diese stimmen nicht überein mit denjenigen, die für die einzelnen Pendel an sich Gültigkeit haben.

Die Masse m' bleibt einflußlos, falls, sei es der elastische Widerstand, d. h. α', sei es m' selbst, unendlich groß werden. Nähern sich die Verhältnisse dieser Grenze, so wird sich ω_k^2 wenig vom Werte α/m, der aus Gl. (6) folgt, unterscheiden. Man kann diesen Wert näherungsweise in den Ausdruck von β' in Gl. (5) einsetzen und erhält

$$\alpha^2 - (m \omega_k^2 - \alpha) \left(m' \frac{\alpha}{m} - \alpha - \alpha' \right) = 0$$

alsdann das berichtigte

$$\omega_k^2 = \frac{\alpha}{m}\left(1 + \frac{1}{\frac{m'}{m} - \frac{\alpha'}{\alpha} - 1}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (8)$$

woraus hervorgeht, daß beispielsweise die kritische Schwingungszahl durch das Mitschwingen des „Fundamentes" (m') vergrößert wird, falls die Masse desselben groß ist gegen m, hingegen die elastische Rückwirkung (α') klein gegen diejenige der „Welle" (α), weil das neben der Einheit stehende Glied positiv wird. Die kritische Schwingungszahl wird verkleinert, falls die entgegengesetzten Verhältnisse eintreten.

Für die Turbinenwelle kann man sich der Einfachheit halber das Fundament nur lotrecht nachgiebig denken, und die Auslenkung eines Wellenpunktes durch die Koordinaten x in der Wellenrichtung y wagerecht, z senkrecht bestimmt denken. Wenn man die Exzentrizitäten $e = 0$ setzt, so wird die Bewegung der Welle durch die Gleichungen

$$J E \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = - m_1 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}; \quad J E \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = - m_1 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (9)$$

dargestellt, wo auf der rechten Seite die d'Alembertschen Trägheitskräfte als „Belastung" der Welle erscheinen. Die Drehung je eines, durch zwei zur Achse senkrechte Ebenen ausgeschnittenen Elementes um die Schwerpunktsachse erfolgt mit gleichbleibender Winkelgeschwindigkeit, da wir Gleichgewicht der Drehmomente voraussetzen wollen. Die beiden Gleichungen genügen mithin; aus ihnen sind y und z für eine beiderseitig frei aufliegende Welle von der Länge $2\,l$ so zu bestimmen, daß für $x = l$, $y = 0$, während $z = \zeta$ werden muß, unter ζ die momentane Auslenkung der periodischen Schwingung des Fundamentes verstanden, die durch die auf die Masse m' des Fundamentes wirkende Schubkraft im Endquerschnitt der Welle und die elastische Rückwirkung $= \alpha\,\zeta$ der Unterlage unterhalten wird. Hierfür ist die entsprechende Bewegungsgleichung aufzustellen und außerdem zu beachten, daß bei $x = l$ das biegende Moment für das freie Auflager verschwindet. Für den einfachsten Fall einer symmetrischen Verbiegung der Welle und einer Sinusschwingung des Fundamentes erhält man die Lösung

$$\left.\begin{aligned} y &= [a' (e^{kx} + e^{-kx}) + b' \cos k\,x] \sin \omega\, t \\ z &= [a\ (e^{kx} + e^{-kx}) + b \cos k\,x] \sin (\omega\, t + \varepsilon), \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (10)$$

wo ε eine von den Anfangsbedingungen abhängige Größe ist. Für die Beiwerte ergeben sich, da die Exzentrizität $= 0$ gesetzt wurde, endliche Werte nur bei den kritischen Umlaufzahlen, und zwar einerseits für die lotrechte Schwingung, falls

$$\operatorname{tgh}(k\,l) - \operatorname{tg}(k\,l) = 2\,\beta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (11)$$

worin

$$k^4 = \frac{m_1\,\omega^2}{J E}; \quad \beta = \frac{m'\,\omega^2 - \alpha}{J E\, k^3}$$

ist, anderseits für die wagerechten Auslenkungen, falls

$$\cos k\,l = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (12)$$

Es gibt im hier vorausgesetzten Falle des einseitig nachgiebigen Fundamentes zwei Reihen von kritischen Umlaufzahlen, eine für die lotrechten, die andere für die wagerechten Ausbiegungen der Welle. Der Synchronismus der Drehung mit der Eigenschwingung des Fundamentes, d. h. $m'\,\omega^2 - \alpha = 0$, liefert an sich keine kritische Umlaufzahl.

Setzt man das Fundament allseitig gleichmäßig nachgiebig voraus, so bleibt, wie man sich überzeugen kann, Bedingung (11) bestehen, und es ergibt sich weiterhin die eigenartige Tatsache, daß bei Resonanz die Welle so umläuft, als wäre sie, von der Schwere abgesehen (also z. B. bei lotrechter Aufstellung) vollkommen frei.

Von geschätzter Seite aus der Praxis wird mir mitgeteilt, daß Fälle vorgekommen sind, wo man mit Vorteil die kritische Umlaufzahl durch das Mitschwingen des Fundamentes beeinflussen konnte. In einem besonderen Falle wurde die Lagerung der Turbine durch Unterbau von Holzbalken elastisch nachgiebiger gemacht, wodurch man aus der gefährlichen Nähe der kritischen Geschwindigkeit herauskam.

194. Kritische Drehzahl von vielfach gestützten Wellen.

Die kritische Drehzahl einer dreifach gestützten Welle kann nach Abschn. 93 ermittelt werden. Oft ist die Welle auch bei Anwendung einer starren Kupplung in 4 Lagern gestützt, und muß nach der Theorie des „durchlaufenden Balkens" behandelt werden. Das Verfahren wird dem in Abschn. 93 beschriebenen sinngemäß wie folgt nachgebildet.

Es sei eine Welle mit 4 Lagern, also 3 Feldern gegeben. Wir nehmen eine Biegungsform versuchsweise an, deren Einsenkungen je in der Mitte des Feldes y_{1u} y_{2u} y_{3u} seien. Man untersucht drei Belastungsfälle:

a) nur die Fliehkräfte im 1. Feld sind tätig
b) " " " " 2. " " "
c) " " " " 3. " " "

Die zu einer willkürlich angenommenen Geschwindigkeit ω graphisch zu ermittelnden Einsenkungen seien y_{a1} y_{a2} y_{a3}; y_{b1} y_{b2} y_{b3}; y_{c1} y_{c2} y_{c3}.

Diese sind den jeweiligen Fliehkräften, d. h. den Produkten $y_{1u}\,\omega^2$; $y_{2u}\,\omega^2$; ... verhältnisgleich, so daß man die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{lll} y_{a1}=a_1\,y_{1u}\,\omega^2; & y_{a2}=a_2\,y_{1u}\,\omega^2; & y_{a3}=a_3\,y_{1u}\,\omega^2 \\ y_{b1}=b_1\,y_{2u}\,\omega^2; & y_{b2}=b_2\,y_{2u}\,\omega^2; & y_{b3}=b_3\,y_{2u}\,\omega^2 \\ y_{c1}=c_1\,y_{3u}\,\omega^2; & y_{c2}=c_2\,y_{3u}\,\omega^2; & y_{c3}=c_3\,y_{3u}\,\omega^2 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (1)$$

aufstellen und daraus die Beiwerte a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 ... berechnen kann. War nun die Wahl der y_{1u} y_{2u} y_{3u} die richtige, so muß bei der kritischen Geschwindigkeit ω_k die Überlagerung der Belastungsfälle *a*) *b*) *c*) auf die angenommene Biegung führen. D. h. es ist im ersten Feld

$$a_1\,y_{1u}\,\omega_k^2+b_1\,y_{2u}\,\omega_k^2+c_1\,y_{3u}\,\omega_k^2=y_{1u}$$

ähnlich in den anderen, so daß die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} (a_1\,\omega_k^2-1)\,y_{1u}+b_1\,\omega_k^2\,y_{2u}+c_1\,\omega_k^2\,y_{3u}=0 \\ a_2\,\omega_k^2\,y_{1u}+(b_2\,\omega_k^2-1)\,y_{2u}+c_2\,\omega_k^2\,y_{3u}=0 \\ a_3\,\omega_k^2\,y_{1u}+b_3\,\omega_k^2\,y_{2u}+(c_3\,\omega_k^2-1)\,y_{3u}=0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (2)$$

entstehen. Damit diese bei endlichen Werten der y bestehen können, muß die Determinante der Beiwerte verschwinden, woraus sich drei Werte für ω_k^2 ergeben. Das Einsetzen davon in (2) erlaubt die Verhältnisse der y_{1u}: y_{2u}: y_{3u} zu berechnen, wodurch drei Biegungsformen der Welle bestimmt werden.

Die Rechnung kann bedeutend vereinfacht werden, wenn man die Massen im 2. Felde, die nur aus der Kupplung und der glatten Welle bestehen, vernachlässigt. Dadurch scheidet Fall *b*) aus, man braucht y_{2u} nicht zu beachten, und die Überlagerung von *a*) und *c*) liefert

$$\left.\begin{array}{l} (a_1\,\omega_k^2-1)\,y_{1u}+c_1\,\omega_k^2\,y_{3u}=0 \\ a_3\,\omega_k^2\,y_{1u}+(c_3\,\omega_k^2-1)\,y_{3u}=0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (3)$$

Die Nullsetzung der Determinante

$$(a_1\,\omega_k^2-1)(c_3\,\omega_k^2-1)-a_3\,c_1\,\omega_k^4=0 \quad \ldots\ldots (4)$$

liefert nur zwei Werte für ω_k^2.

Die graphisch zu lösende Aufgabe ist zunächst die Bestimmung von y_{1a} y_{2a} y_{3a} aus den Fliehkräften, die y_{1u} entsprechen. Zu diesem Behufe betrachten wir

a) Kraftverhältnisse in einem einzelnen Felde.

Die angenommene elastische Linie für die willkürliche Winkelgeschwindigkeit ω sei L Abb. 1018. Die im Abstande x befindliche Masse m entwickelt eine Fliehkraft $m\,y\,\omega^2$, wo y die Einsenkung bedeutet. Das infolge Schiefstellung entstehende Moment wird zunächst vernachlässigt. Die Gesamtheit der Fliehkräfte wird **ohne Rücksicht auf die Endmomente, als wäre das Wellenstück AB für sich ein frei aufliegender Balken,** im Kräfteplan $\mathfrak{P}$, in dem der Polabstand $H=1$ gedacht ist, zusammengefaßt und ergibt das Seileck γ_1', sowie durch dessen Schlußlinie die Momentenfläche F (Abb. b). Diese zerlegen wir in schmale senkrechte Streifen $\delta F=M\,dx$ und bilden als neue „Belastungskräfte" die Quotienten $\delta F\frac{J_0}{J}=\delta F'$, wo J das an der betreffenden Stelle gültige Trägheitsmoment, J_0 einen unveränderlichen ungefähren Mittelwert desselben bedeutet. Nun summieren wir im zweiten Kräfteplan $\mathfrak{P}'$ alle Elementarkräfte $\delta F'$ und zeichnen mit dem Polabstand $J_0\,E$ ein zweites Seileck γ_2 (Abb. d), dessen Endseiten γ_a und γ_e die Endtangenten an die elastische Linie geben würden, wenn die Enden des Stabes „frei" wären. Diese **Endtangenten** an die elastische Linie **nennt man „Kreuzlinien". Sie schneiden sich auf der durch den Schwerpunkt S von F' hindurchgehenden Senkrechten.**

In Wirklichkeit greifen an den Enden des Stabes die **Einspannungsmomente** M_a und M_b an. Betrachten wir zunächst die Wirkung von M_a, Abb. 1019. Dieses ruft in A wie in B die Auflagerdrücke

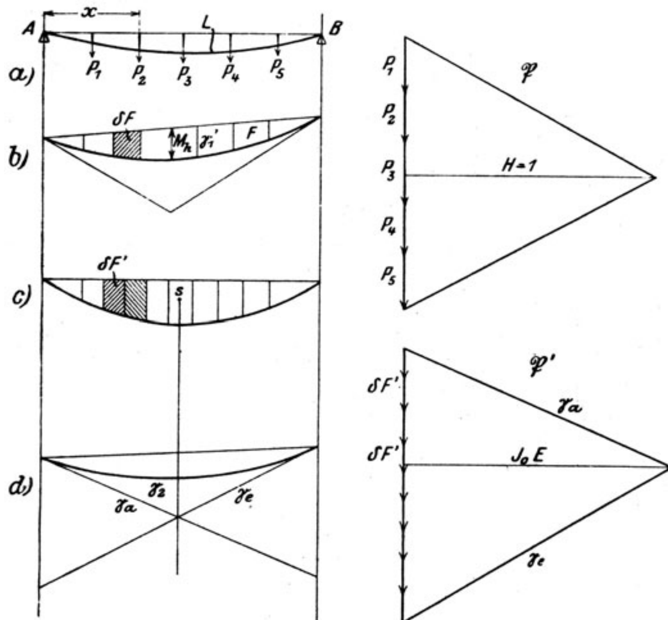


Abb. 1018. Kräfte im einzelnen Felde.

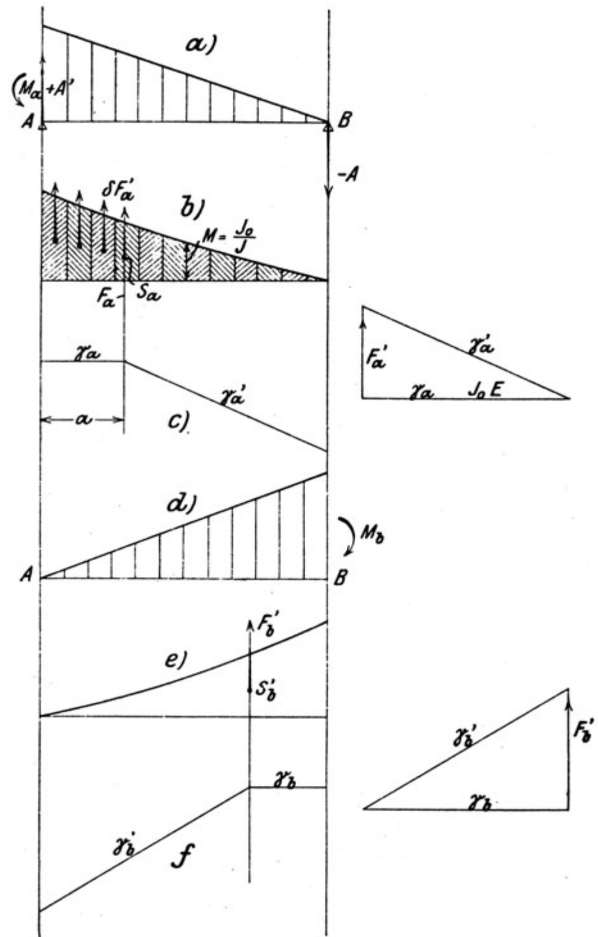


Abb. 1019. Einspannungsmomente.

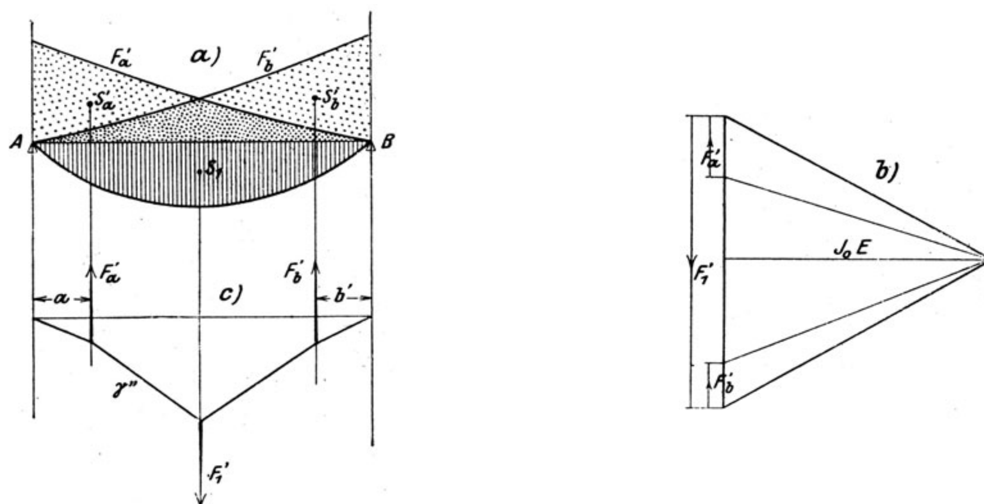


Abb. 1020. Resultierende „Belastungs"flächen.

$+A' - A'$ hervor, die mit den von der Hauptbelastung herstammenden algebraisch zu summieren sind. Die Kraft $-A'$ ergibt ein von Null bis M_a zunehmendes Moment, das durch die Dreieckfläche *a* dargestellt und gegenüber dem Moment in Abb. 1018 negativ gerichtet ist, daher nach oben aufgetragen

wird. Hierdurch wird eine weitere Verbiegung verursacht, die zu der in Abb. 1018 ermittelten hinzuzuzählen ist. Wir teilen demnach das Dreieck in vertikale Streifen, multiplizieren jeden Flächeninhalt mit J_0/J und bilden die zweite Belastungsfläche $\delta F_a'$. Der zweite Kräfteplan liefert die Endtangenten γ_a, γ_a', in deren Schnittpunkt die Resultierende der Belastungen $\delta F_a'$, d. h. $\Sigma(\delta F_a') = F_a'$ angreift und **durch den Schwerpunkt S_a der Fläche F_a' hindurchgeht.** Der Abstand der Resultierenden vom linken Auflager, d. h. **die Strecke a ist unabhängig von der absoluten Größe des Momentes M_a.**

Ähnlich verfahren wir mit M_b (Abb. d), das ebenfalls negativ ist und uns die Resultierende im Abstande b vom rechten Auflager ergibt (Abb. e und f).

Wenn an Stelle von M_a ein größeres oder kleineres Moment tätig ist, so wird F_a' einfach proportional abgeändert und a bleibt, wie erwähnt, erhalten, es genügt also, wenn wir für einen einzigen Wert von M_a den Wert F_a' und a abgeleitet haben.

Die Senkrechten im Abstand a und b wollen wir **die Schwerlinien** nennen.

Die gesamte Verbiegung ist nun die Resultante der aus den in Abb. 1018, 1019 entstehenden Anteile. Bekannt ist aber nur Seileck γ_2 und F', unbekannt F_a', F_b'. Wir denken uns die Belastungsflächen so übereinander gezeichnet, wie in Abb. 1020 dargestellt. Wollen wir nur die Endtangenten der elastischen Linie erhalten, so können wir die Belastungsflächen F_1', F_a', F_b' in Gänze in zweiten Kräfteplänen Abb. b summieren und wir gelangen zum zweiten Seileck γ'' Abb. c, wobei eine Verschiebung des Poles vorzunehmen ist, wenn wir die Endpunkte der elastischen Linie auf dieselbe Wagrechte AB bringen wollen. Doch ist es ebenso einfach, die Abstände von der schiefen Schlußlinie zu zählen, wie sie sich ergibt. Die Momente der Kreiselkräfte werden ähnlich berücksichtigt wie in Abschn. 93b.

b) Zwei aneinander grenzende Felder.

Die Bedingung, die hier zu erfüllen ist, lautet: Über der mittleren Stütze sind das Einspannungsmoment für das rechte und linke Feld, ferner die Neigung der elastischen Linie und endlich die even-

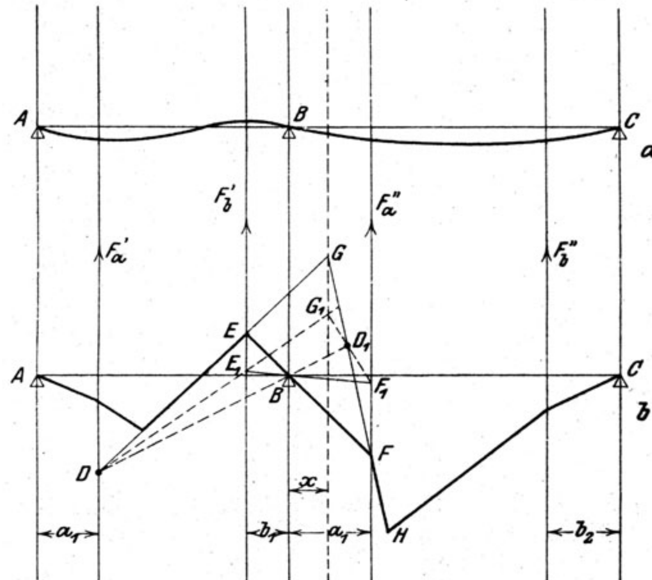


Abb. 1021. Zwei angrenzende Felder.

tuell vorhandene Einsenkung gleich groß. Es muß also das zweite Seileck den in Abb. 1021 durch die stark gezogenen Linien gezeichneten Verlauf aufweisen, den wir zunächst hypothetisch als richtig voraussetzen wollen.

Das im Endquerschnitt B des linken Feldes wirkende Moment greift mit entgegengesetztem Sinn (als „Reaktion") natürlich auch am linken Endquerschnitt des rechten Feldes an. Nach demselben Verfahren wie F_b' leiten wir nun aus M_b für das rechte Feld den Wert F_a'' ab. **Sowohl F_b' als F_a'' sind mithin zu M_b proportional, jedoch in verschiedenem Verhältnis.** Suchen wir die Resultierende dieser Belastungsflächen auf, so muß dieselbe im Schnittpunkte der angrenzenden Polygonseiten DE und FH, d. h. im Punkte G angreifen, der nun einem besondern Gesetz unterliegt. Wenn nämlich die Polygonseite DE in die Lage DE_1 rückt, so muß Seite FH durch den Punkt G_1, der auf derselben Vertikalen wie G liegt, hindurchgehen, da das Verhältnis der Kräfte F_b' und F_a'' sich nicht ändert. Der Abstand x ist also unveränderlich. Wir nennen die Gerade G die **„Schnittvertikale"**. Es möge nun Polygonseite DE sich um Punkt D drehen; dann entstehen auf den Vertikalen E und G zwei (perspektivische) ähnliche Punktreihen. Die Polygonseiten EF, E_1F_1 projizieren die Reihe E auf F und erzeugen dort eine

Reihe, die mit G ebenfalls ähnlich ist. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte auf G und F gehen mithin alle durch denselben Punkt, das „perspektivische Zentrum" D_1, da irgend zwei entsprechende Strahlen Dreiecke wie $G G_1 D_1$, $F F_1 D_1$ einschließen, die alle im gleichen Verhältnis einander ähnlich sind. Dieses Zentrum erhält man auch durch den Schnitt der Geraden DB mit irgendeiner Linie GF. Wir nennen **D_1 den zu D gehörenden Festpunkt** und sprechen das Ergebnis in folgendem Lehrsatz aus:

Geht eine der mittleren Polygonseiten in einem Felde stets durch einen festen Punkt, so dreht sich die angrenzende mittlere Polygonseite des Nachbarfeldes um den entsprechenden Festpunkt.

c) Belastungsfälle a, b, c.

In Abb. 1022 seien $ABCD$ die 4 Lager, e die angenommene Biegungslinie und es seien aa' die Kreuzlinien zum **Belastungsfall a).** Da in A kein Moment vorkommt, geht a durch A, und A_1 ist ein Festpunkt der Polygonseite a'. Die Schwerlinien sind $s_a s_b s_b' s_c$, die Schnittvertikalen x und y. Wir suchen den zu A_1 gehörenden Festpunkt im 2. Felde $= B_1$, zu diesem den ihm entsprechenden C_1 im 3. Felde. In umgekehrter Richtung ist D der Festpunkt der letzten Polygonseite, daher entspricht ihm ein Festpunkt C_2 im 2. Felde, und diesem ein Festpunkt B_2 im 1. Felde. Der Verlauf der Seillinien ist dann der, daß a' durch die Festpunkte A_1 und B_2 hindurch muß. Der Schnitt mit s_a bestimmt die Seite, die durch Auflager B hindurchgeht. Der Schnitt dieser letzteren mit s_b ist ein Punkt der zu einer einzigen Linie zusammenfallenden Kreuzlinien im 2. Felde, die zugleich durch die Festpunkte B_1 und C_2 hindurchgehen müssen. Ihr Schnitt s_b' bestimmt die durch C gehende Seite, die ihrerseits im Schnitt mit s_c einen Punkt der letzten Polygonseite ergibt, die zugleich den Festpunkt C_1 in sich enthalten muß. **Zieht man zu diesen Seillinien durch einen Pol die Parallelen, so werden auf der Lotrechten im gewählten Polabstand die Momentenflächen $F_1' F_a' F_b' \ldots$ ausgeschnitten,** wie bei b) in Abb. 1020. Man kann die resultierenden Momentenflächen zeichnen und die elastische Linie ermitteln.

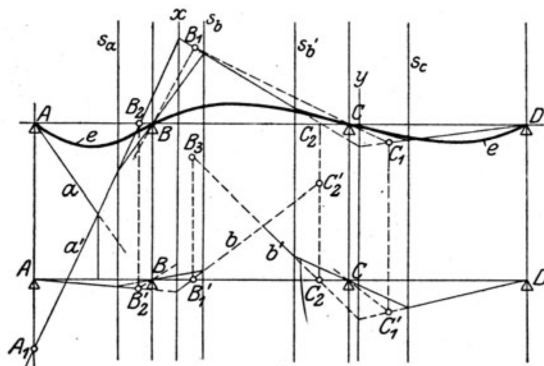


Abb. 1022. Einzelne Belastungsfälle bei 4 Stützen.

Da es hierbei nur auf die Auslenkungen je in der Feldmitte ankommt, so braucht man die Momentenflächen nicht in viele lotrechte Streifen einzuteilen. Man kann sich vielmehr damit begnügen, **nur die links und rechts von der Mittellotrechten gelegenen Flächen je der Haupt- und der Auflagermomentenfläche zu rechnen,** im Schwerpunkte der betreffenden Abschnitte aufzutragen, um dann das Seileck zu bilden. Man verbindet die Schnittpunkte der äußeren Seillinien mit den Auflagervertikalen. Der Abstand dieser „Schlußlinie" vom Seileck, in der Mitte der Felder gemessen, liefert dann das gesamte y_{a1}; y_{a2}; y_{a3}. Um passende Abmessungen der elastischen Deformation zu erhalten, wird man wie üblich nicht mit dem Polabstand $J_0 E$, sondern mit $J_0 E : n$ arbeiten, wo n eine frei gewählte große Zahl ist. Selbstverständlich erscheint dann die Ordinate der Verbiegung n-mal so groß, falls die Längen in natürlicher Größe aufgetragen würden; entsprechend kleiner bei verjüngten Maßstäben.

Der Belastungsfall b) ist in der unteren Hälfte der Abb. 1022 dargestellt. Hier geht die zweite (mit der ersten zusammenfallende) Kreuzlinie im 1. Felde stets durch A. Demgemäß gehört zu ihr ein auf der Achse im 2. Felde liegender Festpunkt B_1', der aus projektiven Gründen die Projektion von B_1 ist. Über B_1' wird als $B_3 B_1'$ der Abstand der Kreuzlinien bb' im 2. Felde (die vorhergehend zu konstruieren sind) aufgetragen. Dann ist B_3 der Festpunkt von b; ihm entspricht Festpunkt C_1' im 3. Felde, der wieder lotrecht unter C_1 liegt. In umgekehrter Reihenfolge ist wieder C_2 der Festpunkt zu D, die Strecke $C_2' C_2$ ist durch die Kreuzlinien bestimmt, zu C_2' gehört im 1. Felde der Festpunkt B_2'. Der Entwurf des Seileckes wird an Hand der Abbildung klar sein. In ähnlicher Weise erledigt sich der Belastungsfall c.

195. Schaufelschwingung unter dem Einflusse der Fliehkraft.

Die wichtigste Aufgabe ist die Ermittlung der Eigenschwingungszahl. Da die Hauptträgheitsmomente meist ungleich sind, so gibt es zwei Schwingungsarten je mit den tiefsten und den „Ober"-Schwingungen. Für die Ermittlung stehen zwei Wege offen: erstens der Satz von Rayleigh, zweitens die Analogie zwischen Eigenschwingung und kritischer Drehzahl.

a) Nach dem Satz von Rayleigh.

Wenn wir nach Rayleigh verfahren, so werden wir gemäß Abb. 1023 die Biegungsform a der Schaufel willkürlich annehmen. In dieser als äußerste Lage aufgefaßten Stellung

besitzt sie eine potentielle (elastische) Energie Φ_i. Schwingt sie in die Mittellage zurück, so ist Φ_i verschwunden und die Fliehkräfte haben eine Arbeit Φ_z auf die Schaufel übertragen. Die Summe dieser beiden Energien ist gleich der kinetischen Energie Φ_k. Die Grundgleichung lautet also

$$\Phi_i + \Phi_z = \Phi_k .$$

Um diese Arbeiten zu berechnen, bilden wir graphisch in verschiedenen Punkten die erste und zweite Ableitung der elastischen Linie y', y''; das biegende Moment in jedem Punkte ist: $M = JEy''$. Mithin ist bekanntlich, wenn x vom Schaufelanfang gezählt wird

$$\Phi_i = \int_0^l \frac{M^2\,dx}{2JE} = \frac{E}{2}\int_0^l J y''^2\,dx \quad (1)$$

Das Integral wird unter Berücksichtigung des veränderlichen Trägheitsmomentes J graphisch ausgewertet. Die Fliehkraftarbeit wird als Produkt der Fliehkraft in die Verschiebungskomponente ζ ihres Angriffspunktes ausgedrückt, welche sich wie bei der Scheibenbiegung Gl. (20) in Abschn. 187 als

$$\zeta = \tfrac{1}{2}\int_0^x dx\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \quad . \; . \quad (2)$$

darstellt und ebenfalls graphisch ausgewertet wird. Bedeutet m_1 die Masse der Längeneinheit, so ist die Arbeit der Fliehkräfte

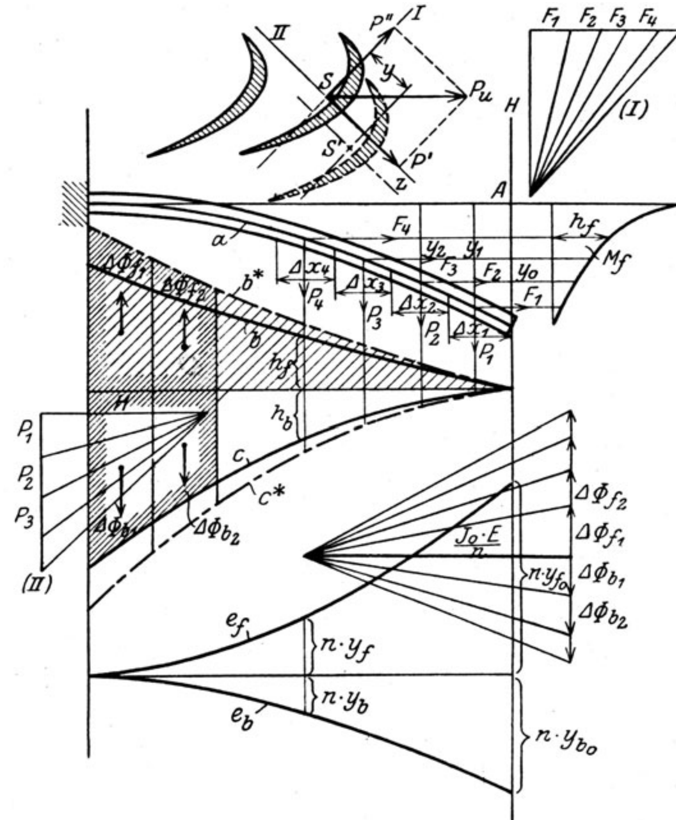


Abb. 1023. Schaufelschwingung graphisch.

$$\Phi_z = \int_0^l m_1\,dx\,r\,\omega^2\zeta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

durch Auftragen von $m_1\zeta$ als Funktion von x graphisch zu ermitteln.

Die kinetische Energie berechnet sich, wenn

$$\eta = y\cos\lambda t \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

die Biegungsform zur Zeit t darstellt, aus der Geschwindigkeit $c = -\lambda y \sin\lambda t$, für die Zeit $\lambda t = \pi/2$ zu:

$$\Phi_k = \int \frac{dm\,c^2}{2} = K_0\lambda^2 \quad . \; . \quad (5) \qquad \text{mit} \qquad K_0 = \tfrac{1}{2}\int m_1 y^2\,dx \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Die Grundgleichung ergibt mithin

$$\lambda^2 = (2\pi N_{sek})^2 = \frac{\Phi_i + \Phi_z}{K_0} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Ist die Biegungsform durch einen oder mehrere noch willkürliche Parameter ausgedrückt, so ist in früher erläuterter Art durch Differentiation von λ^2 nach diesen Parametern der Mindestwert zu bestimmen.

Beispiel. Wählen wir

$$y = ax^n \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

bei unveränderlicher Masse m_1 für die Längeneinheit, und es sei M die Masse, l die Länge der ganzen Schaufel. Gl. (1) und (6) liefern dann

$$\left.\begin{aligned} \Phi_i &= \frac{n^2(n-1)^2}{(2n-3)}\,\frac{JEl^{2n-3}}{2}\cdot a^2 \\ K_0 &= \frac{Ml^{2n}}{2(2n+1)}\,a^2 . \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7\text{a})$$

Aus Gl. (3) ergibt sich, wenn wir der Einfachheit halber die Fliehkraft mit dem mittleren Schaufelhalbmesser R als $m_1 dx R \omega^2$ rechnen

$$\Phi_z = \frac{n M l^{2n-1}}{4(2n-1)} R \omega^2 a^2 \quad \text{(7b)}$$

also gemäß Gl. (7)

$$\lambda^2 = \frac{n^2(n-1)^2(2n+1)}{(2n-3)} \frac{JE}{Ml^3} + \frac{n(2n+1)}{2(2n-1)} \frac{R}{l} \omega^2 \quad \text{(7c)}$$

Wie zu erwarten, fällt a aus diesem Ausdruck heraus, und man hat n so zu wählen, daß λ^2 ein Mindestwert werde. Graphisches Auftragen zeigt, daß das erste Glied bei $n = 1{,}75$, das zweite bei $n = 1{,}25$ zum Mindestwert wird. Ist der Einfluß der Fliehkraft nicht außergewöhnlich groß, so wird man jedoch mit Rücksicht auf die strenge Gl. (10) S. 296

$$\lambda^2 = 12{,}4 \frac{JE}{Ml^3} + 1{,}57 \frac{R}{l} \omega^2 \quad \text{(7d)}$$

setzen. Diese Formel bildet auch darum nur eine Näherung, weil nur ein einziger Parameter n willkürlich war. Ist der Querschnitt und damit J veränderlich, so führt das nachfolgend beschriebene Verfahren rascher zum Ziele.

b) Auf Grund der Verwandtschaft der Eigenschwingung mit der kritischen Drehzahl.

Wir haben bewiesen, daß die gewöhnliche kritische Drehzahl einer mehrfach belasteten Welle mit der Eigenschwingungszahl der Welle übereinstimmt, vorausgesetzt, daß gleiche Lagerung vorhanden ist und daß man von der Schiefstellung der Scheiben absieht. Diese letztere Annahme darf man für eine Schaufel, die einem stabförmigen Körper nahekommt, unbedenklich machen. Freilich treten hier neben den Trägheitskräften die Fliehkräfte auf. Es genüge, ohne auf Einzelheiten einzugehen, die Feststellung, daß auch dann Eigenschwingungszahl und kritische Drehzahl übereinstimmen. Letztere läßt sich aber in Erweiterung des in Abschn. 93 erläuterten graphischen Verfahrens wie folgt ermitteln.

Wir betrachten nach Abb. 1023 die **Schwingung um die Hauptachse des kleineren Trägheitsmomentes** und nehmen wie vorhin die Biegungslinie der Schaufel schätzungsweise als Kurve a an. Wir teilen die Schaufellänge in eine Anzahl kleinerer Abschnitte, deren Massen, vom äußeren Endpunkt ausgehend, $m_1 m_2 \ldots$ sein mögen. Wir müssen uns nun die Schaufel als eine Welle vorstellen, die um die ursprüngliche Achse umläuft und dabei im linken Ende eingespannt bleibt. Die vorläufig willkürlich gewählte Winkelgeschwindigkeit dieser Drehung sei λ. Dann berechnen sich die senkrecht zur Schaufel wirkenden **Massenkräfte**

$$P_1 = m_1 y_1 \lambda^2; \qquad P_2 = m_2 y_2 \lambda^2 \quad \text{(8)}$$

Zu diesen Kräften treten die während der Drehung der Schaufel mit der Scheibe um die Turbinenachse entstehenden **eigentlichen Fliehkräfte**, die sich aus den Abständen x_1, $x_2 \ldots$ der Elemente von der Scheibenmitte mit ω als der Winkelschnelle der Turbinenwelle zu

$$F_1 = m_1 x_1 \omega^2; \qquad F_2 = m_2 x_2 \omega^2 \quad \text{(9)}$$

ergeben. Da die Auslenkung der Schaufel als sehr klein angesehen werden muß, darf man diese Kräfte als gleichgerichtet und parallel ansehen. Die Aufgabe ist, die neue Biegungslinie, die dem vereinten Einfluß der Kräfte P und F entspricht, ausfindig zu machen. Zu diesem Behufe setzt man die Fliehkräfte in dem in der Abbildung kenntlich gemachten **Kräfteplan I mit einem Polabstand H** zusammen. Die Parallelen zu den Zwischenresultierenden ergeben das Seileck, und dieses bestimmt die Momentenfläche M_f der Fliehkräfte, so daß immer $M_f = H h_f$ ist. Wir übertragen die Abschnitte h_f **senkrecht unter die zugehörigen Punkte der Biegungslinie,** so daß die Fliehkraftmomente (Linie b) als Funktion der Schaufellänge abgelesen werden können. In gleicher Weise summieren wir die **Massenkräfte P, und zwar mit demselben Polabstand H** wie oben. Das zugehörige Seileck c ergibt mittels der Ordinate h_b die Biegungsmomente $M_b = H \cdot h_b$.

Um die elastische Linie nach Mohr zu ermitteln, greifen wir ein mittleres Trägheitsmoment J_0 der Schaufel (für die betreffende Schwingungsrichtung) heraus und vermehren alle h_f und h_b mit dem Verhältnis J_0/J, wo J das im betreffenden Schnitt vorkommende Trägheitsmoment für die gleiche Hauptachse bedeutet. Die neuen Momentenflächen mit den Ordinaten

$$h_f^* = h_f \frac{J_0}{J}; \qquad h_b^* = h_b \frac{J_0}{J} \quad \text{(10)}$$

ergeben die Linien b^* und c^* und werden in lotrechte Flächenstreifen eingeteilt, die, mit H vermehrt d. h. als Produkt der mittleren Momente mit den Teillängen die **„Belastungsflächen“ der zweiten Kräftepläne ergeben.** Wir summieren diese mit dem Polabstand $J_0 E/n$, wo n eine große Zahl ist, wodurch die elastische Linie im gleichen Verhältnis vergrößert wird, also an Deutlichkeit gewinnt. Die mit

$$\Delta \Phi_f = M_f^* \Delta x; \qquad \Delta \Phi_b = M_b^* \Delta x$$

getrennt ermittelten elastischen Linien e_b, e_f erhalten eine gemeinsame wagerechte Tangente, wenn $J_0 E\, n$ wagerecht angenommen wurde. Die Verbiegung in irgendeinem Punkte ist der Unterschied zwischen y_b und y_f; für das Schaufelende ergibt sich so $y_e = y_{be} - y_{fe}$. Wäre y_0 zufällig richtig gewählt gewesen, so hätte $y_e = y_0$ sein müssen. Aus dieser Bedingung kann der richtige Wert ermittelt werden, wenn man überlegt, daß y_{be}, y_{fe} zum ursprünglichen Werte y_0 und beziehungsweise zu x^2 und ω^2 verhältnisgleich sind, d. h. als

$$y_{be} = \beta y_0 \lambda^2; \qquad y_{fe} = \gamma y_0 \omega^2 \quad \dots\dots\dots \quad (10)$$

geschrieben werden können, aus welchen Gleichungen man die **Verhältniszahlen** β, γ **ermittelt.** Ist nun η_0 ein möglicher richtiger Wert der Endeinsenkung, so muß die Beziehung

$$\eta_0 = \eta_{b0} - \eta_{f0} \dots \quad \text{oder} \quad \eta_0 = \beta \eta_0 \lambda^2 - \gamma \eta_0 \omega^2 \quad \dots\dots\dots \quad (11)$$

erfüllt sein, aus der sich die gesuchte Größe

$$\lambda^2 = (2\pi N_{sek})^2 = \frac{1 + \gamma \omega^2}{\beta} \quad \dots\dots\dots \quad (12)$$

ermittelt.

c) Schaufel mit Deckband.

Die in der Mitte einer durch Deckband zusammengehaltenen Gruppe befindliche Schaufel AB, Abb. 1024, wird durch den **Widerstand des Deckbandes** in bezug auf die Hauptachse I **einem Moment** M_d **ausgesetzt und zurückgebogen.** Wir beschränken uns auf den Fall einer verschwindend kleinen Biegung um die Hauptachse II und ersetzen die Wirkung des zur Achse I schief stehenden Deckbandes AC durch diejenige eines zu I normal stehenden Deckbandes AC' von der Breite $C'D'$, was als Annäherung an die verwickelten Verhältnisse genügen mag.

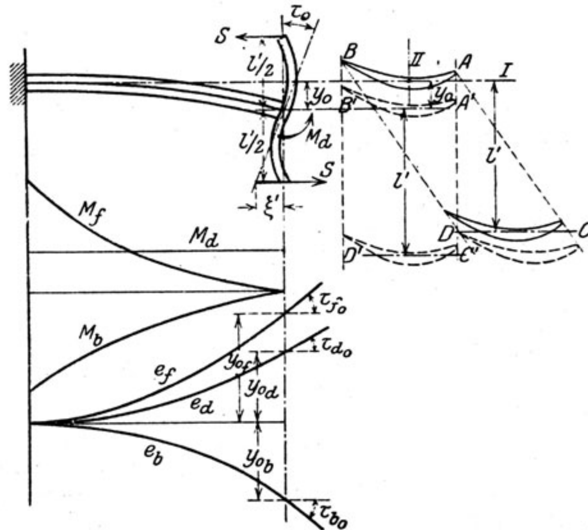


Abb. 1024. Schwingung einer Schaufel mit Deckband.

Aus der willkürlich (aber am Ende etwas zurückgebogen) angenommenen Biegungsform berechnen wir wie oben mit ω die **Fliehkräfte** F, zu welchen an der Schaufelspitze die Fliehkraft F_a des auf die Schaufel entfallenden Deckbandstückes hinzutritt. Die zugehörige Momentenfläche M_f ergibt die elastische Linie e_f mit dem Biegungspfeil y_{0f} und der Neigung τ_{0f}. Die mit λ als Drehgeschwindigkeit gerechneten **normalen Belastungskräfte** für sich allein ergeben, ebenso M_b, e_b, y_{0b}, τ_{0b}. Dabei muß insbesondere die **vom Deckband stammende Belastungskraft** am Schaufelende auch in Rechnung gestellt werden. Als dritte Formänderung kommt die durch das vom Deckband stammende Moment M_d mit der gleichnamigen Momentenfläche bewirkte Verbiegung e_d, y_{0d}, τ_{0d} hinzu. Das Moment M_d steht in folgender Beziehung zum Winkel τ_0, den das Deckband mit dem Umfang am Schaufelende bildet. Ist S die Schubkraft im „Inflexionspunkt“, der in die Mitte der Teilung l' zu liegen kommt, so ist nach Abb. 1024

$$\xi' = \frac{S (l'/2)^3}{3 J_d' E'} = \frac{l'}{2} \tau_0 ,$$

wo J_d' das Trägheitsmoment des Deckbandes bedeutet. Daraus folgt

$$S = \frac{12 J_d' E'}{l'^2} \tau_0 \quad \text{und} \quad M_d = S l' = \frac{12 J_d' E' \tau_0}{l'} \quad \dots\dots\dots \quad (13)$$

Mit diesem Moment sind die Verbiegungen y_{0d}, τ_{0d} am Schaufelende zu ermitteln, sie sind ihm verhältnisgleich, d. h. man kann $y_{0d} = \vartheta M_d$; $\tau_{0d} = \vartheta' M_d$ setzen, wobei sich ϑ; ϑ' durch die graphische Konstruktion ergeben. Benützt man Gl. (13), so werden auch die Beziehungen

$$y_{0d} = \alpha_d \tau_0; \qquad \tau_{0d} = \beta_d \tau_0 \quad \dots\dots\dots \quad (14)$$

bestehen. Hierzu treten

$$y_{0b} = \alpha_b y_0 \lambda^2; \qquad \tau_{0b} = \beta_b y_0 \lambda^2 \quad \dots\dots\dots \quad (15)$$

$$y_{0f} = \alpha_f y_0 \omega^2; \qquad \tau_{0f} = \beta_f y_0 \omega^2 \quad \dots\dots\dots \quad (16)$$

Sind hieraus die $\alpha \dots \beta$ ermittelt, so kann man die Beziehung zwischen einer möglichen (wirklichen) Verbiegung $\eta_e \tau_e$ am Schaufelende wie folgt aufstellen:

$$\left.\begin{aligned} \eta_e &= \alpha_b \eta_e \lambda^2 - \alpha_f \eta_e \omega^2 - \alpha_d \tau_e \\ \tau_e &= \beta_b \eta_e \lambda^2 - \beta_f \eta_e \omega^2 - \beta_d \tau_e \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (17)$$

Durch Nullsetzen der Determinante der Beiwerte von $\eta_e \tau_e$ in diesen Gleichungen ergibt sich eine **quadratische Gleichung für λ,** von deren Wurzeln diejenige praktische Bedeutung hat, die in der Nähe desjenigen Wertes von λ liegt, der sich für die Schaufel bei freiem Ende ergeben hat.

196. Beanspruchung langer und dünner Naben.

Wir machen die Annahme, daß die Nabenstärke im Verhältnis zum Halbmesser klein sei, so daß man ihre Beanspruchung nach der Theorie der unendlich dünnen zylindrischen Schale berechnen dürfe.

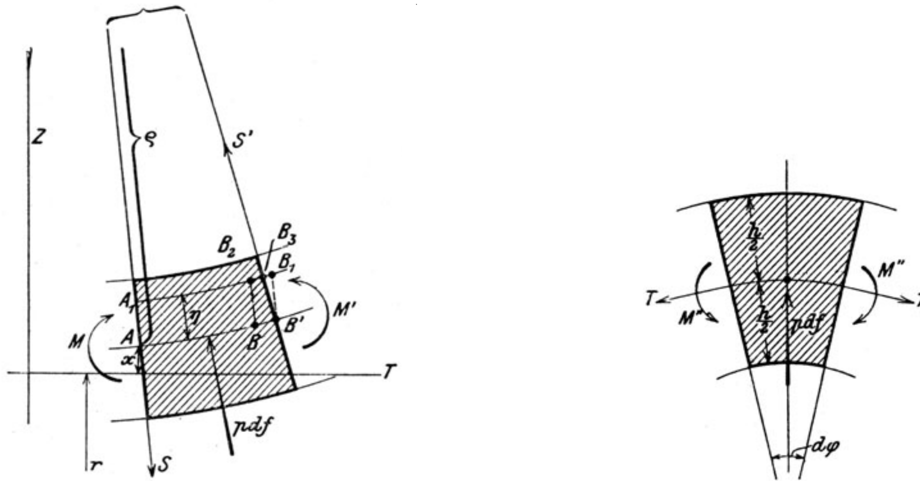


Abb. 1025. Formänderung der zylindrischen Schale.

Die ursprünglich mit der X-Achse Abb. 1025 zusammenfallende mittlere Erzeugende der zylindrischen Schale werde axial gedehnt und gebogen, wobei

z die Vergrößerung des Halbmessers (in der Figur irrtümlich mit x bezeichnet),
η den nach oben positiv gerechneten Abstand eines Elementes von der Mittelfläche,
ε_{0x} die spezifische Dehnung der Mittelfläche nach der X-Richtung bedeutet.

Wir machen weiterhin die übliche Näherungsannahme, daß die Querschnitte eben bleiben und zur deformierten Mittelfläche senkrecht stehen. Der reziproke Wert des Krümmungshalbmessers des Meridianschnittes wird näherungsweise

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d^2 z}{d x^2} = z'' \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

gesetzt, und man erhält als Dehnung einer Elementarfaser im Abstande η, deren ursprüngliche Länge $A_1 B_2 = AB$ gewesen ist, nach Abb. 1025

$$\varepsilon_x = \frac{B_2 B_3}{AB} = \frac{B_2 B_1 - B_1 B_3}{AB}.$$

Hierin ist $B_2 B_1 : AB = \varepsilon_{0x}$, und $B_1 B_3 : \eta = AB' : \varrho = (1 + \varepsilon_{0x})\, dx : \varrho$, daher $B_1 B_3 : AB = (1 + \varepsilon_{0x})\eta/\varrho$, oder mit Vernachlässigung des ε_{0x} gegen 1

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{0x} - \eta z'' \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Die Ausdehnung im Umfang ist $[2\pi(r + z + \eta) - 2\pi(r + \eta)] : 2\pi(r + \eta)$ oder indem man η neben r vernachlässigt

$$\varepsilon_y = \frac{z}{r} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Mit der Abkürzung $E' = E/(1 - \nu^2)$ ist nun nach den Formeln des Absch. 74, da eine Beanspruchung nach zwei zu einander senkrechten Richtungen vorliegt, die gesamte nach X gerichtete Spannung $= E'(\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y)$, ebenso $E'(\nu \varepsilon_x + \varepsilon_y)$ die Spannung im Umfang. Beide Spannungen setzen sich, wenn man für ε_x, ε_y die Werte (2) und (3) einsetzt, aus einem von η unabhängigen und einem mit η wachsenden Gliede zusammen. Die ersteren bezeichnen wir mit σ_a und σ_t und erhalten

$$\sigma_a = E'\left(\varepsilon_{0x} + \nu \frac{z}{r}\right); \qquad \sigma_t = E'\left(\nu \varepsilon_{0x} + \frac{z}{r}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4).$$

Die letzteren, die **Biegungsspannungen** darstellen, seien σ_x, σ_y, und zwar ist

$$\sigma_x = -E' z'' \eta; \qquad \sigma_y = -E' \nu z'' \eta \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Für das Fernere nehmen wir an, daß in der Achsenrichtung auf die zylindrische Schale keine Kraft ausgeübt wird, so daß die Resultierende der Spannungen $\sigma_a + \sigma_x$, über die ganze Stirnfläche summiert, Null geben muß. Dies ist für σ_x von selbst der Fall, daher muß

$$\sigma_a = 0 \quad \text{oder} \quad \varepsilon_{0x} = -\nu \frac{z}{r} \qquad (6)$$

werden, und dies liefert

$$\sigma_t = E' \left(-\nu^2 \frac{z}{r} + \frac{z}{r} \right) = E \frac{z}{r} \qquad (7)$$

Die Aufgabe enthält daher nur eine unbekannte Funktion, nämlich z, zu deren Bestimmung wir die Gleichung des Gleichgewichts der Kräfte an dem in der Abbildung angedeuteten Körperelement aufstellen. Die Mittelfläche sei radial nach auswärts für die Flächeneinheit mit p belastet, welche Größe einen Flüssigkeits-, einen Schrumpfungs-Druck oder eine Fliehkraft bedeuten kann.

In Richtung von Z ist die Summe der Kraftkomponenten

$$S' - S + p\,d f - T\,d\varphi = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dS}{dx} + p \frac{df}{dx} - T \frac{d\varphi}{dx} = 0 \qquad (8)$$

In Richtung von X und des Umfanges verschwindet die Komponentensumme von selbst.

Die Momente für eine zu XZ senkrechte Achse durch eine Ecke des Elementes geben

$$M' - M + S\,dx + p\,df \frac{dx}{2} = 0 \qquad (9)$$

Das letzte Glied ist unendlich klein höherer Ordnung, daher vernachlässigbar, und wir erhalten

$$S = -\frac{M' - M}{dx} = -\frac{dM}{dx} \qquad (10)$$

Hiernach wird Gl. (8):

$$-\frac{d^2 M}{dx^2} + p \frac{df}{dx} - T \frac{d\varphi}{dx} = 0 \qquad (11)$$

Es sei nun σ_x' die in der obersten Faser, d. h. für $\eta = h/2$ herrschende Biegungsspannung. Das Biegungsmoment für den Querschnitt $r\,d\varphi\,h$ kann durch das Widerstandsmoment $r\,d\varphi\,h^2/6$ als

$$M = -\tfrac{1}{6}\, r\,d\varphi\,h^2 \sigma_x'$$

dargestellt werden. (Das negative Vorzeichen ist anzuwenden, weil σ_x' für $\eta = +h/2$ und die angenommene Krümmung der Meridienlinie negativ wird.) Wenn dieser Wert und $df = r\,d\varphi\,dx$; $T = dx\,h\,\sigma_t$ in Gl. 11 eingesetzt werden, entsteht

$$\frac{h^2}{6} \frac{d^2 \sigma_x'}{dx^2} - \frac{h}{r} \sigma_t + p = 0 \qquad (12)$$

Oder endlich, da

$$\sigma_x' = -E' z'' \frac{h}{2} \qquad (12\text{a})$$

ist, die Differentialgleichung

$$\frac{d^4 z}{dx^4} + \frac{12(1-\nu^2)}{r^2 h^2} z = \frac{12(1-\nu^2)}{E h^3} p \qquad (13)$$

welche mit den Bezeichnungen

$$4\alpha^4 = \frac{12(1-\nu^2)}{r^2 h^2}; \qquad b = \frac{12(1-\nu^2)}{E h^3} \quad \text{die Form erhält} \quad z^{IV} + 4\alpha^4 z = b p \qquad (13\text{a})$$

Man setzt nun $4\alpha^4 z - b p = 4\alpha^4 \zeta$, d. h. $z = \frac{bp}{4\alpha^4} + \zeta$, und erhält $\zeta^{IV} = -4\alpha^4 \zeta$ . . (13b)

Der Ansatz $\zeta = c\,e^{\lambda x}$ führt auf

$$\lambda^4 = -4\alpha^4$$

und die Wurzeln dieser Gleichung sind

$$\left.\begin{matrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{matrix}\right\} = \alpha(1 \pm i) \qquad \left.\begin{matrix}\lambda_3\\ \lambda_4\end{matrix}\right\} = -\alpha(1 \pm i) \qquad (14)$$

wie man leicht nachprüfen kann. Daher ist das allgemeine Integral von (13c)

$$\zeta = c_1' e^{\lambda_1 x} + c_2' e^{\lambda_2 x} + c_3' e^{\lambda_3 x} + c_4' e^{\lambda_4 x} \qquad (15)$$

Indem man für die willkürlichen Beiwerte c_1', c_2' . . . komplexe Größen wählt, wird in bekannter Weise die Lösung in reelle Form übergeführt, so daß schließlich

$$z = \frac{bp}{4\alpha^4} + e^{\alpha x}(c_1 \cos\alpha x + c_2 \sin\alpha x) + e^{-\alpha x}(c_3 \cos\alpha x + c_4 \sin\alpha x) \qquad (16)$$

das Integral bildet. Die Beiwerte sind aus den Grenzbedingungen zu bestimmen.

Für die Nabe Abb. 1026 würde man die Wirkung der Radscheibe durch entsprechende Schubspannungen, deren Mittelwert τ bezeichnen möge, in der „Anhaftungsfläche" CD ersetzt denken und vorschreiben, daß dort die Tangente an die elastische Meridianlinie wagrecht ist. Die Scheibe kann man als durch die radialen Spannungen in der Anhaftungsfläche CC' beansprucht annehmen, wenn man zum Ausgleich die Länge l_1 durch l ersetzt, d. h. den Anhaftungsquerschnitt CD bis in die Mitte vorschiebt, wo gewissermaßen eine unendlich dünne Platte als Fortsetzung der Radscheibe die Schubspannungen nach rechts und links überträgt. Die Gesamtheit der Kräfte τ und σ_r muß „äquivalent", d. h.

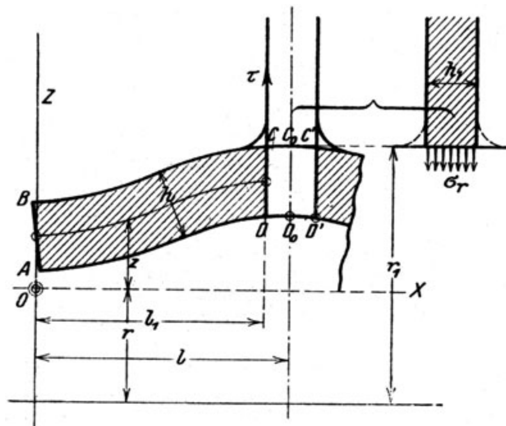


Abb. 1026. Formänderung langer Naben.

$$2\pi r h \tau = 2\pi r_1 h_1 \sigma_r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

sein. Nun kann die Dehnung der Radscheibe ξ_r als Funktion der Unbekannten σ_r und der Fliehkräfte ausgedrückt werden. Anderseits sind für die Nabe die Spannungen τ die gegebenen Kräfte (die Fliehkraft kann man vernachlässigen), und man muß die Nabenausdehnung z_0 für $x = l$. als Funktion von τ, d. h. σ_r darstellen, worauf die Bedingung

$$z_0 = \xi_r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

die Unbekannte σ_r zu finden gestattet.

Zu diesem Behufe ist nach Gl. (10) $S = r\,d\varphi\,h\,\tau = -\frac{dM}{dx} = \frac{1}{6} r\,d\varphi\,h^2 \frac{d\sigma_x'}{dx}$ oder

$$\tau = \frac{h}{6}\frac{d\sigma_x'}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

und hierin σ_x' nach (12a) in z'' auszudrücken, was die erste Bedingung für z ergibt.

Zweitens ist für $x = l$ die Ableitung

$$\frac{dz}{dx} = 0 \quad . \quad (20)$$

Endlich muß für $x = 0$, d. h. für die freie Stirnfläche, sowohl das Biegungsmoment, d. h. σ_x', als auch die Schubspannung τ verschwinden, und dies liefert nach (12a) und (19) als dritte Bedingung

$$\text{für } x = 0; \quad \frac{d^2z}{dx^2} = 0, \quad \text{als vierte Bedingung} \quad \text{für } x = 0; \quad \frac{d^3z}{dx^3} = 0.$$

Auf die Weise ist die Abb. 370 veranschaulichte Zurückführung der Nabenlänge auf „gleichmäßige Inanspruchnahme" ermittelt worden. Rechnungen dieser Art sollen in Buchstabenausdrücken nicht über eine gewisse Grenze geführt werden. Es ist zweckmäßig, möglichst bald die Zahlenwerte einzusetzen und mit diesen zu rechnen.

Die Beanspruchung eines breiten zylindrischen Scheibenrandes

führt offenbar auf nahezu identische Grenzbedingungen; nur darf man die Fliehkräfte des Randes und der an ihm befestigten Schaufeln selbstverständlich nicht weglassen.

Die Beanspruchung in der Hohlkehle.

Im Punkte C_0 unserer Radnabe haben wir einerseits die axial gerichtet größte Biegungsspannung σ_x' anderseits die Umfangsspannung σ_t, und endlich die radiale Radspannung σ_r. Es liegt der seltene Fall der Beanspruchung nach drei zueinander senkrechten Richtungen vor. Im Sinne der Theorie von Mohr hat man nur die (algebraisch) größte und kleinste dieser Spannungen, die wir mit σ_1 und σ_2 bezeichnen wollen, zu beachten, und der Maßstab für die Beanspruchung wäre die größte Schubspannung, die in unserem Falle, da alle Spannungen positiv sind, durch den Wert

$$\tau_{mx} = \tfrac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$$

gegeben ist.

Von besonderer Tragweite ist das Zusammentreffen dieser Spannungen für die Punkte bei CC', wo bei Ausbildung scharfer Ecken offenbar unendlich große Spannungen, d. h. Anrisse auftreten würden. Die Wichtigkeit der „Hohlkehle", durch die diese Gefahr gemildert wird, ist in der Praxis genügend bekannt und gewürdigt. Doch wissen wir nichts Genaueres über die Größe der dort auftretenden Beanspruchung, d. h. über den erforderlichen Mindesthalbmesser der Krümmung. Hier liegt eine offene Frage vor, die gründlicher Untersuchung wert wäre.

197. Die Festigkeit der Gehäuse.

Soweit die Gehäuse durch Hohlzylinder gebildet werden, kann ihre Festigkeit auf Grund der Formeln des vorigen Abschnittes beurteilt werden.

Über die Festigkeit von dünnwandigen Kugel-, Kegel- und Ringschalen liegen neuere wertvolle Untersuchungen vor, die in der Hauptsache an eine theoretische Arbeit von Meißner[1]) anschließen. Für irgendeine dieser Umdrehungsflächen bedeute:

$\sigma_{ra}\,\sigma_{ri}$ die Spannungen in einem zum Meridian senkrechten Schnitt u. zw. außen (auf der konvexen) und innen (auf der konkaven Seite).

$\sigma_{ro} = (\sigma_{ra} + \sigma_{ri})/2$ die gleichmäßig verteilte Spannung in Richtung des Meridians.

$\sigma_{ta}\,\sigma_{ti}$ die Spannungen in Richtung des Umfanges (Breitenkreises) außen bzw. innen.

$\sigma_{to} = (\sigma_{ta} + \sigma_{ti})/2$ die gleichmäßig verteilte Umfangsspannung.

$\sigma_{xa} = \sigma_{ra} - \sigma_{ro}$; $\sigma_{xi} = \sigma_{ri} - \sigma_{ro}$ die „Biegungsspannungen" in Richtung des Meridians, außen und innen.

$\sigma_{ya} = \sigma_{ta} - \sigma_{to}$; $\sigma_{yi} = \sigma_{ti} - \sigma_{to}$ die „Biegungsspannungen" in Richtung des Umfanges, außen und innen.

a) Die Kugelschale[2]).

Die Spannung in einer geschlossenen Kugelschale (Bombe), die einem inneren Überdruck p at ausgesetzt ist, bei R als Innendurchmesser, s als Wandstärke ist

$$\sigma_0 = \frac{pR}{2s} \quad \ldots \ldots \ldots (1)$$

Die radiale Ausdehnung ist

$$\Delta R = \frac{(1-\nu)\,\sigma_0}{E} R \quad \ldots \ldots \ldots (2)$$

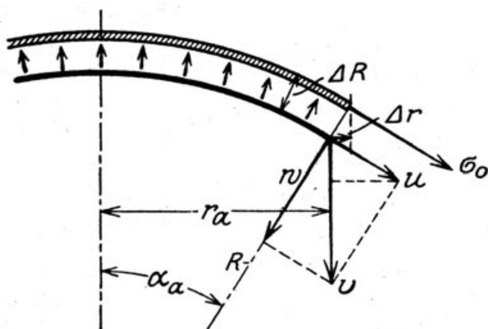


Abb. 1027.
Gleichmäßig gespannte Kugelschale.

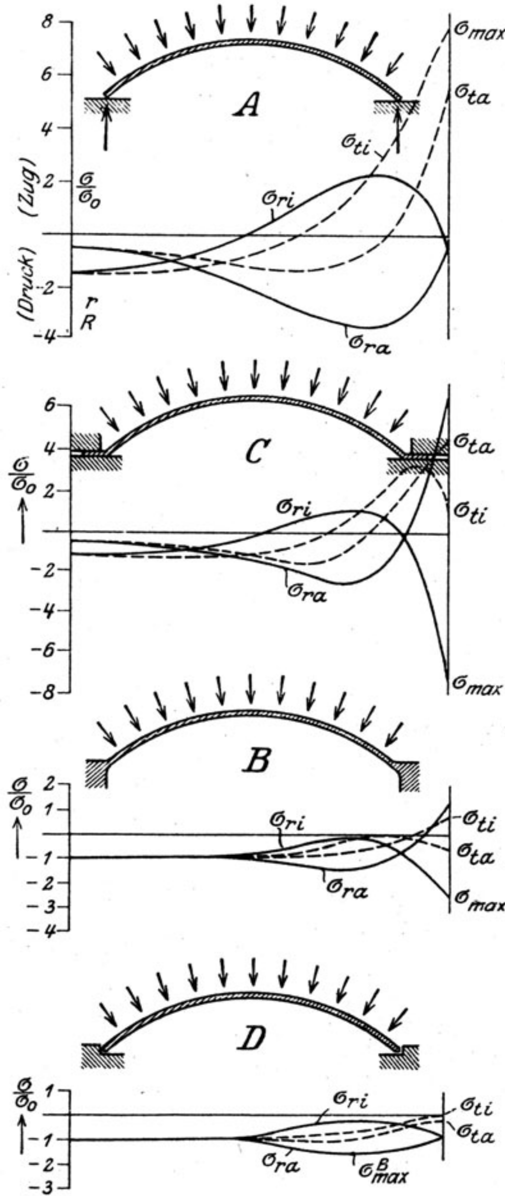


Abb. 1028. Spannungen in der Kugelschale bei verschiedenen Arten der Randbefestigung.

Auch ein begrenztes Stück der Schale mit r_a als Randhalbmesser, α_a als halbem „Öffnungswinkel", Abb. 1027, kann in dieser Weise beansprucht und gedehnt werden, falls man am Rande die Spannung σ_0 wirken läßt. Der Randhalbmesser erfährt dabei eine Verlängerung von

$$\Delta r = \Delta R \sin \alpha_a \quad \ldots \ldots \ldots (3)$$

---

[1]) Physik. Zeitschr. 1913, S. 343.

[2]) H. Keller, Forschungshefte d. Ver. deutsch. Ing. 1912, Nr. 124. — E. Fankhauser, Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1913. — Reißner, Spannungen in Kugelschalen, Müller-Breslau, Festschrift 1913. — Bolle, Festigkeit von Kugelschalen, Dissertation, Zürich 1916.

Die tatsächliche Inanspruchnahme ist in hohem Maße abhängig von der Befestigungsart des Randes. Vier typische Fälle sind nach H. Keller, der diese Verhältnisse als erster mit Hilfe des Differenzenverfahrens ausführlich untersucht hat, in Abb. 1028 veranschaulicht. Darin bedeuten

Fall A: freie Stützung des Bodens, so daß der Rand sich **frei ausdehnen und verdrehen kann,**
„ D: der Rand kann sich **frei drehen, aber nicht radial ausdehnen,**
„ C: der Rand kann sich **radial frei dehnen, aber nicht verdrehen,**
„ B: der Rand ist „fest" eingespannt, kann sich **weder ausdehnen, noch verdrehen.**

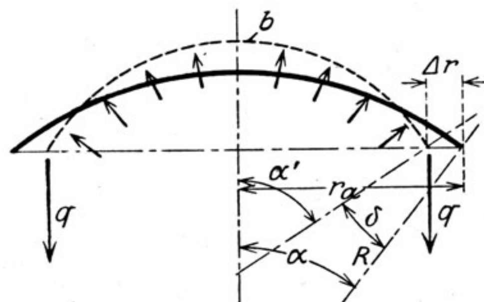


Abb. 1029. Verkleinerung des Randhalbmessers bei freier Auflage und Innendruck.

Die Schaubilder stellen die Verhältnisse der wirklichen Spannungen zur „Kugelspannung" σ_0 in Abhängigkeit vom Verhältnis r/R für einen gußeisernen Boden mit den Abmessungen:

$r_a = 500$ mm; $s = 20$ mm; $R = 1000$ mm
$(R/r_a) = 2$; $(R/s) = 50$; $\nu = 0{,}2$

dar. (Die an die Schaulinien angeschriebenen Werte σ_{ra} $\sigma_{ta}\ldots$ werden am σ/σ_0-Maßstab in wahrer Größe abgelesen, falls p so gewählt wird, daß $\sigma_0 = 1$ ist.) Man erkennt, daß die größte Spannung, mit Ausnahme des Falles B, auf der Innenseite des Randes vorkommt. Bei freier Auflagerung (Fall A) ist es die Ausdehnung in der Umfangsrichtung (σ_{ti}), bei verhinderter Randdrehung (Fall C und D) ist es die dort stattfindende scharfe Biegung der Schale, die die größte Anstrengung verursacht. Am schlimmsten wirkt die volle Freiheit des Randes, Fall A, u. zw. wegen der starken Änderung Δr und der Drehung des Randes um den Winkel ϑ wie in Abb. 1029 für einen Deckel mit Innendruck veranschaulicht wird.

Bolle hat aus seinen strengen Rechnungsergebnissen empirische Formeln für die in den Fällen A und B auftretenden größten Spannungen aufgestellt. Für den frei aufliegenden Boden gilt, solange $\alpha_a < 45^0$; $12 > \frac{R}{s}\sin^2\alpha_a > 1{,}2$ ist, bei Flußstahl

$$\sigma_{\max} = \frac{pR}{2s}\left[-1 + \cos\alpha_a\left(1{,}6 + 2{,}44\sin\alpha_a\sqrt{\frac{R}{s}}\right)\right] \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

für den eingespannten Boden, solange $\alpha_a < 45^0$; $12 > \frac{R}{s}\sin^2\alpha_a > 3$ ist bei Flußstahl

$$\sigma_{\max} = -1{,}20\frac{Rp}{s} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

H. Keller findet[1]) für gußeiserne Böden bei freier Auflagerung

$$\sigma_{max} = \frac{pR}{s}\left[-1{,}16 + \cos\alpha_a\left(1{,}32 + 5{,}34\sin\alpha_a\cdot\sqrt{\frac{R}{s}}\right)\right].$$

Im Hinblick auf die Schaulinien, Abb. 1028, betont H. Keller mit Recht, wie wichtig es ist, die Ausbildung der freien radialen Dehnung durch geeignete konstruktive Maßnahmen nach Tunlichkeit zu verhindern. Bei Böden, die einem Außendruck ausgesetzt sind, wird daher an Stelle des üblichen Flansches ein Schrumpfring vorgeschlagen, der den Boden nach der Belastung auf den ursprünglichen Durchmesser zusammenpreßt und den Fall D verwirklichen soll. Offenbar wäre es noch günstiger, die Verhältnisse der biegungsfreien Schale nach Abb. 1027 herzustellen. Der Konstrukteur müßte sich übrigens auch über die im unbelasteten Zustand durch den Schrumpfring hervorgerufene Beanspruchung Rechenschaft ablegen.

b) Die Kegelschale[2]).

Dubois schlägt auf Grund der Ergebnisse der strengen Integration der Festigkeitsgleichungen folgende Näherungsformeln vor: Es sei r_a der äußere Randhalbmesser, α der Winkel, den die Erzeugende mit der Normalen zur Achse einschließt, s die Wandstärke in cm, und es sei

$$\xi = 2\sqrt{3(1-\nu^2)}\cdot\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha}\frac{r_a}{s} \quad \text{und} \quad 0 < \alpha < 30^0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

[1]) Nach freundl. brieflicher Mitteilung kurz vor seinem bedauerlich frühen Hinschied.

[2]) Ziegler in der IV. Auflage dieses Lehrbuches, S. 601. — Dubois, Über die Festigkeit der Kegelschale, Dissertation, Zürich 1917. — Honegger, Kegelschalen mit linear veränderlicher Wandstärke, Zürich 1919.

so gilt für den frei aufliegenden vollen Hohlkegel

$$\sigma_{max} = \frac{-p\,\xi^2}{tg^2\,\alpha\,\sqrt{1{,}503\,\xi^2 + 0{,}965\,\xi + 77{,}92}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

und zwar tritt diese Beanspruchung als Meridianspannung an der Außenseite in der Nähe der Erzeugendenmitte auf.

Die Verhältnisse ändern sich wesentlich, wenn der Kegel an der Spitze nicht geschlossen ist, sondern einen kreisrunden Ausschnitt mit $r_i = 0{,}2\,r_a$ besitzt. Dann ist

$$\sigma_{max} = \frac{+p\,\xi^2}{tg^2\,\alpha\,\sqrt{0{,}918\,\xi^2 + 33{,}05\,\xi + 24{,}75}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

und tritt als Umfangsspannung auf der Innenseite in der Nähe der Erzeugendenmitte auf. Die Genauigkeit der Formeln wird mit ± 15 v. H. angegeben.

Über Kegel mit veränderlicher Wandstärke macht Honegger a. a. O. folgende Feststellungen:

Die in einem Schnitt wirkenden Gesamtkräfte und Gesamtmomente werden durch Änderungen der Wandstärke nicht wesentlich beeinflußt. Daraus folgt, daß je nach dem Belastungsfall eine Verstärkung oder Verjüngung nach außen zweckmäßig sein wird.

Bei flachen Kegeln ($\alpha = 6^0$) ist eine Verstärkung des Außenrandes geboten, falls dieser eingespannt ist. Sobald der Innenrand gestützt oder gar eingespannt ist, wirkt eine Verstärkung des Innenrandes sehr günstig. Eine zentrale Bohrung beeinflußt den Spannungsverlauf eigentümlich, so daß auch, wenn der Außenrand frei gestützt ist, die Verstärkung des Innenrandes vorteilhaft sein kann.

Bei steilen Kegeln ($\alpha = 30^0$) ist der Einfluß einer zentralen Bohrung klein. Ist der Innenrand allein belastet oder gestützt, so kann durch seine Verstärkung die Höchstspannung erheblich herabgesetzt werden. Besonders wirksam ist an sich die Entspannung des Innenrandes (die Höchstspannung sinkt bei einseitigem Überdruck in einem bestimmten Fall auf die Hälfte herab).

c) Die Ringflächenschale[1]).

Der Ringflächenschale ist als Übergangsstück vom Boden zum Mantel ebenfalls ein wesentlicher Bestandteil eines Gehäuses. Die zitierte Dissertation von Wißler bringt die allgemeinen Integrale und eine Anzahl von Beispielen, die die verwickelte Natur der Aufgabe beleuchten. Eine Untersuchung läßt erkennen, daß für die praktisch meist vorkommenden Verhältnisse folgende vereinfachte Rechnungsart benutzt werden darf.

Man nimmt an, daß in Abb. 1030 unter der Wirkung der Normalkräfte und Schubkräfte wie auch Momente, die durch den angrenzenden Boden und Mantel bedingt sind, eine Formänderung stattfindet, **bei der der Querschnitt der Ringfläche der Form nach unverändert weiter rückt und zugleich verdreht wird.** Die Aufweitung ruft **gleichmäßig verteilte Zugspannungen** hervor. Die Verdrehung erzeugt **linear veränderliche Normalspannungen,** deren Resultante ein Biegungsmoment M ist. Ein Querschnitteilchen df rückt nämlich radial um den Betrag ξ fort, der angenähert $\sim y\vartheta$ ist. Die elastische Dehnung wird $\varepsilon = \xi/r$ oder bei großem r_0 angenähert $= \xi/r_0$. Somit ist die Umfangsspannung jener Faser

$$\sigma = E\varepsilon \simeq \frac{E\vartheta}{r_0}\,y \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

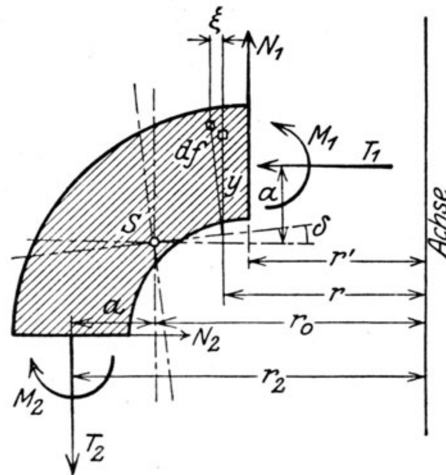


Abb. 1030. Formänderung der Ringfläche.

Da S den Schwerpunkt bedeutet, verschwindet $\int \sigma\,df$; hingegen ergibt

$$\int \sigma\,df\,y = \frac{E\vartheta}{r}\int y^2\,df = \frac{JE\vartheta}{r_0} = M \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

das biegende Moment. Beziehen sich die eingeschriebenen Kräfte und Momente je auf 1 cm Umfangslänge, so ergibt die Summation über eine Hälfte des Ringes, z. B. von M_1 herstammend, das Moment $M_1\,2\,r_1$ mit in der Bildfläche gelegener Achse. Daraus folgt, daß im ganzen

$$M = \{M_1 + (T_1 + N_1)\,a\}\,r_1 + \{(T_2 + N_2)\,a - M_2\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

ist, wodurch eine Beziehung zwischen ϑ und den Außenkräften hergestellt wird. Das Einbeziehen dieser Gleichung und der durch das Aufweiten erzeugten Zugkraft in die Randbedingungen für den Boden und den Mantel ist an sich nicht schwierig, bedingt aber ungemein verwickelte Rechnungen, auf die hier nicht eingetreten werden kann.

[1]) Wißler, Festigkeitsrechnung von Ringflächenschalen, Dissertation, Zürich 1916.

Besonders zu betonen ist, daß die Beanspruchung sich wesentlich ändert, sobald die behandelten Gehäuseformen durch axiale Ebenen halbiert werden, wie das bei der Turbine meist der Fall ist. Entweder führt die Befestigungsflansche eine Stetigkeitsunterbrechung herbei, oder der Rand bleibt kräftefrei, was die Festigkeit in erheblichem Maße herabsetzt. Ein kugel- oder kegelförmiger Boden mit nicht zu großer Pfeilhöhe, der durch eine Fuge halbiert ist, dürfte kaum tragfähiger sein, wie die halbierte ebene Scheibe, die in Abschn. 98 besprochen wurde. Bei dieser schwierigen Sachlage und den ungemein verwickelten Formen, die z. B. Abdampfgehäuse aufweisen, bleibt nur **der Weg des Versuches an Modellen** übrig, an welchen durch allmähliche Steigerung der Beanspruchung die elastische und bleibende Formänderung ermittelt wird. Um hieraus richtige Folgerungen zu ziehen, ist die Kenntnis durchsichtiger theoretischer Fälle von größtem Nutzen.

198. Ausbreitung der Temperatur beim Anwärmen der Dampfturbine oder sonstigen Betriebsänderungen.

a) Grundformel der Wärmeleitung für die Fortpflanzung nach einer Richtung.

Aus einem unendlich ausgedehnten nach der X-Richtung verlaufenden Wärmestrom, bei dem die Temperatur t nur von x und der Zeit z abhängig sein soll, schneiden wir in Richtung von x ein Prisma mit dem Querschnitt f und aus diesem ein Element dl (Abb. 1031) heraus. Die in der Zeit dz durch die Endfläche A_1 hindurchströmende Wärmemenge ist

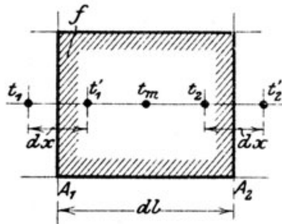


Abb. 1031. Wärmeausbreitung.

$$dQ_1 = \lambda \frac{t_1 - t_1'}{dx} f dz = -\lambda \frac{dt_1}{dx} f dz,$$

wo λ die Wärmeleitungszahl bedeutet. Ähnlich ist die durch A_2 abströmende Wärmemenge

$$dQ_2 = \lambda \frac{t_2 - t_2'}{dx} f dz = -\lambda \frac{dt_2}{dx} f dz.$$

Im Element verbleibt $dQ_1 - dQ_2$ und dient zur Temperaturerhöhung desselben gemäß Gleichung

$$dQ_1 - dQ_2 = c\gamma f dl\, dt_m,$$

worin

t_m die Mitteltemperatur, also etwa diejenige des Schwerpunktes,
c die spezifische Wärme,
γ das spezifische Gewicht

bedeuten. Durch Einsetzen von dQ_1, dQ_2 erhält man $c\gamma \frac{dt_m}{dz} = \lambda \frac{d(t_2 - t_1)}{dx\, dl}$. Nun ist nach Taylors Satz $t_2 = t_1 + \frac{dt_m}{dx} dl$. Da die Temperatur sowohl von x als von z abhängig ist, müssen die Zeichen der partiellen Ableitung benützt werden, und dies ergibt schließlich

$$\frac{\partial t}{\partial z} = a^2 \frac{\partial t^2}{\partial x^2} \quad . \ . \ (1) \qquad \text{wenn} \qquad a^2 = \frac{\lambda}{\gamma c} \quad . \ . \ (1\text{a})$$

und statt t_m einfach t gesetzt wird.

b) Unendlich dicke Wand.

Zahlreiche Integrale der allgemeinen Wärmegleichung sind bekanntlich von Fourier angegeben worden. Bemerkenswert ist die einfache Form für einen unendlich ausgedehnten Körper, der durch eine ebene Wand begrenzt wird. Es sei zur Zeit $z = 0$ die Temperatur des Körpers überall $= 0$ und es werde zu dieser Zeit die Temperatur der Endfläche plötzlich auf den Betrag t_0 erhoben und unveränderlich erhalten. Dann gilt allgemein[1])

$$t = t_0 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varphi} e^{-\alpha^2} d\alpha\right) = \frac{2t_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\varphi}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha \quad . \ . \ . \ (2) \qquad \text{worin} \qquad \varphi = \frac{x}{2a\sqrt{z}} \quad . \ . \ . \ (2\text{a})$$

Man ersieht hieraus, daß, wenn der Verlauf von t für eine bestimmte Zeit z als Funktion von x aufgetragen worden ist, der Verlauf zur Zeit $4z$ erhalten wird, indem man die Abszissen der ersten Kurve verdoppelt (die Kurve auf die zweifache Länge auszieht), da

$$\varphi(2x, 4z) = \frac{2x}{2a\sqrt{4z}} = \frac{x}{2a\sqrt{z}} = \varphi(x, z) \quad \text{ist.}$$

[1]) B. Riemann, Partiale Differentialgleichungen 1882, S. 129.

Als Beispiel dieses eigenartigen Temperaturverlaufes ist in Abb. 1032 die Wärmeströmung in einer gußeisernen Wand dargestellt, für welche $\lambda = 0{,}00013$ kcal für 1 cm Länge, 1 qcm Fläche, 1° C Temperaturunterschied und 1 Sekunde; $\gamma = 0{,}0072$ kg/cm³; $c = 0{,}13$ kcal/kg angenommen wurde. Bei 300° Anfangstemperatur ist in einer Entfernung von 5 cm die Temperatur nach 10 Sekunden erst um etwa 1° C gestiegen.

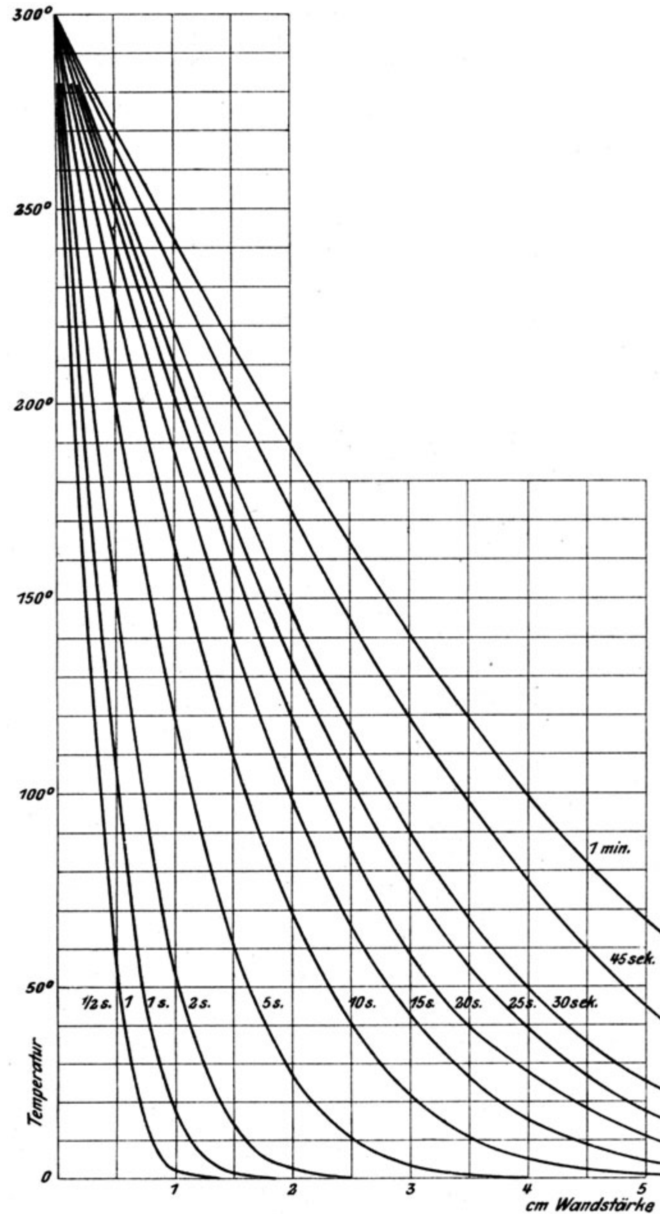


Abb. 1032. Eindringen der Wärme in unendlich dicke Wand.

s) Endlich dicke Wand mit wärmeundurchdringlicher Anfangsfläche und auf unveränderlicher Temperatur erhaltenen Endfläche.

Um die Differentialgleichung (1) zu integrieren, benützen wir den Ansatz

$$t = A e^{-kz} \cos \mu x \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

welcher in (1) eingeführt die allgemeine Bedingung

$$k = a^2 \mu^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

ergibt. Die besonderen Bedingungen unserer Aufgabe sind:

1. Für die Zeit $z = 0$ soll die Temperatur an allen Stellen im Innern der Wand $= 0$ sein.

2. Die wärmeundurchdringliche Anfangsfläche falle mit dem Nullpunkt zusammen, daher muß, damit dQ beständig verschwindet,

$$\text{für } x = 0 \text{ und alle Zeiten } \frac{\partial t}{\partial x} = 0 \text{ sein.}$$

3. Die Endfläche befinde sich im Abstand l, daher soll

$$\text{für } x = l \text{ und alle Zeiten } t = t_0 \text{ sein.}$$

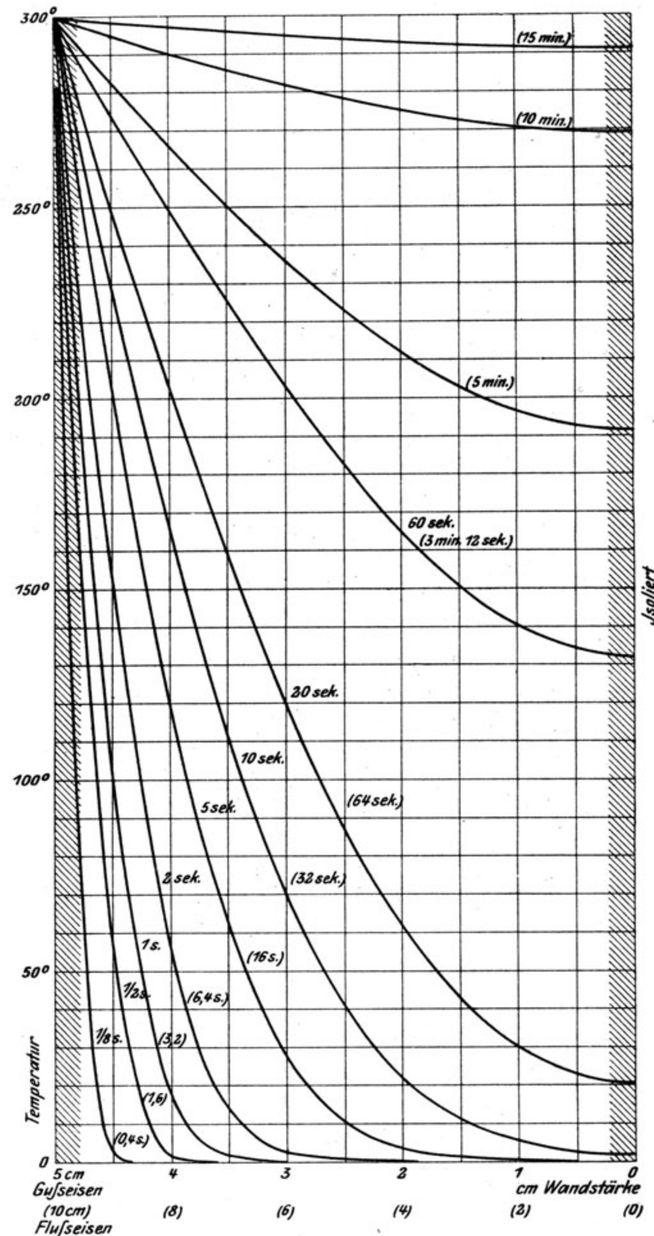


Abb. 1033. Temperaturverlauf in einer endlich dicken Wand mit stetsgleicher Temperatur in der einen und vollkommenen Wärmeschutz in der anderen Endfläche.

Da $\frac{\partial t}{\partial x} = -A\mu e^{-kz} \sin \mu x$ ist, so wird Bedingung (2) durch unseren Ansatz von vornherein befriedigt. Statt (3) unmittelbar zu erfüllen, fordern wir zunächst, daß für $x = l$ beständig $t = 0$ sein solle. Hieraus folgt für den einfachen Ansatz

$$A e^{-kz} \cos \mu l = 0,$$

d. h. es kann μl einen der Werte

$$\frac{\pi}{2}, \quad 3\frac{\pi}{2}, \quad 5\frac{\pi}{2}, \ldots \quad (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

annehmen. Wir erhalten also eine Reihe von partikulären Integralen mit den Werten

$$\mu_0 = \frac{\pi}{2l}, \quad \mu_1 = 3\frac{\pi}{2l}, \quad \mu_2 = 5\frac{\mu}{2l} \quad \dots \dots \dots (5)$$

zu welchen nach (4) die entsprechenden k-Werte

$$k_0 = a^2\mu_0^2; \qquad k_1 = a^2\mu_1^2; \qquad k_2 = a^2\mu_2^2 \quad \dots \dots \dots (6)$$

gehören.

Summieren wir diese mit willkürlichen Beiwerten vermehrten Lösungen und fügen wir t_0 hinzu, so nimmt t die Form

$$t = t_0 + A_0 e^{-k_0 z}\cos\mu_0 x + A_1 e^{-k_1 z}\cos\mu_1 x + A_2 e^{-k_2 z}\cos\mu_2 x + \dots \quad \dots \dots (7)$$

an, und befriedigt Bedingungen (2) und (3), da für $x = l$ nur $t = t_0$ übrig bleibt.

Damit die Lösung auch der Bedingung (1) entspreche, muß endlich versucht werden, die Beiwerte so zu bestimmen, daß für $z = 0$, für alle x identisch $t = 0$ werde, d. h. wenn die μ eingesetzt werden,

$$A_0 \cos\frac{\pi}{2}\frac{x}{l} + A_1 \cos 3\frac{\pi}{2}\frac{x}{l} + \dots A_n \cos\frac{2n+1}{2}\pi\frac{x}{l} + \dots \equiv -t_0 \quad \dots \dots (8)$$

sei. Diese Bedingung kann aber nach dem Theorem von **Fourier** stets erfüllt werden.

Um A_n zu bestimmen, vermehrt man die Gleichung bekanntlich mit $\cos\frac{2n+1}{2}\pi\frac{x}{l}\,dx$ und integriert sie von 0 bis l. Dies liefert

$$A_n = \frac{4t_0}{(2n+1)\pi}(-1)^{n+1} \quad \dots \dots \dots (9)$$

und daher wird endgültig

$$t = t_0\left(1 - \frac{4}{\pi}\left[e^{-k_0 z}\cos\mu_0 x - \frac{1}{3}e^{-k_1 z}\cos\mu_1 x + \frac{1}{5}e^{-k_2 z}\cos\mu_2 x - \dots\right]\right) \quad \dots (10)$$

worin μ und k den Gl. (5), (6) entsprechen, d. h.

$$\mu_n = \frac{(2n+1)}{2}\frac{\pi}{l}, \qquad k_n = \frac{a^2(2n+1)^2}{4}\frac{\pi^2}{l^2} \quad \dots \dots \dots (11)$$

ist, woraus folgt, daß man aus einer Lösung beliebige viele andere ableiten kann. Es sei nämlich der Verlauf von t für eine bestimmte Zeit z graphisch dargestellt. Für eine Wand von der Dicke l' betrachten wir alsdann bei gleichem t_0 den Temperaturwert an der Stelle

$$x' = \frac{l'}{l}x \quad \text{und für die Zeit} \quad z' = \left(\frac{l'}{l}\right)^2 z \quad \dots \dots \dots (12)$$

Das n-te Glied der Reihenentwicklung wird als Exponent von e den Wert

$$k_n' z' = -\frac{a^2(2n+1)}{4}\frac{\pi^2}{l'^2}\left(\frac{l'}{l}\right)^2 z = -k_n z$$

und als den Winkel des Kosinus

$$\mu' x' = \frac{2n+1}{2}\frac{\pi}{l}\frac{l'}{l}x = \mu x$$

aufweisen, d. h. identisch sein mit der Temperatur der Wand von der Dicke l für x, z.

In gleichen Teilpunkten der Wanddicke sind die Temperaturen zu Zeiten, die sich wie die Quadrate der Wandstärken verhalten, gleich. Oder kürzer: **in einer doppelt so dicken Wand braucht die Wärmeströmung viermal soviel Zeit, um den gleichen Temperaturverlauf hervorzubringen.**

Nimmt a auf das Doppelte zu, so wird bei gleicher Wandstärke die gleiche Temperatur in einem Viertel der Zeit erreicht wie sonst.

Zahlenbeispiel.

Für Gußeisen wählen wir $\lambda = 0{,}00013$ in kcal/cm/sek, $\gamma = 0{,}0072$ kg/cm³, $c = 0{,}13$ kcal/kg; für Flußeisen sei $\lambda = 0{,}000155$, $\gamma = 0{,}0078$, $c = 0{,}114$. Alsdann ergeben sich bei 300° Anfangstemperatur der Endfläche die in Abb. 1033 aufgezeichneten Temperaturlinien bei den jeweilig angeschriebenen Zeiten. Die ausgeschriebenen Zahlen beziehen sich auf Gußeisen und 5 cm Wanddicke; die eingeklammerten auf Flußeisen und 10 cm Wanddicke. Im Anfange, solange der Wärmestrom die Endfläche „nicht erreicht" hat, d. h. keine **merkliche** Temperaturerhöhung hervorrief (denn eine unendlich kleine ist vom ersten Augenblick an vorhanden) verlaufen die Schaulinien genau so wie bei der Fortpflanzung in einer unendlich ausgedehnten Wand, wie man durch Vergleich mit Abb. 1032 feststellen kann[1]). Sobald die

[1]) Ein Beweis für die Genauigkeit der von Ing. **Fehr** durchgeführten Rechnung.

Zeit größere Beträge erreicht, nehmen die Exponentialgrößen rasch ab, und die Temperaturlinie nähert sich der Form des reinen Kosinus. Beispielsweise ist das Verhältnis des Beiwertes von $\cos \mu_0 x$ zu dem von $\cos \mu_1 x$

$$= 3 e^{\frac{2 a^2 \pi^2}{l^2} z}$$

und dieses wird bei $z = 73$ sek schon etwa 23, bei $z = 110$ sek schon etwa 64, also ist nach Verlauf dieser Zeiten in der Hauptsache das erste Glied maßgebend, d. h. man kann

$$t = t_0 \left(1 - \frac{4}{\pi} e^{\frac{-a^2 \pi^2}{4 l^2} z} \cos \frac{\pi}{2} \frac{x}{l}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (13)$$

setzen. Die mittlere Temperatur der Wand zur Zeit z ergibt sich dann, wenn man abkürzend

$$\frac{\pi^2 a^2}{4 l^2} = f^2 \text{ setzt, zu } \quad t_m = t_0 \left[1 - \frac{8}{\pi^2} e^{-f^2 z}\right] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (14)$$

d) Einführung eines Oberflächenwiderstandes.

Befindet sich die übertragende Fläche im Abstand $x = 0$, die undurchdringliche Fläche im Abstande l, so strömt zur Zeit t durch die innerste Wandschicht die Wärme $Q = \alpha (t_0 - t)$ ein. Da dort ein Gefälle von $-\partial t / \partial x$ vorhanden ist, muß Q auch $= -\lambda \partial t / \partial x$ sein. Es ist also die allgemeine Gleichung

$$\frac{\partial t}{\partial z} = a^2 \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (15)$$

unter der Nebenbedingung zu integrieren, daß für $x = 0$ ständig

$$-\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_{x=0} = \alpha (t_0 - t) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (16)$$

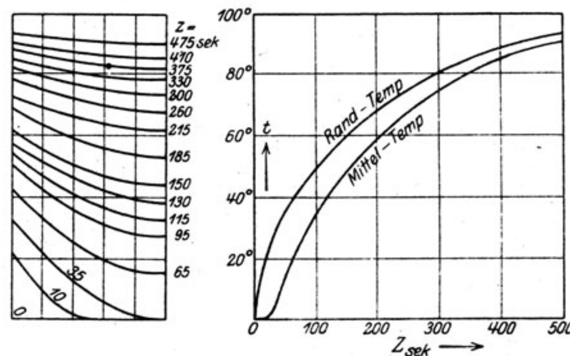


Abb. 1034. Strömung in die ebene Wand bei Oberflächenwiderstand.

sei. Die Schwierigkeit der Rechnung wurde umgangen, indem man eine mittlere der Schaulinien in Abb. 1034 nach Schätzung so wählte, daß einmal Gl. (16) erfüllt, und daß bei $x = l$ die Tangente wagerecht ist. Aus Gl. (15) wurde $\partial^2 t / \partial x^2$ ermittelt und für eine kleine Zeitdauer Δz der Zuwachs mittels Formel

$$\Delta t = a^2 \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \Delta z \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (17)$$

berechnet, dessen Auftragung die neue Temperaturlinie ergibt. Die Anfangsannahme wurde so lange abgeändert, bis die neue Temperaturlinie die angeführten Bedingungen erfüllt. Aus der durch Wiederholung gewonnenen Linienschar ermittelte man die mittlere Wandtemperatur, die im Seitenriß der Abb. 1034 für eine Dicke von 5 cm mit $\alpha = 1000 \frac{\text{kcal}}{\text{m, qm, st}^0\text{C}}$ als Abhängige der Zeit dargestellt ist.

e) Wärmestrom in das Innere einer Welle vom Mantel aus.

Bei einer theoretisch unendlich langen Welle können wir annehmen, daß der Wärmezustand nur vom Halbmesser r und nicht vom Zylinderwinkel φ abhängt. Schneiden wir durch zwei unter $d\varphi$ geneigten axialen Ebenen und zwei Zylinder von den Halbmessern r und $r' = r + dr$ ein Element mit der Dicke b heraus, so strömt im Zeitelement dz durch die innere Begrenzungsfläche die Wärmemenge $-\lambda r \, d\varphi \, b \, (\partial t / \partial r) \, dz$ hinein, durch die äußere Zylinderfläche $\lambda r' \, d\varphi \, b \, (\partial t' / \partial r') \, dz$ heraus und der Unterschied

dient zur Temperaturerhöhung des Elementes, d. h. er ist $= r\,d\varphi\,dr\,b\gamma c\,(\partial t/\partial z)\,dz$. **Hieraus ergibt sich** die Differentialgleichung

$$\frac{\partial t}{\partial z} = \frac{a^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial t}{\partial r}\right) \quad \ldots (18) \qquad \text{mit} \qquad a^2 = \frac{\lambda}{\gamma c} \quad \ldots (18\text{a})$$

Im **Beharrungszustand** wird für den Hohlzylinder mit den Halbmessern r_1 und r_2; $\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial t}{\partial r}\right) = 0$ oder $t = \alpha \lg r + \beta$ und da an den Grenzen $t_1 = \alpha \lg r_1 + \beta$; $t_2 = \alpha \lg r_2 + \beta$ ist, so wird $\alpha = \frac{t_1 - t_2}{\lg r_1/r_2}$; $\beta = \frac{t_1 \lg r_2 - t_2 \lg r_1}{\lg r_2 - \lg r_1}$. Die sekundlich durchströmende Wärmemenge ist

$$Q = -2\pi r b \frac{\partial t}{\partial r} = -2\pi r b \lambda \alpha \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (19)$$

Anwärmung einer massiven Welle.

In Abb. 1035 ist der Temperaturverlauf als Integral von Gl. (18) bei unveränderlicher Manteltemperatur[1]) für verschiedene Zeiten dargestellt. Zur Zeit $z = 0$ wurde die Temperatur im Zylinder überall $= 0$ vorausgesetzt. Als Abszisse ist die Größe z/r^2 gewählt, wodurch die Schaulinien für jede Größe des Halbmessers r (in cm) benutzbar werden. In Abb. 1036 ist die jeweilige mittlere Zylindertemperatur durch graphische Integration bestimmt worden, die sich, wie angeschrieben, durch ein einfaches Potenzgesetz gut wiedergeben läßt.

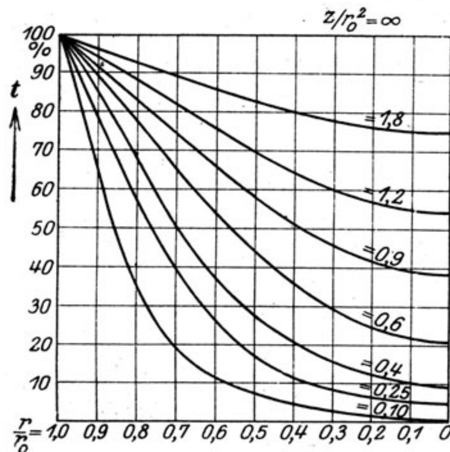


Abb. 1035. Temperaturverlauf innerhalb einer Welle.

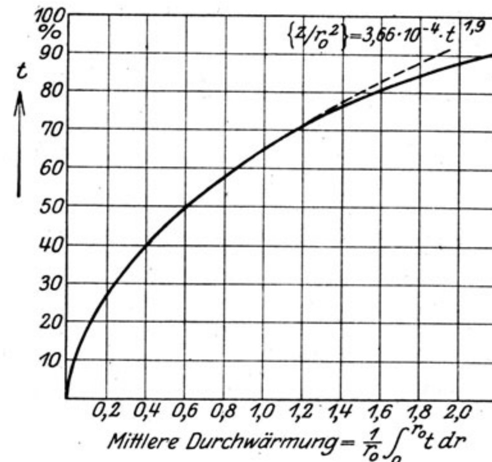


Abb. 1036. Mittlere Durchwärmung einer Welle.

Wir entnehmen der Abbildung **die Zeitdauer, die erforderlich ist, um die Mitteltemperatur der Welle vom kalten Zustand aus auf 80 v. H. der Dampftemperatur zu erhöhen,** und finden

$$Z = 1{,}6\,r_{cm}^2 = 0{,}4\,D_{cm}^2 \text{ sek}.$$

Unter D wird man zweckmäßig den Außendurchmesser der Scheibennaben, die die Welle trägt, verstehen. Da im übrigen wegen der Scheibendicken nicht die ganze Nabenlänge gleich stark Wärme zuführt, dürfte sich empfehlen, die Zeitdauer höher, z. B. auf

$$Z_{sek} = 0{,}5\,D_{cm}^2 \quad \text{oder in Minuten} \quad Z_{min} \cong \left(\frac{D_{cm}}{11}\right)^2 \quad \ldots \ldots \ldots (19)$$

anzusetzen. Danach wäre für eine Welle von 44 cm Durchmesser eine Zeit von 16 Minuten erforderlich, um 80 v. H. der Dampftemperatur zu erreichen. Mit Rücksicht auf die großen inneren Spannungen, die während des Anwärmens auftreten und bei irgendwie unsymmetrischer Temperaturverteilung die Welle krummziehen könnten, wie auch darauf, daß man anfänglich mit kleinerer Spannung, also niedriger Temperatur vorwärmt, wird man die praktisch aufzuwendende Zeitdauer besser etwa auf das Doppelte der theoretischen ansetzen.

f) Temperaturverlauf in den Laufscheiben und Zwischenböden während des Anwärmens.

Beim Eindringen der Wärme in die Laufscheiben und Zwischenböden ist das Temperaturgefälle quer zur Scheibe (d. h. in der Richtung der Achse betrachtet) um so viel

[1]) Diese vollständige Lösung mittels Zylinderfunktionen verdanke ich Herrn Ing. Ackeret.

größer, als dasjenige in Richtung des Halbmessers, daß man für die erste Zeitepoche des Anwärmens von dem Wärmestrom in radialer Richtung vollkommen absehen kann. Als Verlauf der Temperatur darf daher an jeder Stelle Schaubild 1033 oder 1034 mit der erforderlichen Umrechnung auf die dort vorhandene Dicke gelten. Die plötzliche Ausdehnung in radialer Richtung hat in früheren Zeiten bei den Zwischenböden zu schweren Schädigungen, sogar Sprengen von Gehäusen geführt. Es ist daher, wie in Abschn. 98 dargetan, in radialer Hinsicht unbedingt volle Freiheit zu gewähren. Auch dann können Fälle eintreten, wo die Ungleichheit der Erwärmung am Innen- und Außenrand ein Ausbeulen (Knicken) hervorruft. Dies gilt in gleicher Weise für die Scheiben, wo naturgemäß beim Anwärmen der Rand heiß wird, die Nabe kalt bleibt.

Der Temperaturverlauf im **Beharrungszustande** wird mittels folgender Annäherung bestimmt. Es bedeute

x den Halbmesser,
F „ Querschnitt $2\pi x h$, wo h = die Scheibendicke,
λ die Wärmeleitzahl,
α „ Oberflächenleitzahl,
$dO = 4\pi x dx$ die auf dx entfallende Oberfläche,
t_d die überall gleiche Dampftemperatur,
t „ Scheibentemperatur bei x,
z „ Zeit.

Durch den Querschnitt F bei x geht die Wärme $-\lambda F \partial t/\partial x$ in das Element dx hinein; durch F' bei $x' = x + dx$ strömt $+\lambda F' \partial t'/\partial x$ ab; durch die Oberfläche dO strömt die Menge $\alpha dO(t_d - t)$ in das Element ein. Die Summe dieser Wärmen muß im Beharrungszustand verschwinden, und man erhält die Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(F\frac{\partial t}{\partial x}\right) + \frac{\alpha}{\lambda}\frac{dO}{dx}(t_d - t) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

Wichtig ist insbesondere das Abströmen der Wärme aus der Nabe in die Welle hinein. Hierüber verschafft man sich Aufschluß durch die Näherungsannahme

$$F = a x^{-n} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

d. h. indem man den Meridianschnitt in der Nähe der Nabe durch ein hyperbolisches Profil ersetzt. Wenn ferner versuchsweise der Ansatz

$$\tau = t - t_d = C x^m \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

benutzt wird, so ergibt (1)

$$m(m - n - 1)\, a x^{m-n-2} = \frac{\alpha}{\lambda}\frac{dO}{dx} x^m \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

Diese Gleichung ermöglicht eine Lösung, falls man die Annahme

$$\frac{\alpha}{\lambda}\frac{dO}{dx} = b x^p \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (5)$$

macht, was bei der Unbestimmtheit der Zahl α zulässig sein dürfte, um so mehr, als sich später erweisen wird, daß nur kleine Bereiche von x jeweils in Frage kommen. Dann folgt

$$p = -(n+2) \quad \ldots \ldots (6) \qquad m^2 - (n+1)m - \frac{b}{a} = 0 \quad \ldots \ldots (7)$$

Durch Auflösung erhält man

$$\left.\begin{matrix} m_1 \\ m_2 \end{matrix}\right\} = \frac{n+1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 + \frac{b}{a}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (8)$$

Daher ist das allgemeine Integral

$$\tau = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (9)$$

Ist bei $x = x_1$; $\tau = \tau_0$ und am Umfang bei $x = x_2$; $\tau = 0$, d. h. hat die Scheibe außen die Dampftemperatur angenommen und wird durch die Welle Wärme zugeführt, so folgt nach Bestimmung von $c_1 c_2$:

$$\tau = \tau_0 \frac{x^{m_2} x_2^{m_1} - x^{m_1} x_2^{m_2}}{x_1^{m_2} x_2^{m_1} - x_1^{m_1} x_2^{m_2}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (10)$$

Wird Wärme durch die Nabe abgeleitet, so ist τ_0 negativ. Ist nun x_2 groß gegen

x_1, so wächst das Glied x^{m_1} wegen des großen positiven m_1 sehr stark und man überzeugt sich durch Zahlenbeispiele, daß dann der Ansatz $\tau = A_2 x^{m_2}$ genügt, aus dem mit $\tau_0 = A_2 x_1^{m_2}$ die Form

$$\tau = \tau_0 \left(\frac{x}{x_1}\right)^{m_2} = \tau_0 \left(\frac{x_1}{x}\right)^{-m_2} \quad \dots \dots (11)$$

folgt. Wenn umgekehrt die Wärme in die Scheibe vom Kranz aus eingeführt wird, so daß für $x = x_2$ $\tau = \tau_2$ und für $x = x_1$, $\tau = 0$ ist, so genügt $\tau = A_1 x^{m_1}$ oder mit $\tau_2 = A_1 x_2^{m_1}$

$$\tau = \tau_2 \left(\frac{x}{x_2}\right)^{m_1} \quad \dots \dots (12)$$

Auch τ_2 wird für den Fall einer Abkühlung negativ.

Die Wurzeln $m_1 m_2$ unterscheiden sich im Absolutbetrag nur unbedeutend und man kann für die Zwecke einer Übersicht

$$m_1 \simeq -m_2 \simeq \sqrt{\frac{b}{a}}\,.$$

setzen, so daß mit

$$b \simeq \frac{\alpha}{\lambda}\frac{dO}{dx} x_1^{n+2} = \frac{\alpha 4 \pi x_1}{\lambda} x_1^{n+2} \quad \dots (13) \qquad a \simeq F_1 x_1^n = 2\pi x_1^{n+1} h_1 \quad \dots (14)$$

wobei h_1 die Nabenlänge bedeutet, die Ausdrücke

$$m_1 \simeq -m_2 \simeq x_1 \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda h_1}} \quad \dots \dots (15)$$

entstehen. Damit wird die von der Nabe in die Welle übergehende Wärme in der Zeiteinheit

$$Q = +\lambda F_1 \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_{x_1} = -F_1 \tau_0 \sqrt{\frac{2\alpha\lambda}{h_1}} \quad \dots \dots (16)$$

Wenn man die Nabe in das hyperbolische Profil einbegreift, so daß h_1 deren Länge bedeutet, so stellt

$$q = \frac{Q}{h_1} = -2\pi x_1 \tau_0 \sqrt{\frac{2\alpha\lambda}{h_1}} \quad \dots \dots (17)$$

die auf die Einheit der Länge in der Zeiteinheit in die Welle eindringende Wärme dar.

In (17) ist τ_0 unbekannt und kann nur im Zusammenhang mit dem Wärmefluß in der Welle wie folgt ermittelt werden.

g) Wärmestrom längs der Welle im Beharrungszustand.

Es bedeute

l den Abstand eines Wellenquerschnittes von einem angenommenen Anfangspunkt.
$F_0 = \pi r^2$ den als unveränderlich angesehenen Wellenquerschnitt.

Für das Wellenstück dx gilt in der Beharrung

$$-\lambda F \frac{\partial t}{\partial l} + \lambda F \frac{\partial t'}{\partial l} + q\,dl = 0 \qquad \text{oder} \qquad \lambda F \frac{\partial^2 t}{\partial l^2} + q = 0 \quad \dots (18)$$

Die Dampftemperatur ist als Funktion von l graphisch aufzuzeichnen; an der Stelle l ist τ_0 in q Gl. (17) allgemein durch $t - t_d$ zu ersetzen, so daß

$$q = +2\pi r \sqrt{\frac{2\alpha\lambda}{h_1}} \cdot (t_d - t) \quad \dots \dots (19)$$

wird. In Gl. (19) eingesetzt und die Bezeichnung

$$k^2 = \frac{2\pi r}{\lambda F}\sqrt{\frac{2\alpha\lambda}{h_1}} \quad \dots \dots (20)$$

eingeführt, entsteht

$$\frac{\partial^2 t}{\partial l^2} = k^2 (t - t_d) \quad \dots \dots (21)$$

Diese Gleichung kann, wenn man für k^2, da wo die Welle vom Dampf berührt wird, oder wo sie in freier Luft umläuft, entsprechende Werte einführt, graphisch integriert werden.

Beispiel. Zur Veranschaulichung wählen wir für die Dampftemperatur den besonders einfachen Verlauf

$$t_d = a(1 + \cos\beta x) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (22)$$

zwischen den Grenzen $x = -l$ bis $x = +l$ mit $\beta l = \pi$, so daß an den Enden der Welle $t_d = 0$ wird. Ein partikuläres Integral von 21 ist

$$t = b\cos\beta x + c \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (23)$$

und zwar findet man nach dem Einsetzen

$$b = \frac{k^2}{k^2 + \beta^2} a; \quad c = a \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (24)$$

Der Unterschied zwischen Dampf- und Wellentemperatur in der Mitte, d. h. für $x = 0$, ist dann

$$(t_d - t)_{x=0} = 2a - \left(1 + \frac{k^2}{k^2 + \beta^2}\right) a \simeq t_{d0} \frac{\beta^2}{2k^2} \quad \ldots \ldots \quad (25)$$

Wählt man nun etwa die Verhältnisse $l/r = 10$; $l/h_1 \simeq 13$; $2\alpha/\lambda = 2000/56$, so erhält man

$$\frac{\beta^2}{k^2} = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \frac{r}{2} \sqrt{\frac{h_1 \lambda}{2\alpha}} = \frac{0{,}023}{\sqrt{l}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (26)$$

Da bei größeren Einheiten $l > 1$ m sein wird, so ist der Unterschied zwischen Dampf- und Wellentemperatur bei Beharrungszustand im allgemeinen kleiner als 1 v. H. der ersteren. Selbst bei dem niederen Wert $\alpha = 100$ erreicht der Unterschied nur etwa 3 v. H.

Die im Beispiel zwischen 0 und $l/2$ vom heißen Dampf an die Welle abgegebene Wärme wird dieser zwischen $l/_2$ und l wieder vom kalten Dampf entzogen. Am Wellenende findet kein Wärmeaustausch statt.

h) Wärmeströmung durch das Gehäuse.

Der Unterschied zwischen Dampf- und Gehäusetemperatur wird aus gleichen Gründen wie unter g) ein vernachlässigbar kleiner sein. Ist die Dampftemperatur als abhängige der Länge

$$t = \varphi(x)$$

gegeben, so findet man wie oben als die auf die Längeneinheit in der Zeiteinheit vom Dampfe an das Gehäuse abgegebene Wärme den Ausdruck

$$Q = -\lambda \frac{d}{dx}\left(F \frac{dt}{dx}\right),$$

wo F den Querschnitt der leitenden Masse bedeutet. Bei größeren Einheiten ist der Einfluß dieser Wärmeableitung auf die Zustandsänderung des Dampfes unmerklich klein.

i) Strahlungs- und Leitungsverluste.

Bei guter Einhüllung wird der durch Strahlung und Leitung an die Umgebung abgegebene Wärmebetrag im allgemeinen eine geringfügige Korrektur bilden. Im Leerlauf wird der Verlust prozentuell größer, allein absolut fällt er wegen allseitig herabgesetzter Temperatur niedriger aus. Genauere Schätzungen können auf Grund der Arbeiten von Eberle[1]) gemacht werden. Bedeutet

F die äußere Oberfläche der metallischen (Gehäuse- oder Rohr-)Wand (in qm), die den Dampf umschließt,

t_d die Dampftemperatur in ^{0} C; t_l die Lufttemperatur in ^{0} C,

so ist die in der Stunde durch Leitung und Strahlung abgegebene Wärme

$$Q_{st} = KF(t_d - t_l),$$

worin die Erfahrungszahl K nach Eberle folgende Werte erhält:

---

[1]) Mitteil. üb. Forschungsarb. 1909, Heft 78.

Dampf-temperatur	K für gesättigten Dampf				
	Nackte Oberfläche	Mit Wärmeschutzmasse umhüllte Oberfläche I.		II.	
		Rohrflansche frei	Rohrflansche umhüllt	Rohrflansche frei	Rohrflansche umhüllt
100	11,8	3,1	2,3	2,7	1,9
200	15,8	3,4	2,3	2,7	1,9

K für überhitzten Dampf.

Dampf-temperatur	Nackte Oberfläche	Umhüllte Oberfläche Rohrflansche frei	Rohrflansche umhüllt
100	11,6	2,7	2,1
250	17,1	3,8	2,8
400	22,6	5,0	3,5

Die Gesamtdicke der Umhüllung betrug bei I 60 mm, bei II 45 mm; dieselbe bestand bei I aus einer porösen gebrannten Masse mit $\gamma = 0,3-0,35$, bei II aus 10 mm Asbest, 15 mm Kieselgur, 15 mm Seidenpolster, darüber Wellpappe und Nessel. Wie ersichtlich, ist der Unterschied der Wärmeleitung trotz so großer Unterschiede in der Beschaffenheit der Isolierung nicht bedeutend.

Für die erstgenannte Umhüllung ermittelte Eberle die Ziffern des inneren und des Oberflächenleitungsvermögens.

α_1 die Oberflächenübergangszahl von Dampf an die Wand, für gesättigten Dampf praktisch $=\infty$, ergab sich für überhitzten Dampf bei 10 m/sek Geschwindigkeit $\simeq 75$ kcal; bei 30 m/sek Geschwindigkeit $\simeq 166$ kcal für 1° C qm/st;

λ die Wärmeleitungszahl der Isolierung ergab sich bei rd. 60° mittlerer Temperatur (80° Temperaturunterschied in der Isolierungsschicht) $= 0,09$; bei 180° mittlerer Temperatur (320° Temperaturunterschied) $= 0,16$ kcal für 1° C m/qm/st;

α_2 die Übergangszahl von der Umhüllung an die Luft, war bei 14° Temperaturunterschied zwischen der Außenfläche der Umhüllung und der Luft $= 5,7$; bei 68° Unterschied $= 8,1$ kcal für 1° C m/qm/st.

Die gesamte Wärmeleitzahl für ebene Flächen ist zu rechnen nach Formel

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{e}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

199. Wellenbeanspruchung beim Kurzschluß von Wechselstromerzeugern.

Beim Kurzschluß von Wechselstromerzeugern treten ungewöhnlich hohe, über das Zehnfache des Normalen steigende Beanspruchungen auf, die zwar nur kurze Zeit, 1 bis 1,5 Sekunden dauern, indes schwere Schädigungen, wie Biegung von Spulenköpfen, Abscheren der Kupplungskeile u. a. hervorrufen können. Abb. 1037 zeigt[1]) den Verlauf des Kurzschlußstromes J_k an einem Dreiphasenstromerzeuger von 8800 kVA mit 3000 Uml/min. Der „Dauerstrom" J_d wird erst nach mehreren Sekunden erreicht. Der gleichen Quelle ist die nachfolgende Zahlentafel entnommen.

Drehzahl	3000	1500	1000	125
Gesamte Impedanz (Rotor und Stator) für plötzlichen Kurzschluß . . . . in v. H.	9—18	10—15	15—22	22—30
Verhältnis des größten Kurzschlußstromes zum Vollaststrom (Scheitel)	10—20	12—18	8—12	6—8
Verhältnis des Dauerstromes zum Vollaststrom (effekt.) . . . { norm. Erreg.	1,5	1,6	2,7	2,7
{ max.	1,7	1,8	3.2	3,2

[1]) Nach B.B.C. Mitteil. 1920, S. 32.

Abb. 1038 stellt nach **Linke**[1]) das Oszillogramm für den Hauptstrom (a) und den Erregerstrom (b) (letzterer von der oberen Abszissenachse aus zu rechnen) nach einem Kurzschluß dar. Der Hauptstrom steigt bis auf das 32fache des Normalstromes. Da eine Phasenverschiebung mit $\cos\varphi \sim 0{,}3$ vorhanden ist, so ist die aufgenommene Leistung, also im ersten Augenblick auch das widerstehende Kraftmoment rd. das 10fache des normalen Wertes.

Die Beanspruchung der Welle hängt davon ab, ob die Periode der Wechselzahl, der Periode der Eigenschwingung der Welle nahekommt, und kann wie folgt abgeschätzt werden.

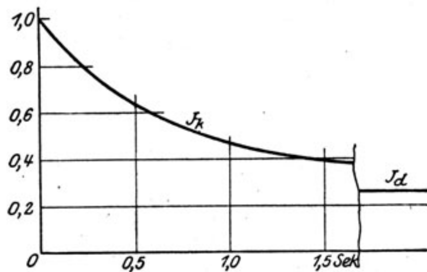


Abb. 1037. Abklingen des Kurzschlußstromes.

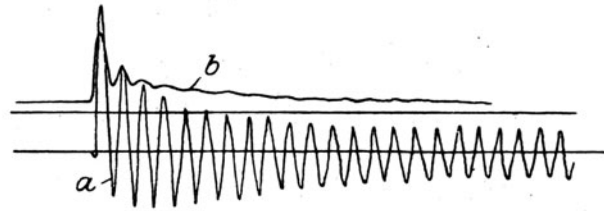


Abb. 1038. Oszillogramm des Haupt- (a) und des Erreger- (b) Stromes.

Es bedeute

n_1 die sekundl. Periodenzahl des Wechselstromes,
$2\pi n_1 = \omega_e$ die elektrische Winkelgeschwindigkeit,
Θ_0 das Trägheitsmoment des Stromerzeugerankers,
Θ das gesamte Trägheitsmoment der Turbinenmassen, die man in einem Punkt im Abstand L vom Anker konzentriert denkt,
$M = M_0 \cos\omega_e t$ das periodische Kraftmoment der elektrischen Kräfte,
$\varphi_1 \varphi_2$ die Drehwinkel der Turbine und des Ankers,
$J_p G$ Polares Moment der Welle und Schubzahl.

Infolge der Größe von M darf man das treibende Moment der Dampfkraft und den festen Mittelwert des elektrischen Momentes vernachlässigen. Die Wellenverdrehung ist $\varphi_1 - \varphi_2$; sie erzeugt ein Drehmoment

$$M_t = \frac{J_p G}{L}(\varphi_1 - \varphi_2) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

Die Bewegungsgleichungen der Turbine und des Ankers sind

$$\Theta\ddot{\varphi}_1 = -M_t \quad \ldots \ldots (2) \qquad \Theta_0\ddot{\varphi}_2 = +M_t - M \quad \ldots \ldots (3)$$

Wir teilen mit Θ bzw. mit Θ_0, ziehen (3) von (2) ab und erhalten

$$\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2 = -\frac{J_p G}{L}\left(\frac{1}{\Theta} + \frac{1}{\Theta_0}\right)(\varphi_1 - \varphi_2) - \frac{M_0}{\Theta_0}\cos\omega_e t \quad \ldots \ldots (4)$$

Der Beiwert von $\varphi_1 - \varphi_2$ ist nichts anderes als die Frequenz $(2\pi N)^2$ der Eigenschwingung der Turbinen- und Ankermasse, und werde mit ε^2 bezeichnet. Mit den Abkürzungen $\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi$; $M_0/\Theta_0 = a$ erhält man

$$\ddot{\varphi} = -\varepsilon^2\varphi - a\cos\omega_e t \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (5)$$

Wir wollen die Annäherung einführen, daß M_0 unveränderlich ist, dafür aber nur eine begrenzte Zeit lang wirkt. Dann erhält man die Weite A der erzwungenen Schwingung in

$$\varphi_e = A\cos\omega_e t \text{ durch Einsetzen als } A = \frac{a}{\varepsilon^2 - \omega^2} \quad \ldots \ldots (6)$$

Das vollständige Integral von (5) ist

$$\varphi = A\cos\omega_e t + B\cos\varepsilon t + C\sin\varepsilon t \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (7)$$

[1]) Schaltvorgänge, Arch. f. Elektrot. 1912, 1. Bd., 2. Heft.

wobei B, C aus den Anfangsbedingungen $\varphi = o$ $\dot\varphi = o$ für $t = o$ bestimmt werden (d. h. man vernachlässigt die unmerklich kleine Schwingung des Beharrungszustandes). Man findet

$$\varphi = A(\cos\omega_e t - \cos\varepsilon t) \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

der mögliche Höchstwert entsteht, wenn $\cos\omega_e t = 1$; $\cos\varepsilon t = -1$,

$$\varphi_{\max} = 2A = \frac{2M_0}{\Theta_0(\varepsilon^2 - \omega^2)} \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

woraus nach (1) das Moment und die Beanspruchung folgen.

Die größte Gefahr würde bei der Resonanz $\varepsilon = \omega$ auftreten, wobei jedoch (von jeder Reibung abgesehen) $\varphi_{\max}$ nicht einfach $= \infty$ gesetzt werden darf, da **die Zeit für das Ausbilden großer Auslenkungen zunächst mangelt.** Ist $\varepsilon = \omega$, so muß als Form der erzwungenen Schwingung

$$\varphi_e = A_0 t \sin\omega t \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

angesetzt werden, die, wie man durch Einsetzen feststellt, Gl. (5) befriedigt und den Beiwert

$$A_0 = \frac{M_0}{2\omega_e\Theta_0} \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

liefert. Die Eigenschwingung würde wieder die Glieder $B\cos\varepsilon t + C\sin\varepsilon t$ hinzufügen. Aus den gleichen Anfangsbedingungen wie oben folgt aber $B = o$; $C = o$, so daß (10) die ganze Lösung ausmacht. Die Schwingungsweite wächst also im geraden Verhältnis mit der Zeit. Für den Verlauf der Abb. 1037 wird man schätzen dürfen, daß bei festgehaltenem Höchstwert die Wirkung des Stromes während etwa 0,7 bis 1 sek „äquivalent" ist der Wirkung des allmählich abnehmenden Stromes. Nennt man diese Zeit allgemein t_0, so wird die größte Wellenverdrehung

$$\varphi_{\max} = \frac{M_0 t_0}{2\omega_e\Theta_0} \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

In Abschn. 101 haben wir die Größen der Trägheitsmomente für einige ausgeführte Turbinen zusammengestellt. Man überzeugt sich, daß **der Fall der Resonanz praktisch kaum vorkommen wird.** Es ist gut, daß dem so ist, denn sonst wäre die Beanspruchung in der Tat eine katastrophale.

XI. Die Gasturbine.

Einleitung.

Der Arbeitsprozeß, der sich für die Gasturbine als naturgemäß von selbst darbietet, ist der folgende: Gas und Luft werden getrennt auf einen mehr oder weniger hohen Druck verdichtet, in einer Kammer bei unverminderter Pressung verbrannt und unmittelbar der Turbine zugeführt. Die Bauart der Turbine ist theoretisch gleichgültig; die Entspannung wird vorerst bis auf den Atmosphärendruck fortgesetzt. Dieser Prozeß entspricht dem wohlbekannten Zyklus von Brayton, von welchem die Theorie nachweist, daß er bei unveränderlichen spezifischen Wärmen denselben thermischen Wirkungsgrad besitzt wie der gewöhnliche Verpuffungsprozeß bei gleich hoher Verdichtung. Eine ideale Gasturbine dieser Art würde mithin ebenso wirtschaftlich sein wie der ideale Verpuffungsmotor bei der Ausdehnung auf den anfänglichen Rauminhalt. Nun könnte man, theoretisch genommen, auch beim Verpuffungsverfahren im Vier- oder Zweitakt die Ausdehnung bis auf den Atmosphärendruck fortsetzen; doch kommt diese „vollständige" Ausdehnung wegen der außerordentlichen großen Zylinderrauminhalte, also wegen übergroßer Herstellungskosten für den Gasmotor praktisch nicht in Betracht. Die Hoffnungen auf den Erfolg der Gasturbine gründen sich auf die Möglichkeit, diese vollständige Ausdehnung, die eine weit größere verfügbare Arbeit darbietet, auszunützen. Allerdings wissen wir, daß diese Arbeit heute nicht mit dem Wirkungsgrade des Kolbenmotors in effektive Leistung umgesetzt werden kann. Einerseits ist der Turbinenwirkungsgrad an sich kleiner als derjenige der Gasmaschine, andererseits muß mit einem größeren Aufwand für die Verdichtung der Ladung gerechnet werden, da der einzig in Betracht fallende Kreiselverdichter ungünstiger arbeitet als der Kolbenverdichter der Gasmaschine. Dazu kommt die gewaltige Schwierigkeit, daß, um überhaupt in Wettbewerb treten zu können, die Gasturbine mit so hohen Temperaturen am Ende der Ausdehnung arbeiten muß, daß entweder besondere Vorkehren getroffen werden müssen, um die Schaufeln vor dem Erglühen zu bewahren, oder dann der Übergang zu solchen (kostspieligen) Baustoffen nötig wird, die bei Glühhitze noch hinreichende Festigkeit besitzen und gegen Abnutzung widerstandsfähig sind. Allein es ist bekannt, daß auch der Großgasmotor mit bedeutenden Schwierigkeiten zu kämpfen hat, die aus den ungeheuren Kolbendrücken und den Wärmespannungen in den verwickelt gebauten Zylindergußstücken entspringen. Außerdem verfügt er über nur begrenzte Leistungsgrößen bei den heute ausführbaren Zylinderabmessungen. Daher wird nach wie vor von namhaften Maschinenbauanstalten an der Ausbildung der Gasturbine weiter gearbeitet. So wie sich die Dampfturbine, noch bevor sie im Dampfverbrauch der Kolbenmaschine überlegen war, durch ihre konstruktiven Vorzüge den Eintritt in die Industrie zu erzwingen verstanden hat, so würden die Aussichten einer zwar dem Gasmotor nachstehenden, aber konstruktiv einfacheren Gasturbine, wenn sie die Dampfturbine an Ökonomie auch nur wenig übertrifft, vorzügliche sein.

200. Theorie der Gasturbine für vollkommene Gase und unveränderliche spezifische Wärmen.

Die Theorie der Gasturbine wird ungemein durchsichtig, wenn wir die spezifischen Wärmen als unveränderlich annehmen, und weiter von der **Verschiedenheit der Zustandsgrößen** für die Ladung vor und nach der Verbrennung **absehen,** was darauf hinauskommt, daß man sich die Verbrennung unter dem Bilde der Zufuhr des Heizwertes in Form von

äußerer Wärme an eine abgeschlossene Luftmenge vorstellt. Man kann ferner annehmen daß diese Luftmenge immer von neuem verwendet wird, so daß der Energieumsatz den Gesetzen der Kreisprozesse folgt.

Es sei mit den im Abschn. 8 gegebenen Formeln eine Entropietafel entworfen, und man vergleiche darin zwei Kreisprozesse (Abb. 1039), deren Umrisse übereinstimmen, aber um eine gewisse Strecke wagerecht gegeneinander verschoben sind. Die gewonnene Arbeit,

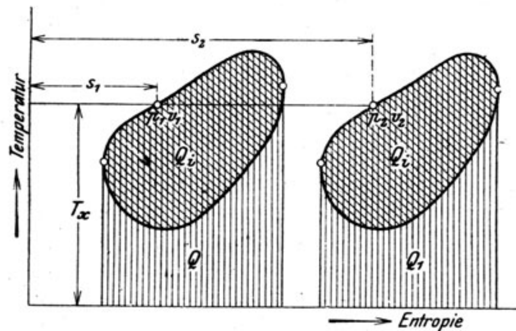


Abb. 1039. Gleichwertigkeit der Prozesse bei hohem und bei tiefem Druck.

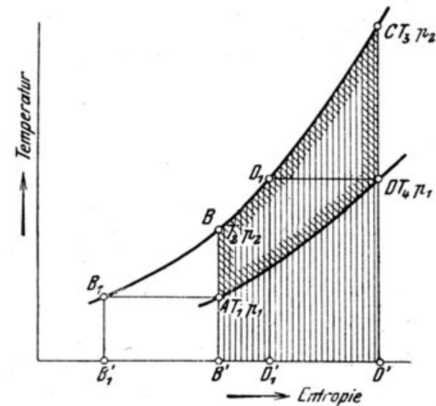


Abb. 1040. Gleichdruck-Gasturbine.

als Unterschied zwischen den zu- und abgeführten Wärmemengen, ebenso die zugeführte (d. h. aufgewendete) Wärmemenge, daher auch der Wirkungsgrad, sind die beiden gleich groß. Der Unterschied der Entropien für zwei entsprechende Punkte $p_1 v_1$; $p_2 v_2$ (für die insbesondere die Temperaturen gleich sind) wird durch den Ausdruck

$$s_2 - s_1 = AB \operatorname{lgn}\left(\frac{v_2}{v_1}\right) = AB \operatorname{lgn}\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \text{konst.}$$

dargestellt, daher ist auch

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{p_1}{p_2} = \text{konst.},$$

und aus der Umkehrung dieser Bezeichnung folgt:

Lassen wir einen Kreisprozeß durchführen, dessen Pressungen, verglichen mit einem gegebenen Prozeß, bei gleichen Temperaturen gemessen, in einem festen Verhältnis verkleinert oder vergrößert worden sind, so wird der thermodynamische und thermische Wirkungsgrad nicht verändert.

Vom theoretischen Standpunkt aus können wir daher nach Belieben eine „Hochdruck"- oder eine „Niederdruck"- bzw. „Vakuum"-Turbine verwenden. Bei Gegenwart von Wasserdampf ist aber der Prozeß bei **tiefer Luftleere** praktisch nicht gleichwertig infolge des **Niederschlages des Dampfes oder Wiederverdampfung von Wasser**; es treten ähnliche Einflüsse auf wie bei der Kondensation. Wir beginnen mit der Behandlung des einfachsten Kreisprozesses.

a) Verbrennung bei unveränderlichem Druck und adiabatischer Verdichtung, ohne Wärmeaustausch.

Die adiabatische Verdichtung wird im Entropieschaubild 1040 durch Linie AB dargestellt. Die theoretische Verdichtungsarbeit (umfassend Ansaugen, Verdichten und Hinüberschieben in den Verbrennungsraum) ist für 1 kg Gas in kcal

$$AL_k = c_p (T_2 - T_1) \quad \ldots \quad (1)$$

Die bei unveränderlichem Druck von B nach C „zuzuführende" Wärme Q_1 (gleich dem Heizwert) für 1 kg Gas ist:

$$Q_1 = c_p (T_3 - T_2) \quad \ldots \quad (2)$$

Die für die Turbine „verfügbare Arbeit" ist nichts anderes als das adiabatische Wärmegefälle während der Ausdehnung von C nach D, d. h. der Unterschied der Wärmeinhalte in C und D

$$AL_t = c_p (T_3 - T_4) \quad \ldots \quad (3)$$

Das in D freigewordene Gas soll unserer Annahme gemäß in der „geschlossenen“ Maschine bei unveränderlichem Drucke auf den Anfangszustand A zurückgekühlt werden. Die hierbei abzuleitende Wärme ist

$$Q_2 = c_p\,(T_4 - T_1) \quad \text{(4)}$$

Bedeuten η_t, η_k die effektiven Wirkungsgrade der Turbine und des Kompressors, so ist die effektive Arbeit in mkg für 1 kg Gas

$$L_e = L_t\,\eta_t - \frac{1}{\eta_k}\,L_k \quad \text{(5)}$$

Die theoretisch mögliche Arbeit ist aber

$$L_0 = L_t - L_k \quad \text{oder} \quad = \frac{Q_1 - Q_2}{A} \quad \text{(6)}$$

Daher der „thermodynamische“ Wirkungsgrad (wie bei der Dampfturbine) $\eta = L_e : L_0$.

Für den Vergleich verschiedener Kreisprozesse kommt es indes nicht auf die relative, sondern auf die absolute Vollkommenheit des Prozesses an, daher wir vorzugsweise den Wärmenutzungsgrad (auch „wirtschaftlicher Wirkungsgrad“ genannt)

$$\eta_w = \frac{A\,L_e}{Q_1} \quad \text{(7)}$$

betrachten wollen. Für Zahlenrechnungen ist

$$p\,v^k = \text{konst.} \quad \text{(8)}$$

als Zustandsgleichung zwischen AB und CD einzuführen. Mit den gewählten Pressungen p_1, p_2 folgt dann

$$T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} ; \qquad T_4 = T_3 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \frac{T_1}{T_2} \quad \text{(9)}$$

und alle Größen können berechet werden.

Sofern die Turbine einstufig ist, wird die theoretische Ausflußgeschwindigkeit mittels Formel

$$A\,\frac{c_0^2}{2g} = c_p\,(T_3 - T_4) \quad \text{(10)}$$

bestimmt, und man kann die Abmessungen der Turbine nach den für Dampfturbinen gegebenen Regeln ermitteln.

Baumann[1]) verdanken wir die in Abb. 1041 wiedergegebene graphische Zusammenstellung des Wirkungsgrades η_w für verschiedene Verbrennungstemperaturen T_3 (in der Figur mit T_1 bezeichnet) und verschiedene Verdichtungsverhältnisse p_1/p_2 (in der Figur mit c bezeichnet) mit den Grundannahmen

$$c_p = 0{,}34, \qquad c_v = 0{,}17, \qquad \eta_t = \eta_k = 0{,}70.$$

Ist als Endtemperatur der adiabatischen Ausdehnung 500° C vorgeschrieben, so können hiernach Wirkungsgrade von bloß etwa 5 v. H. erreicht werden.

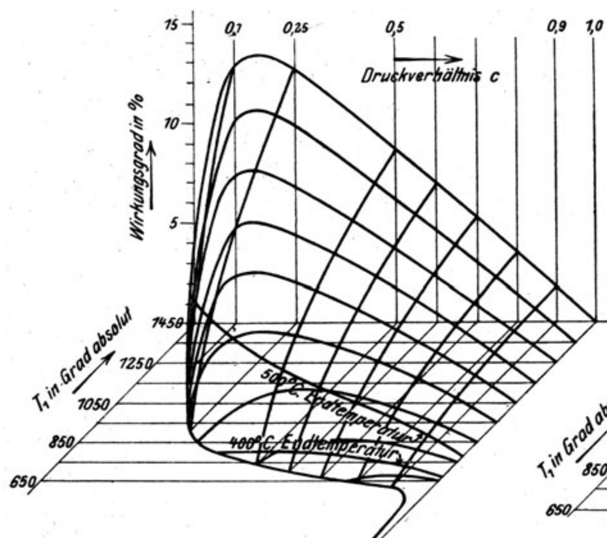


Abb. 1041. Wirkungsgrade der Gleichdruck-Gasturbine bei adiabatischer Verdichtung.

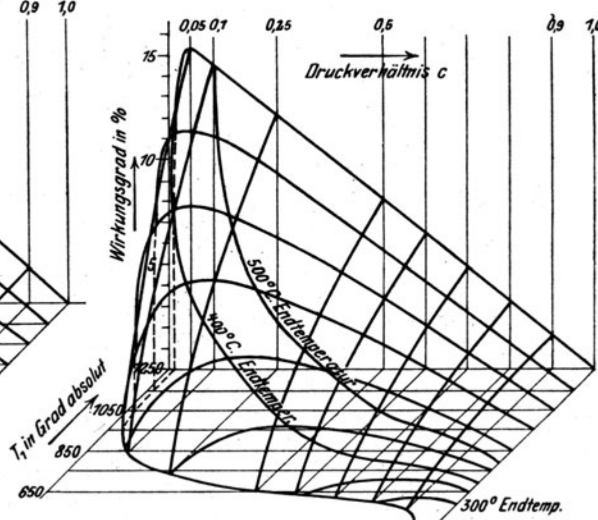


Abb. 1042. Wirkungsgrade der Gleichdruckturbine, bei isothermischer Verdichtung.

[1]) In seiner verdienstlichen Studie über Gasturbinen in der Zeitschr. f. d. ges. Turbinenwesen 1905, S. 375; 1906, S. 43f.

b) Isothermische Verdichtung ohne Abwärme-Austausch.

Der Kreisprozeß kann im Entropieschaubild durch den Linienzug $A B_1 C D A$ gemäß Abb. 1040 dargestellt werden.

Die Verdichtungsarbeit ist	$L_k = p_1 v_1 \lg n \left(\frac{p_2}{p_1}\right)$.
Die hierbei abzuleitende Wärme	$Q_k = A L_k$.
Während der Verbrennung wird entwickelt	$Q_1 = c_p (T_3 - T_1)$.
Die verfügbare Turbinenarbeit ist	$A L_t = c_p (T_3 - T_4)$.
In den Auspuffgasen enthalten	$Q_2' = c_p (T_4 - T_1)$.
Im ganzen abzuleiten	$Q_2 = Q_k + Q_2'$.

Obwohl hiernach eine größere Wärmemenge abzuleiten ist, erweist sich die effektive Arbeit $L_e = \eta_t L_t - L_k/\eta_k$ und der Wärmenutzungsgrad

$$\eta_w = \frac{A L_e}{Q_1}$$

besser als vorhin, was die ausschlaggebende Rolle der Verdichtungsarbeit dartut.

Baumann findet a. a. O. die in Abb. 1042 zusammengestellten Werte. Die Wärmeausnutzung könnte also unter gleichen Umständen wie oben nahezu 15 v. H. erreichen.

c) Isothermische Verdichtung mit Abwärme-Austausch (im „Regenerator").

Bei vollkommenem Wärmeaustausch kann die in den Abgasen enthaltene Wärme = Fläche $A D D' B'$ (Abb. 1040) an die frische Ladung, nachdem diese den Kompressor verlassen hat, übertragen und ihre Temperatur auf T_4 (Punkt D_1) erhöht werden. Die Verbrennungswärme ergibt eine weitere Temperatursteigerung gemäß Formel $Q_1 = c_p (T_3 - T_4)$.

Die verfügbare Turbinenarbeit ist

$$A L_t = c_p (T_3 - T_4) = Q_1 .$$

die gewonnene Abwärme

$$Q_2 = c_p (T_4 - T_1),$$

die effektive Leistung

$$L_e = \eta_t L_t - L_k/\eta_k,$$

der Gesamtwirkungsgrad

$$\eta_g = \frac{L_e}{Q_1}.$$

Man könnte meinen, daß die Wärmeabfuhr während der Verdichtung, die sofort darauf durch die Abwärme ersetzt wird, zumindest überflüssig wäre. Dem ist aber nicht so, wie aus der ebenfalls von Baumann stammenden Zusammenstellung Abb. 1043 hervorgeht. Hier sind bei 500° C Ausdehnungsendtemperatur schon über 20 v. H. erreichbar, und dieser Prozeß ist, wie eine Vergleichsrechnung zeigt, günstiger als der mit adiabatischer Verdichtung.

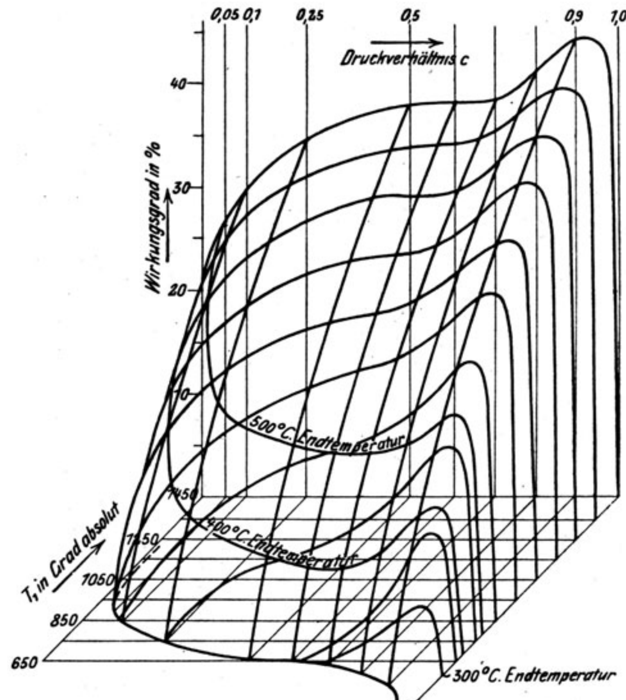


Abb. 1043. Verpuffungsturbine mit „Regenerator".

Diese Zahl erscheint sehr aufmunternd, da sie den besten Ergebnissen der Dampfturbine nahekommt, daher wird dieser Fall weiter unten genauer, mit Rücksicht auf die Veränderlichkeit der spezifischen Wärme untersucht.

d) Verpuffungsturbine ohne Vorverdichtung.

Der Arbeitsgang dieser durch besondere Einfachheit ausgezeichneten Turbine ist dem Prozesse des Lenoir-Motors nachgebildet, besteht also aus dem Ansaugen der frischen Ladung in die Verbrennungskammer, der „Verpuffung" im abgeschlossenen Raum und der Ausdehnung in einer Düse, durch welche das Laufrad der Turbine beaufschlagt wird. Bezeichnen wir mit p_1, T_1, v_1; p_2, T_2, v_2; p_3, T_3, v_3 die Zustände am Ende der Saug-, der Verbrennungs- und der Ausdehnungsperiode für kg Gasgemisch, wobei $v_2 = v_1$; $p_3 = p_1$ gesetzt werden darf, und ist H_u der untere, H der nach Abzug der an die Wand übergehenden Wärmemenge verbleibende Heizwert für 1 kg des Gemisches, c_v, c_p die unveränderlichen, vor und nach der Verbrennung gültigen spezifischen Wärmen, so ist

$$c_v (T_2 - T_1) = H \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

woraus T_2 zu bestimmen. Während des Abströmens aus der Verbrennungskammer dehnt sich deren Inhalt adiabatisch aus und die Zwischenwerte p_x, T_x, v_x hängen demnach mit den Anfangswerten p_2, T_2, v_2 durch die Beziehungen

$$p_x v_x^k = p_2 v_2^k; \quad \frac{T_x}{T_2} = \left(\frac{p_x}{p_2}\right)^{\frac{k-1}{k}} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

zusammen, aus welchen v_x, T_x durch p_x ausgedrückt werden. Der Endzustand nach vollständiger Ausdehnung auf den Anfangsdruck sowohl im Innern der Kammern wie für die ausgeströmte Gasmasse ist

$$v_3 = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{k}}; \quad T_3 = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Die augenblickliche Ausströmgeschwindigkeit bei theoretisch vollkommener Düse ist, aus dem Unterschiede der Wärmeinhalte berechnet,

$$\frac{c_x^2}{2g} = \frac{c_p}{A}(T_x - T_3) = \frac{k}{k-1}(p_x v_x - p_3 v_3) \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Bezeichnet V den Inhalt der Verpuffungskammer, so ist das im Zeitelement dt ausströmende Gasgewicht $dG_x = -d(V/v_x) = V dv_x/v_x^2$, und wenn η_x den entsprechenden Wert des Wirkungsgrades am Laufradumfang bedeutet

$$L_i = \int_{v_2}^{v_3} dG_x \cdot \frac{c_x^2}{2g} \eta_x \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

die gewonnene indizierte Arbeit. In der idealen Turbine ist $\eta_x = 1$ und Gl. (5) liefert nach dem Einsetzen von (4) und (3) als Betrag der verfügbaren Arbeit für 1 kg Gasgemisch

$$L_0 = \frac{k}{k-1}(p_2 v_2 - p_3 v_3) - v_2(p_2 - p_3) = \frac{c_p}{A}(T_2 - T_3) - v_2(p_2 - p_3) \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

welchen Ausdruck man ohne jede Rechnung hinschreiben kann aus der Erwägung heraus, daß die Arbeit der idealen Turbine identisch sein muß mit der Arbeit des idealen Kolbenmotors bei gleicher Zustandsänderung des Gasgemisches. Der Wirkungsgrad η_x wird seinen Wert mit dem wechselnden Verhältnis der unveränderlichen Umfangs- und der abnehmenden Ausströmungsgeschwindigkeit stark verändern, insbesondere auch gegen das Ende der Ausdehnung negativ (zum Schluß $-\infty$) werden. Das Integral Gl. (5) wird man demnach graphisch ermitteln müssen, und man erhält in

$$\eta_i' = \frac{L_i}{L_0} \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

den inneren Wirkungsgrad, und in

$$\eta_{wi}' = \frac{A L_i}{H_u} \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

den thermischen Wirkungsgrad der inneren Leistung bei vollkommener Düse. In Wahrheit sind in der Düse Energieverluste vorhanden 1. wegen der Reibung, 2. wegen des Verdichtungsstoßes, der bei tieferer Ausdehnungsspannung in der Kammer auftreten muß. Man kann indes bei den sowieso kleinen Druckverhältnissen mit absichtlich gekürzten Düsen arbeiten, so daß 2. vermindert wird, und 1. kann im Wirkungsgrad η_x Berücksichtigung finden. Zum Schluß müssen die mechanischen Reibungsverluste und der Arbeitsaufwand für einen Ventilator, der das Gasgemisch in die Kammer drückt oder die Verbrennungsprodukte aus dem Turbinengehäuse saugt, abgezogen werden, um die effektive Leistung zu erhalten.

In einem Zahlenbeispiel wurde ein Curtisrad mit 2 Geschwindigkeitsstufen, vorausgesetzt und solche Werte der Geschwindigkeitszahlen φ und ψ angenommen, daß der höchste Wirkungsgrad am Radumfang den Betrag $\eta_{max} = 0{,}60$ erreichte. Die Schaufelwinkel waren so gewählt, daß im Anfang ein leichter Stoß auf die hohle Schaufelseite vorhanden war, was den Wirkungsgrad nicht stark beeinflußt, damit der verlustreichere Stoß auf den Schaufelrücken erst bei kleineren Ausdehnungsdrücken eintrete. Es zeigt sich, daß der Mittelwert

$$\eta_i \cong 0{,}90\ \eta_{max}$$

ist. Behalten wir $\eta_{max} = 0{,}60$ bei, obwohl heute höhere Werte erreichbar sind, so steigt der Gesamtwirkungsgrad auf etwa 12 bis 13 v. H., und zwar bei über 900° C Temperatur am Ende der Düse, so daß mit großem Luftüberschuß oder mit Wassereinspritzung gearbeitet werden muß, was den Wirkungsgrad vollends herabdrückt. Eine Vorverdichtung ist daher unentbehrlich.

201. Theorie der Gasturbine unter Annahme veränderlicher spezifischer Wärmen.

Sobald man in das Gebiet höherer Temperatur, beispielsweise über 1000° C, hineingerät, sind die Drücke und Temperaturen, daraus folgend auch die Heizflächen usw., ver-

glichen mit den Werten, die unveränderlicher spezifischer Wärme entsprechen, so außerordentlich verschieden, daß mit letzteren keine zahlenmäßig richtigen Vergleiche mehr möglich sind.

Zum Glück kann ihre Veränderlichkeit im Entropieschaubild so leicht berücksichtigt werden, daß die Rechnungsarbeit kaum größer ist, als mit der gegenteiligen Annahme. Da dieses Schaubild auch bei der Beurteilung sonstiger Arbeitsprozesse für Brennkraftmaschinen außerordentlich nützliche Dienste leistet, wollen wir seiner Erklärung einen breiteren Raum gewähren. Das Verständnis desselben bedingt in erster Linie Vertrautheit mit dem Begriffe des „Kilogramm-Moleküles" oder „Mol", dem wir nachfolgende Betrachtungen widmen.

Das „Kilogramm-Molekül" oder „Mol"

bedeutet eine Stoffmenge, deren Gewicht soviel Kilogramm beträgt als das Molekulargewicht m Einheiten zählt. Zum Beispiel bedeutet 1 kg-Mol Wasser 18 kg Wasser; bei Gaselementen muß die Zahl der Atome im Molekül unterschieden werden. Daher ist 1 kg-Mol Wasserstoff eine Menge nicht von 1, sondern von 2 kg, weil Wasserstoff als Gas im freien Zustande Moleküle H_2 bildet. Die Zustandsgleichung auf 1 kg-Mol bezogen lautet demgemäß

$$m\,p\,v = m\,R\,T \quad \text{oder} \quad p\,\mathfrak{V} = \mathfrak{R}\,T \qquad (1)$$

wobei $\mathfrak{V}$ das Volumen des kg-Mol bedeutet und $\mathfrak{R} = 848$ für kg m/sek Einheiten für alle Gasarten denselben Wert besitzt.

Für $p_0 = 10000$ kg/qm $T_0 = 273^0$ ist $\mathfrak{V} = \frac{\mathfrak{R}\,T_0}{p_0} \simeq 23{,}2$ cbm, d. h. 1 kg-Mol irgendeiner Gasart nimmt im Normalzustand ein und denselben Rauminhalt $= 23{,}2$ cbm ein.

Bei Mischungen bedeutet m das durchschnittliche Molekulargewicht. Sind G_1, G_2 ... die im gemeinsamen Rauminhalt V eingeschlossenen Gewichtsanteile der einzelnen Gase, so gilt einzeln $p_1 V = G_1 R_1 T$, $p_2 V = G_2 R_2 T$, ... wo p_1, p_2 die Teildrücke bedeuten, die nach Daltons Gesetz ebenso groß sind, als wenn jedes Gas allein vorhanden wäre. Durch Addition ergibt sich $p\,V = R\,G\,T$, wenn $G = \Sigma\,G$ und $R\,G = \Sigma\,R\,G$ bezeichnen. Nun kann man die Zahl der in jeder Gasart vorhandenen Moleküle $n_1 = G_1/m_1$, $n_2 = G_2/m_2$ ... berechnen und erhält

$$m = \frac{n_1 m_1 + n_2 m_2 + \ldots}{n_1 + n_2 + \ldots} \qquad (2)$$

als durchschnittliches Molekulargewicht. Die Zustandsgleichung erscheint daher als

$$p\frac{V}{G} = p\,v = \frac{\Sigma R G}{G}\,T = \frac{n_1 m_1 R_1 + n_2 m_2 R_2 + \ldots}{(m_1 n_1 + m_2 n_2 \ldots)}\,T = \frac{(n_1 + n_2 + \ldots)\,\mathfrak{R}}{(n_1 + n_2 + \ldots)\,m}\,T \quad \text{oder} \quad p\,v = \frac{\mathfrak{R}}{m}\,T \qquad (3)$$

d. h. in gleicher Form wie bei einfachen Gasen.

Die spezifischen Wärmen.

Die spezifische Wärme bezogen auf 1 kg-Mol bedeutet die Wärme, die man 1 kg-Mol zuführen muß, um die Temperatur desselben (bei stetsgleichem Druck oder Volumen) um 1° C zu erhöhen. Nach neueren Versuchen nimmt die spezifische Wärme mit der Temperatur nach einem verwickelten Gesetz zu. Es zeigt sich jedoch, daß für die technischen Verbrennungsgase ein linearer Ansatz genügend Genauigkeit bietet. Wir dürfen also für unveränderlichen Rauminhalt

$$c_v = \alpha + \beta\,T, \quad \text{daher} \quad \mathfrak{C}_v = m\,c_v = a_v + b\,T \qquad (4)$$

setzen, wo

$$a = m\,\alpha; \quad b = m\,\beta \qquad (5)$$

ist. Da allgemein $c_p = c_v + A\,R$, so wird nach Vermehrung mit m

$$\mathfrak{C}_p = \mathfrak{C}_v + A\,R\,m = \mathfrak{C}_v + A\,\mathfrak{R} \qquad (6)$$

Den Wert $A\,\mathfrak{R} = 1{,}985$ rundet man häufig auf 2 ab und hat

$$\mathfrak{C}_p = \mathfrak{C}_v + 2 = a_p + b\,T \qquad (7)$$

wenn $a_p = a_v + 2$ bezeichnet.

Liegt ein Gasgemisch G_1, G_2, G_3 ... vor, so ist dessen spezifische Wärme bekanntlich

$$c_v = \frac{G_1 c_{v1} + G_2 c_{v2} + \ldots}{G_1 + G_2 + \ldots}$$

Setzt man $G_1 = n_1 m_1$, $G_2 = n_2 m_2$ ... ein, wo n_1, n_2 ... wieder die Zahl (meist Bruchzahl) der kg-Mol jeder einzelnen Gasart bedeutet, und vermehrt man mit m, d. h. dem durchschnittlichen Molekulargewicht der Mischung, so erhält man

$$\mathfrak{C}_v = m\frac{n_1 m_1 c_{v1} + n_2 m_2 c_{v2} + \ldots}{n_1 m_1 + n_2 m_2 + \ldots} = \frac{n_1 \mathfrak{C}_{v1} + n_2 \mathfrak{C}_{v2} + \ldots}{n_1 + n_2} \qquad (4a)$$

Für $\mathfrak{C}_p$ gilt Gl. (7).

Sind nicht die Gewichte, sondern die auf normalen Druck und Temperatur bezogenen Rauminhalte V_1, V_2 . . . der einzelnen Gasarten gegeben, so findet man

$$n_1 = \frac{V_1}{\mathfrak{V}_0}\,; \qquad n_2 = \frac{V_2}{\mathfrak{V}_0} \ldots$$

mit $\mathfrak{V}_0 = 23{,}1$ cbm und berechnet $\mathfrak{C}_v$ wie oben.

Die Gasentropietafel.

Wenn wir mit $p_0\,\mathfrak{V}_0\,T_0$ den Anfangspunkt der Integration bezeichnen, für den vereinfacht $s = 0$ angenommen wird, so erhalten wir die Entropie für 1 kg-Mol $\mathfrak{S} = m\,s$, oder nach den Formeln des Abschn. (8):

$$\mathfrak{S} = a_v \lg n\left(\frac{T}{T_0}\right) + b\,(T - T_0) + A\,\mathfrak{R}\,\lg n\left(\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{V}_0}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (8)$$

setzt man $\mathfrak{V}$ aus der Zustandsgleichung ein, so folgt ein Ausdruck in p, T,

$$\mathfrak{S} = (a_v + A\,\mathfrak{R})\lg n\left(\frac{T}{T_0}\right) + b\,(T - T_0) - A\,\mathfrak{R}\,\lg n\left(\frac{p}{p_0}\right) \quad \ldots \ldots \ldots (9)$$

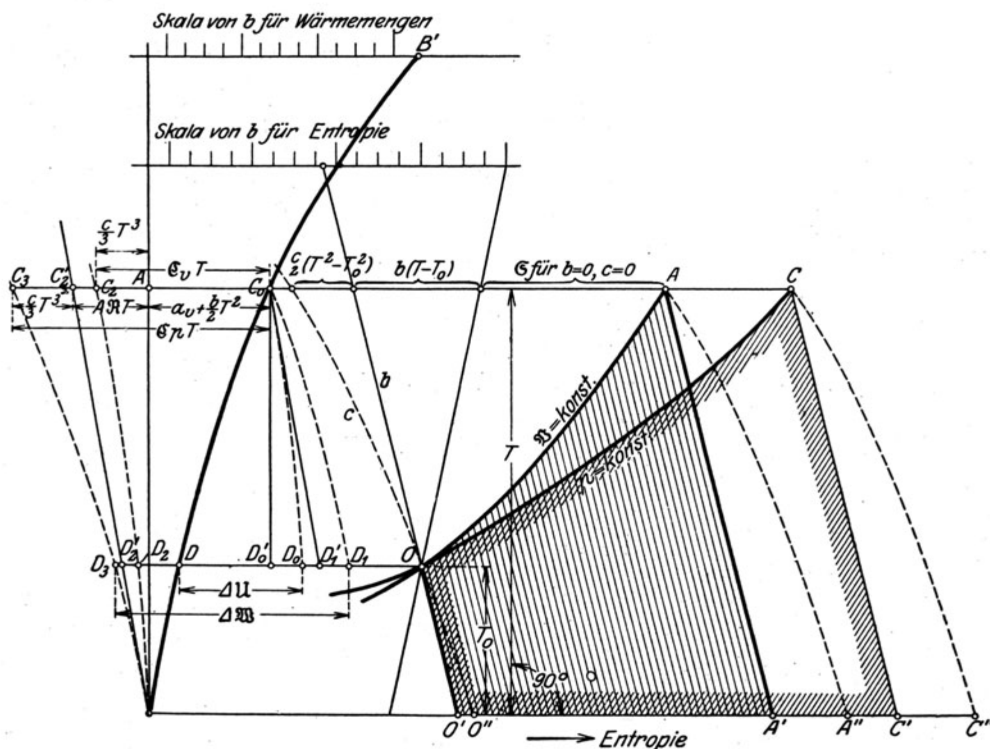


Abb. 1044. Entropietafel I für veränderliche spezifische Wärmen.

Diese Werte enthalten das Glied $b\ (T - T_0)$, das nur von b abhängt, während im Reste b nicht vorkommt. Man kann daher die Entropie zunächst mit der Annahme $b = 0$ rechnen, und zum Ergebnis $b\ (T - T_0)$ hinzuzählen, Abb. 1044.

Die **mitgeteilte Wärmemenge** wird durch die **unter der Zustandslinie durch die zur b-Linie parallelen Adiabaten begrenzte bis zur Abszissenachse l reichende Fläche dargestellt.** Denn der Inhalt eines Elementar-Vierseits ist, infolge der auf der Senkrechten abgetragenen absoluten Temperatur stets $= T\,ds$ **unabhängig vom Winkel, den die b-Linien mit der Lotrechten bilden.**

Die dem Buche beigegebene Entropietafel I für Gase ist mit **dem (unveränderlichen) Wert**

$$a_v = 4{,}67 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (10)$$

berechnet worden, der zur Zeit ihrer Entstehung ein brauchbares Mittel der damals bekannten Werte der spezifischen Wärmen (für $T = 0$ extrapoliert) war. Die heute vorliegenden Beobachtungen lassen sich für CO_2 und H_2O nicht mehr durch einen linearen Ansatz wiedergeben und erheischen mindestens das Hinzufügen eines quadratischen Gliedes. Da jedoch bei den technisch vorkommenden Gemischen, wie

einleitend hervorgehoben, $\mathfrak{C}_v$ hinlänglich genau linear bleibt, so darf man immer noch **folgende angenäherte Ersatzwerte** zur Berechnung der $\mathfrak{C}_v$ benützen:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Zweiatomige Gase } H_2, O_2, N_2, CO, & \mathfrak{C}_v = 4{,}67 + 1{,}00 \dfrac{T}{1000} \\ \text{Wasserdampf } H_2O & \mathfrak{C}_v = 4{,}67 + 2{,}90 \dfrac{T}{1000} \\ \text{Kohlensäure } CO_2 & \mathfrak{C}_v = 4{,}67 + 4{,}40 \dfrac{T}{1000} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

Diese Werte sind so gewählt, daß **die damit berechnete „zugeführte" Wärme etwa zwischen 1000 und 2000° absol. dieselbe ist, wie die mit den wirklichen spezif. Wärmen.** So ergibt sich z. B. **für reines, d. h. ohne Luftüberschuß entstehendes Feuergas** bei der Verbrennung von Kraftgas üblicher Zusammensetzung[1])

$$\mathfrak{C}_v = 4{,}67 + 1{,}73 \frac{T}{1000} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

während Schüle mit den genauen Werten $\mathfrak{C}_v = 4{,}875 + 1{,}60 \cdot T/1000$ findet.

Man kann die Genauigkeit durch **Hinzunahme des quadratischen Gliedes** in $\mathfrak{C}_v$ erhöhen, und zwar müßten folgende Beiwerte benützt werden[2]):

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Zweiatomige Gase } H_2, O_2, N_2, CO; & \mathfrak{C}_v = 4{,}67 + 1{,}0 \cdot 10^{-3}\, T \\ \text{Wasserdampf } H_2O & \mathfrak{C}_v = 4{,}67 + 1{,}263 \cdot 10^{-3}\, T + 1{,}18 \cdot 10^{-6}\, T^2 \\ \text{Kohlensäure } CO_2 & \mathfrak{C}_v = 4{,}67 + 8{,}004 \cdot 10^{-3}\, T - 2{,}337 \cdot 10^{-6}\, T^2 \end{array}\right\} \ldots \quad (13)$$

Schreibt man allgemein

$$\mathfrak{C}_v = a_v + b\,T + c\,T^2; \qquad \mathfrak{C}_p = A\,\mathfrak{R} + \mathfrak{C}_v \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

so wird die Entropie in $\mathfrak{V}, T$ ausgedrückt

$$\mathfrak{S} = a_v \lg n \left(\frac{T}{T_0}\right) + b\,(T - T_0) + \frac{c}{2}(T^2 - T_0^2) + A\,\mathfrak{R} \lg n \left(\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{V}_0}\right) \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

Zählt man das Glied $c\,(T^2 - T_0^2)/2$, wie in Abb. 1044 angegeben, links zum vorhin ermittelten Wert der Entropie hinzu, so wird diese nun von der mit c bezeichneten Parabel zu rechnen sein. Die Adiabaten $\mathfrak{S} =$ konst. sind mit c identische, wagerecht verschobene Parabeln. Immer noch ist $d\,\mathfrak{Q} = T\,d\,\mathfrak{S}$ und die endliche Wärmezufuhrfläche ist nun durch die von den Endpunkten der Zustandslinie geführten adiabatischen Parabeln begrenzt.

Innere Energie und Wärmeinhalt für 1 Mol.

Für 1 kg gilt mit in Gedanken zugelassener Extrapolation bis zum absoluten Nullpunkt $u = \int_0^T c_v\,d\,T$; für 1 kg Mol erhält man

$$\mathfrak{U} = m\,u = \int_0^T \mathfrak{C}_v\,d\,T = a_v\,T + \frac{b}{2}\,T^2 + \frac{c}{3}\,T^3 + \text{konst.} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

ähnlich der Wärmeinhalt

$$\mathfrak{W} = m\,i = \int_0^T \mathfrak{C}_p\,d\,T = a_p\,T + \frac{b}{2}\,T^2 + \frac{c}{3}\,T^3 + \text{konst.} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Da nun a_p nach Gl. (7) $= a_v + A\,\mathfrak{R}$, so ist

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{U} + A\,\mathfrak{R}\,T \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

In Abb. 1044 sind die Teilbeträge $a_v\,T + b\,T^2/2$ rechts, und $c\,T^3/3$; $A\,\mathfrak{R}\,T$ links an eine Lotrechte anschließend eingezeichnet[3]). So ergibt sich in Strecke $C_0\,C_2 = \mathfrak{U}$ (mit $\mathfrak{C}_v\,T$ bezeichnet) und in Strecke $C_0\,C_3 = \mathfrak{W}$ (mit $\mathfrak{C}_p\,T$ bezeichnet). Damit die Summation unmittelbar möglich ist, muß die Parabel $c\,T^3/3$ zweimal an die Lotrechte und an die schräge Linie $\mathfrak{R}\,T$ anschließend gezeichnet werden.

Die Zunahme von $\mathfrak{U}$ für die endliche Zustandslinie $O\,A$ ist

$$\Delta\,\mathfrak{U} = \overline{C_0 C_2} - \overline{D D_2} = \overline{D_0 D} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

stellt zugleich die während dieser bei $\mathfrak{V} =$ konst. erfolgenden Zustandsänderung zuzuführende Wärme dar.

---

[1]) Schüle, Techn. Thermodynamik, 3. Aufl., B. I, S. 73. — [2]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1912, S. 78.

[3]) Bei a_v fehlt in der Abbildung der Faktor T.

Ähnlich ist die **Zunahme des Wärmeinhaltes**

$$\Delta \mathfrak{W} = \overline{C_0 C_3} - \overline{D D_3} = \overline{D D_1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (20)$$

und stellt die, während $p =$ konst. längs OC zuzuführende Wärme dar, die gleichzeitig dem Flächeninhalt $O''OCC''O''$ gleich ist.

Im folgenden beschränken wir uns auf die Annäherung ersten Grades **mit linear veränderlichen spezifischen Wärmen.** Die bedeutet $c = 0$, so daß $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{W}$ durch $C_0 A_0$ und $C_0 C_2'$ dargestellt werden. Um $\Delta \mathfrak{U}$ zu erhalten, projiziert man C_0 lotrecht herab, und erhält $\Delta \mathfrak{U} = D_0' D$. Ähnlich wird $\Delta \mathfrak{W} = D_1' D$, wo $C_0 D_1'$ parallel ist, zur $A\mathfrak{R}$-Linie.

Energiegleichungen der Verbrennung.

α) Bei unveränderlichem Rauminhalt.

Es bedeute:

G das vor der Verbrennung in einer „Kammer" enthaltene Gewicht (oder auch eine beliebige, der Betrachtung zugrunde gelegte Menge, z. B. diejenige, die 100 m³ Brenngas entspricht).

U_1 die gesamte innere Energie vor der Verbrennung beim Drucke p_1 und der Temperatur T_1.

U_1' die innere Energie der gleichen Gasmenge nach erfolgter Verbrennung, falls die Gase durch Abkühlung bei gleichem Rauminhalt auf die gleiche Temperatur T_1 abgekühlt werden, wobei die Pressung z. B. auf den Betrag p_1' sinken möge.

U_2' die innere Energie der Verbrennungsprodukte beim erreichten Höchstdrucke p_2 und der Temperatur T_2.

H_{p1}, H_{v1} bzw. H_{p2}, H_{v2} die gesamten im Gewicht G enthaltenen Heizwerte für unveränderlichen Druck bzw. Rauminhalt bei den Temperaturen T_1 bzw. T_2.

Q_w die an die Wand während der Verbrennung abgegebene Wärmemenge.

Die Energiegleichung für die Zustände vor und nach der Verbrennung lautet dann:

$$U_1 = U_2' + Q_w \quad \ldots \ldots \ldots \quad (21)$$

Um gleichartige Größen zu vergleichen, ziehen wir auf beiden Seiten den Betrag U_1 ab; dann erhält man auf der linken Seite $U_1 - U_1'$, welches nichts anderes als der Heizwert H_{v1} ist; auf der rechten Seite entsteht $U_2' - U_1'$, welches den Betrag der fühlbaren in den Verbrennungsprodukten enthaltenen Wärme darstellt, die dem Temperaturunterschied $T_2 - T_1$ entspricht. Gl. (21) schreibt sich also

$$H_{v1} = G \bar{c}_v' (T_2 - T_1) + Q_w \quad \ldots \ldots \ldots \quad (22)$$

wobei $\bar{c}_v'$ den Mittelwert der spezifischen Wärme nach der Verbrennung zwischen T_2 und T_1 bedeutet. Man darf mithin immer noch den Heizwert H_{v1} **als eine von außen zuzuführende Wärmemenge ansehen,** wenn man nicht das sich verändernde Gemisch, sondern **von Anfang an die Verbrennungserzeugnisse (mit der Anfangstemperatur T_1) gegeben denkt, und diese bis zur Höchsttemperatur T_2 erhitzt.** Außerdem wird vom Heizwert selbstverständlich die Wandungswärme Q_w bestritten.

β) Bei unveränderlichem Druck.

Die Energiegleichung $dQ = dU + A\,p\,dV = dJ - A\,v\,dp$ schreibt sich hier, wenn nach außen wieder die Wärme Q_w abgegeben wurde, da $dp = 0$ ist,

$$-Q_w = J_2' - J_1 \quad \text{oder} \quad J_1 - J_1' = J_2' - J_1' + Q_w.$$

Links steht der Heizwert H_{p1}, rechts die „fühlbare" Wärme und der Verlust, es ist also

$$H_{v1} = G \bar{c}_p' (T_2 - T_1) + Q_w \quad \ldots \ldots \ldots \quad (22\text{a})$$

Der Heizwert erscheint wieder als eine von außen an das Feuergas zugeführte Wärme.

Will man theoretisch streng vorgehen, muß die **Abhängigkeit des Heizwertes von der Temperatur** berücksichtigt werden. Wenn wir nämlich den Heizwert bei der Temperatur T_1 als Normalwert einführen, so gelten mit entsprechender Bezeichnung die Gleichungen

$$U_1 - U_1' = H_{v1}; \qquad U_2 - U_2' = H_{v2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (23)$$

Als Unterschied der Heizwerte ergibt sich mithin

$$H_{v1} - H_{v2} = (U_1 - U_2) - (U_1' - U_2') = G\{\bar{c}_v'(T_2 - T_1) - \bar{c}_v(T_2 - T_1)\}$$
$$= G(\bar{c}_v' - \bar{c}_v)(T_2 - T_1) = \Delta H \quad . \quad . \quad (24)$$

Die Heizwerte sind nur gleich, falls die spezifischen Wärmen $\bar{c}_v$ und $\bar{c}_v'$ vor und nach der Verbrennungg leich sind. Ist $c_v' > c_v$, so nimmt der Heizwert mit wachsender Temperatur im Verhältnis des Temperaturunterschiedes ab. Praktisch ist die Abnahme erst bei sehr großen Temperaturunterschieden merklich.

Unterschied zwischen H_p und H_v. Verbrennt man die Ladung G beim unveränderlichen Druck p, und nimmt der Rauminhalt, nach Zurückführung auf die Anfangstemperatur von V auf V' ab, so hat der Außendruck die Arbeit $A\,p\,(V - V')$ in kcal geleistet, die als Wärme, d. h. Vermehrung des Heizwertes erscheint. Man hat also

$$H_p = H_v + A\,p\,(V - V') = H_v + A\,G\,R\,T\left(\frac{V - V'}{V}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24\,a)$$

Im allgemeinen ist $V - V'$ kleiner als 0,1 V, und der Unterschied von H_p und H_v erreicht noch nicht 0,5 v. H., darf also praktisch meist vernachlässigt werden.

202. Die Verpuffungsturbine mit Vorverdichtung und Abwärmeaustausch.

Gas und Luft müssen zwar in Wirklichkeit getrennt verdichtet werden, damit bei allfälligen Vorzündungen die Flamme nicht in die Verdichter zurückschlagen kann; da jedoch p und T im Anfangszustande ziemlich gleich sein werden und beide Teile auf gleichen Druck verdichtet werden, so kann man sich, was den Arbeitsbedarf anbelangt,

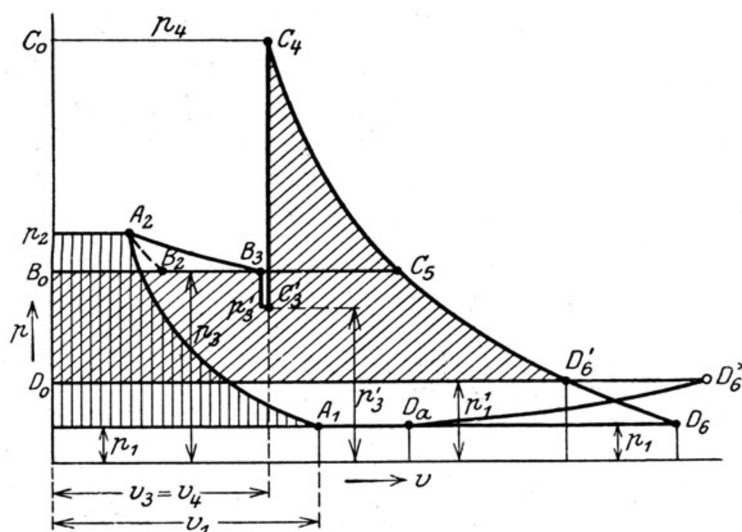


Abb. 1045. Verpuffungsgasturbine mit Vorverdichtung im p-v-Schaubild.

Gas und Luft schon vorher gemischt vorstellen, so daß im pv-Schaubild, Abb. 1045, A_1 den Anfangszustand, A_2 den Endzustand der polytropischen Kompression darstellt. Beim Übergang in die Verbrennungskammer findet eine Drosselung statt, die bei Ausschluß von Wärmeableitung durch die Isotherme A_2B_2 darstellbar wäre. Der Allgemeinheit zuliebe setzen wir voraus, daß **längs der Drossellinie A_2B_3 bis zum Drucke p_3 in einem Austauschvorwärmer (Regenerator) Wärme zugeführt** wird, so daß einschließlich der in der Kammer aufgenommenen Wärme unmittelbar vor der Verpuffung der Zustand B_3 erreicht wird.

Die hierauf einsetzende Verpuffung ist gemäß Gl. (21) des vorigen Abschnittes so zu behandeln, daß man sich das Gemisch zunächst bei unveränderter Temperatur in die chemische Beschaffenheit der Abgase überführt denkt. Hierbei wird in dem geschlossenen

Raum der Druck von p_3 auf p_3' abnehmen, im Sinne der Gleichungen

$$p_3 V = G R T_3; \quad p_3' V = G R' T_3 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

aus welchen

$$\frac{p_3'}{p_3} = \frac{R'}{R} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

folgt. Bedeutet nun n bzw. n' und m bezw. m' die Zahl der Mole bzw. das Molekulargewicht vor und nach der Verbrennung, so ist

$$G = n m = n' m' \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Wegen

$$R = \frac{\mathfrak{R}}{m}; \quad R' = \frac{\mathfrak{R}}{m'} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

erhält man auch

$$\frac{p_3'}{p_3} = \frac{m}{m'} = \frac{n'}{n} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Nun gilt die Wärmegleichung

$$H_{v3} = G \bar{c}_v' (T_4 - T_3) + Q_w \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

worin man praktisch $H_{v3} = H_{v1}$ setzen und

$$Q_w \cong 0{,}1\, H_{v3} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6\text{a})$$

einschätzen darf. Hieraus berechnet man die Temperatur T_4 und vermöge des Verhältnisses

$$\frac{p_4}{p_3'} = \frac{T_4}{T_3} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

die Höchstspannung p_4 selbst, also den Zustandspunkt C_4.

Die für die Turbine verfügbare Arbeit.

Vom Zustande C_4 an findet eine Entleerung der Kammer statt, wobei wir der Einfachheit halber annehmen, daß die Zustandsänderung im Innern der Kammer nach einer Adiabate $C_4 D_6$ vor sich geht. Bis zum Zustande C_5 mit dem Drucke p_3 dehnt sich der Kammerinhalt allein aus, im Punkte C_5 möge das Einlaßventil geöffnet werden, die frische Ladung tritt mit dem unveränderlichen Drucke p_3 hinein und befördert die Verbrennungsprodukte heraus. Da die Entspannung wohl ausnahmslos in einer einzigen Stufe (in einer Düse) vor sich gehen wird und da die Turbine, um sofort auf die tiefste Temperatur zu kommen, ohne Überdruck arbeiten muß, wird das Gefälle in kinetische Strahl-Energie umgesetzt. Es bedeute:

dG_x das im Zeitelement dt abströmende Gewicht,
c_{1x} die zugehörige theoretische Geschwindigkeit am Düsenende,
η_x der Gesamtwirkungsgrad des Rades einschließlich Düsenverlust und Scheiben- und Lagerreibung.

Die elementare Arbeit, die das Rad aufnahm, ist $\eta_x dG_x c_{1x}^2/2g$. Die Summe dieser Elementaranteile kannn nach dem Mittelwertsatz in der Form

$$L_1 = \eta_t \int dG \frac{c_{1x}^2}{2g} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

geschrieben werden, wo η_t einen Mittelwert bedeutet. Den Integralausdruck können und wollen wir als **die für die Turbine verfügbare Arbeit** ansehen. Sie ist, wie ersichtlich, nichts anderes als die gesamte theoretische kinetische Energie, die erzeugt wird. Wir trennen die Berechnung in die beiden Anteile, die der Zustandsänderung von C_4 bis C_5 und von C_5 bis D_6' entsprechen. Der Unterschied der Drucke p_1' und p_1 stellt den Strömungswiderstand im Auspuffrohr dar, der groß werden kann, wenn wir einen Röhren-Wärmeaustauschkörper hinter die Turbine schalten.

Für die Änderung zwischen C_4 und C_5 lautet der Energiesatz: Die innere Energie U_x der in der Kammer eingeschlossenen Gesamtmenge am Anfang ist gleich der in der Kammer enthaltenen inneren Energie U_x' am Ende + der elementaren kinetischen Energie

$AdGc_x^2/2g$ + der elementaren Verdrängungsarbeit $Ap_6'dV = AdGp_6'v_6'$ + der im ausgeströmten Gewichte dG enthaltenen inneren Energie dGu_6', oder ausgeschrieben

$$U_x = U_x' + dG\left(A\frac{c_x^2}{2g} + Ap_6'v_6' + u_6'\right) \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

Die beiden letzten Glieder in der Kammer bedeuten den Wärmeinhalt i_6'. Indem man nach der kinetischen Energie auflöst, erhält man:

$$dK_1 = -dU_x - dG\,i_6' \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

Die Integration zwischen den Zuständen C_4 und C_5 liefert

$$K_1 = U_4 - U_5 - (G_4 - G_5)\,i_6' \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

Darin bedeutet $G_4 = \frac{V}{v_4}$ den ursprünglichen Gesamtinhalt der Kammer, $G_5 = \frac{V}{v_5}$ den Inhalt, der nach der Ausdehnung auf C_5 übrig bleibt. Ähnlich bedeuten $U_4 = G_4 u_4$; $U_5 = G_5 u_5$ die entsprechenden inneren Energien.

Was den zweiten Teil der Zustandsänderung von $C_5 - D_6'$ anbelangt, so gilt die gewöhnliche Ausströmungsformel, da im Behälter während der ganzen Zeit unveränderlicher Druck herrscht. Solange die heißen Gase ausströmen, ist die Geschwindigkeit gemäß Gleichung $Ac_x^2/2g = i_5 - i_6'$ unveränderlich, und die gesamte kinetische Energie wird

$$K_2 = G_5\,(i_5 - i_6') \quad \ldots\ldots\ldots (11\,a)$$

Wird etwa zum Zwecke einer Kühlung des Rades bei der Füllung der Kammer unter dem Drucke p_3 reine Luft vorausgeschickt, die im Betrage von G' kg für ein Spiel sofort abströmt, so tritt noch die kinetische Energie

$$K_3 = L_{ts} = G'\,(i_5^* - i_6^*) \quad \ldots\ldots\ldots (11\,b)$$

hinzu. Darin bedeutet i_5^* den Wärmeinhalt beim Drucke p_3, i_6^* den Wärmeinhalt der adiabatischen Ausdehnung auf p_6'.

Die Spülungsmenge G' beschreib gewissermaßen einen Kreisprozeß, indem sie von p_1 auf p_2 verdichtet, auf p_3 abgedrosselt wird, sich dann auf p_6' ausdehnt und durch Drosselung auf p_1 gelangt. Sie verursacht im ganzen einen Arbeitsverlust, den man besser getrennt behandelt, um die Anschaulichkeit des Prozesses zu erhöhen. Wir wollen daher zunächst von G' absehen. Dann wird, wie wir sagen können, die für die Turbine verfügbare **Reinarbeit**

$$L_t = K_1 + K_2\,.$$

Indem man in Gl. (11) an Stelle der innern Energien die Wärmeinhalte einführt gemäß Gleichungen $U_4 = G_4 i_4 - G_4 A p_4 v_4$ und $U_5 = G_5 i_5 - G_5 A p_5 v_5$ erhält man:

$$AL_t = G_4\,(i_4 - i_6' - A\,[p_4 - p_3]\,v_4) \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

Im $p-v$-Schaubild, Abb. 1045, wird mithin die verfügbare Arbeit für 1 kg Gasgemisch durch die schräg schraffierte Fläche dargestellt, denn $i_4 - i_6'$ ist = Fläche $C_0 C_4 D_6' D_0$ und $(p_4 - p_3)v_4 = C_0 C_4 B_3 B_0$. In gleicher Weise ist die auf 1 kg bezogene Verdichterarbeit die senkrecht schraffierte Fläche. Bezeichnen wir diese Fläche mit l_k, so ist für die Verdichtung von G_4 kg des Gemisches die Arbeit $L_k = G_4 \cdot l_k$. Bedeutet nun η_k den effektiven Kompressorwirkungsgrad, so ist die an der Welle durch den Verbrennungsvorgang für ein Spiel gelieferte Arbeit

$$L_{ev} = L_t \cdot \eta_t - \frac{L_k}{\eta_k} \quad \ldots\ldots\ldots (13)$$

Dazu tritt für den Fall nennenswerter Spülung die von der Spülluft herstammende Arbeit

$$L_{es} = L_{ts} \cdot \eta_{ts} - \frac{L_k}{\eta_k} \quad \ldots\ldots\ldots (13\,a)$$

Die Gesamtarbeit also ist

$$L_e = L_{ev} + L_{es} \quad \ldots\ldots\ldots (14)$$

wobei man sich L_{es} meist als negativ vorzustellen hat. $D_6' D_6^*$ stellt die Wärmeaufnahme durch die Reibungsarbeit in Düsen und Schaufeln einschließlich der Auslaßenergie dar. $D_6^* D_a$ ist die mit Drosselung verbundene Abkühlung im Abwärmeaufnehmer.

Darstellung der Arbeitsgrößen im Entropieschaubild [1]).

Die Berücksichtigung der Raumabnahme bei der Verbrennung macht es zweckmäßig, die Vorgänge zunächst in Abhängigkeit vom Rauminhalte eines Kilogrammoleküls darzustellen. In Abb. 1046 sind analoge Zustände mit gleichen Buchstaben bezeichnet wie in Abb. 1045. Demnach ist $A_1 A_2$ die Verdichtungslinie, $\mathfrak{B}_1 = m v_1$, $\mathfrak{B}_2 = m v_2$, wenn m das durchschnittliche Molekulargewicht des Ladegemisches ist. Der Übergang zu den

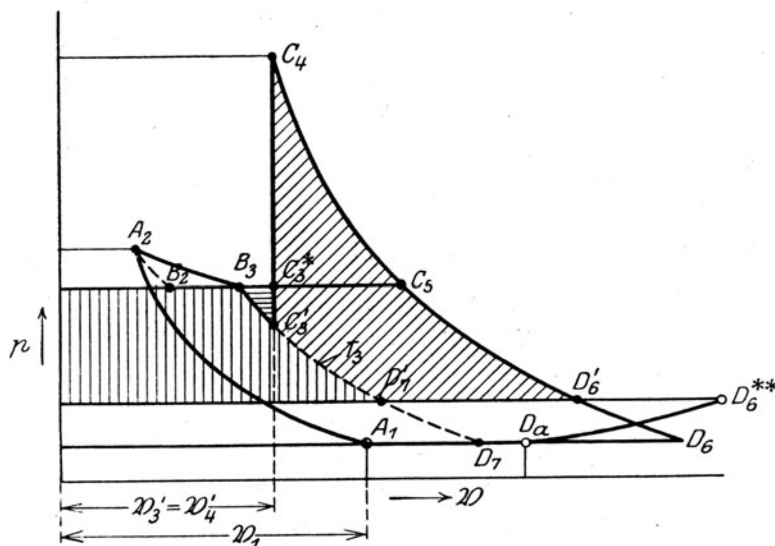


Abb. 1046. Der Arbeitsgang der Verpuffungsturbine auf das Mol-Volumen bezogen.

Verbrennungsgasen bringt eine Veränderung des Rauminhaltes hervor. Denn es ist $\mathfrak{B}_3 = m v_3$, während $\mathfrak{B}_3' = m' v_3'$, wobei m' das Molekulargewicht der Verbrennungsprodukte bedeutet. Der Unterschied wird anschaulicher, wenn man auf die Zahl der Mole n, n' zurückgreift. Dann ist $\mathfrak{B}_3 = V/n$, $\mathfrak{B}_3' = V/n'$ und $\mathfrak{B}_3'/\mathfrak{B}_3 = n/n'$. Die Zustände $B_3 C_3'$ liegen im $p\mathfrak{B}$-Diagramm auf der Isotherme, die zur Temperatur T_3 gehört. Die weiteren Rauminhalte sind $\mathfrak{B}_4' = \mathfrak{B}_3'$; $\mathfrak{B}_5' = m' v_5$. Gl. (12) wird auf Mole bezogen, indem man $G = G_4 = n' m'$ einschiebt und der Reihe nach $m' i_4 = \mathfrak{W}_4'$; $m' i_6' = \mathfrak{W}_6'$; $m' v_4 = \mathfrak{B}_4'$ setzt. Der Wert $A \cdot L_t / n' = \mathfrak{L}_t'$ **bedeutet den Wärmewert der auf ein Mol der Verbrennungsgase der Turbine zur Verfügung stehenden Arbeit.** Er ist nach Gl. (12)

$$\mathfrak{L}_t' = \mathfrak{W}_4' - \mathfrak{W}_6' - A \mathfrak{B}_4' (p_4 - p_5) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Ähnlich wie beim $p - v$-Schaubild wird diese Arbeit in mechanischem Maße durch die Summe der schief, lot- und wagerecht schraffierten Flächenstücke im $p\mathfrak{B}$-Schaubild dargestellt, wobei das mittlere durch die Drucklinien p_3 und p_6' und durch die Isotherme von B_3 nach D_7' begrenzt worden ist.

Diese Zerlegung empfiehlt sich, um **in der Entropiedarstellung**, Abb. 1047, die entsprechenden Flächen leicht ausfindig zu machen. Gleiche Zustände sind darin mit denselben Buchstaben wie in Abb. 1046 dargestellt. Die lotrecht schraffierte Fläche wäre im Entropiebild durch die Isotherme $B_3 D_7'$ und die links ins Unendliche verlaufenden Drucklinien $p_3 p_1'$ darzustellen. Da diese Drucklinien kongruent sind, d. h. eine unveränderliche wagerechte Breite einschließen, kann der Streifen durch Zusammenschieben in das Schiefeck $B_3 D_7' E_7' E_3'$ verwandelt werden. Er stellt, wie ersichtlich, gleichzeitig die längs der Isotherme zuzuführende Wärmemenge dar. Die wagrecht schraffierte Fläche $B_3 C_3^* C_3'$ ist durch die Linien p_3, T_3, $\mathfrak{B}_4'$ eingeschlossen. Hierzu tritt die schräg schraffierte Fläche $C_3' C_4 D_6' D_7' C_3'$. Die Summe dieser Flächen kann auch wie folgt dargestellt werden. Be-

[1]) Man beachte von Anfang an die am Schluß über die Vereinfachung des Entropiebildes angeführte Bemerkung. Praktisch wird man die vereinfachte Darstellung gebrauchen; allein es ist sehr begriffsklärend, auch die genauere Zergliederung durchgangen zu haben, und es tauchen Vorschläge auf, wo sie nicht umgangen werden kann.

zeichnet T_{3m} das arithmetische Mittel der Temperaturen T_3 und $T_3{}^*$ und $\varDelta\mathfrak{S}$ die Entropiestrecke $B_3 C_3'$, so ist

$$\text{Dreieck } B_3 C_3{}^* C_3' + \text{die unterhalb } B_3 C_3' \text{ liegende Fläche} = T_{3m} \varDelta\mathfrak{S},$$

ferner ist Fläche $\quad E_3' C_3' C_4 E_6 = \overline{\mathfrak{C}}_v'(T_4 - T_1) = \mathfrak{U}_4' - \mathfrak{U}_3',$

und Fläche $\quad E_7' D_7' D_6' E_6 = \mathfrak{W}_6' - \mathfrak{W}_7'.$

Daraus folgt als verfügbare Turbinenarbeit in kcal/Mol

$$\mathfrak{Q}_t' = \mathfrak{U}_4' - \mathfrak{U}_3' - (\mathfrak{W}_6' - \mathfrak{W}_7') + T_{3m} \varDelta\mathfrak{S} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15\text{a})$$

Oder auch, da $\mathfrak{W}_7' = \mathfrak{W}_3'$ und $\mathfrak{W}_3' - \mathfrak{U}_3' = A\mathfrak{R}T_3$

$$\mathfrak{Q}_t' = \mathfrak{U}_4' - \mathfrak{W}_6' + A\mathfrak{R}T_3' + T_{3m} \varDelta\mathfrak{S} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15\text{b})$$

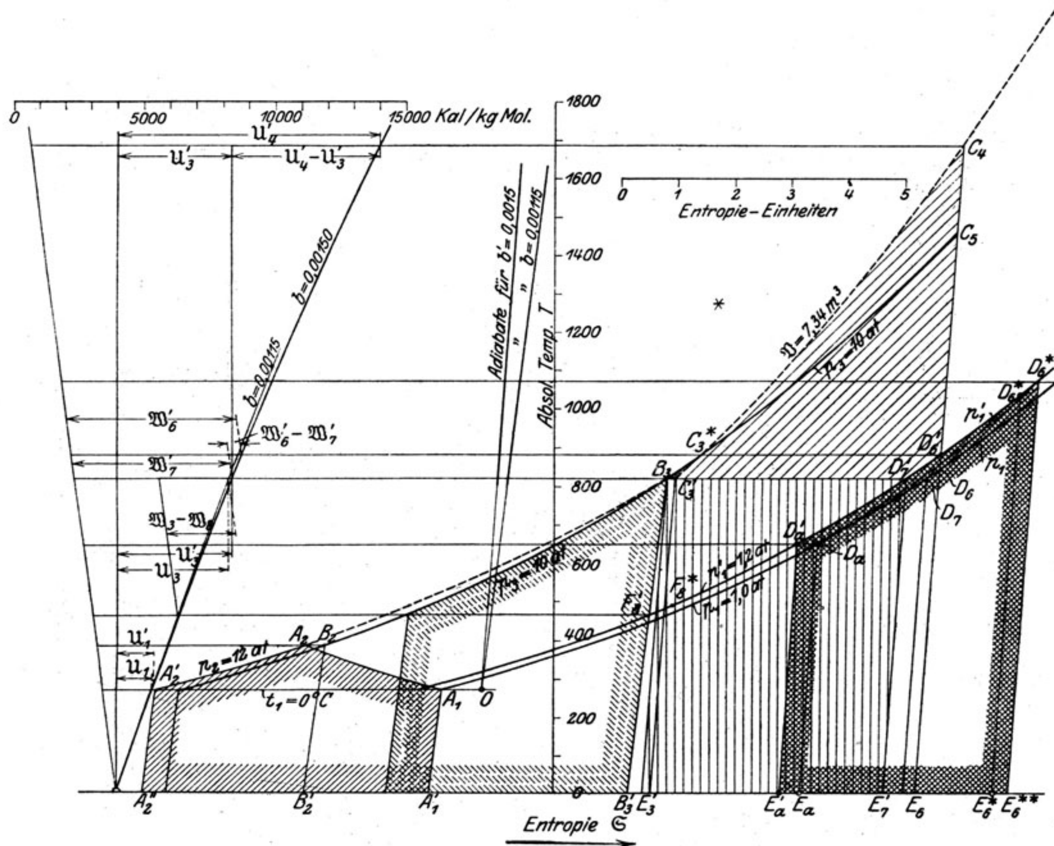


Abb. 1047. Entropieschaubild des Verpuffungsprozesses.

Änderung des Heizwertes.

Was die Verbrennung $C_3' C_4$ anbelangt, so ist gemäß Gl. (24) vom normalen Heizwert H_{v1} der Betrag $\varDelta H$ abzuziehen, den man für gewöhnlich vernachlässigen darf. Dieser Betrag kann immerhin im Entropiebild wie folgt abgelesen werden:

$$\varDelta H = (n' m' \bar{c}_v' - n m \bar{c}_v)(T_3 - T_1) = n' \left[\overline{\mathfrak{C}}_v' - \frac{n}{n'} \overline{\mathfrak{C}}_v\right](T_3 - T_1)$$

$$= n' \left[(\mathfrak{U}_3' - \mathfrak{U}_1') - \frac{n}{n'}(\mathfrak{U}_3 - \mathfrak{U}_1)\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Oder es ist, auf 1 Mol der Verbrennungsprodukte bezogen (abgekürzt bezeichnet):

$$\varDelta \mathfrak{H}_v' = \varDelta \mathfrak{U}'_{(3-1)} - \frac{n}{n'} \cdot \varDelta \mathfrak{U}_{(3-1)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16\text{a})$$

Gemäß (Gl. 6) wird mithin, wenn $\mathfrak{H}'_{1v} = \frac{H_v}{n'}$ und $\mathfrak{Q}_w' = \frac{Q_w}{n'}$

$$\mathfrak{U}_4' = \mathfrak{U}_3' + \mathfrak{H}'_{1v} - \Delta\mathfrak{H}' - \mathfrak{Q}_w' \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (17)$$

Vermöge dieser Gleichung wird bei gegebenem $\mathfrak{H}_v$ die Lage des Punktes C_4 **bestimmt.** Umgekehrt wird bei vorgeschriebener Lage von C_4 der Heizwert sich berechnen **lassen,** und zwar mit Vernachlässigung von $\Delta\mathfrak{H}'$ als

$$\mathfrak{H}_v' = \mathfrak{U}_4' - \mathfrak{U}_3' + \mathfrak{Q}_w' \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (17\text{a})$$

in kcal für 1 Mol nach der Verbrennung.

Der **Wandverlust** sei als Teil des Heizwertes ausgedrückt, dann folgt auch

$$\mathfrak{Q}_w' = \varphi\,\mathfrak{H}_v' \quad \text{und} \quad \mathfrak{H}_v' = \frac{\mathfrak{U}_4' - \mathfrak{U}_3'}{1-\varphi} \quad \ldots \ldots \ldots (17\text{b})$$

Die auf 1 Mol. des Ladegemisches erforderliche **Verdichtungsarbeit** ist im **Entropiebild** durch die mit schräg schraffiertem Rand versehene Fläche **dargestellt,** und **werde** im Wärmemaß mit $\mathfrak{Q}_k$ bezeichnet. Dann ist die **aus dem Verbrennungsvorgang stammende effektive Arbeit** für n ursprüngliche Mole des Ladegemisches

$$A L_{ev} = \eta_t n' \mathfrak{Q}_t' - n \frac{\mathfrak{Q}_k}{\eta_k} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (18)$$

oder in kcal für 1 Mol der Verbrennungsgase

$$\mathfrak{Q}'_{ev} = \eta_t \mathfrak{Q}_t' - \frac{n}{n'}\frac{\mathfrak{Q}_k}{\eta_k} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (18\text{a})$$

Die **aus dem Spülprozeß stammende** (bei Vorwärmung und hohem Spüldruck positive, sonst negative) Arbeit wird gewonnen durch die adiabatische Ausdehnung vom **Zustande** B_3 im Entropiebild auf Zustand F_8' auf der Drucklinie p_1'. Sie wird mithin **für 1 Mol durch** die unterhalb der Drucklinie p_3 gelegene, mit punktierter Schraffur versehene Fläche dargestellt, wobei die Richtung der Adiabate $B_3 F_8'$ streng genommen reiner Luft entsprechen sollte, um Umständlichkeit zu vermeiden, jedoch mit der des Ladegemisches gleichgerichtet angenommen wird. Diese Fläche ist für 1 Mol $\mathfrak{Q}_{ts} = \mathfrak{W}_3 - \mathfrak{W}_8$.

Indem wir die Verdichtungsarbeit in gleicher Annäherung dem oben ermittelten $\mathfrak{Q}_k$ gleichsetzen, erhält man

$$A L_{es} = n_s \left(\eta_{ts} \cdot \mathfrak{Q}_{ts} - \frac{\mathfrak{Q}_k}{\eta_k}\right) = n_s \mathfrak{Q}_{es} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (19)$$

Die **Gesamtarbeit** ist somit

$$L_e = L_{ev} + L_{es} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (20)$$

Daraus folgt der **Nutzungsgrad der Gaswärme** (thermischer Wirkungsgrad)

$$\eta_{we} = \frac{A \cdot L_e}{n' \mathfrak{H}_p'} = \frac{\mathfrak{Q}'_{ev}}{\mathfrak{H}_p'} + \frac{n_s}{n'}\frac{\mathfrak{Q}_{es}}{\mathfrak{H}_p'} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (21)$$

An Stelle von $\mathfrak{H}_p'$ darf unbedenklich $\mathfrak{H}_v'$ gesetzt werden. Was die Spülarbeit **anbelangt,** vgl. man Abschn. 206.

Auspufftemperaturen.

Bedeuten η_{vi} und η_{si} die inneren Wirkungsgrade der Nutzperiode und der Spülperiode, jedoch mit Ausschluß des Auslaßverlustes, so ist die bis zum Austritt **aus dem** Rade erzeugte Reibungswärme für je 1 Mol $\mathfrak{Q}_{rv} = (1 - \eta_{vi})\mathfrak{Q}_t'$, $\mathfrak{Q}_{rs} = (1 - \eta_{si})\mathfrak{Q}'_{st}$, durch deren Eintragung auf die Linie p_1' die Punkte D_6^* und F_8^* entstehen. Die Schaufel ist während der Spülperiode nur bis zu F_8^* reichenden Temperaturen ausgesetzt; während der Auspuffperiode reichen sie bis zu D_6^*. Wir untersuchen weiter unten, wie die kühlende Wirkung der Spülung auf die Schaufel zu beurteilen ist.

Größe des Wärmeaustausches.

Zwischen Verdichter und Turbine wird der frischen **Ladung** bei einem von p_2 auf p_3 abnehmenden Druck eine Wärmemenge zugeführt, die nach der Energieformel für 1 kg

$$q_a = i_3 - i_2 + A\frac{c_3^2 - c_2^2}{2g} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (22\text{a})$$

kcal beträgt, wenn $c_2\, c_3$ die Strömungsgeschwindigkeiten in den Zuständen 2 und 3 bedeuten. Für 1 Mol der frischen Ladung ist die zuzuführende Menge

$$\mathfrak{Q}_a = \mathfrak{W}_3 - \mathfrak{W}_2 + Am\frac{c_3^2 - c_2^2}{2g} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (22\,\mathrm{a})$$

Da man den Unterschied der kinetischen Energie meist vernachlässigen kann, so ist im Entropiebild $\mathfrak{Q}_a$ = Zunahme des Wärmeinhaltes = Fläche $B_2 B_3 B_3' B_2'$. Die Abgase werden infolge des Auslaßverlustes mit dem, über D_6^* gelegenen mittleren Zustand D_6^{**} angeliefert. Findet keine Zusatzspülung statt, so liefert 1 Mol der Verbrennungsprodukte im Austauschkörper bei der Abkühlung auf die Temperatur D_a die Wärmemenge

$$\mathfrak{Q}_a' = \mathfrak{W}_6^{**} - \mathfrak{W}_a' - Am'\frac{c_a^2}{2g} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (23)$$

ab, wobei c_a die schließliche Austrittsgeschwindigkeit bedeutet (die Eintrittsgeschwindigkeit ist $= 0$ gedacht, da in D_6^{**} auch der Auslaßverlust der Turbine einbegriffen ist). Auch deren Energie ist unbedeutend, so daß $\mathfrak{Q}_a'$ im wesentlichen durch die Abnahme des Wärmeinhaltes, d. h. die mit kreuzweise schraffiertem Rand versehene Fläche in Abb. 1047 dargestellt wird. In $\mathfrak{Q}_a$ ist die Wärme eingeschlossen, die im Innern der Verpuffungskammer durch die Strahlung von den Wänden ans Gas übergeht. Vernachlässigen wir diesen schwer schätzbaren Betrag, ebenso wie die Ausstrahlung des Wärmeaustauschers nach außen, so muß die Beziehung

$$n\,\mathfrak{Q}_a = n'\,\mathfrak{Q}_a' \quad \text{oder} \quad \mathfrak{Q}_a' = \frac{n}{n'}\,\mathfrak{Q}_a \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (24)$$

bestehen, die zur Bestimmung des Punktes D_a dient.

Vereinfachung des Entropiebildes.

Wenn es sich um Berechnung von zahlreichen Vergleichsflächen handelt, darf man das Entropiebild vereinfachen, indem man von inneren Drosselungen absieht, wodurch $p_3 = p_2$ $p_1' = p_1$ wird, und A_2 mit B_2 zusammenfällt. Ebenso wird man die Raumverminderung bei der Verbrennung außer acht lassen, so daß C_3' und B_3 zusammenfällt. Beträgt diese Verminderung rd. 5 v. H., so wird bei $p_2 =$ rd. 10 at abs. der Gesamtwirkungsgrad durch diese Vernachlässigung um rd. 1,0 v. H. herabgesetzt. Fast keinen merklichen Einfluß hat die Heizwertberichtigung $\Delta\,\mathfrak{H}$, die man überhaupt weglassen darf.

Übersicht über die bei Vorwärmung der frischen Ladung durch den Auspuff erreichbaren thermischen Wirkungsgrade zwischen 5 und 20 at abs. Verdichtungsspannung bei 1,2 at abs. Gegendruck.

Zum Zwecke einer Übersicht über die erreichbaren Wirkungsgrade wurde ein Kraftgas mit rd. 1100 kcal/cbm unterem Heizwert angenommen. Da man, wie die Berechnung zeigt, mit erheblichen Luftüberschüssen arbeiten muß, darf als Beiwert b im Ausdruck der spezifischen Wärme für das Frischladegemisch im Mittel $b = 0{,}00115$ und für die Verbrennungsgase $b = 0{,}0015$ angesetzt werden. Die mittlere Raumverminderung beträgt 5 v. H., sie wurde bei der Ermittlung des Wirkungsgrades vernachlässigt, ebenso blieben die inneren Drosselungsverluste unbeachtet. Die hauptsächlichsten Kennziffern, von welchen die Beurteilung der Betriebsverhältnisse (der Gefahren oder zumindest der Schwierigkeiten) der Gasturbine abhängt, sind

1. die Gastemperatur innerhalb der Schaufel. Der Gasstrom trifft die erste Schaufelreihe mit der größten Geschwindigkeit, allein seine Temperatur ist tiefer als in der zweiten Reihe, da inzwischen kinetische Energie in Wärme umgewandelt worden ist. Da ferner die Kühlwirkung für die zweite Schaufelreihe weniger wirksam sein dürfte als für die erste, so wählen wir (auch noch um die Berechnung von zu viel Umständlichkeiten zu befreien) als Kennzeichen die Temperatur am Austritt aus dem Laufrade, die in Abb. 1047 dem Punkt D_6^* entspricht. Das weiter unten erörterte Kühlverfahren oder die Verwendung in hocherhitztem Zustande widerstandsfähiger Baustoffe erlaubt es, höhere Temperaturen ins Auge zu fassen, als welche wir

$$t = 600,\ 800,\ 1000^{0}\,\mathrm{C}\ [\text{also } T = 873,\ 1073,\ 1273^{0}\ \text{abs.}]$$

festsetzen. Der erforderliche Luftüberschuß wird so bemessen, daß trotz veränderlicher Turbinenwirkungsgrade stets diese Temperaturen am Austritt zum Vorschein kommen. (Der Einfachheit halber wurde in der Ausrechnung $\eta_{vi} = \eta_t$ gesetzt, so daß im Zustand D_6^* auch der Auslaßverlust der letzten Schaufel eingeschlossen ist; doch spielt diese Vernachlässigung in bezug auf die Erwärmung eine geringe Rolle.)

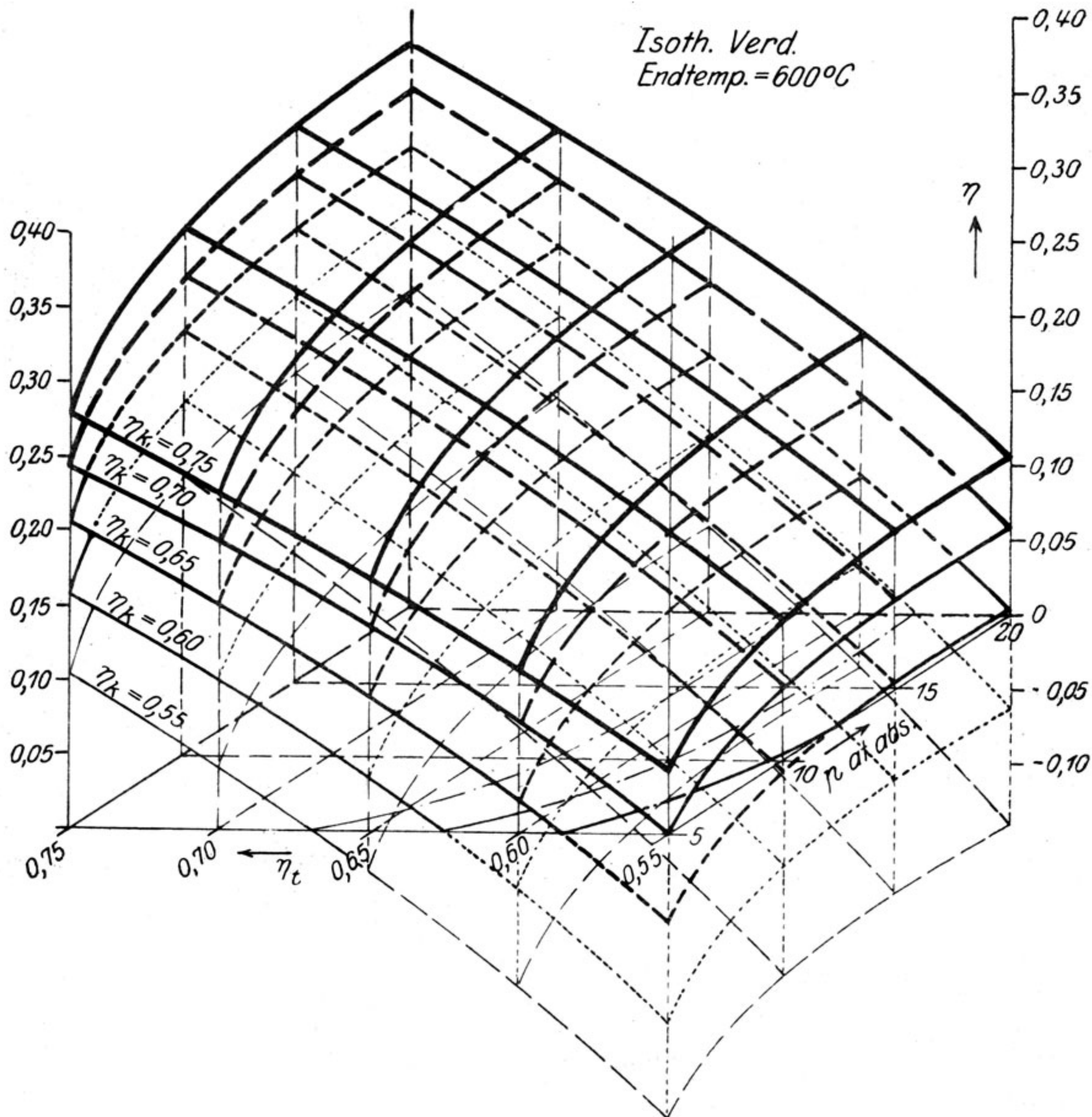


Abb. 1048.
Verpuffungsturbine mit Ladungsvorwärmung durch Abwärme bei 600° C Schaufel-Höchsttemperatur.

2. die Vorwärmung des frischen Ladegemisches. Diese sollte so hoch getrieben werden, als die Temperatur der Abgase mit Rücksicht auf ein praktisch ausreichendes Wärmegefälle für die Übertragung zuläßt. Bei einer Gasturbine jedoch, wo Gas und Luft spätestens in der Verbrennungskammer zusammentreffen, ist man durch die Gefahr der Selbstzündung genötigt, eine tiefere Temperatur einzuschalten. Für diese Übersicht wurde eine Vorwärmtemperatur von

$$t = 550^0\,\mathrm{C}$$

gewählt, die so ziemlich die Grenze des Zulässigen mit Rücksicht auf die Versuche von

G. Falk[1]) bedeuten dürfte (wir wiederholen, daß der Luftüberschuß im allgemeinen ein erheblicher ist).

3. die Höchsttemperatur der Verbrennung. Diese hängt von dem auf 1 Mol entfallenden Heizwert der Anfangstemperatur und dem Abkühlungsverlust ab. Letzterer wurde durchweg mit 10 v. H. des Heizwertes angesetzt, der bei 20 at Verdichtungsspannung bis zum

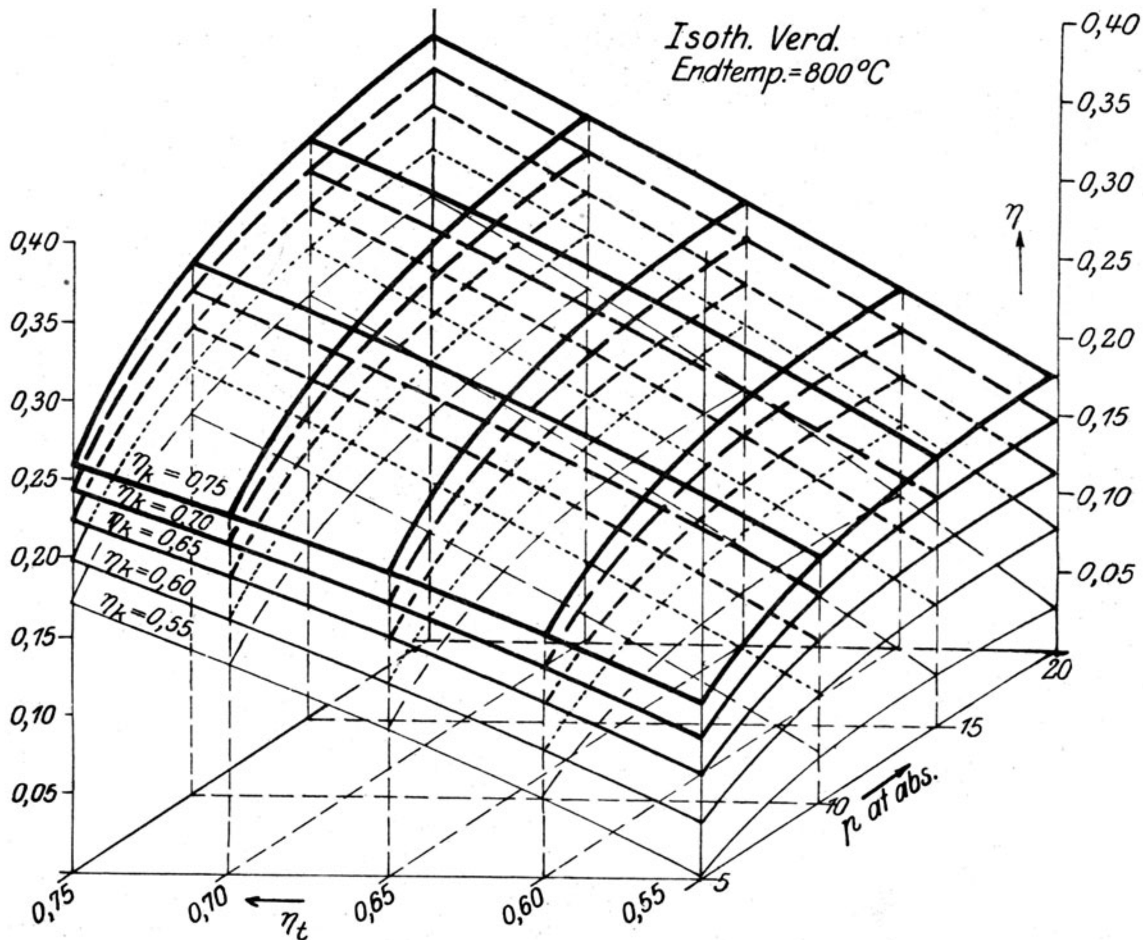


Abb. 1049.
Verpuffungsturbine mit Ladungsvorwärmung durch Abwärme bei 800° C Schaufel-Höchsttemperatur.

Höchstwert von 11600 kcal/Mol emporsteigt, wodurch sich eine Verbrennungstemperatur von 1940° C ergibt. Aus der Übersicht erhellt, daß dieser Zustandspunkt praktisch nie zur Benützung gelangen dürfte, so daß man wegen der Verbrennungstemperatur keine Bedenken zu hegen hat.

4. Die Verpuffungsspannung erreicht im äußersten Fall bei 20 at abs. Verdichtungsspannung 52 at abs.; es liegen auch diesbezüglich keine Bedenken vor.

5. Die Wirkungsgrade der Turbine und des Verdichters. Um in keiner Weise beengt zu sein, wurde die Untersuchung mit den Einzelwerten

$$\left.\begin{matrix}\eta_t\\ \eta_k\end{matrix}\right\} = 0{,}55;\ 0{,}60;\ 0{,}65;\ 0{,}70;\ 0{,}75$$

durchgeführt. Die Verdichtung wurde streng isothermisch vorausgesetzt; kleine Abweichungen hiervon können annähernd dadurch berücksichtigt werden, daß man den Wirkungsgrad der Verdichtung um einen angemessenen Betrag kleiner voraussetzt. Die Verhältnisse bei adiabatischer Verdichtung werden weiter unten besprochen.

[1]) Annal. d. Physik 1907, 24, S. 450.

Die so gewonnenen Ergebnisse sind in Abb. 1048, 1049, 1050 für die Endtemperaturen 600, 800, 1000° C in einem räumlichen Koordinatensystem dargestellt[1]). Es zeigt sich, daß die beste Übersicht gewonnen wird, wenn man als X-Achse den Turbinenwirkungsgrad, als Y-Achse die Verdichtungsspannung wählt und den thermischen Wirkungsgrad für je einen bestimmten Verdichterwirkungsgrad, zu einer Fläche zusammengefaßt, als Z-Koordinate aufträgt. Man erkennt, daß der thermische Wirkungsgrad mit dem Turbinenwirkungsgrad nahezu linear wächst. Bei steigender Verdichtungsspannung wächst im Anfang der Wirkungsgrad rasch, später langsam, so zwar, daß im allgemeinen Verdichtungsspannungen über 10 at wegen der stark zunehmenden Anlagekosten kaum in Betracht fallen dürften. Eine eigentümliche Rolle spielt die Austrittstemperatur. Bei ganz

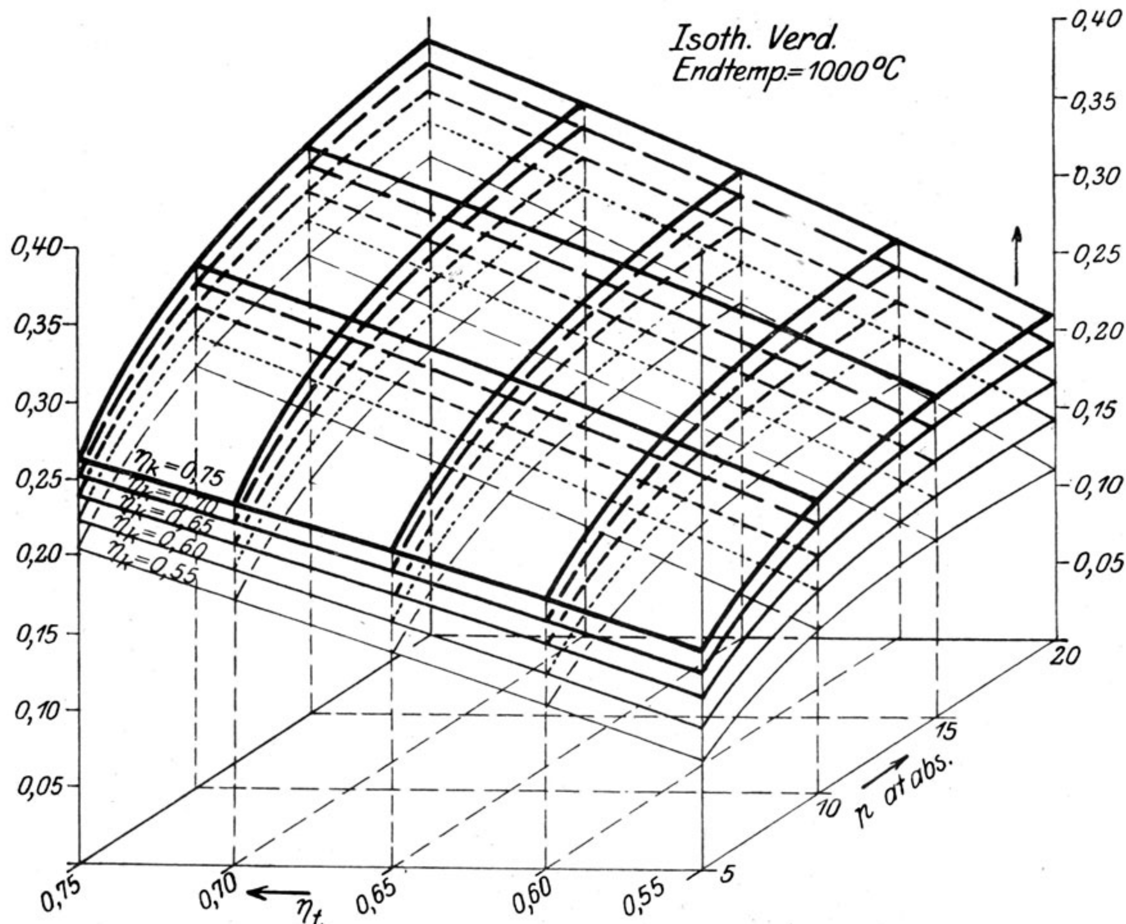


Abb. 1050. Verpuffungsturbine mit Ladungsvorwärmung durch Abwärme bei 1000° C Schaufel-Höchsttemperatur.

hohen Turbinenwirkungsgraden gelangt man bei gleich hoher Verdichtung fast unabhängig von der Austrittstemperatur zu gleichen Wirkungsgraden. Je schlechter der Turbinenwirkungsgrad ist, desto wichtiger ist es, die Austrittstemperatur hochzuhalten. Eine ausschlaggebende Bedeutung kommt dem Verdichtungswirkungsgrad zu, und zwar um so mehr, je niedriger die Austrittstemperatur der Gase ist. Bei 1000° Austrittstemperatur sind die den verschiedenen Kompressorwirkungsgraden entsprechenden Gütegradflächen stark zusammengedrängt, bei 600° Austrittstemperatur weit auseinandergerückt, so daß bei dieser Temperatur schon negative Wirkungsgrade zum Vorschein kommen. Nehmen wir an, daß als heute erreichbare Werte

Effekt. Turbinenwirkungsgrad 60 v. H., Isotherm. Kompressorwirkungsgrad 70 v. H., Temperatur am Laufradaustritt 1000° C,

[1]) Für die Erledigung der mühsamen und zeitraubenden Ermittlungen bin ich meinem früheren Assistenten Herrn Ing. Schrenk, zu Dank verpflichtet.

gelten können, so erhält man bei Verdichtung auf 20 at abs. einen **thermischen Wirkungsgrad von rd. 24 v. H.** Ist man gezwungen, mit der Austrittstemperatur auf 600° C herabzugehen und darf als Kompressorwirkungsgrad wegen nicht ganz isothermischer Verdichtung (auf eine solche bezogen) nur 0,65 eingesetzt werden, so sinkt der Wärmenutzungsgrad unter sonst gleichen Umständen auf rd. 14 v. H. Da nun auch die Vorwärmung auf 550° C für die Heizflächen Baustoffe besonderer Art voraussetzt, also vorläufig mit geringerer Vorwärmung vorlieb genommen werden muß, **muß das Ergebnis dieser Turbinenart als unbefriedigend bezeichnet werden.**

203. Verpuffungsturbine mit Verwertung der Abwärme in einer Dampfturbine.

Statt die Abwärme dem frischen Ladegemisch in einen Vorwärmer zuzuführen, kann man damit Dampf erzeugen, der in einer Dampfturbine Arbeit leistet und in einem Kondensator niedergeschlagen wird. Die Zustandsfolge der Gasladung kann durch Abb. 1047 mit folgenden Veränderungen veranschaulicht werden. $A_1 A_2$ bedeutet wieder die polytropische Verdichtung. $A_2 B_2$ ist der Drosselverlust während des Übertritts in die Verpuffungskammer, den man jedoch, da kein Wärmeaustauschkörper durchströmt wird, als sehr gering veranschlagen darf. $B_2 B_3$ würde die Erwärmung darstellen, die das Gas noch während des Einströmens durch die Wirkung der heißen Wände erfährt. Infolge der anzustrebenden kurzen Zeitdauer der Füllung dürfte auch diese Wärme vernachlässigbar sein. $B_3 C_3'$ ist die gemäß der Theorie von Anfang an einzuführende Raumabnahme während der Verbrennung; $C_3' C_4$ ist der Ersatz der Verpuffung durch äußere Wärmezufuhr des Heizwertes. $C_4 D_6'$ ist die adiabatische Ausdehnung auf den Gegendruck p_1', der auch bei diesem Verfahren infolge der Widerstände im Dampfkessel über dem Atmosphärendruck p_1 gelegen ist. D_6^* bedeutet die mittlere Temperatur der Verbrennungsgase nach dem Verlassen des Laufrades. D_6^{**} dasselbe einschließlich die Temperaturerhöhung durch Vernichtung der Auslaßenergie. D_a kann den Zustand beim Verlassen des Dampfkessels darstellen. Man wird anstreben, D_a möglichst tief auf der Linie $p_1 =$ konst. herabzudrücken. Die für die Turbine verfügbare Arbeit ist mithin im Wärmemaß gemäß Gl. 15a, 15b des vorigen Abschnitts auf 1 Mol der Verbrennungsgase bezogen:

$$\mathfrak{Q}_t' = \mathfrak{U}_4' - \mathfrak{U}_3' - (\mathfrak{W}_6' - \mathfrak{W}_7') + T_{3\,m}\,\Delta\mathfrak{S} = \mathfrak{U}_4' - \mathfrak{W}_6' + A\,\mathfrak{R}\,T_3 + T_{3\,m}\,\Delta\mathfrak{S} \quad . \; (1)$$

Das letzte Glied ist vernachlässigbar. Der Heizwert und der Wandverlust sind nach 17b

$$\mathfrak{H}_v' = \frac{\mathfrak{U}_4' - \mathfrak{U}_3'}{1-\varphi}; \qquad \mathfrak{Q}_w' = \varphi\,\mathfrak{H}_v' \quad \ldots \ldots \ldots \; (2)$$

Die effektive Arbeit des Gasprozesses für 1 Mol der Verbrennungsgase in kcal

$$\mathfrak{Q}_{eg}' = \eta_t\,\mathfrak{Q}_t' - \frac{n}{n'}\frac{\mathfrak{Q}_k}{\eta_k} \quad \ldots \ldots \ldots \; (3)$$

Der Wärmenutzungsgrad des Gasprozesses allein

$$\eta_{ge} = \frac{\mathfrak{Q}_{eg}'}{\mathfrak{H}_p'} \simeq \frac{\mathfrak{Q}_{eg}'}{\mathfrak{H}_v'} \quad \ldots \ldots \ldots \; (4)$$

Wird zum Zwecke der Kühlung ein starker Spülluftüberschuß durch das Laufrad gepreßt, so wird, da keine Vorwärmung vorhanden ist, Energie verbraucht, die von $\mathfrak{Q}_e'$ abzuziehen ist und η_{ge} vermindert.

Zur Verwertung in der Abwärmedampfturbine steht den Abgasen die zwischen den Zuständen D_6^{**} und A_1 entziehbare Wärme zur Verfügung. Je nach der Höhe der Anfangstemperatur und der Art und Größe der einzubauenden Kesselheizfläche wird die Ausnutzung eine mehr oder minder vollständige sein. Die Heranziehung der Verpuffungskammern zur Dampferzeugung erscheint ebenfalls geboten. Wird auf diese Weise eine effektive Arbeit von $\mathfrak{Q}_{ed}'$ kcal auf 1 Mol der Verbrennungsgase gewonnen, so erhöht sich der Wärmenutzungsgrad auf

$$\eta_{ew} = \frac{\mathfrak{Q}_{eg}' + \mathfrak{Q}_{ed}'}{\mathfrak{H}_p'} = \frac{\mathfrak{Q}_e'}{\mathfrak{H}_p'} \quad \ldots \ldots \ldots \; (5)$$

a) Isothermische Verdichtung.

Thermische Wirkungsgrade zwischen 2 und 10 at abs. Verdichtungsspannung bei 1, 2 at abs. Gegendruck.

Infolge der erheblich stärkeren Ladung, die die Gasturbine bei gleich hoher Schaufeltemperatur bei diesem Verfahren verträgt, ist der Luftüberschuß ein viel geringerer. Der Beiwert b der spezifischen Wärme konnte zwar für die frische Ladung immer noch mit

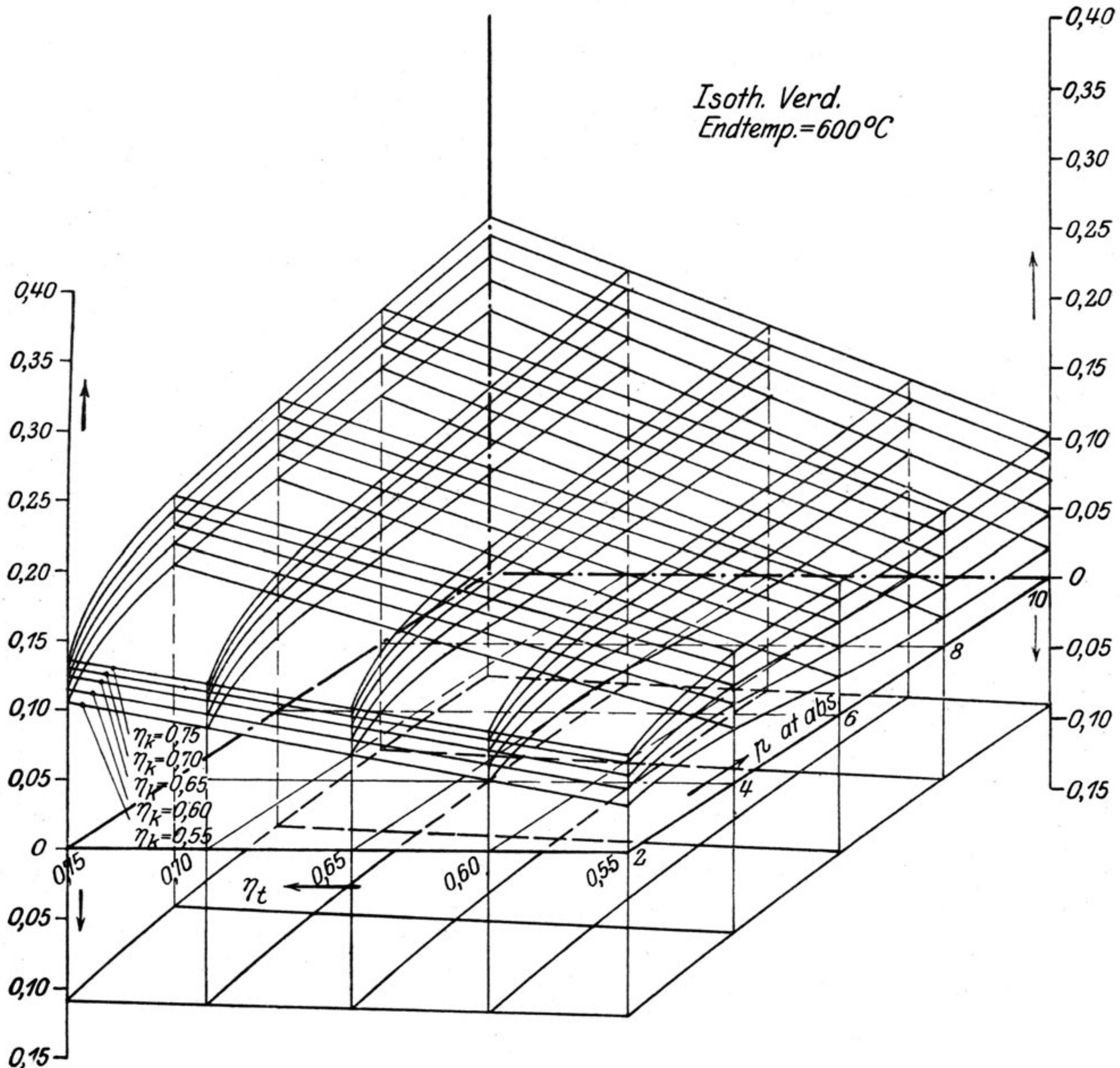


Abb. 1051. Verpuffungsturbine mit Abwärme-Dampfturbine bei 600° C Schaufel-Höchsttemperatur

0,00115 beibehalten, mußte jedoch für die Abgase auf 0,0018 erhöht werden. Die Raumverminderung dürfte im Mittel etwa 0,08 ausmachen, wurde jedoch nur in der Molzahl n, n' berücksichtigt. Da der thermische Wirkungsgrad mit der Spannung langsam zunimmt, schien es genügend, die Verdichtungsspannung auf 10 at abs. zu begrenzen. Die sich ergebende Höchsttemperatur steigt dennoch bis auf 2400° abs., mit einer Höchstspannung der Verpuffung von 81 at abs. Doch kommen jene Zustandspunkte für die praktisch brauchbaren Verhältnisse nicht in Betracht. Als Temperaturen am Radaustritt

sind [einschließlich der Auslaßenergie] wieder 600, 800 und 1000° C gewählt worden. Die Ergebnisse sind in den Abb. 1051, 1052, 1053 so dargestellt, daß auf die X-Achse der mittlere Turbinenwirkungsgrad, auf die Y-Achse die Verdichtungsspannung und auf die Z-Achse, nach oben hin, der thermische Wirkungsgrad des Gasprozesses allein, also ohne Rücksicht auf den Abwärmegewinn aufgetragen ist. Da die Abwärme für eine be-

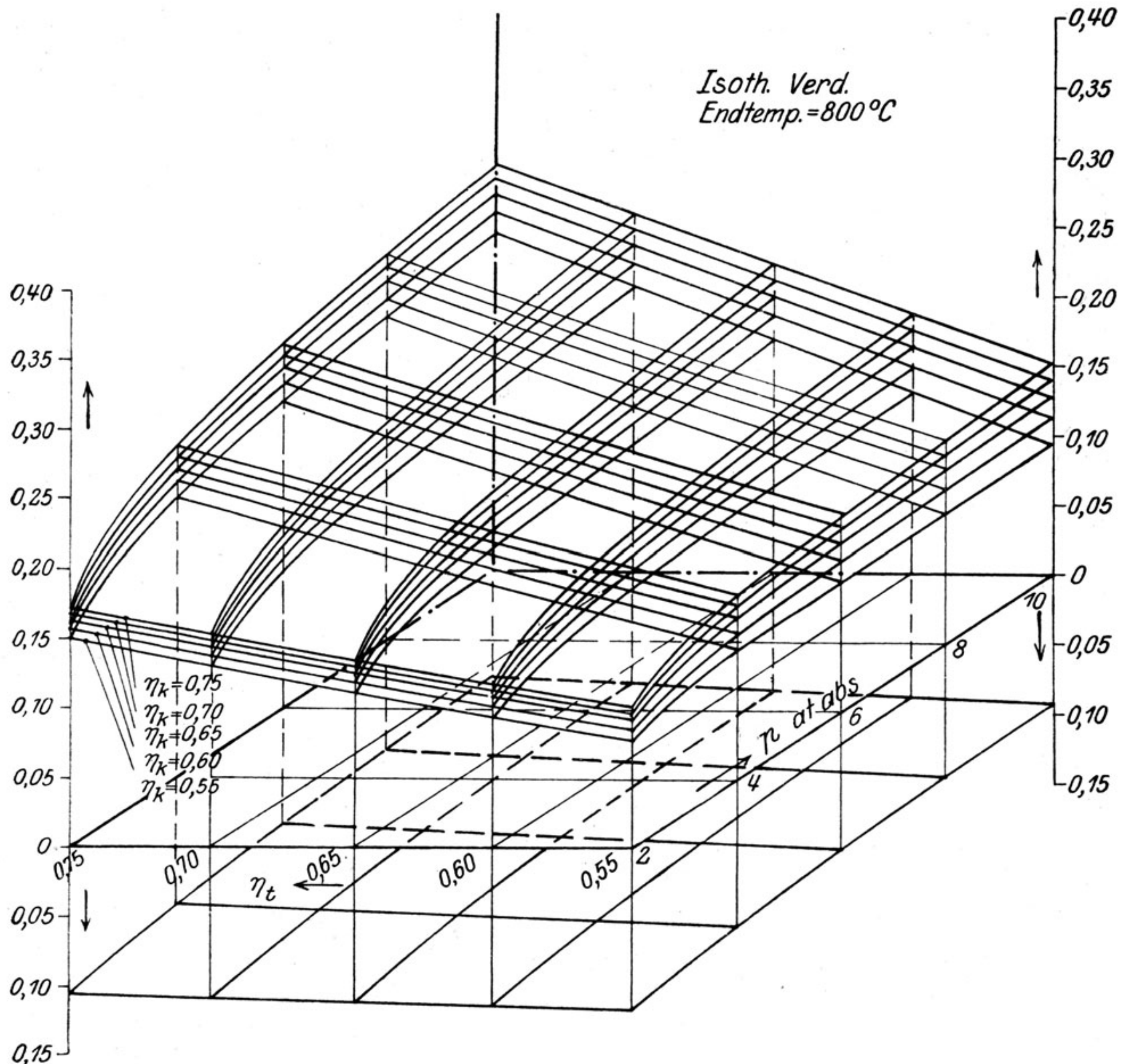


Abb. 1052. Verpuffungsturbine mit Abwärme-Dampfturbine bei 800° C Schaufel-Höchsttemperatur.

stimmte Schaufeltemperatur vom Verdichtungswirkungsgrad nicht abhängt, ist der Gewinn der Abwärmeturbine in Teilen des Heizwertes von der XY-Ebene nach abwärts aufgetragen. Dabei wurde die Voraussetzung gemacht, daß von der in den Abgasen enthaltenen Wärme 80 v. H. an den Dampf übergehen und daß hiervon in der Dampfturbine 20 v. H. als Nutzarbeit abgeliefert werden, d. h. daß der Wärmenutzungsgrad des Dampfturbinenprozesses 16 v. H. beträgt. Der Wandverlust in den Verpuffungskammern ist in der Abwärme nicht berücksichtigt. Die gesamte Wärmeausnutzung ist die Summe der zu einem beliebigen Punkte der XY-Ebene gehörenden beiden Wirkungsgrade. Vergleicht man die Ergebnisse mit denjenigen des vorigen Abschnittes, so zeigen sie sich jenen durchwegs

überlegen. Die größte Steigerung des Wirkungsgrades findet zwischen 2 und 4 at abs. Verdichtungsdruck statt. Der Verdichtungswirkungsgrad übt unter sonst gleichen Umständen einen weit geringeren Einfluß aus, als bei der Vorwärmung der frischen Ladung. Greifen wir 1000° C als zulässige Höchsttemperatur heraus, so stellt sich mit den Ansätzen

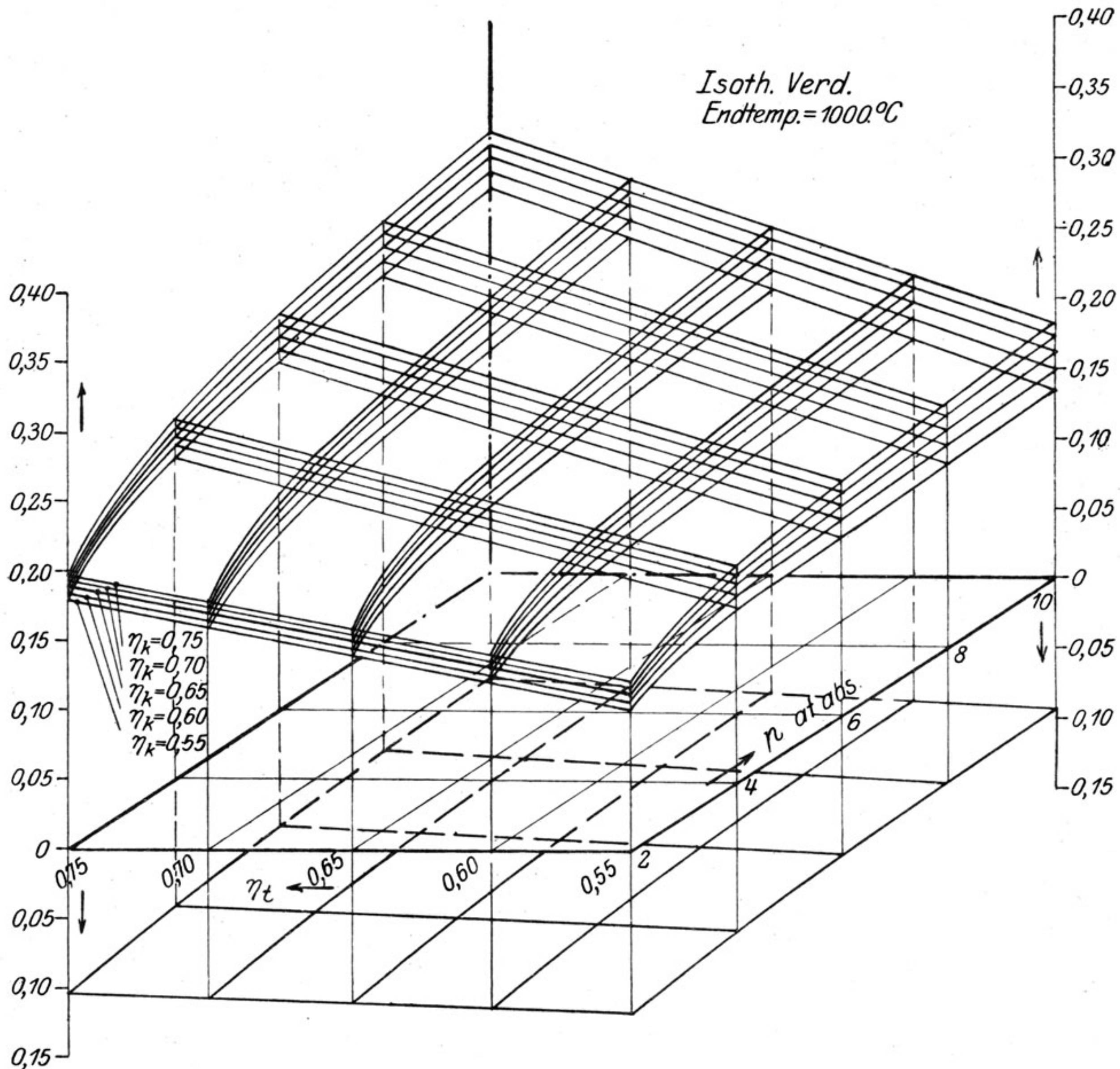


Abb. 1053. Verpuffungsturbine mit Abwärme-Dampfturbine bei 1000° C Schaufel-Höchsttemperatur.

Turbinenwirkungsgrad	60 v. H.,
Verdichterwirkungsgrad	70 v. H.,
Verdichtungsspannung	10 at

eine **Gesamt-Wärmeausnützung von 29 v. H.** heraus. Wenn man den Wärmeverlust in der Verpuffungskammer, der mit 10 v. H. des Heizwertes angesetzt worden ist, zur Dampferzeugung heranzieht, kann das Ergebnis noch um ein geringes verbessert werden.

Auf festen Brennstoff, bezogen erhalten wir mit 0,85 Gaserzeugerwirkungsgrad $\eta_b = 0{,}85 \times 0{,}29 = 0{,}247$, allein alles unter Voraussetzung von 1000° C Schaufeltemperatur. Sind Baustoffe für so hohe Temperaturen nicht verfügbar, muß man mithin zu **künstlicher Kühlung** greifen, und wählt man dafür das Verfahren der **Luftkühlung**, so sinkt der

Wirkungsgrad gemäß Abschn. 206 sofort auf 20 v. H. und darunter, wird also von guten Dampfturbinenanlagen überboten. In Abschn. 205 werden Arbeitsverfahren besprochen, die in dieser Hinsicht aussichtsreicher zu werden versprechen.

Heizwerte, Drücke und Temperaturen für die mittleren Werte $\eta_k = \eta_t = 0{,}65$.

An Abb. 1054 sind für die obigen Mittelwerte folgende Größen als Abhängige des Verdichtungsdruckes dargestellt:

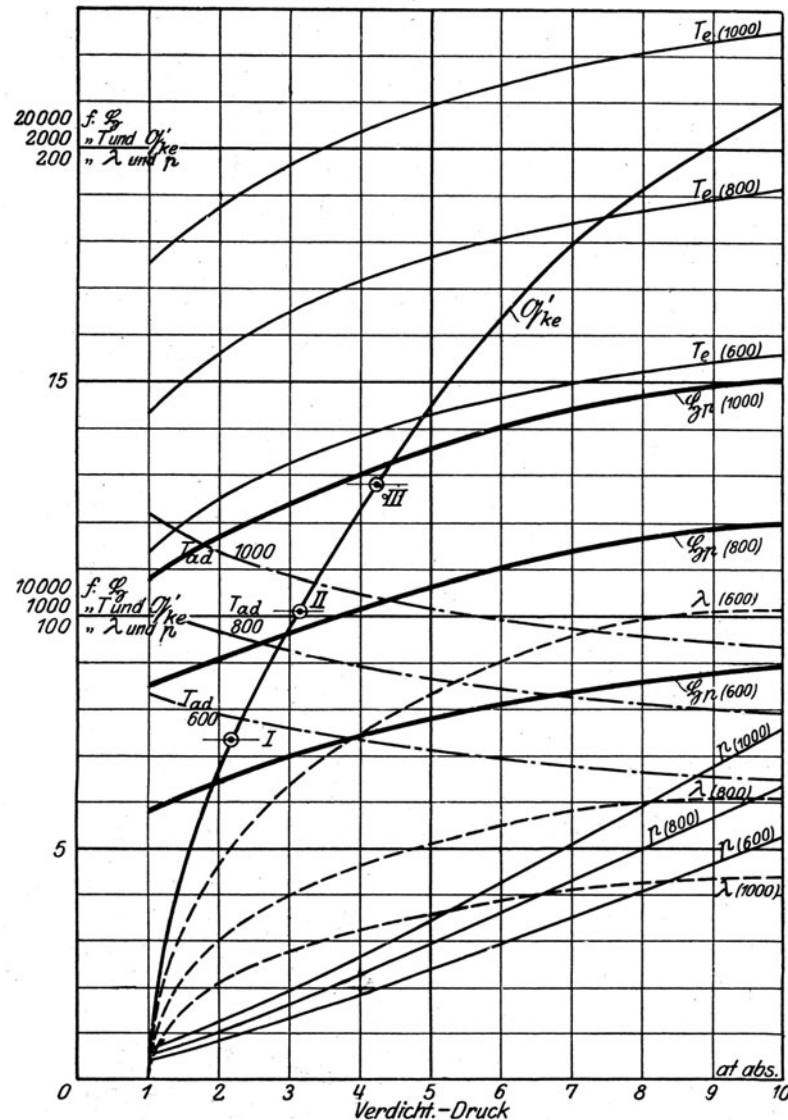


Abb. 1054. Drücke, Temperaturen, Heizwerte für Verpuffungsturbinen mit isothermischer Verdichtung und Abwärmeturbine.

1. Die Heizwerte bezogen auf 1 Mol nach der Verbrennung. Die Gleichung

$$\mathfrak{Q}'_e = \eta_w \, \mathfrak{H}' \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

erlaubt die auf ein Mol entfallende Nutzarbeit zu berechnen. Ist N_e die Nutzarbeit in PS, so ist der stündliche (Ab-)Gasverbrauch in Molen

$$\text{Mole}_{\text{Stunde}} = \frac{632\, N_e}{\mathfrak{Q}'_e} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

2. Der effektive Arbeitsverbrauch des Verdichters in kcal für ein Mol der Feuergase $\mathfrak{Q}'_{ke} = \frac{n}{n'} \frac{\mathfrak{Q}_k}{\eta_k}$. An Hand der betreffenden Schaulinie kann insbesondere festgestellt werden, bis zu welcher Druckgrenze die Abdampfturbine gerade ausreicht, um den Verdichter anzutreiben. Man findet bei den

Schaufeltemperaturen	t^0 C	600	800	1000
die Abdampfturbinenarbeit in kcal für 1 Mol Abgas . .		736	1008	1280
erforderliche Mindestverdichtung	p_k at abs.	2,2	3,2	4,3

Die Abtrennung der Abwärmeturbine mit dem Verdichter als eigene Gruppe setzt eine Regelung der Hauptturbine durch Abschaltung von Kammern und besondere Einrichtungen voraus.

3. Das Verhältnis der Verdichtungsarbeit zur Nutzarbeit in v. H. mit der Bezeichnung

$$\lambda = 100 \frac{\mathfrak{Q}'_{ke}}{\mathfrak{Q}_e'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

also je eine Schaulinie für die Schaufeltemperaturen 600, 800, 1000° C. Man erkennt, daß bei steigendem Vedichtungsdruck dieser Arbeitsanteil bis auf 100 v. H. steigt, was mit entsprechender Vermehrung des Gewichtes und der Anlagekosten der Hilfsmaschinen verbunden ist.

4. Die Höchsttemperaturen (T_e) der Verpuffung. Je tiefer die zulässige Schaufeltemperatur ist, desto mehr muß auch T_e herabgesetzt werden, was eine entsprechende Einbuße an Wärmeausnutzung zur Folge hat.

5. Die Höchstwerte der Verpuffungsspannung. Diese steigen fast linear mit der Verdichtungsspannung. Aus den Schaulinien kann, wenn die Drücke durch Versuch bestimmt worden sind, auf die mittlere Gastemperatur in der Schaufel geschlossen werden.

6. Die Temperaturen der adiabatischen Entspannung auf den Gegendruck (mit T_{ad} bezeichnet). Sie weichen wie ersichtlich von den „Schaufeltemperaturen" um so mehr ab, je höher der Verdichtungsdruck ist. Sollte die Eintrittskante der ersten Laufschaufel sich als der gefährlichste Teil erweisen, so würde dies die Anwendung höherer Verdichtung nahelegen.

b) Adiabatische Verdichtung.

Die Wärmeausbeute ist bei adiabatischer Verdichtung erheblich schlechter als bei isothermischer. Bei Vernachlässigung von Drosselung und Raumverminderung können die Verhältnisse an Hand der (schematischen) Abb. 1055 wie folgt beurteilt werden. Die isothermische Verdichtungsarbeit ist die schräg schraffiert berandete Fläche $\mathfrak{Q}_i$, der Heizwert (einschließlich Wandverlust) ist Fläche $E_2 A_2 C_4 E_6$, die verfügbare Turbinenarbeit = Fläche $E_2 A_2 C_4 D_6' D_7' E_7$. Bei adiabatischer Verdichtung kann man, um den Anschluß an die gleiche Raumlinie zu erhalten, auf den (höheren) Druck p_2' verdichten, wodurch die Verdichtungsarbeit um den wage- und lotrecht schraffierten Inhalt $\Delta_1 \mathfrak{Q} + \Delta_2 \mathfrak{Q}$ vergrößert wird. Der Heizwert einschließlich Wandverlust nimmt um den Inhalt $\mathfrak{Q}_{ki} + \Delta_1 \mathfrak{Q}$ ab; die verfügbare Arbeit ist = Fläche $E_2' A_2' B_2 C_4 D_6' D_7' E_7$. Berechnet man nun die auf 1 Mol der Abgase bezogene Arbeit

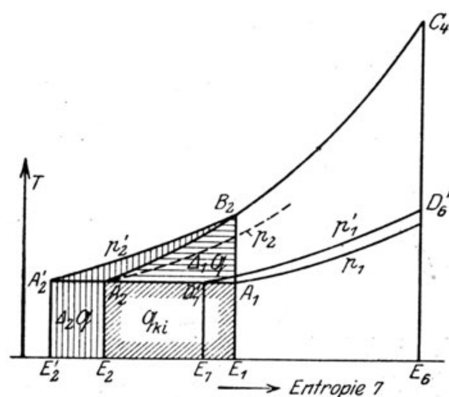


Abb. 1055. Entropieschaubild für isothermische und für adiabatische Verdichtung.

$$\mathfrak{Q}'_{ead} = \eta_t \mathfrak{Q}'_{tad} - \frac{\mathfrak{Q}'_{kad}}{\eta_{kad}} \quad \ldots \quad (9)$$

und den thermischen Wirkungsgrad

$$\eta_{wad} = \frac{\mathfrak{Q}'_{ead}}{\mathfrak{H}'_p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

so zeigt sich, daß trotz der Abnahme von $\mathfrak{H}_p'$ die Ausbeute um so mehr sinkt, je größer die Verdichtungsspannung ist.

Dies geht deutlich aus der graphischen Zusammenstellung, Abb. 1056, hervor, die auf gleicher Grundlage wie Abb. 1051—1053 für die Werte

Gasturbinenwirkungsgrad . . . . $\eta_t = 0{,}65$
Schaufeltemperatur . . . . $t_{sch} = 800^0\,\mathrm{C}$

entworfen ist. Die thermischen Wirkungsgrade für die Gasseite und die Dampfseite sind getrennt (nach oben und unten) aufgetragen worden. Man erkennt die gewaltige Einbuße, die schon von 3—4 at Verdichtung an der adiabatische Prozeß verursacht.

Die theoretisch erforderliche Arbeit zur isothermischen, bzw. adiabatischen Verdichtung von p_1 auf p_2 ist allgemein für 1 Mol

$$\mathfrak{L}_{isoth} = A\mathfrak{R}T_1 \lg n \frac{p_2}{p_1}; \qquad \mathfrak{L}_{ad} = \frac{A\mathfrak{R}T_1 k}{k-1}\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

Für das Verhältnis der beiden läßt sich die empirische Formel

$$\frac{\mathfrak{L}_{ad}}{\mathfrak{L}_{isoth}} = \xi = \sqrt[6]{0{,}792\,\frac{p_2}{p_1}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

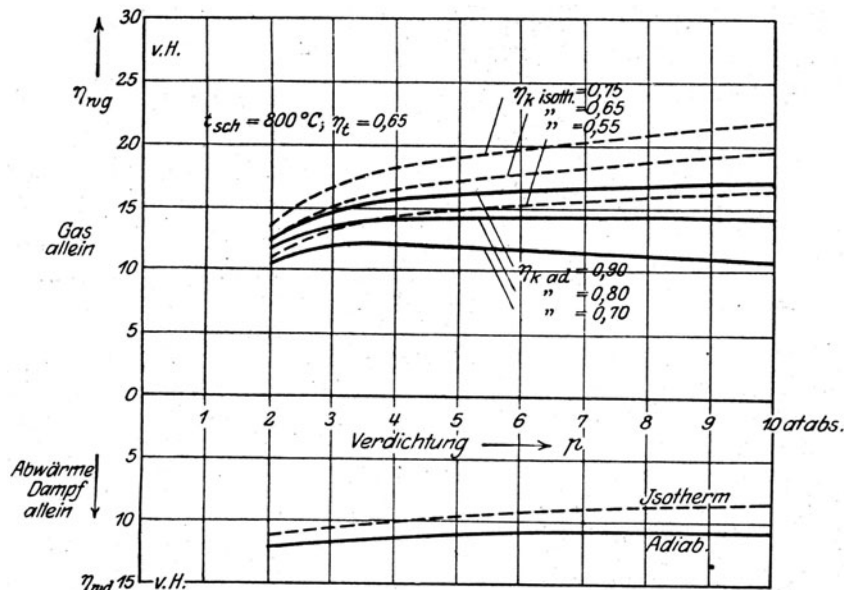


Abb. 1056. Vergleich der Wirkungsgrade für isothermische und adiabatische Verdichtung.

mit Geltung zwischen $p_2/p_1 \cong 4$ bis 50 aufstellen. Die effektiven Arbeitsaufwände werden gleich groß, wenn

$$\frac{\mathfrak{L}_{isoth}}{\eta_{k\,isoth}} = \frac{\mathfrak{L}_{ad}}{\eta_{k\,ad}} \quad \text{oder} \quad \frac{\eta_{k\,ad}}{\eta_{k\,isoth}} = \xi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

ist. Betrachten wir nur die Schaulinie zu $\eta_{k\,isoth} = 0{,}65$, so kann zu jedem Verdichtungsdruck derjenige adiabatische Verdichtungswirkungsgrad berechnet werden, der gleichem Verdichtungsarbeitsaufwand entspricht, und man kann in Abb. 1056 ablesen, wie groß der zugehörige gesamte thermische Wirkungsgrad ist. Man findet für

$p_2 =$	2	4	6	10 at abs.
$\xi =$	1,107	1,120	1,305	1,417
$\eta_{k\,ad} =$	0,720	0,793	0,848	0,914
$\eta_{w\,isoth} =$	0,235	0,265	0,270	0,28
$\eta_{w\,ad} =$	0,228	0,251	0,262	0,28

Hiernach sind **bei gleichem Verdichtungsaufwand und gleicher Schaufeltemperatur** die **Unterschiede nicht groß.** Immer jedoch ist die adiabatische Verdichtung im Nachteil und erfordert außergewöhnlich hohe Wirkungsgrade.

203a. Gasturbine mit Verbrennung bei unveränderlichem Druck.

Ein (schematisches) Entropiebild Abb. 1057 veranschaulicht die Gaszustände. $A_1 B_2$ bedeutet die Verdichtung, die mit schräger Schraffur beränderte Fläche die reine Verdichtungsarbeit für 1 Mol. Unter Vernachlässigung der Raumverminderung beginnt in B_3 die Wärmezufuhr, die in C_4 beendigt sei. Die adiabatische Ausdehnung auf den Druck p_1' führt auf Punkt D_6'. Die der Turbine zur Verfügung stehende Arbeit wird durch die lotrecht schraffierte, unter der Linie C_2 C_4 gelegene Fläche dargestellt, die man als Unterschied der Wärmeinhalte zu den Punkten C_4 und D_6' abliest. Die Nutzarbeit ist wieder

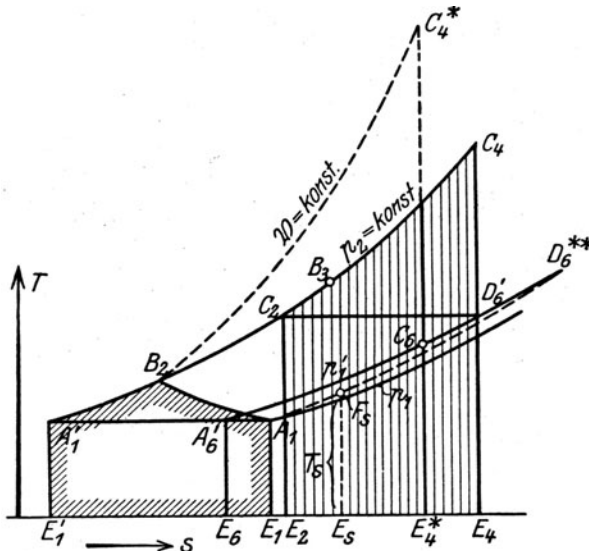


Abb. 1057. Gasturbine mit Gleichdruck-Verbrennung.

$$\mathfrak{L}_{e_g}' = \eta_t\, \mathfrak{L}_t' - \frac{n}{n'}\,\frac{\mathfrak{L}_k}{\eta_k} \quad . \; . \; . \; (1)$$

Bedeutet $\mathfrak{L}_w' = \varphi\, \mathfrak{H}_p'$ der Wandungsverlust, so ist

$$\mathfrak{W}_4' - \mathfrak{W}_2' = (1-\varphi)\, \mathfrak{H}_p' \quad . \; . \; (2)$$

woraus bei gegebener Verbrennungstemperatur der Heizwert und der Wirkungsgrad der Gasseite berechnet wird. Ist D_6^{**} der Zustand der Abgase nach Verlassen des Laufrades (einschließlich vernichtete Auslaßenergie), so steht für eine Abwärme-Dampfturbine die durch Abkühlung zwischen D_6^{**} und A_1 gewinnbare Wärme wie auch ein Teil der an die Wand der Verbrennungskammer abgegebenen Wärme zur Verfügung. Die hieraus erzeugbare zusätzliche Leistung wird wie im vorigen Abschnitt berechnet.

Die durchsichtige Theorie dieser einfachsten aller Gasturbinen bedarf hiernach keiner weiteren Ausführung. Wohl aber möge darauf hingewiesen werden, daß die **Gleichdruck-Verbrennung gegenüber der Verpuffung thermodynamisch im Nachteil ist.** Die Verpuffung würde, wie in Abb. 1057 punktiert angedeutet ist, bei gleichem Heizwert zum Punkte C_4^* auf der Linie $\mathfrak{V} =$ konst. führen, so daß die unterhalb von B_2 C_4^* gelegene Fläche der unterhalb von B_2 C_4 gelegenen gleich sein muß. Man kann nun die für die Turbine verfügbare Arbeit im Falle der Gleichdruckverbrennung auch darstellen als

$$\text{Fläche } E_1'\, A_1'\, B_2\, C_4\, E_4 - \text{Fläche } E_6\, A_6'\, D_6'\, E_4$$

und im Falle der Verpuffung als

$$\text{Fläche } E_1'\, A_1'\, B_2\, C_4^*\, E_4^* - \text{Fläche } E_6\, A_6'\, C_6\, E_4^*.$$

Die an erster Stelle stehenden Flächen sind in beiden Fällen der Voraussetzung gemäß (gleiche Heizwerte) gleich groß; von den abzuziehenden Flächen ist die zweite augenscheinlich größer als die erste, also ist **die verfügbare Arbeit der Gleichdruckverbrennung um die Fläche $E_4^*\, C_6\, D_6'\, E_4$ kleiner als die der Verpuffung.** Diesem Nachteile steht freilich der **bessere Wirkungsgrad der Gasturbine** gegenüber, da man die Radgeschwindigkeit der unveränderlichen Gasgeschwindigkeit anpassen kann, während bei dem Verpuffungsverfahren die Ausströmgeschwindigkeit in weiten Grenzen schwankt. Minder wichtig ist, daß die Abwärme um die Verlustwärme größer wird.

Gleichdruckverbrennung mit Wassereinspritzung.

Es wurde der Vorschlag gemacht, die hohe Verbrennungs- und Schaufeltemperatur durch Einspritzung von Wasser während der Verbrennung herabzusetzen. Nehmen wir an, daß auf G_1 kg Feuergase G_2 kg Wasser mit dem anfänglichen Wärmeinhalt i_0' eingespritzt werde. Es sei

$$\frac{G_2}{G_1} = \lambda \quad . \; (3)$$

m_1 m_2 seien die Molekulargewichte der Abgase und des Wassers

$n_1 = \frac{G_1}{m_1}$; $n_2 = \frac{G_2}{m_2}$ die Mol-(Bruch-)zahlen, die so gewählt werden sollen, daß $G_1 + G_2$ gerade 1 Mol Gasdampfgemisch ausmacht, d. h. daß

$$n_1 + n_2 = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

ist. Die Auflösung der angeschriebenen Gleichungen ergibt:

$$G_1 = n_1\, m_1; \qquad G_2 = n_2\, m_2; \qquad n_1 = \frac{m_2}{\lambda\, m_1 + m_2}; \qquad n_2 = \frac{\lambda\, m_1}{\lambda\, m_1 + m_2} \quad . \; . \; . \; . \; (5)$$

Die Teildrucke p_g des Gases und p_d des (Zusatz-)Dampfes im Rauminhalt V ergeben sich aus den Zustandsgleichungen:

$$p_g V = G_1 R_1 T = n_1 \mathfrak{R} T; \qquad p_d V = n_2 \mathfrak{R} T, \qquad \text{woraus } \frac{p_g}{p_d} = \frac{n_1}{n_2} \quad \ldots \ldots (6)$$

da $p_g + p_d = p$ den Gesamtdruck ergibt, so hat man

$$p_g = \frac{n_1}{n_1 + n_2} p = n_1 p; \qquad p_d = \frac{n_2}{n_1 + n_2} p = n_2 p \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (7)$$

Durch die Wahl von λ ist mithin auch p_d bestimmt, und man kann die zugehörige Sättigungstemperatur T_3 ermitteln, die z. B. im Punkte B_3 erreicht werden möge. Die zwischen B_2 und C_4 Abb. 1057 zuzuführende Wärme ist dann für 1 Mol des Gas-Dampfgemisches:

$$\begin{aligned} \mathfrak{Q}'' &= G_1 \bar{c}_{p1} (T_4 - T_2) + G_2 [i_{3s} + \bar{c}_{p2} (T_4 - T_3) - i_0'] \\ &= (G_1 \bar{c}_{p1} + G_2 \bar{c}_{p2}) (T_4 - T_2) + G_2 [i_{3s} - \bar{c}_{p2} (T_3 - T_2) - i_0'] \\ &= \bar{\mathfrak{C}}_p' (T_4 - T_2) + n_2 [m_2 i_{3s} - \bar{\mathfrak{C}}_{p2} (T_3 - T_2) - m_2 i_0'] \quad \ldots \ldots \ldots (8) \end{aligned}$$

Das erste Glied ist der auf der Gemischlinie b'' abzugreifende Unterschied $\mathfrak{W}_4'' - \mathfrak{W}_2''$; im Klammerglied bedeutet i_{3s} den Wärmeinhalt der Sättigung bei der Temperatur T_3. Die spezifischen Wärmen sind Mittelwerte für je den betreffenden Temperaturunterschied. Die für die Turbine verfügbare Arbeit ist

$$\mathfrak{Q}_t'' = \mathfrak{W}_4'' - \mathfrak{W}_6'' \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (9)$$

in kcal auf 1 Mol des Gasdampfgemisches. Die Nutzarbeit der Gasseite ist somit

$$\mathfrak{Q}_e'' = \eta_t \mathfrak{Q}_t'' - \frac{n_1 \mathfrak{Q}_k}{\eta_k} \frac{n}{n'} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (10)$$

da auf 1 Mol des Gemisches nur n_1 Mole der Feuergase verdichtet werden mußten; anderseits bedeutet $\mathfrak{Q}_k$ die Verdichtungsarbeit für 1 Mol des ursprünglichen Ladegemisches und es entfallen auf n Mole der frischen Ladung n' Mole der Feuergase. Der Heizwert $\mathfrak{H}_p'$ und der Wandverlust $\mathfrak{Q}'_w$ bezogen auf 1 Mol der Feuergase stehen in der Beziehung

$$n_1 \mathfrak{H}_p' = \mathfrak{Q}'' + \mathfrak{Q}'_w n_1 = \mathfrak{Q}'' + \varphi n_1 \mathfrak{H}'_p$$

oder

$$\mathfrak{H}_p' = \frac{\mathfrak{Q}''}{(1 - \varphi) n_1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (11)$$

Auf ein Mol des Gas-Dampfgemisches wurde der Heizwert

$$\mathfrak{H}_p'' = n_1 \mathfrak{H}_p' \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (12)$$

aufgewendet, also ist der thermische Wirkungsgrad der Gasseite

$$\eta_{wg} = \frac{\mathfrak{Q}_e''}{\mathfrak{H}_p''} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (13)$$

Hierzu käme die **Arbeit der Abwärme-Dampfturbine.** Die großen Hoffnungen, die man auf diesen Prozeß gesetzt hat, werden durch einen der Thermodynamik fremden Grund zunichte gemacht. Während der Abkühlung der Abgase auf dem Wege $D_6{}^{**}A_1$ wird nämlich unterwegs etwa im Punkte F_s der in **den Abgasen enthaltene Wasserdampf seinen „Taupunkt" d. h. die Sättigungsgrenze erreichen und sich auf die Kühlflächen niederzuschlagen beginnen.** Da aber in fast allen Brennstoffen Schwefel enthalten ist, entsteht bei der Verbrennung **schwefelige Säure, die vom Taubeschlag aufgenommen die Kühlflächen in kurzer Frist zerfressen würde.** Der Dampf kann seine gebundene Wärme aber erst bei der Kondensierung abgeben; sind wir gezwungen, ihn unkondensiert zu entlassen, so geht der Großteil der Abwärme verloren.

204. Genaue Werte der Gas-Entropie.

Um eine genauere Entropietafel herzustellen, wurden nach dem Vorgang von Schüle[1]) mit den heute bekannten genaueren Werten der spezifischen Wärmen, und zwar denjenigen, die Mollier in der „Hütte", 22. Aufl., S. 400 mitteilt, die Entropie für zweiatomige Gase (wobei zwischen H_2 und O_2, N_2, CO kein Unterschied gemacht wurde) H_2O, CO_2 und Feuergase von mittlerer Zusammensetzung graphisch ermittelt. Mollier gibt die mittlere spezifische Wärme $\mathfrak{C}_{pm}$ zwischen 0° C und t° C, so daß die von 0° an mitzuteilende Wärme für 1 Mol sich als

$$\mathfrak{Q}_p = \mathfrak{C}_{pm} \cdot t \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (21)$$

darstellt. Durch Berechnung des Wärmeunterschiedes $\Delta \mathfrak{Q}$ für je 100° C Temperatur-

[1]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1916, S. 630.

zunahme konnte so mit leichter Mühe und hinreichender Genauigkeit, wenn T_m je die mittlere Temperatur bedeutet, die Entropiezunahme bei unveränderlichem Druck

$$\mathfrak{S}_p - \mathfrak{S}_{p0} = \sum \frac{\Delta \mathfrak{Q}}{T_m} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (22)$$

ermittelt werden. Hieraus ergibt sich mittels der Beziehung $\mathfrak{C}_p = \mathfrak{C}_v + A\mathfrak{R}$ die Gleichung

$$\mathfrak{S}_v - \mathfrak{S}_{v0} = \mathfrak{S}_p - \mathfrak{S}_{p0} - A\mathfrak{R} \lg n \left(\frac{T}{T_0}\right) \quad \ldots \ldots \ldots (23)$$

also die Entropiezunahme bei unveränderlichem Rauminhalt. Die Ergebnisse der Rechnung sind in der Zahlentafel im Anhang zusammengestellt.

Je eine Schaulinie $\mathfrak{S}_p$ und $\mathfrak{S}_v$, die zugleich die Linien $p =$ konst., $v =$ konst. darstellen, wurde in die dem Buche beigegebene Gasentropietafel II samt den Wärmeinhalten $\mathfrak{Q}_p$, $\mathfrak{Q}_v$ (von 0^0 C an gerechnet) eingetragen. Wieder aus $\mathfrak{C}_p = \mathfrak{C}_v + A\mathfrak{R}$ folgt die Beziehung

$$\mathfrak{Q}_p = \mathfrak{Q}_v + A\mathfrak{R}(T - 273) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (24)$$

Das zweite Glied rechts wird also durch eine von 0^0 C ausgehende Gerade begrenzt.

Es sei ein Gemisch gegeben mit der Zusammensetzung:

$\mathfrak{v}_l$ Raumteile Luft oder andere zweiatomige Gase,
$\mathfrak{v}_d$ „ Wasserdampf,
$\mathfrak{v}_k$ „ Kohlensäure

auf 1 m³, so daß

$$\mathfrak{v}_l + \mathfrak{v}_d + \mathfrak{v}_k = 1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (25)$$

ist, so stellen diese Größen auch die Bruchteile von Molen ν_l, ν_d, ν_k dar, die in einem Mol des Gemisches enthalten sind, also ist

$$\nu_l + \nu_d + \nu_k = 1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (26)$$

Indem wir $\mathfrak{S}_{p0}$, $\mathfrak{S}_{v0}$ der Einfachheit halber $= 0$ setzen, erhält man nach der Mischungsregel

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{S}_p &= \nu_l \mathfrak{S}_{pl} + \nu_d \mathfrak{S}_{pd} + \nu_k \mathfrak{S}_{pk} \\ \mathfrak{S}_v &= \nu_l \mathfrak{S}_{vl} + \nu_d \mathfrak{S}_{vd} + \nu_k \mathfrak{S}_{vk} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (27)$$

Gleichgebaute Ausdrücke gelten für den Wärmeinhalt $\mathfrak{Q}_p$ und die Energie $\mathfrak{Q}_v$.

Sind diese Schaulinien (in rechtwinkligen Koordinaten) aufgetragen, so kann man mit kleinen rechnerischen Nachhilfen Prozesse, die aus einfachen Zustandsänderungen zusammengesetzt sind, wie folgt untersuchen.

Der allgemeine Ausdruck für die Entropie ist

$$\mathfrak{S} - \mathfrak{S}_0 = \int_{T_0}^{T} (\mathfrak{C}_v dt + A p d\mathfrak{B}) \frac{1}{T} = \mathfrak{S}_v - \mathfrak{S}_{v0} + A\mathfrak{R} \ln \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_0} \quad \ldots . (28)$$

oder

$$\mathfrak{S} - \mathfrak{S}_0 = \int_{T_0}^{T} (\mathfrak{C}_p dt - A\mathfrak{B} dp) \frac{1}{T} = \mathfrak{S}_p - \mathfrak{S}_{p0} - A\mathfrak{R} \ln \frac{p}{p_0} \quad \ldots . (29)$$

Daraus folgt, daß eine isothermische Verdichtung vom Zustand A_1 mit dem Druck p_1 (Abb. 1057a) auf A_2 mit dem Druck p_2 einer Abnahme der Entropie um den Betrag

$$A_1 A_2 = A\mathfrak{R} \ln \left(\frac{p_2}{p_1}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (30)$$

entspricht. Der Endpunkt wird durch Abtragen dieser Strecke erhalten, die man aus dem in die Tafel eingezeichneten logarithmischen Maßstab abgreift.

Bei einer adiabatischen Verdichtung vom Zustand A_1 auf den Druck p_2 bleibt $\mathfrak{S}$ unverändert, also muß $\mathfrak{S}_p - \mathfrak{S}_{p0}$ um den Betrag $A\mathfrak{R} \ln p_2/p_1$ zunehmen. Man zieht in Abb. 1057a durch A_1 die Linie $p_1 =$ konst., trägt in $A_1 A_2'$ die Zunahme von $\mathfrak{S}_p$ auf, projiziert A_2' nach A_2'' hinauf, und diesen Punkt wagerecht nach B_2 auf die Lotrechte, über A_1 herüber.

Es sei nun eine Turbine mit Gleichdruckverbrennung zu untersuchen. Die adiabatische Verdichtung habe zum Punkt B_2 geführt. Die Verbrennung ist als Zufuhr von $\mathfrak{H}_p - \mathfrak{Q}_w$ bei unveränderlichem Druck p_2 zu behandeln, aber die Drucklinie $p_2 =$ konst. ist eine andere als vorhin, sie entspricht der Abgasbeschaffenheit, daher die Bezeichnung p_2'. Mit Hilfe der Wärmeinhalte liest man

$$\mathfrak{Q}'_{p3} - \mathfrak{Q}'_{p2} = \mathfrak{H}'_p - \mathfrak{Q}'_w \quad . \quad (11)$$

ab, woraus sich die Lage von C_3 ergibt. Der Endzustand der adiabatischen Entspannung von C_3 auf den Gegendruck p_1', wird ermittelt, indem man in $C_3 C_3' = A\mathfrak{R} \ln p_2'/p_1'$ abträgt, und nach C_4', von da nach D_4' lotrecht unter C_3 projiziert. Die der Turbine zur Verfügung stehende Arbeit für 1 Mol der Abgase ist die Abnahme des Wärmeinhaltes zwischen C_3 und D_4':

$$\mathfrak{Q}_t' = \mathfrak{Q}'_{p3} - \mathfrak{Q}'_{p4} \quad . \quad . \quad (12)$$

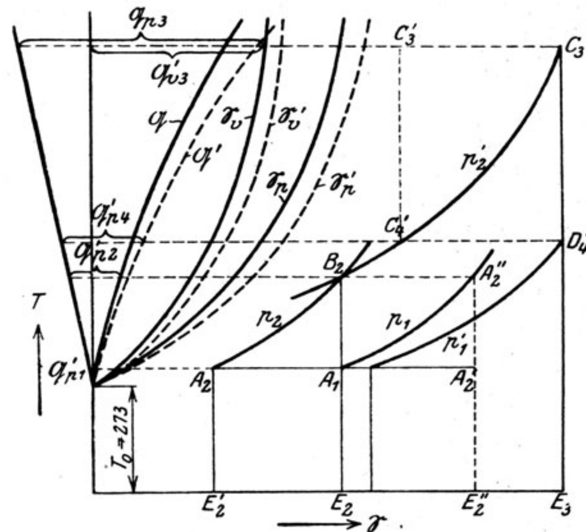


Abb. 1057 a. Darstellung des Gleichdruckprozesses mit den genaueren Entropiewerten.

Die Verdichtungsarbeit für 1 Mol der frischen Ladung ist ähnlich

$$\mathfrak{Q}_k = \mathfrak{Q}_{p2} - \mathfrak{Q}_{p1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

daraus folgt die Nutzarbeit auf 1 Mol der Abgase:

$$\mathfrak{Q}_e' = \eta_t \mathfrak{Q}_t' - \frac{n}{n'} \frac{\mathfrak{Q}_k}{\eta_k} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

wenn wieder n/n' das Verhältnis der Molzahlen vor und nach der Verbrennung ist. Ferner ist der thermische Wirkungsgrad

$$\eta_w = \frac{\mathfrak{Q}_e'}{\mathfrak{H}_p'} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14\,a)$$

Für Abwärmeverwertung steht die Wärmemenge

$$\mathfrak{Q}_a' = \mathfrak{Q}'_{p4} - \mathfrak{Q}'_{p1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

zur Verfügung.

205. Einige lebenswichtige konstruktive und Betriebsfragen der Gasturbine.

Die eigentliche Lebensfrage der Gasturbine ist: wie verhütet man das Erglühen der Schaufel insbesondere das Abschmelzen der Schaufelkante, ohne mit der Gastemperatur auf wirtschaftlich ungünstige niedere Beträge herabzusteigen?

Die Lösung scheint darin zu liegen, daß man die Schaufel rasch wechselnder periodischer Abkühlung durch einen Spülluft- oder besser Dampfstrom aussetzt, wodurch mit Rücksicht auf den Oberflächenwiderstand das Eindringen hoher Temperaturspitzen in das Innere der Schaufel und ihrer führenden Kante verhütet wird, sofern diese mit einer gewissen Mindestabrundung versehen ist. Dem Nachweis hiervon ist der erste Teil dieses Abschnittes gewidmet.

a) Periodischer Wärmestrom in der Schaufelkante.

Wir ersetzen die Kante näherungsweise durch einen Zylinder von gleichem Halbmesser wie die Rundung der Kante. Bleibt die Temperatur des allseitig der Gastemperatur ausgesetzten Zylinders in zulässigen Grenzen, so wird dies um so eher bei der einseitig getroffenen Kante der Fall sein.

Die Differentialgleichung der Wärmebewegung im unendlich langen dünnen Zylinder lautet nach Abschn. 198

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial t}{\partial r}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial t}{\partial z} \quad \text{mit} \quad a^2=\frac{\lambda}{\gamma c} \qquad (1)$$

Um eine rein periodische Strömung zu erhalten, setzen wir

$$t=Ue^{i\omega z}=U(\cos\omega z+i\sin\omega z) \qquad (2)$$

wobei jedoch zum Schluß nur der reelle Teil von der Lösung beibehalten wird. Das Einsetzen ergibt

$$U''+\frac{U'}{r}+k_0^2U=0 \quad \text{mit} \quad k_0^2=-\frac{\omega\gamma c}{\lambda}i \qquad (3)$$

Die Lösung vereinfacht sich, wenn man die Unabhängige

$$x=k_0 r \qquad (4)$$

einführt, indem $\partial U/\partial r=(\partial U/\partial x)(\partial x/\partial r)=y'k_0$ wird, sofern man U als Funktion von x mit y bezeichnet. Ähnlich wird $U''=y''k_0^2$ und (3) geht in

$$y''+\frac{y'}{x}+y=0 \qquad (5)$$

über. Ein Integral hiervon wird durch eine Potenzreihe in x gebildet, deren Beiwerte in bekannter Weise bestimmt die Form

$$y=1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2 4^2}-\frac{x^6}{2^2 4^2 6^2}+\cdots \qquad (6)$$

ergeben. Nach dem Einschieben von (4) kann (6) als

$$U=U_r+iU_i \quad \text{und mit} \quad k=+\sqrt{\frac{\omega\gamma c}{\lambda}}$$

$$U_r=1-\frac{k^4r^4}{2^2 4^2}+\frac{k^8r^8}{2^2 4^2 6^2 8^2}-\cdots \qquad U_i=\frac{k^2r^2}{2^2}-\frac{k^6r^6}{2^2 4^2 6^2}+\cdots \qquad (7)$$

geschrieben werden. Fügen wir den willkürlichen Festwert A hinzu, so ist der reelle Teil der schließlichen Lösung gemäß (2)

$$t=A(U_r\cos\omega z-U_i\sin\omega z) \qquad (8)$$

Die Bedingung für die Oberfläche des Zylinders mit der Temperatur t_0 ist, daß die in der äußersten Schicht durch Leitung für die Flächeneinheit einströmende Wärme $+\lambda\,\partial t/\partial r$ der vom Gase mit Rücksicht auf die „Oberflächenleitzahl" α abgegebenen Wärme $\alpha(t_a-t_0)$ gleich, d. h.

$$+\lambda\left(\frac{\partial t}{\partial r}\right)_{r=r_0}=\alpha(t_a-t_0) \qquad (9)$$

sei. Da von vornherein nur dünne Zylinder in Frage kommen, vereinfachen wir (7) auf $U_r \cong 1$; $U_i=k^2r^2/4$, so daß aus (9) die Außentemperatur sich als

$$t_a=A[\cos\omega z-\beta\sin\omega z] \qquad \text{mit} \quad \beta=\frac{k^2r}{2}\left(\frac{\lambda}{\alpha}+\frac{r}{2}\right) \qquad (10)$$

oder auch

$$t_a=B\cos(\omega z+\vartheta) \qquad \text{mit} \quad B=A\sqrt{1+\beta^2} \qquad (11)$$

darstellt, wobei uns die Phasenverschiebung ϑ hier nicht weiter interessiert. Ist B gegeben, so bestimmt sich hiernach die Schwingungsweite der Oberflächentemperatur

$$A=\frac{B}{\sqrt{1+\beta^2}} \qquad (12)$$

Wie weit A gegenüber B verkleinert wird, hängt von den in β enthaltenen Größen, insbesondere α ab welches den am schwierigsten abzuschätzenden Faktor darstellt.

b) Die Oberflächenleitzahl α.

Die in der Literatur angeführten α-Werte ergeben bei einer Kante, die einem sich beständig erneuernden Gasstrom von zeitweise unveränderlicher Temperatur ausgesetzt ist, an der Eintrittsstelle $\alpha=\infty$, während die Holzwarthturbine beweist, das α endlich ist. Eine Abschätzung des wahren Wertes ist jedoch mit Hilfe der Theorie der Prandtlschen Grenzschichten möglich.

Die „Grenzschichte" ist das wegen der Reibung entlang einer Wand anhaftende Flüssigkeitsgebiet, in welchem eine laminare Strömung herrscht. Die Längsgeschwindigkeit nimmt von Null anfänglich linear zu und schließt sich asymptotisch an die in der weiteren Umgebung herrschende Geschwindigkeit an, die man entweder einer Potential- oder einer turbulenten Strömung angehörig ansehen kann. Das letztere ist sicher beim Gasturbinenstrahl der Fall, und man kann sich vorstellen, daß die Turbulenz die Temperatur im ganzen Strahl ständig ausgleicht, bis auf jene dünne Grenzschicht, in der das

Poiseuillesche Strömungsgesetz herrscht. **Durch diese Schichte müßte die Wärme auf dem Wege reiner Leitung in die Wand eindringen.** Ist y deren Dicke und λ die Leitzahl des Gases, so wäre für die Zeit- und Flächeneinheit

$$Q = \frac{\lambda}{y}(t_a - t_0) = \alpha (t_a - t_0), \text{ also}$$

$$\alpha = \frac{\lambda}{y} \qquad (13)$$

Über die **Dicke der Grenzschicht bei Potentialströmung** kann man sich in der Dissertation von Blasius[1]) Aufschluß verschaffen. Für einen zu einem unendlich ausgedehnten Strom senkrecht gestellten Zylinder wird dort für die Geschwindigkeit der Laminarströmung, S. 17, die Formel

$$u = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{q_0^3}{q_1}}(\zeta_0'\xi - \zeta_1'\xi^3) \qquad (14)$$

aufgestellt, von der hier nur der Umstand von Wichtigkeit ist, daß sie bei den Werten $\zeta_0' = \zeta_1' = 2$ in die Geschwindigkeit der Potentialströmung übergeht. Aus den Abb. 6 und 7 auf S. 19 und 20 jener Abhandlung entnimmt man, daß die Abweichung des ζ_0', ζ_1' von jenem Grenzwert praktisch schon vernachlässigbar ist, wenn die Variable η den Wert 2 erreicht. Die Schichtendicke y folgt dann aus der Gleichung

$$y_0 = \sqrt{\frac{2k}{\mu q_0}}\cdot\eta \qquad (15)$$

wo k die Zähigkeit, μ die spezifische Masse bedeuten. Die Größe q_0 stammt aus der Formel der Potentialgeschwindigkeit unmittelbar am Zylinderumfang, die Blasius angenähert

$$\bar{u} = q_0 x - q_1 x^3 \qquad (16)$$

setzt, unter x den Umfangsbogen des Zylinders vom Staupunkt aus verstanden.

Bedeutet w die Stromgeschwindigkeit in weiter Ferne, so ist bekanntlich beim Vollzylinder[2]) mit dem Halbmesser r für $x = 0$, $\bar{u} = 0$; für $x = \pi r/2$; $\bar{u} = 2w$; für $= \pi r$; $\bar{u} = 0$. Aus den beiden letzten Bedingungen folgt

$$q_0 = \frac{16}{3\pi}\frac{w}{r}; \qquad q_1 = \frac{q_0}{(\pi r)^2} \qquad (17)$$

Setzt man dies mit $\eta = 2$ in Gl. (15) ein, so folgt in absolutem Maß

$$y_0 = 2{,}17\sqrt{\frac{kr}{\mu w}} \qquad (18)$$

Eine vereinfachte, aber wohl entsprechend weniger genaue Ableitung für die Schichtendicke gibt Proell[3]), wonach in absolutem Maß

$$y_0 = \sqrt{\frac{kr}{\mu w \cos\varphi}} \qquad (18a)$$

ist, wo φ den Zentriwinkel zwischen dem Staupunkt und einem beliebigen Umfangspunkt bedeutet. Nach dieser Formel wächst die Schichtendicke mit wachsendem φ; die Größenordnung stimmt im Mittel mit Gl. (18) gut überein.

Von der Dicke y_0 wird **nur ein Teil als die eigentliche „Isolierschichte"** gelten dürfen, da die Turbulenz ihrer vollen Ausbildung störend entgegenwirken dürfte. Selbst bei Potentialströmung kommt nur ungefähr der Teil in Betracht, in welchem die Geschwindigkeit angenähert im gleichen Verhältnis mit dem Abstand von der Wand wächst. Das geht aus einer seit der Drucklegung obiger Überlegungen von Pohlhausen auf die Anregung von Prandtl durchgeführten Untersuchung[4]) hervor. Für die Oberflächenübergangszahl an eine Platte von der Länge l wird durch Integration der hydrodynamischen Gleichungen der Ausdruck

$$\alpha = 0{,}664\,\lambda\sqrt[3]{\sigma}\sqrt{\frac{\mu w}{kl}} \quad \text{mit} \quad \sigma = \frac{kc}{\lambda} \qquad (18b)$$

in absolutem Maß (g, cm, sek) gewonnen. Aus der erwähnten Abhandlung von Blasius kann man für die **mittlere Schichtendicke** an einer ebenen Platte angenähert den Ausdruck $y_0 = 2{,}4\sqrt{\frac{\mu w}{kl}}$ ableiten.

---

[1]) Grenzschichten in Flüssigkeiten kleiner Reibung, Teubner 1907.

[2]) Lamb, Hydrodynamics 1895, § 68.

[3]) Flugtechnik, Oldenbourg 1919, S. 82.

[4]) Wärmeaustausch zwischen festen Körpern und Flüssigkeiten. Z. f. angewandte Math. u. Mech., 1921, S. 117.

Kommt nur der Anteil εy_0 zur Wirkung, und soll $\alpha = \lambda/\varepsilon y_0$ mit Formel (18b) übereinstimmen, so muß $1/\varepsilon = 2{,}4 \cdot 0{,}664 \sqrt[3]{\sigma}$ sein. Für ein Gemisch von zwei- und dreiatomigen Gasen kann man $\sigma \cong 0{,}94$ (in abs. Maß) setzen und erhält $\varepsilon = 2/3$, d. h. der Leitungswiderstand ist mit $^2/_3$ der Schichtendicke gleichwertig.

Dieses Ergebnis wollen wir in Ermangelung einer strengen Lösung auf den Kreiszylinder anwenden, und erhalten nach (13) und (15) $\alpha = (3/2)\,(\lambda/y_0)$. Gehen wir nun **zum technischen Maßsystem** m, kg, sek. über und bezeichnen wir die Zähigkeit mit $\eta_{tech} = k/98{,}1$, so wird mit $\mu_{abs} = \gamma_{gas} \cdot 10^{-3}$, wenn man λ und α gleichzeitig auf die Sekunde oder die Stunde bezieht.

$$\alpha = \frac{\lambda_{gas}}{4{,}54} \sqrt{\frac{\gamma\, w_{gas}}{\eta_{tech} \cdot r}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (18c)$$

Beispielsweise wäre bei 1000° C Temperatur 1 at abs. Druck, $\lambda = 0{,}0566$ kcal/m² st; $\eta_t \cong 8 \cdot 10^{-6}$ kgm⁻¹ sek; $\gamma = 0{,}26$ kg/m³, also $\alpha \cong 2{,}25 \sqrt{w/r}$ und bei $w = 1000$ m/sek; $r = 0{,}2$ mm $= 2 \cdot 10^{-4}$ m

$$\alpha \cong 5030 \text{ kcal/m}^2\text{st}.$$

Statt einer unendlich großen Übergangszahl erhält man also einen endlichen und sogar verhältnismäßig kleinen Wert. Es ist somit nicht zu befürchten, daß die Schaufelkante die Temperatur des ankommenden Gasstromes annimmt, erglüht und abschmilzt. Diese Feststellung enthüllt, was man so recht das „Geheimnis der Gasturbine" nennen könnte. **Durch einen Wert α in der ermittelten Größenordnung ist die Lebensfähigkeit der Schaufel und der Turbine verbürgt.**

Zum Vergleich kann noch die Strömung in engen Spalten herangezogen werden. Bei Beginn der Turbulenz darin könnte man die halbe Spaltweite als die Grenze der Schichtdicke für laminare Strömung einer Wand entlang ansehen, die der Geschwindigkeit in der Mitte als Potentialgeschwindigkeit $\bar{u}$ entspricht. Man erhielte als Schichtdicke gemäß Abschn. 25 $y = s/_2 = K' \eta_{tech}/4\gamma w_k$ und es wäre $\alpha = \lambda/y$. Man überzeugt sich leicht, daß diese Annahme auf weit größere Schichtendicken führt, als Gl. (15).

Inzwischen sind über die **turbulente Wärmeleitung** die Abhandlungen von v. Kármán und Latzko erschienen[1]). Ersterer stellt die Grundlagen auf, die auf die umlaufende Scheibe angewendet mit der Erfahrung in bemerkenswerter Weise übereinstimmen. Letzterer arbeitet die vollständigen Formeln für den Wärmeübergang in einem kreisrunden Rohr aus. Es werden die Verhältnisse während des Ausbildens der Turbulenz aus einer anfänglich reinen Potentialströmung in der „Anlaufstrecke" aufgeklärt, und schließlich für die Oberflächenübergangszahl bei eingetretenem Beharrungszustand (in „hydrodynamisch ausgebildeter" Strömung) der Ausdruck

$$\alpha_{min} = 0{,}0384\, w\, C \left(\frac{\nu}{w D}\right)^{1/4} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (18d)$$

aufgestellt, worin $C = \gamma c_p$; $\nu = \eta_{tech}\, g/\gamma$ die **„kinematische Zähigkeit"**, D den Durchmesser bedeuten. Die Wärmeleitfähigkeit kommt hier nicht vor, kann aber durch die für Gase angenähert gültige Beziehung $\lambda \cong C\nu$ leicht eingeführt werden. Dann stimmt α_{min} nahezu mit dem von Nusselt[2]) für laminare Strömung abgeleiteten Ausdruck

$$\alpha_N = 0{,}0362 \left(\frac{D}{L}\right)^{0{,}054} \left(\frac{D\, w\, \gamma\, c_p}{\lambda}\right)^{0{,}786} \frac{\lambda}{D} \text{ kcal/m}^2\text{-st-}^0\text{C} \quad \ldots \ldots \ldots (18e)$$

wobei alle Größen auf den mittleren Gaszustand zu beziehen sind, überein. Die Übereinstimmung wäre fast vollständig, wenn man das Glied $(D/L)^{0{,}054}$ vernachlässigt, und statt des Exponenten 0,786 den Wert 0 75 setzt. Dies deutet darauf hin, daß für den Wärmeübergang die eigentliche Prandtlsche Grenzschicht und weniger die sonstige Temperaturverteilung maßgebend ist. In Gl. (18d) ist die Übergangszahl aus der bei Turbulenz herrschenden Temperaturverteilung im ganzen Rohr berechnet; aber auch bei Turbulenz ist, zumindest bei nicht allzu rauhen Wänden, eine laminare Grenzschicht vorhanden. Da nun auch die Formeln von Latzko beim Eintritt in das Rohr für gleichmäßige Stromtemperatur $\alpha = \infty$ ergeben, wird man bei vorläufigen Abschätzungen für Gasturbinenfragen an der durch Gl. (18c) ausgedrückten Näherung festhalten.

Beispiel für die Kantenerwärmung.

Runden wir den nach Gl. (18) gefundenen Wert von α auf

$$\alpha = 5000 \text{ kcal/m}^2\text{-st} = 1{,}39 \text{ kcal/m}^2\text{-sek} \quad \ldots \ldots \ldots (18f)$$

ab, so erkennt man mit $\lambda = 56$ k cal/m-st, daß in Gl. (10) das Glied $r/2$ neben λ/α vernachlässigbar ist. Es bleibt

$$\beta = \frac{\omega\, \gamma\, c\, r}{2\, \alpha}$$

[1]) Z. f. angew. Math. u. Mech. 1921 S. 233 u. 268.

[2]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1917. S. 685.

und β^2 ist groß gegen 1, so daß nach Gl. (12) die Schwankung der Innentemperatur

$$A \simeq \frac{B}{\beta}$$

wird. Nehmen wir ferner an, daß die Periode der Temperatur mit der Dauer einer Radumdrehung zusammenfällt, so wird bei 1500 bzw. 3000 Umdr./min $\omega = 157$ bzw. 314, und man erhält mit

$$\gamma = 7800 \text{ kg/m}^3; \quad c = 0{,}115 \text{ k cal/kg}$$

die Zahlentafel:

Rundungshalbmesser d. Kante mm	0,01	0,1	0,5	1,0
β bei 1500 Umdr/min	0,507	5,07	25,3	50,7
β bei 3000 Umdr./min	1,014	10,14	50,7	101,4
Innentemperaturschwankungen in v. H. der äußeren				
bei 1500 Umdr./min . . $100\,A/B$	89	19,7	3,95	1,97
bei 3000 Umdr./min . . $100\,A/B$	70	9,8	1,97	0,98

Da wir im Anfang des Auspuffes aus einer Kammer mit relativen Geschwindigkeiten von 1200 m/sek und mehr zu rechnen haben, findet an der Kante ein Verdichtungsstoß statt, der einschließlich der darauffolgenden adiabatischen Verdichtung die Temperatur nahezu auf ihre anfängliche Höhe, also auf 1500° C und mehr treibt. Glücklicherweise wird dabei die Geschwindigkeit, also mittelbar α, ziemlich stark herabgesetzt. Trotzdem würde eine messerscharfe Kante (mit 0,01 mm Abrundung) so hoch erhitzt, daß sofort Abschmelzen oder mechanische Abbröckelung infolge der gewaltigen Wechselspannungen eintreten müßte. Diese selbsttätige Anpassung würde dort haltmachen, wo die Temperatur- und Spannungsschwankungen unschädlich geworden sind. Obige Zahlentafel läßt erkennen, daß bei 0,5 mm Rundungshalbmesser die inneren Schwankungen nur noch 4 bzw. 2 v. H. der äußeren ausmachen. Das gäbe bei $B = 500°$ C, für A nur 20 bis 10° C. Die Beherrschung dieser Verhältnisse wird dem Konstrukteur durch nachfolgende Betrachtung erleichtert.

c) Kantenerwärmung bei unvollkommener Periodizität der äußeren Temperatur.

Um eine anschauliche Darstellung des Temperaturverlaufes an einer bestimmten Schaufelkante zu erhalten, entwerfen wir ein **Raumzeitbild der Ausströmungsvorgänge.** In Abb. 1058 bedeutet die Wagrechte die Zeit z, die Lotrechte den Umfang l des Leitrades. Es sind 10 Kammern, vorausgesetzt, deren

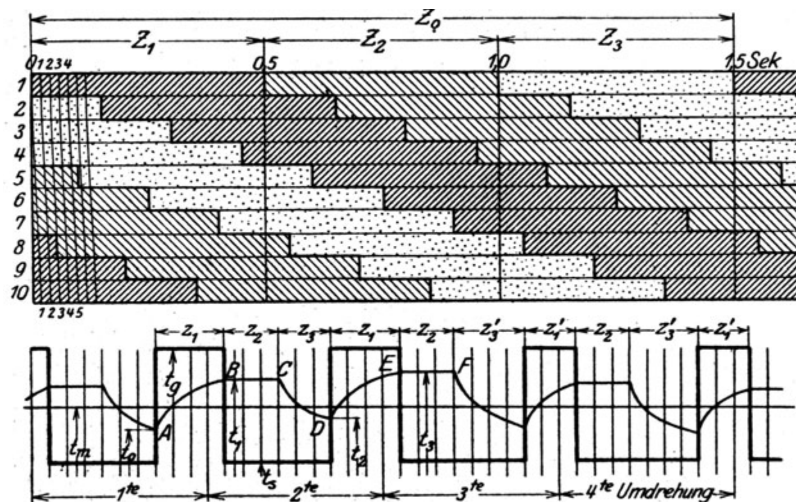


Abb. 1058. Raumzeitliche Darstellung des Auspuff- und Spülvorganges und des Temperaturverlaufes.

Ausflußmündungen den ganzen Kreisumfang erfüllen. Im anderen Fall würden an jeder Trennungsstelle weiße Streifen einzuschalten sein. Die Dauer der Ausströmung der heißen Gase ist Z_1, die des Spülens Z_2, die etwa vorhandene Spülpause Z_3. Im ersten Streifen folgen diese durch Schraffur unterschiedenen Perioden ununterbrochen aufeinander. Die Gesamtperiode ist $Z_0 = Z_1 + Z_2 + Z_3$; innerhalb dieser kommen die Kammern der Reihe nach in gleichen Zeiträumen (hier $Z_0/10$) zur Verpuffung, wie durch entsprechende Schraffur angedeutet wurde. Über dieser l, z-Ebene wäre als dritte Koordinate (senkrecht zur Tafelebene) in jedem Punkt, die dort augenblicklich herrschende Temperatur einzutragen, so

daß ebensoviele kongruente Temperaturflächen entstünden, als Kammern vorhanden sind. Ebenso kann man sich die α Werte aufgetragen denken. Die Bewegung einer bestimmten Schaufelkante des Laufrades wird durch eine schräge Gerade mit der Gleichung $l = u z$ dargestellt, wo u die Umfangsgeschwindigkeit bedeutet; der beschreibende Punkt muß, wenn ein Umlauf vollendet ist, durch eine Lotrechte wieder an den Beginn der 1. Düse (oberste Wagrechte) hingebracht werden. Die Schaufel durchläuft während einer Umdrehung zunächst den Bogen vor der Düse, dann unbewegliche Spülluft, dann wird sie gespült; endlich tritt sie in den Bereich der noch im Ausströmen befindlichen Düsen ein. Wir bezeichnen mit z_1 die Zeit des Aufenthaltes in der heißen Zone, mit z_2 diejenige der „Spülpause" (in Richtung des Umfanges gemessen), mit z_3 ebenso die des Spülens.

Begnügen wir uns mit der Annahme, daß je während des Ausströmens und des Spülens die Temperaturen und α unverändert bleiben, und daß während des Spülunterbruches der Wärmeübergang infolge kleinen Wertes von α Null ist, so kann der innere Temperaturwechsel wie folgt ermittelt werden.

Wir stellen uns die Kante unter dem Bilde eines Zylinderausschnittes mit dem Zentriwinkel φ und dem Halbmesser r, der Höhe h vor. Die Gastemperatur sei t_g, die Innentemperatur t. Wie das Beispiel des Zylinders beweist, kann man innerhalb dieser kleinen Masse die Leitung als vollständig ansehen. Die durch die Oberfläche $r\varphi h$ dringende Wärme $\alpha(t_g - t)\, r\varphi h\, dz$ erscheint dann als Erhöhung des Wärmeinhaltes des Gewichtes $\varphi r^2 \gamma h/2$ im Zeitelement dz, d. h. $\frac{\varphi r^2 \gamma h c}{2} \frac{\partial t}{\partial z} dz = \alpha (t_g - t)\, r \varphi h\, dz$ oder

$$\frac{\partial t}{\partial z} + b\,(t - t_g) = 0 \qquad \text{mit } b = \frac{2\,\alpha}{c\, r\, \gamma_{\text{schaufel}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

Mit $\alpha = 5000/3600$ k cal/m-sek; $\gamma = 7800$ kg/m^3; $c = 0{,}115$ k cal/kg; $r = 0{,}2$ mm $= 2\cdot 10^{-4}$ m ergibt sich

$$b = 15{,}4.$$

Aus (19) folgt, wenn t_0, t_1 die Temperaturen am Anfang und Ende der Zeitdauer z_1 bedeuten, durch Integration

$$\lg n \frac{t_1 - t_g}{t_0 - t_g} = - b z_1, \text{ und daraus } t_1 - t_0 = (t_g - t_0)\,(1 - e^{-b z_1}) \quad \ldots\ldots (19\text{a})$$

Die Temperatur setzt sich nach dem am unteren Teil der Abb. 1058 angedeuteten Linienzug aus lauter Rechtecken zusammen. Man ermittelt den zeitlichen Mittelwert t_m davon und nimmt für den aus der 1. Umdrehung herausgegriffenen Zeitabschnitt z_1 ein anfängliches t_0 in der Gegend von t_m versuchsweise an. Gl (19a) liefert dann die Endtemperatur t_1. Während der Spülpause z_2 bleibe die Schaufel-Temperatur, wie wir annehmen wollen, unverändert, hingegen hat sich t_g sprungweise auf den Wert der Spültemperatur t_s geändert, die auch während der Zeit z_3 andauert. Man erhält mithin die neue Endtemperatur aus der Gleichung

$$t_2 - t_1 = (t_s - t_1)\,(1 - e^{-b z_3}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (19\text{b})$$

Die neue Ausströmperiode z_4 beginnt also mit einer Temperatur t_2 und endigt mit t_3 gemäß Gleichung,

$$t_3 - t_2 = (t_g - t_2)\,(1 - e^{-b z_4}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (19\text{c})$$

So müßte der Linienzug der Temperaturen fortgesetzt werden, bis die wirkliche (große) Periode des Vorganges erledigt ist, d. h., bis man wieder beim Zündpunkt der 1. Kammer angelangt ist. Die erreichte Endtemperatur sollte $= t_0$ sein, und man müßte diesen Wert so lange abändern, bis dies der Fall ist.

Der periodische Beharrungszustand läßt sich leicht angeben, auch wenn in b die Verschiedenheit des α für die Spülung mit kalter Luft oder anderem Mittel berücksichtigt wird. Sehen wir von einer Spülpause ab, und bezeichnen wir mit z_1, z_2 die Gas- und Spülzeiten, so muß in der Beharrung, wenn man, wie unten als zulässig erwiesen wird, $e^{-b z} = 1 - b z$ setzt, in den Formeln

$$t_1 - t_0 = (t_g - t_0)\, b_1 z_1 \qquad \text{und} \qquad t_2 - t_1 = (t_s - t_1)\, b_2 z_2$$

die Temperatur $t_2 = t_0$ sein. Durch Auflösung folgt (mit Vernachlässigung des Produktes $b_1 z_1 b_2 z_2$)

$$t_g - t_1 = \frac{b_2 z_2}{b_1 z_1 + b_2 z_2}\,(t_g - t_s) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (19\text{d})$$

Die Zeitdauer z_1 für das Ausströmen, ist, wie man an Abb. 1058 erkennt, wechselweise $^3/_{10}$ und $^4/_{10}$ der Umlaufdauer. Die Abbildung entspricht ungefähr den Verhältnissen der Holzwarthturbine, Abschn. 207, d. h. die Kammerzahl ist 10. Als Ausströmdauer ist angenommen $Z_1 \cong 0{,}5$ sek, als Spüldauer $Z_2 = 0{,}5$ sek, als Spülpause $Z_3 = 0{,}5$ sek. Drehzahl des Laufrades $n = 3000$/min oder 50/sek. Dauer eines Umlaufes $^1/_{50}$ sek. Zahl der Verpuffungen 10 in 1,5 sek oder 24000/st. Hiernach ist

$$z_1 = (3 \text{ bzw. } 4)\,\frac{1}{500}\,\text{sek} = (6 \text{ bzw. } 8)\; 10^{-3}\,\text{sek}.$$

Ebenso groß sind z_2, z_3. Mithin ist $b z_1 < 0{,}123$ und man kann unbedenklich $e^{-bz} = 1 - bz$ setzen, oder es erreicht $t_1 - t_0$ nach Gl. (19a) im höchsten Fall ~ 12 v. H. des anfänglich vorhandenen Temperaturunterschiedes $(t_g - t_0)$. Während der Spülperiode sinkt er um ein ähnlich großes Maß, und man könnte

im Bedarfsfall eine noch so verwickelte Stufenfolge von Temperatursprüngen leicht zu Ende rechnen. Das Vorstehende läßt erkennen, daß unter den angenommenen Verhältnissen Gefahr für ein Abschmelzen der mit 0,2 mm Halbmesser gerundeten Kante nicht besteht, daß aber eine sehr reichliche und wirksame Spülung mit einem kälteren Mittel unerläßlich ist. Die genaue Festsetzung der zulässigen Grenzen ist Sache der Erprobung im Großen.

Temperaturspannungen in der Kante.

Die Temperatur der Schaufel in ihrem Innern ist, wie wir unter e) nachweisen, angenähert das Zeitmittel der Temperaturen während des heißen Auspuffes und während der kalten Spülung. Die Kante will sich dem Temperaturunterschied Δt gemäß längen oder kürzen, und wird hieran durch die viel stärkere Schaufel verhindert. Es entsteht daher in der Kante die Normalspannung

$$\sigma = E \varepsilon \Delta t \qquad (19\,\mathrm{d})$$

Außerdem treten verwickelt verteilte Schubspannungen auf. Welche Werte für σ zulässig sind, hängt von der Höhe der Mitteltemperatur in der Schaufel und von den Baustoffeigenschaften ab. Holzwarth verwendet weiches Elektroeisen, das bei 480° C eine Druckfestigkeit von 2675 kg/cm² und eine Streckgrenze von 1975 kg/cm² besitzt. Die Mitteltemperatur im Auspuffraum war 430° C. Schätzt man t_0 auf 430° C, $t_g - t_0$ auf 400° C ein, so wäre nach obigem $t_1 - t_0 \cong 50°$ C und

$$\sigma = -2 \cdot 10^{-6}\, 1{,}1 \cdot 10^{-5} \cdot 50 = -1100 \text{ kg/cm}^2.$$

Nimmt man an, daß die Stauchgrenze mit der Streckgrenze übereinstimmt, so befände man sich noch im gut elastischen Gebiet. Erst bei $t_g - t_0 = 720°$ C würde man die Streckgrenze erreichen. **Der Bestand dieser Weicheisenschaufeln ist hiernach physikalisch verständlich und begründet.** Mit Baustoffen, die eine ähnliche Streckgrenze bei wesentlich höheren Temperaturen aufweisen, eröffnet sich der Gasturbine ein weiter Ausblick.

d) Eindringen eines periodischen Temperaturwechsels in die Schaufelwand.

Bei großer Periodenzahl ist die Eindringungstiefe so klein, daß man die Wand als „unendlich" dick ansehen kann. Die Differentialgleichung

$$\frac{\partial t}{\partial z} = \frac{\lambda}{\gamma c} \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \qquad (20)$$

wird zunächst durch den Ansatz

$$t = U e^{ipz} \qquad (20\,\mathrm{a})$$

wo U nur eine Funktion von x ist, zu

$$U'' = k_i^2 U \quad \text{mit} \quad k_i^2 = \frac{i p \gamma c}{\lambda} \qquad (21)$$

umgeformt, von deren zwei Integralen nur $U = A e^{-k_i x}$ brauchbar ist, da in großer Entfernung in der Wand t verschwinden muß. Da $\sqrt{i} = e^{\pi i/4} = (1 + i)/\sqrt{2}$ ist, erhält man mit

$$k = + \sqrt{\frac{p \gamma c}{2 \lambda}}$$

den maßgebenden reellen Teil der Lösung Gl. (20a).

$$t = A e^{-kx} \cos(kx - pz) \qquad (22)$$

Am Rande für $x = 0$ soll mit t_a als der Außentemperatur

$$-\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_{x=0} = \alpha (t_a - t_{x=0})$$

sein, woraus sich die zu t passende Gastemperatur

$$t_a = A \left[\left(1 + \frac{\lambda}{\alpha} k\right) \cos pz - \frac{\lambda k}{\alpha} \sin pz\right] = B \cos(pz - \vartheta) \quad \text{mit} \quad B = A \sqrt{\left(1 + \frac{\lambda k}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\lambda k}{\alpha}\right)^2} \qquad (23)$$

ergibt. Für die Strömung innerhalb des Kanales darf man die Nußeltschen Werte von α benutzen, die bei $w = 1000$ m/sek; und 1000° bzw. 500° C, als mittlere Gas- und Wandtemperatur etwa auf $\alpha = 1000$ führen. Hieraus geht im Vergleich mit den für die Kante ermittelten Verhältnissen hervor, daß die Wandoberfläche der Schwankung der Gastemperatur nur in viel geringerem Maße folgt.

e) Wärmestrom durch Schaufel und Laufrad.

Bedeutet

$F = 2 \pi x h$ den „radialen" Querschnitt des Scheibenkörpers im Abstande x,
F' die Summe der Querschnitte aller Schaufeln im Abstande x,

U' den Umfang aller Schaufeln im Abstande x und ersetzt man, angenähert wie in Abschn. 198, die Scheibe und die Schaufeln gegen den Kranz hin, durch hyperboloidische Profile, Abb. 1059, so daß

$$F = a\,x^n;\quad F' = a'\,x^{-\nu} \quad \ldots \quad (1)$$

wird; bedeutet ferner

t_u die unveränderliche Temperatur auf beiden Seiten der Scheibe,

t_g die unveränderlich angenommene Temperatur des Gasstromes in den Schaufeln,

$\tau_k = t_r - t_u$ der Temperaturunterschied am Kranzende für $x = r$,

$\tau_s = t_g - t'_r$ der Temperaturunterschied an der Schaufelwurzel für $x = r$,

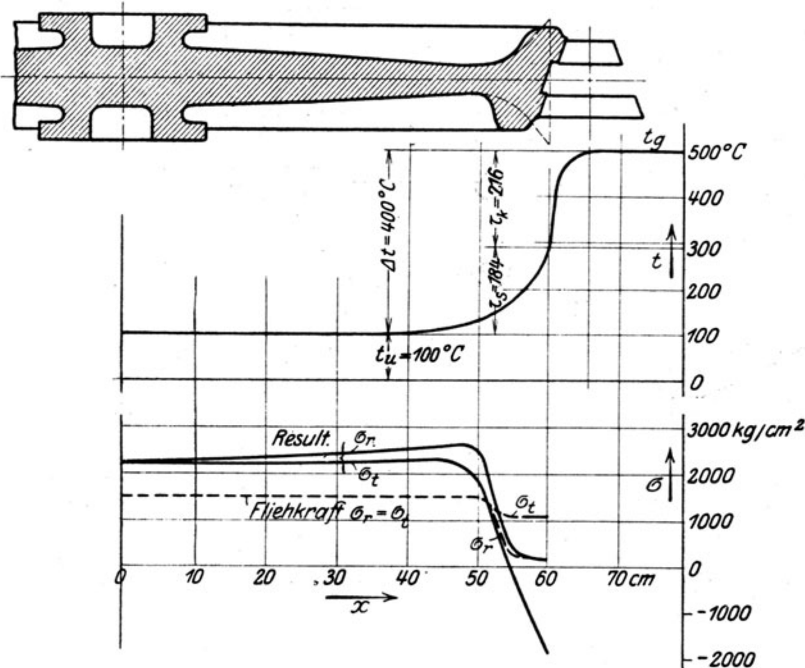


Abb. 1059. Wärmestrom durch Schaufel und Laufrad.

so gilt, wenn die Ableitungen im Abschn. 198 sinngemäß abgeändert werden (n war dort negativ), für den Abstand x

$$\tau = t - t_u = \tau_k \left(\frac{x}{r}\right)^{+m} \quad \text{mit} \quad m = r\sqrt{\frac{2\,\alpha}{\lambda\,h_r}} \quad \ldots \quad (2)$$

$$\tau' = t_g - t' = \tau_s \left(\frac{x}{r}\right)^{-\mu} \quad \text{mit} \quad \mu = r\sqrt{\frac{\alpha\,U_r'}{\lambda\,F_r'}} \quad \ldots \quad (3)$$

wobei h_r die Kranzhöhe, F_r' den Schaufelquerschnitt, U_r' den Umfang im Abstande $x = r$ bedeuten. Nimmt man an, daß die in den Kranz einströmende Wärme nur durch die Schaufeln zugeleitet wird (so daß der freie äußere Kranzumfang unbeteiligt bleibt), so besteht die Bedingung

$$-\lambda\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_{x=r} F_r = -\lambda\left(\frac{\partial t'}{\partial x'}\right) F_r' \quad \text{oder} \quad \tau_k\,m\,\frac{x^{m-1}}{r^m}\,F_r = \tau_s\,\mu\,\frac{x^{-\mu-1}}{r^{-\mu}}\,F_r', \quad \ldots \quad (4)$$

woraus sich mit $x = r$

$$\tau_s = \tau_k\,\frac{m}{\mu}\,\frac{F_r}{F_r'} \quad \ldots \quad (5$$

ergibt. Da aber

$$\tau_k + \tau_s = (t - t_u)_r + (t_g - t')_r = t_g - t_u \quad \ldots \quad (6)$$

ist, so erhält man mit Gl. (5)

$$\tau_k = \frac{t_g - t_u}{1 + \dfrac{m}{\mu}\,\dfrac{F_r}{F_r'}};\qquad \tau_s = \frac{t_g - t_u}{1 + \dfrac{\mu}{m}\,\dfrac{F_r}{F_r'}} \quad \ldots \quad (7)$$

Es ist bemerkenswert, daß die Aufteilung des Temperaturgefälles $\Delta t = t_g - t_u$ von λ und α unabhängig ist. In der Tat ist nach Gl. (2) und (3)

$$\frac{m}{\mu}\,\frac{F_r}{F_r'} = \frac{F_r}{F_r'}\sqrt{\frac{2\,F_r'}{h_r\,U_r'}} \quad \ldots \quad (8)$$

durch die Abmessungsverhältnisse allein bestimmt. Setzt man diese reine Zahl im Mittel $= {}^3/_2$, so wird

$$\tau_k = \frac{2}{5}\Delta t; \qquad \tau_s = \frac{3}{5}\Delta t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Das Gefälle wird in diesem Falle zur größeren Hälfte von der Schaufel aufgezehrt, was sehr günstig ist für die

f) Beanspruchung der Scheibe.

Die in Abb. 1059 dargestellte Scheibe, für die mit den oben angegebenen Abhängigen der Temperaturverlauf ermittelt wurde, soll bei 1320 mm mittl. Schaufel-Durchm. 3000 Uml./min machen. Die reinen Fliehkraftspannungen erreichen den Höchstbetrag von $\sigma = 1500$ kg/cm². Die Temperaturspannungen sind dem Temperaturunterschiede τ_k verhältnisgleich.

Bezeichnet man mit R den mittleren Schaufelhalbmesser, so ergeben sich an den wichtigsten Stellen der Scheibe die Werte

	x/R =	0	0,6	0,71	0,91
Temperaturspannungen	σ_r/τ_k =	3,88	—	5,75	0
	σ_t/τ_k =	3,88	4,47	—	— 15,3

Insbesondere erhält man mit $t_g = 500^0$ C Gastemperatur. $t_u = 100^0$ C Temperatur der Radumgebung, woraus nach Gl. (7) $\tau_k = 184^0$ C; $\tau_s = 216^0$ C folgt, für:

	x/R =	0	0,6	0,71	0,91
Temperaturspannung	σ_r . kg/cm²	713	—	1060	0
	σ_t . "	713	824	—	— 2810
Fliehkraftspannung	σ_r . "	1500	1500	1500	157
	σ_t . "	1500	1500	1500	980
Gesamtspannung	σ_r . "	2213	—	2560	157
	σ_t . "	2213	2324	—	— 1836

Die Höchstwerte sind 2560 kg/cm² radialer Zug im Scheibenkörper und 1830 kg/cm² tangentialer Druck in der äußersten Kranzfaser.

Man erkennt hieran die außerordentliche Wichtigkeit, den gesamten Temperaturunterschied Δt möglichst klein zu halten. Dies erfordert eine Umgebungstemperatur des Rades, die am besten durch Einführung von Dampf hergestellt wird, der am Kranz austreten und sich mit den Abgasen mischen würde.

2. Die Spülarbeit.

Wird zum Zwecke der Schaufelkühlung ein kalter Luftstrom periodisch durch das Rad geblasen, so kann dies auf zwei Arten geschehen:

α) Hochdruckspülung mit Ausströmung der kalten Luft unter dem vollen Verdichtungsdruck.

β) Niederdruckspülung nach Holzwarth, mit Entnahme der Spülungsluft aus einer Vorstufe des Verdichters mit so kleinem Überdruck, als zum Durchblasen der erforderlichen Spülmenge gerade hinreicht.

Im ersten Fall ist der Spülaufwand der Unterschied zwischen der Verdichtungsarbeit und der beim Spülen gewonnenen Arbeit; im zweiten Fall wirkt das Laufrad meist wie ein schlechter Ventilator und verbraucht Arbeit. Um diese genau bestimmen zu können, müßten die Schaufelverluste in Abhängigkeit vom Stoßwinkel bekannt sein. Die in Abb. 173 u. f. gegebenen ψ-Werte reichen hierzu nicht aus, da der Stoßwinkel beim Spülen viel größer wird, und vor allem, weil bei normal bemessenen Schaufeln Überdruck auftritt, der bei Abb. 173 infolge starker Erweiterung vermieden wurde. Immerhin ermöglichen jene Versuche eine Abschätzung der Verluste, wie Abb. 1059a veranschaulicht, wo ε das angenommene Verhältnis des Stoßbeiwertes ψ_s zum normalen ψ gemäß der obersten Schaulinie auf Abb. 217 bedeutet. Unter

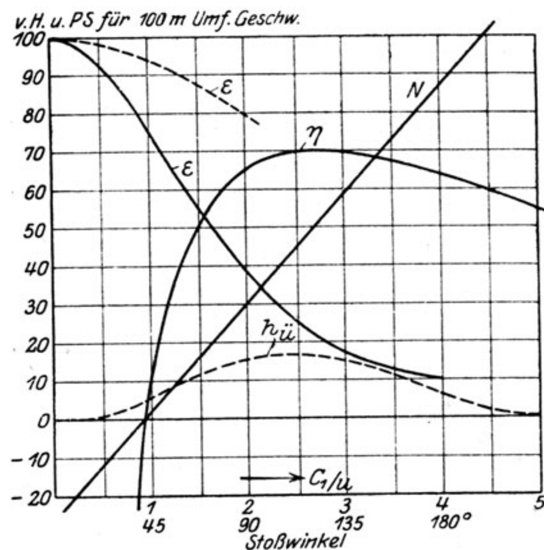


Abb. 1059a. Wirkungsgrad und Spülarbeit.

„Stoßwinkel" ist der Winkel zwischen der relativen Strahlrichtung und dem Winkel des Schaufelrückens verstanden. Für negative Stoßwinkel, d. h. Stoß auf die hohle Schaufelseite wurde Verhältniszahl ε' (beide in v. H.) benützt. Für eine beliebige Schaufel sei w_1 die relative Eintrittsgeschwindigkeit im Spalt, w_2 die Austrittsgeschwindigkeit. Das adiabatische Gefälle in der Schaufel ist

$$h_{ad} = (w_2^2 - w_1^2)\, A/2g + h_z\,,$$

wobei man den Energieverlust h_z ähnlich veranschlagen darf, wie bei reiner Gleichdruckwirkung, d. h. man setzte $h_z = (1 - \psi_s^2)\, A w_1^2/2\,g$ mit $\psi_s = \varepsilon \psi_{normal}$, woraus sich

$$h_{ad} = (w_2^2 - \psi_s^2 w_1^2)\, A/2g$$

ergab. Die Durchflußgleichung

$$G v_2 = f_2 w_2 \quad \text{ergibt} \quad w_2 = \frac{G\, v_2}{f_2}$$

wobei es genügt v_2 abzuschätzen oder $\approx v_1$ zu setzen. Aus h_{ad} berechnet man den Überdruck angenähert mittels Formel $A v \Delta p = h_{ad}$ mit einem Mittelwert von v. Auf diese Weise ist für ein zweikränziges Rad mit den Winkeln: $\operatorname{tg} \alpha_1 = 0{,}40$; $\operatorname{tg} \beta_2 = 0{,}49$; $\operatorname{tg} \alpha_1' = 0{,}58$; $\operatorname{tg} \beta_2' = 0{,}68$ die in Abb. 1059a mit η überschriebene Schaulinie des Wirkungsgrades am Radumfang berechnet worden. Das Überdruckgefälle ist als h_a eingetragen und als jeweiliges Gesamtgefälle die Größe $H_0 = A c_1^2/2g + h_a$ benutzt worden. Wenn für eine Lauf- oder Zwischen-Leitschaufel h_a negativ herauskam, was eine Verdichtung innerhalb der Schaufel bedeuten würde, die uns unwahrscheinlich zu sein dünkt, nahm man an, daß der Strahl sich ablöst, so daß jene Schaufel mit Gleichdruck arbeitet.

Man erkennt, daß der Wirkungsgrad in der Nähe des Wertes $c_1/u = 1$ ins Negative umschlägt. Als fast gerade Linie stellt sich **der Kraftverbrauch N_{100} für 100 m/sek Umfangsgeschwindigkeit und 1 kg/sek Luftgewicht** dar, was eine bequeme Interpolation im Negativen gestattet.

Düsenwiderstand bei Niederdruckspülung.

Infolge des nicht unerheblichen Erweiterungsverhältnisses der Düse wird diese bei Spülung mit niedrigem Druck als „Diffusor" wirken, wobei auch Verdichtungsstöße vorkommen können. Meist wird man mit der Formel von Forner, Gl. (3) Abschn. 31, einen über dem kritischen gelegenen Druck p_m' an der engsten Stelle erhalten, woraus sich mittels der Ellipsenformel die durchströmende Menge und die mittlere Geschwindigkeit im Austrittsquerschnitt ergibt. Man wird so der adiabatischen Ausdehnung gegenüber Energieverluste, von 50 v. H. und mehr feststellen können. Da der Luftstrom auch noch die Kammerventile zu durchstreichen hat, so wird die Austrittsgeschwindigkeit begreiflicherweise klein.

Beispiel für die Größe der Spülarbeit.

Eine Turbine von 1000 PS Leistung werde mit einem Rad von 1 m Durchm. bei 3000 Umdr./min ausgeführt. Aus den Angaben von Holzwarth, Abschn. 207, ist zu folgern, daß zum Spülen einer ähnlichen Turbine etwa 3,5 kg Luft i. d. Sekunde erforderlich sind. Bei Kammern von 230 l Inhalt ist, um eine Entleerung in etwa 0,22 Sek. zu erzielen, ein Mindestquerschnitt der Düse von etwa 43 cm² vorzusehen; bei doppelter Erweiterung (mit starker Spaltausdehnung am Anfang) erhält die Düse 86 cm² am Austritt. Wird als Spüldauer für ein Spiel 0,8 Sek. zugelassen, so kann man die Austrittsgeschwindigkeit auf etwa 70 m/sek einschätzen, was mit $u = 157$ m/sek das Verhältnis $c_1/u = 0{,}45$ und nach Abb. 1059a bei $u = 100$; $N_{100} = 14$ PS/kg ergibt. Im ganzen ist der Arbeitsverlust $N_s = 14 \cdot (1{,}57)^2\, 3{,}5 = 121$ PS. Hierzu tritt der Verdichtungsaufwand der Spülluft, deren Druck vor der Turbine mit Rücksicht auf die Ventile u. a. auf 1,25 at abs. einzuschätzen ist, mit etwa 33 PS, die eigentliche Radreibung mit mindestens 10 PS, so daß sich insgesamt ein Aufwand von

$$N_{spül} = 164 \text{ PS}$$

ergibt, was einen Verlust von rd. 16 v. H. der Gesamtleistung bedeutet.

Die Hochdruckspülung scheint indessen nicht minder verlustreich zu sein, so daß ein gewisser mittlerer Druck sich als das relativ Günstigste herausstellen würde. Im ganzen jedoch wird man **die Kühlung des Rades mittels Spülluft kaum als zweckmäßig bezeichnen;** die Beaufschlagung mit getrennten Dampfstrahlen dürfte eine bessere Lösung ermöglichen.

Für die Wirksamkeit der Spülung ist gemäß Gl. (19d) der Ausdruck $b z$ und in diesem gemäß (19) und (18b) das Produkt $\sqrt{\gamma_s w_s}$, wo das Zeichen s den Spülungszustand andeuten soll, maßgebend. Bei hohem Spüldruck ist für gleiche Spülluftmengen z klein, w_s groß. Vergleichsrechnungen müssen feststellen, welche Annahmen auch in dieser Hinsicht die besten Verhältnisse schaffen.

Mittelwert des Turbinenwirkungsgrades. Entleerungszeit.

Das im Zeitelement dz ausströmende Gewicht dG enthält die verfügbare Arbeit $d\, G c_1^2/2g = d L_0$ und gibt an das Rad den Betrag $\eta_t d L_0$ ab. Die Gesamtarbeit ist $\int \eta_t d L_0$, die verfügbare Arbeit ist $\int d L_0$, mithin ist der Mittelwert des Turbinenwirkungsgrades

$$\bar{\eta}_t = \frac{\int \eta_t\, d\, G c_1^2}{\int d G c_1^2}\,.$$

Dieser Wert kann graphisch ermittelt werden. Benutzt man die in Abb. 1059a dargestellte Schaulinie des Wirkungsgrades für ein Laufrad mit $u = 300$ m, so ergibt sich nach Abb. 1059b bei einem anfänglichen Wert von $c_1 = 1380$ m/sek ein mittlerer Wirkungsgrad von rd. 63,5 v. H., obschon $\eta_{max} \cong 0,7$ ist. Diese starke Erniedrigung liegt an dem ungenügenden Verhältnis von u zu c_1, welches im Anfang η_t auf weniger als 60 v. H. herabdrückt. Das spätere Steigen desselben kann nur noch für verhältnismäßig geringe Gewichtsmengen nutzbar gemacht werden, so daß hierdurch die Bestrebungen, den Verpuffungsdruck im Anfang nicht zu seinem vollen Betrag sich entwickeln zu lassen, ihre Berechtigung erhalten.

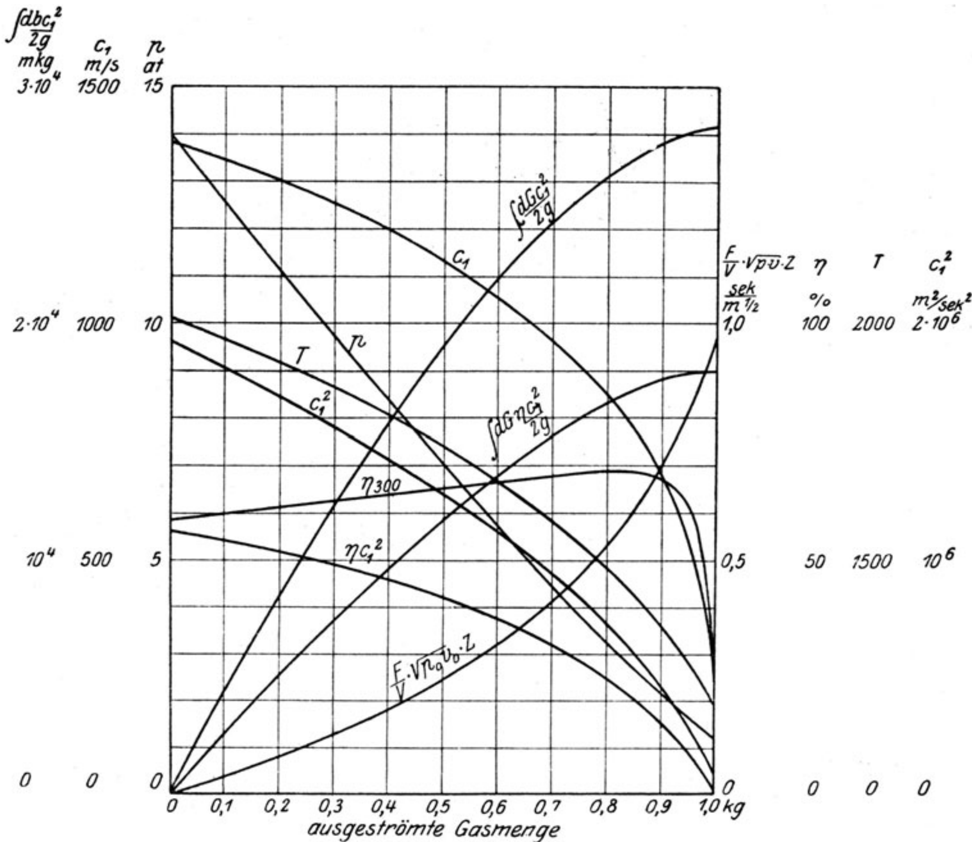


Abb. 1059 b. Mittelwert des Turbinenwirkungsgrades und Entleerungszeit.

Entleerungszeit.

Die Entleerungszeit einer Kammer mit dem Rauminhalt V in m^3 vom Anfangsdrucke p_0 auf einen Zwischendruck p_i berechnet sich aus der Gewichtsmenge dG, die im Zeitelement dz durch den engsten Querschnitt f_m der Düse abströmt, indem man, solange im engsten Querschnitt der kritische Druck herrscht,

$$dG = -\chi f_m \sqrt{\frac{p_i}{v_i}}\, dz$$

setzt, anderseits den ganzen Inhalt unter Voraussetzung adiabatischer Ausdehnung $p_i v_i^k = p_0 v_0^k$ als $G = V/v_i$ schreibt oder das Verhältnis $\frac{G}{G_0} = \frac{v_0}{v_i} = \left(\frac{p_i}{p_0}\right)^{\frac{1}{k}}$ bildet und hieraus $dG = \frac{G_0}{k}\left(\frac{p_i}{p_0}\right)^{\frac{1}{k}-1} d\left(\frac{p_i}{p_0}\right)$ dem obigen $= -\chi f_m \sqrt{\frac{p_i}{v_i}} \cdot dz$ gleichsetzt. Drückt man v_i durch p_i aus, so kann diese Gleichung nach Trennung der Veränderlichen integriert werden, und ergibt

$$z = \frac{2}{k-1}\,\frac{V}{\chi f_m \sqrt{p_0 v_0}}\left[\left(\frac{p_0}{p_i}\right)^{\frac{k-1}{2k}} - 1\right].$$

Der sich hieraus ergebende Ausdruck $z f_m \sqrt{p_0 v_0}/V$, der nur von k und dem Druckverhältnis abhängt, ist in Abb. 1059b zugleich mit p_i als Abhängige des ausgeflossenen Gewichtes für den Anfangszustand $p_0 = 14$ at. abs. $T_0 = 2010$ abs. dargestellt.

Infolge der „Saugwirkung" der Düse wird sich bis zu sehr tiefen Spüldrücken im engsten Querschnitt stets der kritische (zu p_i gehörende) Druck einstellen, und die Formel ist uneingeschränkt benutzbar.

Wollte man den Wärmeverlust an die Kammerwand während der Entleerung berücksichtigen, so könnte als Zustandsgleichung im Innern eine Polytrope $p v^n =$ konst. angenommen werden. Beträgt der Verlust 10—20 v. H. des Heizwertes, so würde nach grober Schätzung n die Werte 1,6—2,0 zu erhalten haben.

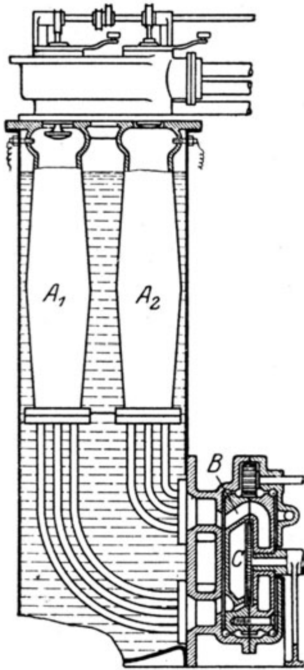


Abb. 1060. Verdichtung durch die sich entspannenden Abgase nach Westinghouse.

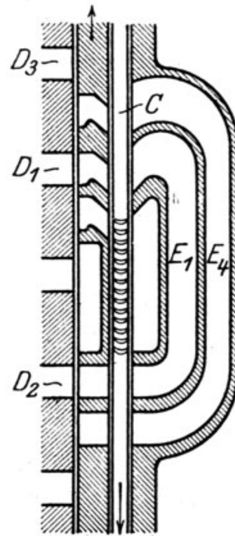


Abb. 1060a. Drehschieber zu Abb. 1060.

206. Andere Arbeitsverfahren für Gasturbinen.

Der Hauptübelstand der bisherigen oben behandelten Arbeitsverfahren ist neben der hohen Schaufeltemperatur der große Arbeitsaufwand der Kreiselverdichter. Die vernünftige Erfindertätigkeit bemüht sich daher vor allem, hierin Wandel zu schaffen. Beachtenswert in dieser Hinsicht sind die nachfolgenden Vorschläge, die **Verdichtung** durch das nach erfolgter Arbeitsabgabe zu veranlassende **Einströmen** der sich ausdehnenden **Feuergase in eine mit frischer Ladung gefüllte, benachbarte Verpuffungskammer zu bewerkstelligen.** Dies kommt zum Ausdruck in der

Turbine der Westinghouse Machine Co. Pittsburg.

Gemäß dem D.R.P. 263140, Kl. 46 d. v. J. 1912, Abb. 1060, sind die Verpuffungskammern A_1 A_2 im Innern eines zylindrischen Gefäßes untergebracht, dessen Wasserinhalt nach Maßgabe der übertragenen Wärme zum Verdampfen kommt. B ist ein umlaufender Steuerschieber, C das Turbinenrad. Das Grundsätzliche des Verfahrens kann an Hand des Umfangschnittes durch den Schieber Abb. 1060a wie folgt klargelegt werden. Der durch Düse D_1 austretende Gasstrahl beaufschlagt das Turbinenrad C, wird durch Kanal E_1 nochmals auf das Rad geleitet und tritt bei D_2 in die benachbarte Kammer ein, die mit frischer Ladung gefüllt ist und durch die eintretende Gasmenge verdichtet wird. Der gleiche Vorgang wiederholt sich mit Kammer D_3 vermöge Schieberkanales E_4, so daß die Verdichtung in Kammer D_2 in 2 Stufen vor sich geht. Ähnliche Zwecke verfolgt die

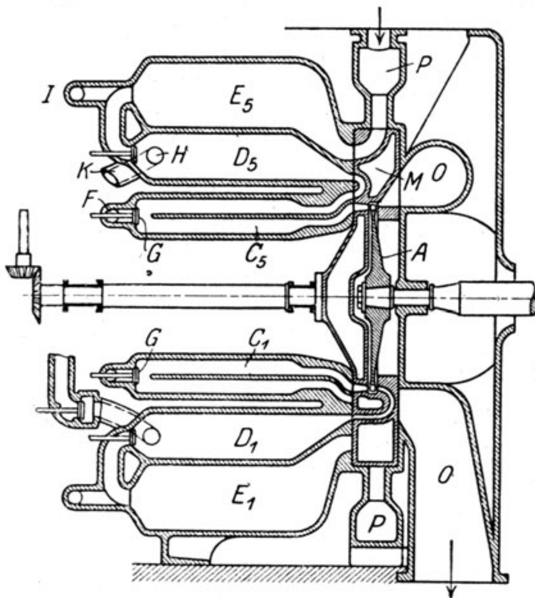


Abb. 1060b. Gasturbine von Bischof.

Turbine von B. Bischof.

Gemäß Abb. 1060b D.R.P. 296222 v. J. 1913 ist das Turbinenrad A von einem umlaufenden Schieber M umgeben. Dieser steuert die wechselweise Verbindung der Verpuffungskammern C und der dazu gehörenden Verdichtungskammern D, E. Der untere Teil der Abbildung stellt den Vorgang unmittelbar nach der Verpuffung in Kammer C_1 dar, wobei das Gas bei etwa 38 at Anfangsdruck, nachdem es das Laufrad beaufschlagt hat, die frische Ladung in Kammer D_1 verdichtet und in eine darauffolgende nicht sichtbare Verpuffungskammer C_2 vermöge eines (nicht dargestellten) Kanals F, wobei in der betreffenden Kammer das Ventil G geöffnet sein muß, herübertreibt. Nach dem Druckausgleich herrscht in C_1, D_1, C_2 ein Druck von etwa 10 at abs.; D_1 ist ganz mit Auspuffgasen angefüllt. Eine darauffolgende Schieberstellung M_2 ermöglicht gemäß Abb. 1060c, daß die Abgase aus den Kammern C_1, D_1 sich durch das Rad hindurch in die Kammer E_1 entleeren, deren Inhalt verdichten und ihn in die übernächsten Kammern D_3 und C_3 schieben, so daß nach dem Druckausgleich bei einer Spannung von 3 at C_3, D_3 mit frischer Ladung, E_1 mit Abgasen angefüllt sind. Die hierauf folgende Schieberstellung Abb. 1060c stellt den Auspuffvorgang der drei Kammern C_1, D_1, E_1

durch das Rad hindurch in das Auspuffrohr O dar. Der obere Teil von Abb. 1060b endlich zeigt die Durchspülung und Füllung der drei eine Gruppe bildenden Kammern vom Ringkanal P aus. Dabei ist das Ventil bei H geöffnet, Kanäle J, K geschlossen zu denken. Es wird vorausgesetzt, daß ein Überdruck von 0,2 at hinreicht, um die Abgase ohne Bremswirkung in der gewünschten Zeit durch das Rad hindurch zu drücken.

Dieses Verfahren wird im D.R.P. 286773 v. J. 1914 auf die Gleichdruckverbrennung ausgedehnt. Die nicht vollständig entspannten Abgase verdichten die frische Ladung auf einen angemessenen Zwischendruck; die völlige Verdichtung auf den Verbrennungsdruck wird von einem Kreiselverdichter besorgt.

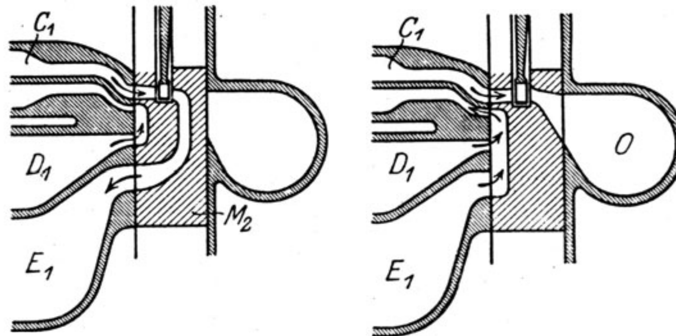


Abb. 1060c. Schieberstellungen zur Bischofturbine.

Die thermodynamische Bilanz des Verfahrens ist nicht ungünstig, doch tauchen Bedenken anderer Art auf, ob nämlich der mit hoher Geschwindigkeit in die frische Kammer eindringende Abgasstrahl sich mit der **frischen Ladung nicht zu sehr mischt,** ob es nicht zu **Vorzündungen** kommt, ob die langen Strömungswege keine **allzugroße Drosselung** bewirken.

Die Turbine von Baetz[1])

besorgt die Selbstverdichtung in stetigem Fluß unter Zuhilfenahme des Laufrades selbst. Gemäß Abb. 1060d wird durch die festen Düsen G, L, beispielsweise Gas und Luft in die Schaufelkanäle des Laufrades S eingeführt. In der Stellung 1 und 2 wird **die Verdichtung des Inhalts durch die bei 4′ entweichenden Abgase eingeleitet,** in den Lagen 3, 4, 5, durch die bei 3′, 2′, 1′ zuströmenden Abgase **vollendet.** Nun

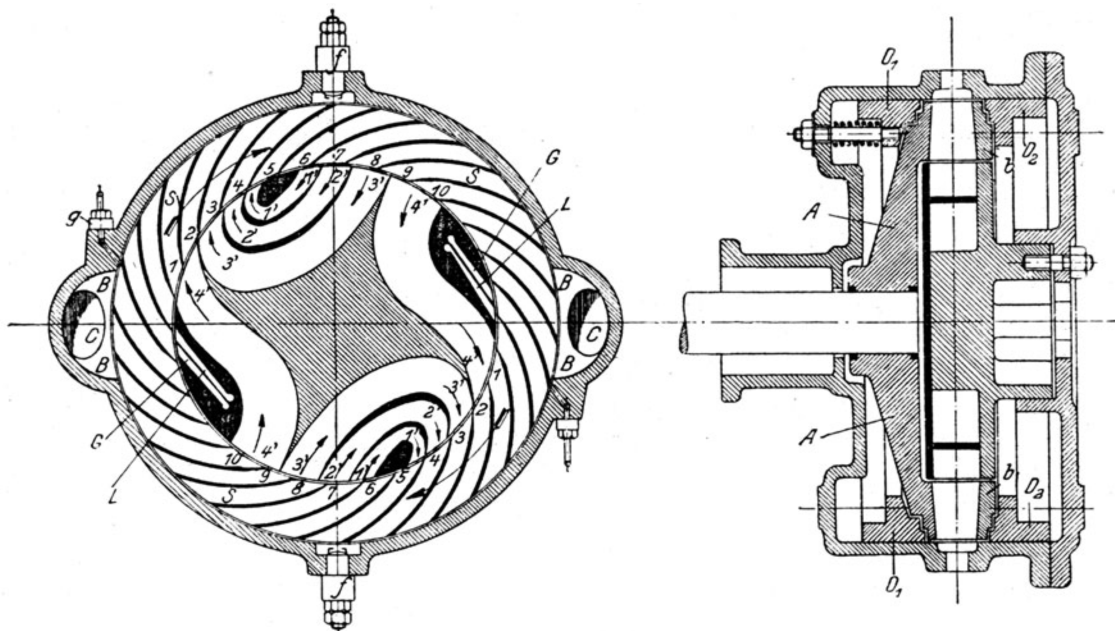


Abb. 1060d und e. Gasturbine von Baetz.

(bzw. schon in der Lage 4) beginnt die Zündung mittels Kerze f, so daß etwa bei 6 der Höchstdruck erreicht wird, und sogleich die Abströmung und Ausdehnung durch 1 eingeleitet, weiterhin durch 2′, 3′, 4′ fortgesetzt wird. Der Auspuff findet in den Raum B statt; C ist die Leitung ins Freie. Die Leit-

[1]) Ein neues Prinzip für Dampf- und Gasturbinen. Leipzig 1920.

vorrichtung ist, wie ersichtlich, für zwei Spiele auf eine Umdrehung eingerichtet. Bei Verwendung flüssigen Brennstoffes würde dieser bei g ohne Unterbrechung zugeführt.

Nachteilig wirkt der **beträchtliche Druckunterschied** zwischen der Spannung im Laufrad und derjenigen in den jeweils verbundenen Verdichtungszellen. So hätte man in Schaufel 6 den Verpuffungshöchstdruck, und in der kommunizierenden Zelle 5 nur etwas mehr als den Verdichtungsenddruck; ein beträchtlicher Teil der Ausdehnungsenergie würde durch Drosselung vernichtet. Aus der Seitenansicht Abb. 1060e erkennt man ferner, daß das Laufrad innen und außen **Spalte** bildet, für deren **Abdichtung wohl nur Labyrinthnuten** in Betracht kommen, so daß man sich auf ziemliche Verluste gefaßt machen muß.

Es verdient erwähnt zu werden, daß der Erfinder diese neue Art der Energieumsetzung auch auf Dampf als Energieträger angewendet hat, wie man in der angegebenen Quelle nachlesen kann. Eine freilich unvollkommene Versuchsausführung ergab rd. 22 v. H. thermodynamischen Wirkungsgrad.

Ein hoher Wirkungsgrad der Verdichtung und zugleich die äußerste Vereinfachung der Gasturbine wäre erreichbar, wenn man nach dem **Vorschlag von Nernst** das Turbinenlaufrad als (einstufigen) Verdichter ausbilden und mit reiner Rückdruckwirkung arbeiten lassen könnte[1]).

Das Ladegemisch soll vereinigt oder getrennt durch die hohle Welle bei A Abb. 1061 angesaugt und durch die Fliehkraft in Arm B einstufig verdichtet werden, worauf bei D unmittelbar vor der Düse eine Zündung elektrisch oder auch selbsttätig wie im Dieselmotor erfolgt und die Gase sofort durch die

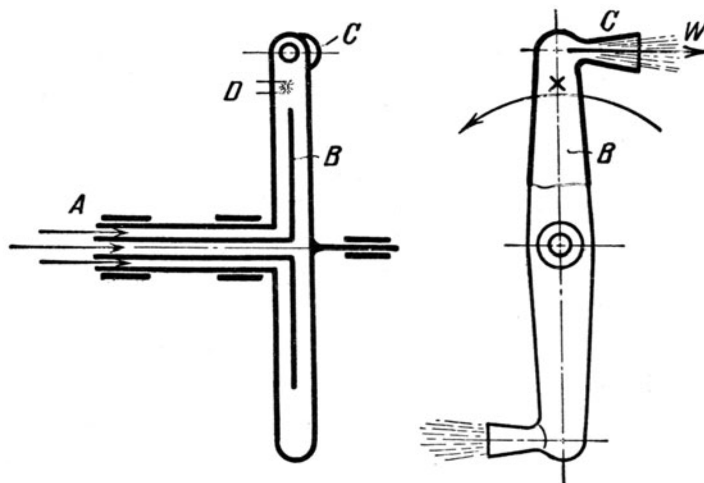


Abb. 1061. Mit dem Verdichter vereinigte Turbine nach Nernst.

Düse ins Freie expandieren. Der Vorgang entspricht also unveränderlichem Verbrennungsdruck: der hohen Temperatur sind nur gut kühlbare Wände von geringer Ausdehnung ausgesetzt, und die sonst unvermeidlichen Schaufeln, deren Kanten den verwundbarsten Teil der Turbine bilden, sind beseitigt. Wenn man indes die Verhältnisse an Hand der Rechnung untersucht, so findet man, daß außerordentlich hohe an 1000 m/sek heranreichende Umfangsgeschwindigkeiten erforderlich sind. Man erhält bei 0,85 Wirkungsgrad des Gaserzeugers und Ausnützung der Abwärme in einer besonderen Dampfturbine bei 200, bzw. 500 und 1000 m/sek Umfangsgeschwindigkeit etwa 8,6 bzw. 15,6 und 24,5 v. H. Gesamtwirkungsgrad. Die Ausnützung der Strömungsenergie in der reinen Rückdruckturbine scheitert daher derzeit an konstruktiven Schwierigkeiten, wie unter anderem auch die, daß uns die Luftreibung zwingen würde, das Rad im Vakuum laufen zu lassen.

Sehr anziehend ist die in Abb. 1061a dargestellte zweite Ausführungsform, die Nernst dem gleichen Grundgedanken verliehen hat. Bei A tritt das Ladegemisch (nach Bedarf Luft und Gas getrennt) in die hohle Achse, wird im umlaufenden U-förmigen Rohr verdichtet und bei B entzündet. Hierauf strömt es radial einwärts zurück und gelangt bei D mit höherem Druck und höherer Temperatur an, so daß es in einer Turbine oder in einem Kolbenmotor Arbeit leisten kann.

Da die sekundlich durchströmende Masse in beiden Rohrschenkeln gleich, die Geschwindigkeitsrichtung aber entgegengesetzt ist, heben sich die von den Wanddrücken geleisteten Arbeiten auf, und es geht in der Vorrichtung ein eigenartiger Energieaustausch vor sich, der einer näheren Erläuterung wert ist. Verfolgen wir an Hand der Bezeichnungen der Abbildung die relative Bewegung und es sei u die

[1]) Man vgl. auch D.R.P. 170693 v. J. 1904 und Wegner v. Dallwitz, Die Explosionsturb. 1908.

Umfangsgeschwindigkeit der Rohrachse des mittleren Schenkels. Die Strömungsgeschwindigkeit sei überall gleich groß (d. h. die Querschnitte seien entsprechend gewählt). Die Bewegung von A bis B ergibt nach der Theorie der radialen Turbine

$$i_1 + A\frac{u^2}{2g} = i_2\,,$$

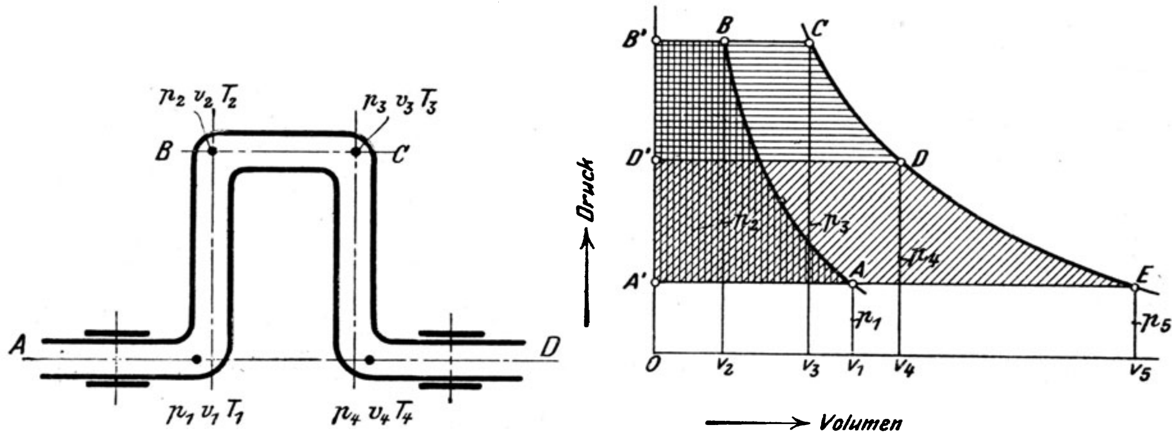


Abb 1061a. Zweite Ausführungsform d. Nernst-Turbine. Abb. 1061b. Verfahren von Nernst im p-v-Schaubild.

wo i_1, i_2 die Wärmeinhalte der als adiabatisch vorausgesetzten Zustandsänderung sind; die Verbrennung zwischen B und C liefert

$$i_3 = i_2 + H\,,$$

wo H den Heizwert für 1 kg bedeutet; die Bewegung von C bis D

$$i_3 - A\frac{u^2}{2g} = i_4\,.$$

Beschränken wir uns auf unveränderliche spezifische Wärmen, so ist $i = c_p\,T + \text{konst.}$ und die Gleichungen lauten

$$c_p\,(T_2 - T_1) = A\frac{u^2}{2g}\,; \qquad c_p\,(T_3 - T_2) = H\,; \qquad c_p\,(T_3 - T_4) = A\frac{u^2}{2g} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Der Ausdruck $A\,u^2/2\,g$, den wir mit $A\,L_k$ bezeichnen wollen, bedeutet die zwischen $A\,B$ aufgewendete und zugleich die zwischen $C\,D$ gewonnene Verdichtungsarbeit. Die Zustandsänderung im $p\,v$-Bild, Abb. 1061b, wird demnach wie folgt darstellbar: Verdichtung von A bis B, Verbrennung bei unveränderlichem Druck ($p_3 = p_2$) von B bis C, Rückausdehnung von C bis D, so daß die wagerecht und senkrecht schraffierten Arbeitsflächen einander gleich sind. Vom Zustand D ausgehend kann das Verbrennungsgemisch in einer idealen Kolbenmaschine oder Turbine die (schräg schraffierte) Arbeitsfläche $D'\,D\,E\,A'$ abgeben, wenn man die Ausdehnung der Einfachheit halber nur auf atmosphärischen Druck fortgesetzt denkt (statt bis zur Isotherme durch den Anfangszustand A). Wir haben demnach die innere Arbeit

$$A\,L_i = i_4 - i_5 = c_p\,(T_4 - T_5)\,.$$

Die aufgewendete Wärme ist nach (1) $= c_p\,(T_3 - T_2)$, also ist der thermische Wirkungsgrad

$$\eta_w = \frac{T_4 - T_5}{T_3 - T_2}\,.$$

Nun ist indes nach (1) $T_2 - T_1 = T_3 - T_4$, woraus $T_4 = T_3 - T_2 + T_1$ oben eingesetzt

$$\eta_w = \frac{(T_3 - T_2) - (T_5 - T_1)}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{T_5 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{T_5/T_1 - 1}{T_3/T_2 - 1}\left[\frac{T_1}{T_2}\right].$$

Da aber, wie leicht nachzuweisen, für die Adiabaten $C\,E$ und $A\,B$ die Beziehung $T_5/T_3 = T_1/T_2$, also $T_5/T_1 = T_3/T_2$ zutrifft, so ist

$$\eta_w = 1 - \frac{T_1}{T_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

und dieser Ausdruck stimmt genau überein mit dem Wirkungsgrad des Viertaktprozesses zwischen den Druckgrenzen p_1 und p_2, d. h. den Temperaturgrenzen $T_1\,T_2$. Der eigenartige Prozeß, der im Nernstschen Motor vor sich geht, kann also, wie zu erwarten war, in grundsätzlicher Beziehung keine Vorteile bieten. Wohl aber würde in praktischer Beziehung der große Vorteil hoher Kompressionsdrücke mit gutem

mechanischen Wirkungsgrad winken, denn die Verdichtung erfolgt ohne Kolben, und die Verdichtungsarbeit wird sofort durch die Ausdehnung im absteigenden Rohrzweig gedeckt, so daß im Arbeitsgas nur die „reine“ Nutzarbeit enthalten ist, die mit verringertem Anfangsdruck und verkleinerter Temperatur angeliefert wird. Ein Beispiel klärt indessen sofort auf, daß der Vorschlag derzeit unausführbar ist. Nehmen wir etwa $u = 400$ m/sek, so liefert $i_1 - i_2 = c_p (T_2 - T_1) = A u^2/2g$ mit $T_1 = 300$ die Endtemperatur der Verdichtung $T_2 =$ rd. 380 und die bekannte Formel

$$(p_2/p_1)^{\frac{k-1}{k}} = T_2/T_1$$

das Verhältnis der Pressungen p_2/p_1 bloß rd. 2,3, also etwas durchaus Ungenügendes. Mit $u = 1000$ m/sek erhält man $p_2/p_1 =$ rd. 31, wäre also so weit wie der Diesel-Motor, allein abgesehen von den großen Wärmeverlusten des absteigenden Astes scheitert eine solche Ausführung an unüberwindlichen konstruktiven Schwierigkeiten.

Der **Nachteil stark wechselnder Ausströmgeschwindigkeit** bei der **Verpuffungsturbine** soll wie folgt gemildert werden. Die **Gasmotorenfabrik Deutz** läßt in die Verpuffungskammer zuerst ein Gemisch von Luft und Dampf, oder Dampf allein eintreten und sorgt für tunlichst kleine Vermischung mit dem darauf eintretenden Ladegemenge, so daß die Schichtung während der Ausdehnung erhalten bleibt. Das Dampfluftpolster soll durch die Verpuffung nur verdichtet, nicht aber geheizt werden, besitzt also eine tiefere Temperatur als das eigentliche Brenngemisch und wird mit einer mittelhohen Geschwindigkeit ausfließen. Nachdem dieser Teil ganz abgeströmt ist, kommt das Brenngemisch an die Reihe, welches inzwischen auf tieferen Druck und niedrigere Temperatur entspannt wurde, so daß die Geschwindigkeit minder hoch ist als bei unmittelbarer Ausströmung.

Auf anderem Wege wird das gleiche Ziel im D. R. P. Nr. 274591 v. J. 1912 von **P. Christlein** zu erreichen gestrebt. Die Verpuffungskammer besteht nach Abb. 1062 aus einzelnen Zellen, die der Reihe nach in Verbindung treten. Zunächst zündet man den Inhalt in A; ist der Druck im Laufe der Entleerung auf einen gewissen Zwischenwert gesunken, zündet man den Inhalt in B unter gleichzeitiger Verbindung mit A, wobei der alte Höchstdruck erreicht werden soll. Dann kommen C, D, ... an die Reihe, so daß der Druck zwischen zwei vorgeschriebenen Grenzen hin- und herschwankt. Es wird auch die Anwendung von Verdrängerkolben K ins Auge gefaßt.

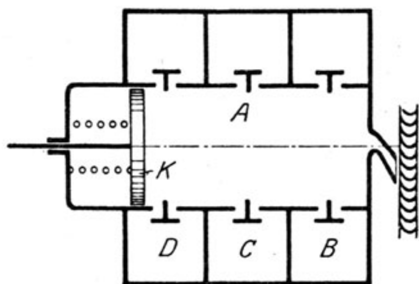


Abb. 1062. Zellenweise Verpuffung nach Christlein.

Um die **Heizfläche der Abwärme-Austauschkörper zu verringern,** entläßt **Bischof** gemäß D. R. P. Nr. 306559 v. J. 1915 die Abgase mit hohem Druck, z. B. 10 at, so daß die Wärmeübergangszahl im nahezu gleichen Verhältnis gegenüber dem Atmosphärendruck wächst. Dieser Vorteil wird durch die Verminderung des Arbeitsvermögens bei der restlichen Entspannung des so abgekühlten Arbeitsgases erkauft[1]).

Die stufenweise Verbrennung. Da mit Rücksicht auf die Schaufeltemperatur bei der Gasturbine vorerst ein großer Luftüberschuß ins Auge zu fassen ist, wird der Vorrat an Sauerstoff durch die einmalige Verbrennung nicht ausgenützt. Bischof schlägt daher im D. R. P. Nr. 301991 v. J. 1914 vor, die Feuergase nur teilweise zu entspannen, und durch Zufuhr von frischem Brennstoff neue Verbrennung, mit Vorliebe als Verpuffung einzuleiten. Zur Durchführung dieses Verfahrens eignet sich die oben beschriebene Arbeitsweise der Turbine D. R. P. Nr. 296222 sehr gut, indem man nach der ersten Entspannungsstufe in die beiden Kammern C_1 und D_1, die Feuergase von rd. 10 at Spannung enthalten, nochmals Brennstoff (flüssigen?) einspritzt, wodurch abermals eine theoretische Verpuffungsspannung vom ursprünglichen Betrag erreicht werden könnte.

Verbindung einer Hochdruck-Dampfturbine mit einer Vakuum-Gasturbine nach Davey[2]). Mittels einer gewöhnlichen oder einer (offenen) Gasfeuerung wird in einem Dampfkessel Hochdruckdampf erzeugt, der in einer Auspuffturbine Arbeit leistet. Der Abdampf mischt sich mit den Feuergasen, die eine mit Vakuum arbeitende zweite Turbine beaufschlagen. Im Kondenser wird der Dampf niedergeschlagen und die „Luftpumpe“, d. h. ein Vakuumgebläse, verdichtet die Abgase auf Atmosphärendruck.

Getrenntes Auffangen von Gas und Dampf. Die Schaufelkühlung insbesondere der Verpuffungsturbine kann sehr günstig durch Dampf bewirkt werden, der neben, oder zeitlich nach dem Gasstrahl die Schaufeln trifft. Läßt man Dampf und Gas sich vermischen, so ist indes die Anwendung von Kondensation unmöglich. Diesen Übelstand zu vermeiden,

---

[1]) Die noch vorgeschlagene „Unterkühlung“ eines Teiles der Ladung läuft bei kritischer Zergliederung auf ein Perpetuum mobile II. Art hinaus.

[2]) The Gasturbine, London 1914.

soll nach dem franz. Pat. Nr. 502910 v. J. 1919 der **Soc. an^e de Turbo-Machines** die Beaufschlagung durch Gas und Dampf in getrennten Abschnitten so erfolgen, daß eine Mischung tunlichst vermieden und der Dampf bei Atmosphärendruck getrennt aufgefangen in einer Niederdruckturbine verwertet werden kann.

Bergmann Elektrizitätswerke A.-G., Berlin, teilen mir mit, daß gemäß einer D. R. P.-Anmeldung v. J. 1919 zum Zwecke gänzlich mischungsfreien Betriebes Scheidewände zwischen den Gas- und Dampfstrom eingeschaltet werden sollen. Außerdem erhalten die Zwischen-Leitschaufeln des zweikränzigen Hochdruck-Laufrades eine Drehbewegung, um sie wechselweise in den Bereich des Gas- und des Dampfstromes zu bringen und so zu kühlen.

Stufenweise Wärmezufuhr. Nach Kohler, Schweiz. P. Nr. 88624 v. J. 1919 teilt man das Ladegewicht in zwei oder mehrere Teile, die auf verschieden hohe Drücke verdichtet und gezündet in die aufeinanderfolgenden Stufen der Gasturbine geführt werden. Durch die Mischung der frischen Ladung mit dem durch Ausdehnung bereits abgekühlten Gasstrom wird dessen Temperatur wieder erhöht, und kann so zwischen vorgeschriebenen Grenzen (in der Patentschrift zwischen 927 und 627° C) schwanken.

Übergang zur Hochüberhitzungs-Dampfturbine. Im soeben beschriebenen Verfahren wird in Aussicht genommen, vom Anbeginn an die heißen Verbrennungsgase in einen Dampfstrom einzublasen, der hierdurch in wiederholten Stufen hochgradig überhitzt würde. So entstünde ein Arbeitsverfahren, das Verfasser in der IV. Auflage als „Dauerüberhitzung" bezeichnet hat und das einen Zwischenzustand zwischen dem Prozeß der reinen Gas- und der gewöhnlichen Dampfturbine darstellt. Die Schwierigkeit liegt im Arbeitsbedarf der Luftpumpe, die bei tiefer Luftleere, wie sie der Dampf für sich verlangt, stark dampfhaltige Luft, also ein größeres Gewicht fördern müßte als bei reiner Luft.

Vermeidung des Verlustes im Zwischenleitrad des Geschwindigkeitsrades. Nach einem Vorschlag von Ing. L. Dufour (Genf) soll das Zwischenleitrad weggelassen werden, indem man den zweiten Kranz des Geschwindigkeitsrades in entgegengesetztem Sinn (auf besonderer Welle) umlaufen läßt.

Senken der Laufradtemperatur durch Anwendung von Unterdruck. Ebenfalls nach Dufour soll die Entspannung in der Düse auf einen unter der Atmosphäre gelegenen Druck, also auf entsprechend tiefere Temperatur, fortgesetzt werden. Die Verdichtung auf Atmosphärendruck soll mittels der kinetischen Auslaßenergie in Diffusoren vor sich gehen. Das Verfahren wäre offenbar nur bei Gleichdruckmaschinen anwendbar.

Verdichtung durch bewegte Wassersäulen.

Seit die bekannte Humphreypumpe die Möglichkeit erwiesen hat, Gasgemische über einem freien, den Kolben vertretenden Wasserspiegel mit hoher Wirtschaftlichkeit zu zünden, und das von ihm durchgebildete Verfahren mit Hilfe bewegter Wassersäulen auch Gase zu verdichten erlaubte, sind mannigfache Vorschläge gemacht worden, von diesen Vorteilen für die Gasturbine Gebrauch zu machen.

Beispielsweise bezweckt das D.R.P. 281957 v. J. 1912 der A.-G. Brown Boveri & Cie. die Verdichtung der Ladung mittels einer wechselweise von beiden Enden aus beschleunigten Wassersäule durch an beiden Enden angeschlossene Verpuffungskammern.

Einen Ersatz der Wassersäule durch die Masse eines ordungsmäßig gelíderten Kolbens strebt der **Flugkolbenverdichter** an[1]), wobei nach Art der Ottoschen atmosphärischen Gasmaschine ein freier Kolben durch die Verpuffung einer Gasmischung wechselweise auf der einen Zylinderseite angetrieben, auf der anderen Seite die Luft oder das Ladegemisch verdichtet. Die Schwierigkeiten und Gefahren des Betriebes haben bis jetzt vor einer Ausführung abgeschreckt.

Verdichtung durch den Beharrungswiderstand der brennenden Gasmasse selbst. Karavodine[2]) erbaute i. J. 1908 eine Turbine, aus deren Verpuffungskammer die Gase durch ein längeres Rohr der stets offenen Düse von gleichem Durchmesser zuströmten. Die Beharrung der im Rohre enthaltenen Gasmasse wirkte als „Widerstand", so daß sich während der Verpuffung ein Überdruck von allerdings bloß 0,3 at einstellen konnte. Am Ende des Abströmens erzeugte die kinetische Energie der noch verbleibenden Gasmasse einen Unterdruck von 0,06 at, der imstande war, frische Ladung durch ein Rückschlagventil

[1]) F. Langen, Gasturbine, Rostock 1906.
[2]) Nach Barbezat, Z. f. d. ges. Turb.-Wesen. 1911.

hindurch anzusaugen. Der geringen Vorverdichtung entsprach der große Verbrauch von 5 kg Benzin für die PS-st bei freilich nur 2 PS Leistung.

In noch kühnerer Weise soll die Massenwirkung des Ladegemisches nach dem Vorschlag von

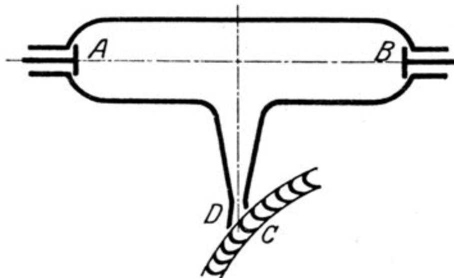


Abb. 1062a. Verdichtung durch die kinetische Energie der verpuffenden Gasmasse.

Esnault Pelterie[1])

zu nützlicher Arbeit herangezogen werden. Das links in *A* Abb. 1062a eingedrungene Gemisch wird entzündet und verdichtet rechts den Inhalt *B* der Kammer, gleichzeitig durch die Düse *D* das Laufrad *C* beaufschlagend. Der bei *A* durch die Massenwirkung schließlich auftretende „Schwingungsbauch" soll hinreichen, um (durch ein Rückschlagventil) frische Ladung anzusaugen, worauf bei *B* Zündung erfolgen würde. Man muß wohl annehmen, daß die Schilderung vorerst auf bloßer Phantasie beruht; sie regt dennoch zum Nachdenken an.

Verwendung des Turbinenlaufrades zugleich als Schleudergebläse, bei teilweiser Beaufschlagung. Nach Trümpler tritt das Ladegemisch oder reine Luft durch *A* bei *B* Abb. 1062b in die obere Hälfte des Schleuderrades *C*. Bei *D* findet Zündung oder Zufuhr von flüssigem Brennstoff statt. Die sich ausdehnenden Verbrennungserzeugnisse treten auf der unteren Hälfte radial in das gleiche Laufrad ein und verlassen es an der gegen *B* entgegengesetzten Seite bei *E*.

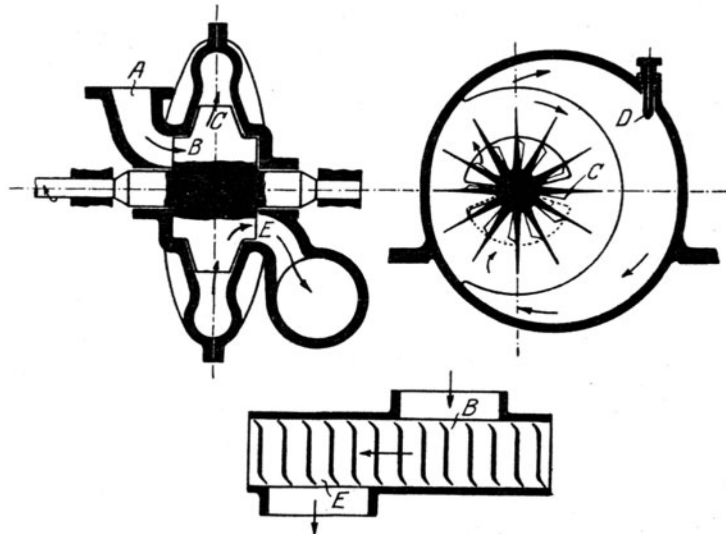


Abb. 1062b. Vereinigtes Turbinenlaufrad und Schleuderverdichter.

Die Abwicklung des Schaufelschnittes zeigt, daß die radial stehenden Schaufeln nach der Ein- bzw. Austrittsseite umgebogen sind, um Stoßfreiheit der Strömung zu sichern. Hier ist die erforderliche Schaufelkühlung durch das periodische Durchströmen kalter Gase während der Verdichtung an sich verlustfrei erreicht. Doch führt die teilweise Beaufschlagung während des allmählichen Öffnens der Zu- und Ableitungen neue Verluste ein. Anderseits ist die Verwertung der Auslaßgeschwindigkeit am Gebläse eine sehr vollkommene. Fraglich bleibt, ob und wie man früh genug zünden kann, um bei der ungemein kurzen Überströmzeit vollkommene Verbrennung zu erzielen.

Hydrauliche Kraftübertragung mittels pendelnder Flüssigkeitssäule.

Für den Erfindungsgedanken, die pendelnde Wassersäule eines Humphreyschen Verdichters zugleich zur Kraftübertragung auf eine hydrauliche Turbine zu verwenden, liegen eine Anzahl beachtenswerter Lösungen vor.

Gasturbine von Dunlop.

Abb. 1063. Das in der Verbrennungskammer *b* zum Verpuffen gebrachte Gasgemisch treibt die Wassersäule durch das Laufrad *c* in eine ähnlich gebaute Kammer *a*, in der frisches Gemisch gleichzeitig verdichtet wird. Sobald die Wassersäule zur Ruhe gelangt, erfolgt eine Zündung in *a*, während mittlerweile in *b* frische Ladung eingepumpt wurde, und der Vorgang wiederholt sich in entgegengesetzter Richtung. Die Ruhe des Wasserspiegels würde hier, wie die Erfahrung an der Humphrey-Pumpe gezeigt hat, gewahrt werden, sofern man sich auf die geringe Hubzahl von 10—15 Spielen i. d. Min. beschränkt. Da Druck und Geschwindigkeit für Hin- und Hergang genau gleiche Größe besitzen, so muß

[1]) Nach „Die Turbine" 1913, S. 216.

die Schaufelung mit Bezug auf die Mittelebene des Rades vollkommen symmetrisch sein. Dies hat, falls der Eintritt stoßfrei gemacht wird, große Stoßverluste am Austritt zur Folge. Außerdem wechselt die Strömungsgeschwindigkeit zwischen Null und einem Höchstwert, während die Radumfangsgeschwindigkeit selbstredend unveränderlich bleiben muß. Dies verursacht weitere bedeutende Stoßverluste, so daß der Wirkungsgrad der Turbine selbst ein minderwertiger sein muß. Dazu kommt als Nachteil das überaus große Gewicht der Konstruktion.

Die Gasturbine von Maag

führt in den **umlaufenden Verbrennungskammern**, Abb. 1063a, einen wichtigen Erfindungsgedanken ein[1]). Gewissermaßen als kinematische Umkehrung der Abb. 1063 soll das (mit dem Fundament starr verbundene) Laufrad C ruhen. In der umlaufenden Kammer A_1 bildet der Wasserspiegel infolge der großen Fliehkraft einen mit der Welle nahezu koaxialen zylindrischen Hohlraum. Wird die hier unter-

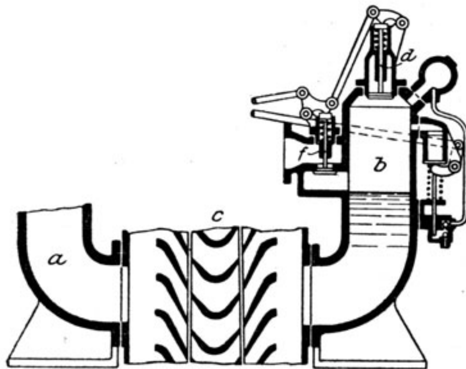


Abb. 1063. Turbine vom Dunlop.

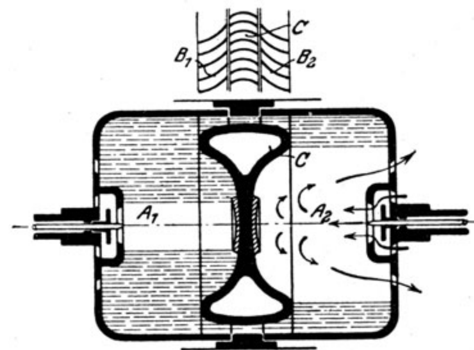


Abb. 1063a. Umlaufende Verbrennungskammern nach Maag.

gebrachte frische Ladung entzündet, so strömt das Wasser durch die Laufschaufeln B_1 zum feststehenden Leitrad C und durch die Schaufelung B_2 in die umlaufende Kammer A_2, in der, wie die Pfeile andeuten, die Verbrennungsgase durch Spülluft, bzw. durch die frische Ladung soeben verdrängt werden. Nach Verdichtung der Ladung auf den Rauminhalt von A_1 wird hier gezündet und der Vorgang wiederholt sich mit einer von B_2 nach B_1 gerichteten Strömung. Da die Fliehkraft auf ein beliebiges Vielfaches der Schwerkraft gesteigert werden kann, würde der Wasserspiegel unter dem Einfluß örtlich schwankender Pressung weit weniger zum Schwingen und Spritzen Neigung haben, so daß die Zahl der Spiele gegenüber Dunlop erheblich vergrößert werden könnte. Es bleiben jedoch nach wie vor die Stoßverluste infolge der Symmetrie der Schaufelung und der wechselnden Strömungsgeschwindigkeit übrig.

Die **Turbine von Schöner-Schneller** benützt[2]) ein einfaches Schaufelrad mit Wasser als Kolben. An einer Turbine in München wurden die Bedingungen ermittelt, unter welchen das Wasser stoßfrei ein- und austritt, nicht zerreißt und keine unzulässige innere Reibung erzeugt[3]).

Die Turbine von Stauber.

Die Turbine von Stauber stellt den folgerichtigen Ausbau des Humphreyschen Grundgedankens dar, mit Vermeidung der bei seinen Vorläufern vorhandenen Mängel, in einer insbesondere für das Zweitaktverfahren vorzüglich geeigneten Ausführungsart.

---

[1]) D. R. P. Nr. 315191 v. J. 1917.

[2]) Nach der Aussprache zum Vortrag von Stauber, Jahrbuch der Brennkrafttechn. Ges., Bd. 3, 1920.

[3]) In der Aussprache über den zitierten Vortrag wurde von Gentsch mitgeteilt, daß, nach ihm zugegangenen Berichten, im Auslande Versuche nach zwei Richtungen im Gange sind. Der erste betrifft die Herabsetzung der Temperatur durch Einspritzung von Kühlmitteln, inbesondere von Wasser und Dampf. Dem stünden nach Gentsch Versuche und theoretische Erwägungen entgegen, „die da nachweisen, daß bei diesem Gemisch molekulare Stöße auftreten". Autoritäten seien dafür eingetreten, daß solche Gemischturbinen unwirtschaftlich und deshalb praktisch unmöglich wären. Es soll sich aber herausgestellt haben, daß diese Anschauungen auf einem Irrtum beruhen, daß wahrscheinlich molekulare Stöße nicht auftreten, zum mindesten aber so leicht behoben werden können, daß die Störungen, die man erwartete, außer acht gelassen werden können. Wenn die Versuche den Erfolg tatsächlich ergeben, daß man mit den Molekularstößen als einem Irrtum zu rechnen hat, dann würde man ganz neue Wege erschließen können. Hierzu ist zu bemerken, daß die Wissenschaft bis jetzt keinen anderen molekularen Stoß kennt als den Anprall der Moleküle aufeinander oder gegen die Wand. Daß beim Gemisch von Gas und Wasser oder Dampf eine besondere Art von schädlichen molekularen Stößen auftreten soll,

In den ersten Vorschlägen[1]) wurden einzelne verkoppelte umlaufende Kammern A_1, A_2 nach Abb. 1064 in der Achsenrichtung nebeneinander angeordnet. Ein stehendes Rad mit Umlenkschaufeln C nimmt in der gezeichneten Stellung durch die Schaufeln B_1 die durch den Gasdruck aus A_1 fortgetriebene Flüssigkeit auf und führt sie durch B_2 nach A_2, wo die Verdichtung vor sich geht. Nachdem A_1 entleert und in geeigneter Weise mit frischer Ladung gefüllt wurde, zündet man in A_2, und der Vorgang geht in umgekehrtem Sinn vor sich. Eine Anzahl anderer Varianten übergehen wir und veranschaulichen in Abb. 1064a eine der letzten Durchbildungsarten, bei der die Kammern, wie die Abwicklung eines Umfangsschnittes in Abb. 1064b zeigt, in der Umfangsrichtung nebeneinander angeordnet sind. Die Entleerung der unter Druck stehenden Kammer A_1 findet nur auf einer Seite durch die Schaufelung B_1 und den Kanal C_1 hindurch statt.

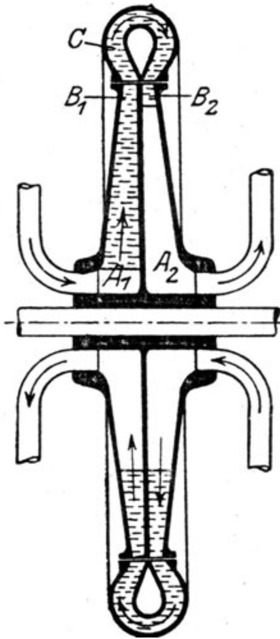


Abb. 1064. Ursprüngliche Anordnung der Stauberturbine.

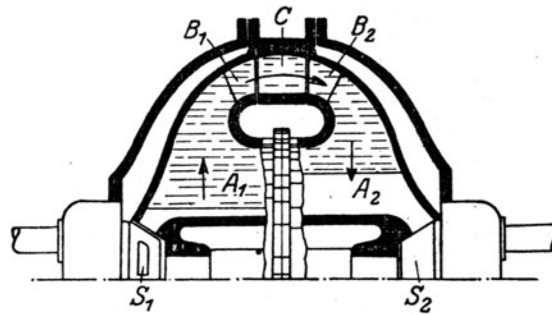


Abb. 1064a. Stauberturbine mit in der Umfangsrichtung aufeinanderfolgenden Kammern.

Die in Verbindung stehende Kammer A_2 ist mithin in der Umfangsrichtung erheblich verschoben und nimmt vermöge der Schaufel D_2 die von A_1 abströmende Menge auf. Die Einlaßschaufelung der Kammer A_2 wird durch die Bodenwand S während der Füllung unwirksam gemacht. Ist die Füllung vollendet und die Ladung gezündet, was z. B. in der Lage A_n der Fall sein möge, so wird durch den Kanal C Abflußmöglichkeit zu einer ent-

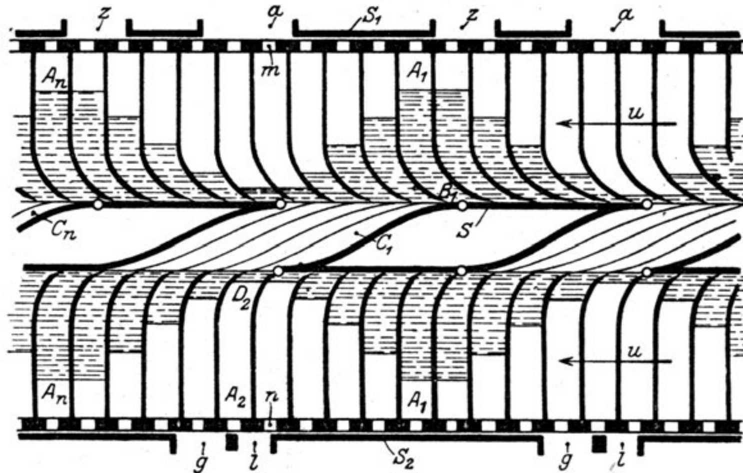


Abb. 1064b. Schaufelplanabwickelung zu Abb. 1064a.

dürfen wir ruhig in das Reich der Fabel verweisen. Ebenso skeptisch stehen wir der **Kohlenstaubturbine** gegenüber, über die Gentsch a. a. O. berichtet, obwohl er mitteilt, daß nach ihm unmittelbar zugegangenen Unterlagen „alle Aussicht vorhanden ist", daß ein Wärmewirkungsgrad von $26\frac{1}{2}$ v. H. erreicht wird.

[1]) Den Patentanmeldungen v. J. 1918—20 mit Genehmigung Prof. Staubers entnommen. Inzwischen ist das Hauptpatent unter Nr. 344550 Kl. 46f erteilt worden.

sprechenden leeren Kammer eröffnet und der vorhin beschriebene Vorgang wiederholt sich. Man erkennt, daß alle Schaufeln B nur der Entleerung und alle Schaufeln D nur dem Füllen der Kammern dienen. Die Schaufelwinkel der Kammern sind alle untereinander gleich, weil jede Kammer der Reihe nach dieselben Zustände durchläuft. Die Winkel der festen Schaufelung C hingegen sind **von Kanal zu Kanal verschieden und werden so bestimmt, daß sowohl der Eintritt wie der Austritt stoßfrei erfolgt.** Ist eine Kammer entleert, so gelangt die Mündung m vor den Auspuffkanal a des festliegenden Schiebers S_1. Unmittelbar darauf wird durch Mündung n und Kanäle l bzw. g im Schieber S_2 Spülluft bzw. Gemisch zugeführt. Man erkennt, daß die Spülung infolge der langgestreckten Form der Kammer eine ungemein wirksame sein muß. Die Zündung wird durch eine weitere Folge von Aussparungen im Schieber S_1 eingeleitet, die in Abb. 1064b mit Z bezeichnet sind.

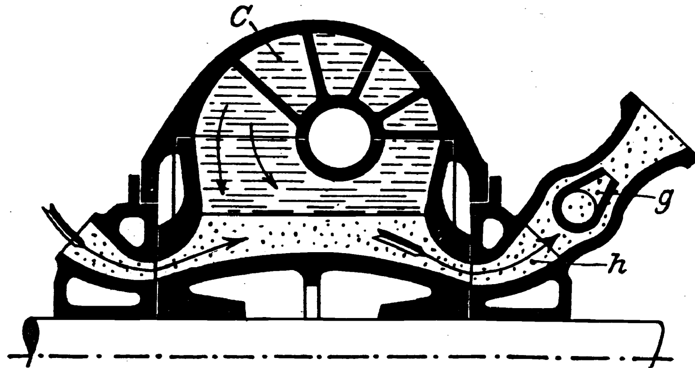


Abb. 1064c.
Erzeugung von Unterdruck durch die Auspuffenergie.

Eine weitere Verbesserung des Arbeitsverfahrens ist in Abb. 1064c dargestellt. Hier wird, wie aus Abb. 1064d noch klarer ersichtlich ist, die Auspuffenergie und unter Umständen ein Teil der Ausdehnungsarbeit dazu verwendet, um **durch Strahlwirkung die Abgase aus der Kammer heraus und die frische Ladung in dieselbe hineinzusaugen,** oder doch das Spülgebläse zu entlasten. Das Treibgas tritt aus der Kammermündung e durch die Schieberlücke f in die Düse g und erzeugt eine Verdünnung im Raume h, so daß der Ladeprozeß in den Kammern k, l vo sich gehen kann. Rückt die Mündung e

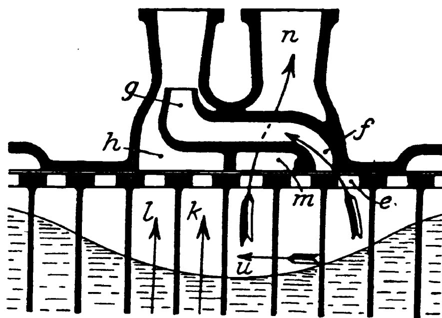


Abb. 1064d. Abwickelung der Steuerschieberspiegel zu Abb. 1064c.

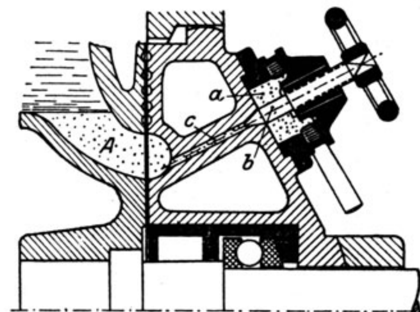


Abb. 1064e. Zündkammern.

inzwischen vor die Lücke m, so kann der Gasüberschuß durch das Zweigrohr n in die Auspuffleitung gelangen. Nachdem schließlich die Lage k und l erreicht wurde, kann die Kammer e selbst vom andern Ende her geladen werden. Abb. 1064c zeigt, nebenbei bemerkt, am festen Leitrad C eine radiale Beaufschlagung, die grundsätzlich genau so gut verwendbar ist, wie die axiale.

Die Steuerung der Turbine wird in einer ganzen Reihe von Schutzanmeldungen behandelt. Da Einzelheiten noch nicht veröffentlicht wurden, darf man derzeit von einer Erläuterung der Schwierigkeiten der Regulierungsaufgabe absehen. Eine Hervorhebung verdient die Art der Zündung, für die Stauber gemäß Abb. 1064e besondere **Verbrennungskammern a** anordnet. Sobald die Ladung durch den aus a tretenden Feuerstrahl gezündet ist, darf man a abschließen, denn die bei A ersichtliche muschelförmige Aussparung stellt zwischen zwei oder mehr aufeinanderfolgenden Kammern ständige Verbindungen her, so daß immer neue Ladung hinzutritt und die Zündflamme nicht mehr erlöscht. Außerdem können offenbar die Gase aus einer neu gezündeten Kammer in eine benachbarte überströmen, wodurch dem Verpuffungsdiagramm gewissermaßen die Spitze abgebrochen wird.

Die **Abdichtung der feststehenden Verteilungsschieber** ist nach einem neueren Vorschlag in Abb. 1064f veranschaulicht. Der nichtdrehbare, aber axial nachgiebige Schieber S ist gegen den festen Deckel D durch eine Feder abgestützt. Kühlwasser wird einerseits durch die hohle Welle, anderseits durch den Deckel bei K zugeführt; es strömt durch Verengungen am dichtenden Schieberspalt vorbei,

und dient als Dichtung. In der Muschel M ruft die Reibung und die Fliehkraft einen lebhaften Umlauf hervor. G ist die Gas- beziehentlich die Spülluftzufuhr.

Um eine bessere Vorstellung von der Wirkungsweise der Turbine zu gewinnen, entwickeln wir im nachfolgenden eine vereinfachte Theorie derselben, wobei sich eine willkommene Gelegenheit bietet, auch auf nichtstationäre Strömungen einzutreten.

Theorie der Stauber-Turbine in eindimensionaler Behandlung, d. h. unter Voraussetzung fadenförmiger Strömung.

Gemäß der schematischen Abb. 1064g bedeutet

p_x, p_y den Druck auf der Ausdehnungs- bzw. Auspuffseite,
p_1, p_2 den mittleren Druck im Ein- bzw. Austrittsspalt der Turbine,
u_x, u_y, u die Umfangsgeschwindigkeit des Wasserspiegels an der Ausdehnungs- und Auspuffseite, bzw. im Teilkreis der Turbine.

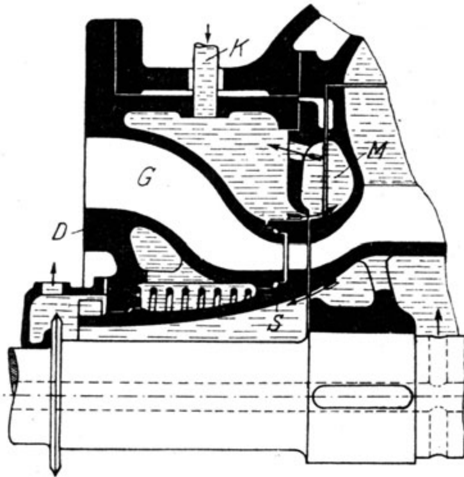


Abb. 1064f. Abdichtung des Verteilungsschiebers.

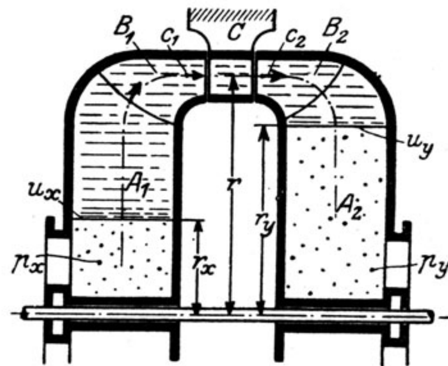


Abb. 1064g. Zur Theorie der Stauberturbine.

Wir betrachten die Vorgänge **von einem mit den Kammern mit der Winkelschnelle ω umlaufenden Raum aus**, müssen daher die Flieh- und die Corioliskräfte als Ergänzungskräfte der relativen Bewegung an jedem Massenteilchen hinzufügen. Das feste Leitrad C wird dadurch zum „Laufrad", das mit $-\omega$ umläuft. Es bedeute ferner

c_1 die Ausflußgeschwindigkeit aus der Schaufel der linken Kammer, die in Wirklichkeit „relativ" ist, für den mitumlaufenden Beobachter als „absolute" erscheint,
w_1 die (scheinbar) „relative" Eintrittsgeschwindigkeit ins „Laufrad" C, die in bekannter Weise als Resultante aus c_1 und $-u$, Abb. 1064h, gewonnen wird;
w_2 die (scheinbar) „relative" Austrittsgeschwindigkeit aus dem „Laufrade" C; hängt davon ab, ob man die Turbine mit Gleich- oder mit Überdruck arbeiten lassen will. Letzteres empfiehlt sich insbesondere für die Zeit der kleinen Strömungsgeschwindigkeiten, wo Gleichdruck schlechte Verhältnisse ergibt. Für die axiale Turbine wird dann $w_2 > w_1$;
c_2 die (scheinbar) „absolute" Austrittsgeschwindigkeit aus dem Laufende C, sollte nach Tunlichkeit stets gleiche Richtung haben, da die Austrittsschaufelung B_2 aller Kammern A_2 dieselbe sein muß;
f_1, f_2 die Querschnitte der Ein- und Austrittsschaufeln B_1 und B_2;
f den Querschnitt an irgendeiner Stelle, als Normalfläche zu den nach Schätzung einzuzeichnenden Stromlinien;
c die zugehörige augenblickliche Strömungsgeschwindigkeit;
l den Abstand des Querschnittes f vom Flüssigkeitsspiegel x.

Sind diese Größen für einen bestimmten Zeitpunkt bekannt, so kann ihre Änderung während des Zeitteilchens Δt mit Hilfe des Energiesatzes ermittelt werden. Die kinetische Energie der in Abb. 1064g schraffiert angedeuteten Flüssigkeitsmasse ist nämlich, vom Inhalte des Rades C abgesehen:

$$K = \tfrac{1}{2} \sum \delta m c^2,$$

welcher Ausdruck streng genommen „dreidimensional" als $\sum(\gamma/g)\,\delta f\,\delta l\,c^2/2$ auf alle Elemente der Masse ausgedehnt werden müßte. Zur Vereinfachung nehmen wir an, daß man Strömungsflächen gleicher Geschwindigkeit nach Schätzung einzeichnen und einen mittleren Abstand dl einführen kann, so daß sich K als $\int\gamma f\,dl\,c^2/2g$ schreiben läßt. Wir benutzen die Stetigkeitsgleichung $fc=f_0c_0$, wo f_0 einen bestimmten festen Querschnitt, c_0 die darin herrschende Geschwindigkeit bedeutet. Mit der Bezeichnung

$$\int\frac{f_0\,dl}{f}=l_r \quad \ldots \quad (1)$$

wird dann

$$K=\frac{\gamma}{g}f_0l_r\frac{c_0^2}{2} \quad \ldots \quad (1\text{b})$$

wobei sich in l_r die Integration vom Spiegel x zum Eintrittsspalt der Turbine, und vom Austrittsspalt zum Spiegel y zu erstrecken hat. Die Zunahme von K während der Zeit Δt ist $\Delta K=K'-K$. Bedeutet $\Delta m=\gamma f_0c_0\Delta t/g$ die in der Zeit Δt eintretende Masse, so kann $K=\Delta m(c_x^2+c_2^2)/2+K_m$ und $K'=K_m'+\Delta m(c_y^2+c_1^2)/2$ gesetzt werden, wobei sich mithin $K_m'K_m$ auf denselben (nach Abzug von Δm am Spiegel (x) und bei C_2 verbleibenden) Raum beziehen. Der Unterschied $K_m'-K_m$ ist $=(\partial K_m/\partial t)\Delta t$ oder $=$ der Änderung, die K_m am gleichen Ort während der Zeit Δt erleidet. Da Δm in der Grenze unendlich klein ist, kann man $K_m\simeq\gamma f_0l_rc_0^2/2g$ setzen und erhält

$$\Delta K=\frac{\Delta m}{2}(c_y^2-c_x^2+c_1^2-c_2^2)+\frac{\gamma}{2g}f_0\frac{\partial}{\partial t}(l_rc_0^2)\Delta t \quad \ldots \quad (2)$$

Zu Beginn und am Ende der Entleerung, wo die Kammer allmählich geöffnet und geschlossen wird (oder wenn man die Strömung zweidimensional betrachtet überhaupt), ändern sich die Strömungslinien mit der Zeit, und l_r hängt von t ab. Formel (2) entspricht dann dem „substantiellen" Differential, wie wir es für die Geschwindigkeiten auf S. 798 erklärt haben, d. h. es wurde nach der Regel $\Delta K=(\partial K/\partial V)\Delta V+(\partial K/\partial t)\Delta t$ gebildet. Ist die Kammermündung ganz geöffnet, so wird die Änderung von l_r mit der Zeit, für einen festen Raum betrachtet, nicht groß, und man kann $\partial(l_rc_0^2)/\partial t=2l_rc_0\,dc_0/dt$ setzen.

Die Zunahme ΔK muß gleich sein der Arbeit der wirkenden Kräfte. Ist ΔV der Rauminhalt von Δm, so leisten die Oberflächendrücke die Arbeit $(p_x-p_1+p_2-p_y)\Delta V$. Die Arbeit der Fliehkräfte ist gleich der Abnahme ihrer potentiellen Energie $=\Delta m(u_y^2-u_x^2)/2$. Die Reibungsarbeit könnte aus den Querschnitten und Geschwindigkeiten gerechnet werden. Einfacher ist es, sie für 1 kg der durchströmenden Menge für Kammer A_1 als $\zeta_1c_1^2/2g$ für Kammer A_2 als $\zeta_2c_2^2/2g$ einzuschätzen, so daß sich für die Masse Δm im ganzen $\Delta m g(\zeta_1c_1^2+\zeta_2c_2^2)/2g$ ergibt. Setzt man dann $\Delta m=\gamma\Delta V/g$ und $\Delta V=f_0c_0\Delta t$, so folgt aus (2) für 1 kg

$$\frac{\partial(l_rc_0^2)}{2gc_0\partial t}=\frac{p_x-p_1+p_2-p_y}{\gamma}+\frac{1}{2g}(u_y^2-u_x^2+c_x^2-c_y^2+c_2^2-c_1^2-\zeta_1c_1^2-\zeta_2c_2^2) \quad (3)$$

Es ist erforderlich, auch die Gleichungen für die Bewegung vom Spiegel x bis zum Spalt p_1 und von p_2 bis zum Spiegel y für sich anzuschreiben. Mit den Bezeichnungen

$$\int_0^{l_1}\frac{f_0}{f}dl=l_{r1};\qquad \int_{l_2}^{l_y}\frac{f_0}{f}dl=l_{r2} \quad \ldots \quad (4)$$

wobei sich die Integrationen auf die erwähnten Gebiete zu erstrecken haben, erhält man in gleicher Weise, wie oben

$$\frac{\partial(l_{r1}c_0^2)}{2gc_0\partial t}=\frac{p_x-p_1}{\gamma}+\frac{1}{2g}(u^2-u_x^2+c_x^2-c_1^2-\zeta_1c_1^2) \quad \ldots \quad (5)$$

$$\frac{\partial(l_{r2}c_0^2)}{2gc_0\partial t}=\frac{p_2-p_y}{\gamma}+\frac{1}{2g}(u_y^2-u^2+c_2^2-c_y^2-\zeta_2c_2^2) \quad \ldots \quad (6)$$

Die Turbinengleichung.

Die Strömung innerhalb des „Laufrades" C bietet insofern Schwierigkeiten, als der Überdruck von Kanal zu Kanal sich ändert, und beim Vorüberschreiten einer Kammerschaufel im Laufkanal Strömungen verschiedener Art zusammentreffen.

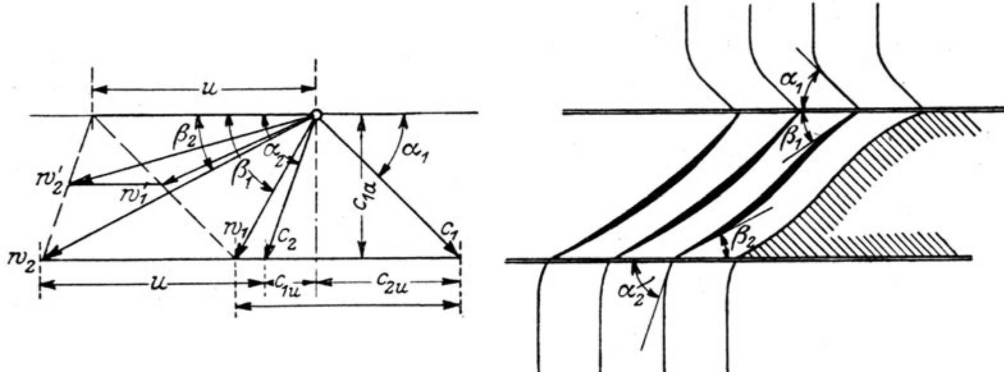


Abb. 1062h. Geschwindigkeits- und Schaufelplan.

In Abb. 1064i sind mit $p_{1a}\, p_{1b}\, p_{1c}$ diejenigen Spaltdrücke bezeichnet, die am Eintritt vorhanden wären, wenn die Laufkanäle sich mit den Kammerkanälen, wie punktiert angedeutet, genau decken würden. Infolge der Überdeckung strömt die Flüssigkeit beispielsweise in den Kanal II teils aus dem Raum mit dem Druck p_{1a}, teils aus dem mit p_{1b} ein. Bei nicht zu großer Schaufelteilung dürfte sich im Eintrittsteil der Druck einigermaßen ausgleichen und einen zwischen p_{1a} und p_{1b} gelegenen Mittelwert p_1 annehmen, der teilweise auch in die Kammerschaufeln eindringt. Die Mischung der mit ungleichen Geschwindigkeiten $c_{1\alpha}$, $c_{1\beta}$ bzw. $w_{1\alpha}$, $w_{1\beta}$ zusammentreffenden Ströme wird unter Wirbelung vor sich gehen; insbesondere ist auch ein Überströmen um die Schaufelkanten herum möglich.

Der Energiesatz für die Strömung in Kanal II schreibt sich, mit Rücksicht auf die Bezeichnungen in Abb. 1064i

$$p_1 (d V_\alpha + d V_\beta) - p_2\, d V = \Sigma\, \delta m w d w + \text{Reib. Arb.} \qquad (7)$$

Dabei wird im Falle einer radialen Beaufschlagung der Ein- und Austrittshalbmesser gleich groß vorausgesetzt, so daß sich die Arbeit der (relativen) Ergänzungskräfte weghebt. Die Zunahme der kinetischen Energie zerfällt wieder in den Anteil $dm_\alpha\, (w_{2\alpha}^2 - w_{1\alpha}^2)/2g + dm_\beta\, (w_{2\beta}^2 - w_{1\beta}^2)/2g$ und in die auf den Kanalinhalt bezogene Summe $\Sigma \delta m w d w$, die mit $\delta m = \delta f \delta l \gamma/g$; die Form $\Sigma \Sigma \delta f \delta l\, (\gamma/g)\, d\, (w^2/2)$ annimmt. Das Eigentümliche der Stauber-Turbine ist, daß, wenn eine Laufschaufel (relativ) eine Teilung zurückgelegt hat, die Strömung genau die gleiche werden muß, da der Vorgang rein periodisch ist. Die Änderung $d\ (w^2/2)$ ist mithin für ein Zeitteilchen von der Größe der Periode = Null. Stehen sich die Schaufeln gerade gegenüber, wobei für eine unendlich kleine Zeit (wegen der endlichen Stegstärken) ein geschlossener Kanal entsteht, so folgt w in der Schaufel der Beschleunigung des Inhaltes im Kammerkanal. Dann kann ΔK auf die Form der Gl. (2) gebracht werden, wenn man c_x, c_y durch w_1, w_2 und l_r durch einen auf den Kanal zu beziehenden Ausdruck l_{r0} ersetzt. Die fertig ausgerechnete Energieformel wird mithin für jene Lage der Gl. (3) ähnlich sein, d. h. der Kanalinhalt wirkt mit einer Trägheitskraft $\gamma\, (l_{r0}/g)\, (d c_0/d t)$ der Beschleunigung entgegen. Durch die unmittelbar folgende Beimischung aus dem benachbarten Kammerkanal wird jedoch die Zunahme von w_1 wieder aufgehalten, schließlich rückgängig gemacht, und so die Massenwirkung des Kanalinhaltes ziemlich ausgeschaltet; allein das Maß dieses Einflusses ist theoretisch derzeit kaum bestimmbar. Man kann daher wohl die Energiegleichung (7) nach Teilung mit $\gamma d V$, d. h. auf 1 kg der durchströmenden Menge bezogen in der Form

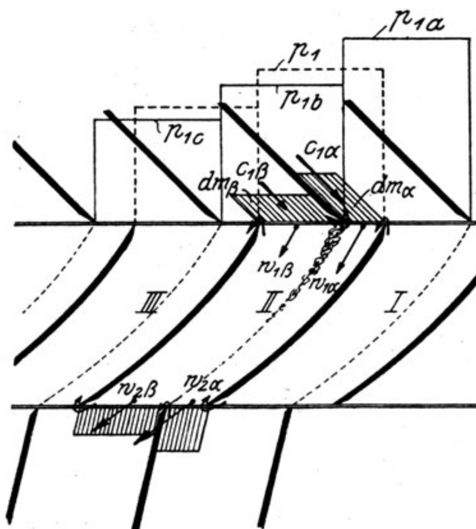


Abb. 1064i. Mischungsvorgang in der Schaufel.

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{w_2{}^2 - w_1{}^2}{2g} + \frac{1}{dV} \Sigma \delta f \delta l \frac{d}{dt}\left(\frac{w^2}{2g}\right) dt + \text{Reib. Arb.} \qquad (7\text{a})$$

schreiben, wobei das zweite Glied rechts durch Versuche zu ermitteln ist; **in erster Annäherung darf man es vernachlässigen.** Alle Größen sind dann auf eine Schaufelteilung bezogene Mittelwerte Die Reibungsarbeit kann man, sofern sie vom Wandwiderstand herrührt, summarisch durch $\zeta w_2^2/2g$ ausdrücken. Der Verlust durch die Mischung der ungleichen Ströme könnte abgeschätzt werden, wenn man etwa annimmt, daß sich $w_{1\alpha}$, $w_{1\beta}$ nachdem sie in die Schaufelrichtung abgelenkt worden sind, rasch zu einem Wert w_1 nach der Stoßformel

$$m_{1\alpha} w_{1\alpha} + m_{1\beta} w_{1\beta} = (m_{1\alpha} + m_{1\beta}) w_1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7\text{b})$$

ausgleichen, aus der der kinetische Verlust

$$Z = + m_{1\alpha} \frac{w_{1\alpha}^2}{2} + \frac{m_{1\beta} w_{1\beta}^2}{2} - (m_{1\alpha} + m_{1\beta}) \frac{w_1^2}{2} = \frac{m_{1\alpha} m_{1\beta}}{m_{1\alpha} + m_{1\beta}} \frac{(w_{1\alpha} - w_{1\beta})^2}{2} \quad \ldots \quad (7\text{c})$$

folgt. Die Geschwindigkeitsänderungen gegenüber den Werten c_{1a}, $c_{1b} \ldots$ bei mischungsfreiem Betrieb, also etwa unendlich schmalen Kanälen könnte man annähernd aus den Druckunterschieden, als

$$\frac{c_{1a}^2 - c_{1\alpha}^2}{2g} = \frac{p_{1a} - p_1}{\gamma}; \qquad \frac{c_{1b}^2 - c_{1\beta}^2}{2g} = \frac{p_1 - p_{1b}}{\gamma} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

rechnen und ähnlich für die Mischung am Austritt verfahren. Es ist klar, daß auch hier der Versuch das entscheidende Wort hat.

Begnügen wir uns vorderhand damit, alle Verluste im Gliede $\zeta w_2^2/2g$ zu berücksichtigen, so können die Schaufelpläne entworfen werden, indem man der Einfachheit halber unendlich dünne Schaufelspitzen und gleiche Schaufelhöhen am Ein- und Austritt voraussetzt, so daß die axialen Komponenten $c_{1a} = w_{1a} = w_{2a}$ untereinander gleich sind, und sich mit den in Abb. 1064h eingetragenen Winkeln die Ausdrücke

$$w_1 = c_{1a}/\sin\beta_1; \qquad w_2 = c_{1a}/\sin\beta_2; \qquad c_{1a} = c_1 \sin\alpha_1$$

ergeben. Gl. (7a) nimmt dann angenähert die Form

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \left[(1 + \zeta)\frac{\sin^2\alpha_1}{\sin^2\beta_2} - \frac{\sin^2\alpha_1}{\sin^2\beta_1}\right]\frac{c_1^2}{2g} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

an. Wenn man hieraus $p_1 - p_2$ in (3) einschiebt, so kann daraus $\Delta c_0/\Delta t$, und mit diesem hinwieder aus (5) und (6) p_1 und p_2 für sich berechnet werden.

Am Ende des Zeitteilchens Δt herrscht im Eintrittsspalt die Geschwindigkeit $c_1 + \Delta c_1$ mit der für ein folgendes Zeitteilchen, nachdem die entsprechende Größe von l_r, l_{r1}, l_{r2} berechnet (bzw. einer vorher aufgestellten Schaulinie entnommen) worden ist, die neuen Werte Δc_1, p_1, p_2 ermittelt und das Verfahren fortgesetzt wird, bis man bei der Geschwindigkeit $c_1 = 0$ angelangt ist. In diesem Augenblick muß auch der vorgeschriebene Verdichtungsenddruck erreicht werden und es muß die Dauer einer Umdrehung ein ganzzahliges Vielfaches der Dauer eines Spieles sein. Ist dies nicht der Fall, so müssen geeignete Änderungen an den Annahmen getroffen werden. Bejahendenfalls wird die Steuerung so eingestellt, daß bei $c_1 = 0$ in der Kammer B_2 gezündet und diese mit einer weiteren Kammer B_3, die schon mit frischer Ladung gefüllt wurde, durch den Kranz C verbunden wird, worauf sich das Spiel wiederholt.

Vom Zustand $c_1 = 0$ ausgehend, wird gemäß Gl. (3) $c_1 = \Delta c_1$ zu Δt verhältnisgleich. Man muß daher den ersten Raumanteil ΔV als $f_1 (\Delta c_1/2) \Delta t$ mit der mittleren Geschwindigkeit rechnen. Auch ist es zweckmäßig, alle Größen fortlaufend zeichnerisch als Abhängige des im ganzen abgeströmten Rauminhaltes darzustellen, und durch Extrapolation den Zustand, der in der Mitte des nächstfolgenden Zeitteilchens voraussichtlich herrschen wird, zu ermitteln. Das $\Delta c_0/\Delta t$ wird dann, mit diesen Größen gerechnet, erheblich genauer, bzw. man kann größere „Schritte" machen.

Turbinenleistung.

Für die Turbinenarbeit ΔL haben wir, auf ΔG kg der durchfließenden Menge bezogen, zunächst den Ausdruck der aus dem Energiesatz folgt:

$$(p_1 - p_2)\Delta V = \Delta G \frac{c_2^2 - c_1^2 - \zeta w_2^2}{2g} + \Delta L \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

zweitens nach dem Satz vom Antrieb

$$\Delta L = \frac{u}{g}(c_{1u} + c_{2u})\Delta G, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

falls wir die Umfangskomponenten im Sinne der Abb. 1064h als absolute Werte einführen. Beachtet man, daß für 1 kg die Größe $\Delta V = 1/\gamma$ ist, und benutzt man Gl. (7a), so folgt

mit Einführung der axialen und der Umfangskomponenten leicht die Identität von L nach Gl. (10) u. (11). Durch Vermehrung mit dem jeweiligen Gewichtsanteil dG und Integration kann die Gesamtarbeit für ein Stück als Integral $L_{ges} = \int L\,dG$ gefunden werden. Anschaulicher ist es, den Energiesatz auf die ganze Flüssigkeitsmasse anzuwenden, etwa in der Form:

Gewonnene Arbeit am Umfang = Oberflächenarbeit von p_x und p_y + Abnahme der potentiellen Energie der Fliehkräfte — Reibungsarbeiten.

Die Oberflächenarbeit ist der Inhalt der auf den verdrängten Rauminhalt bezogenen Ausdehnungs- und Verdichtungsflächen $ABCD$ und AED in Abb. 1064 k, wo die Verdichtungslinie, nach DF umgeklappt, nichts anderes ergibt, als den Inhalt des Indikatordiagrammes der gleichwertigen Kolbengasmaschine. Die Fliehkräfte leisten im allgemeinen die Arbeit Null, da die Stellung der Flüssigkeitsmasse der Achse gegenüber am Ende des Spieles die gleiche ist wie am Anfang. Die Reibungsarbeiten müßte man durch Integration als

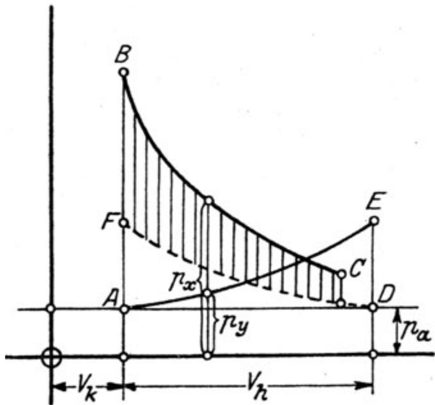


Abb. 1064 k. Die „indizierte" Arbeit der Turbine.

$$A_r = \int (\zeta_1 c_1^2 + \zeta_2 c_2^2 + \zeta w_2^2) \frac{dG}{2g} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

bestimmen.

Stoßfreier Ein- und Austritt.

Macht man die Kammern in der Umfangsrichtung unendlich schmal, so kann mit (theoretisch) ebenfalls unendlich schmalen Schaufelkanälen stoßfreier Ein- und Austritt erreicht werden. Dabei müssen die beweglichen Schaufeln je kongruent sein, da jede Kammer unter periodisch gleichen Verhältnissen zu arbeiten hat. Nach Abb. 1064 h kann man die Richtungen für die unveränderliche Neigung von c_1 und c_2 (theoretisch) willkürlich wählen. Beim Höchstwert der Geschwindigkeiten entstehen die mit w_1, w_2 angeschriebenen Dreiecke und bestimmen die zugehörigen Winkel β_1, β_2. Bei $c_1 = 0$ fallen w_1, w_2 in die Wagerechte und sind $= u$, die Winkel müßten $= 0$ sein. Die Folge ist, daß der Überdruck $p_1 - p_2$ mit Verkleinerung der Strömungsgeschwindigkeit, von der Reibung abgesehen, allmählich auf Null sinken würde.

Größte zulässige Beschleunigung. Das „Spritzen". Damit die Flüssigkeitsmasse bei zufälligen Schwankungen nicht auseinanderreißt, darf die größte geforderte Beschleunigung am freien Spiegel die Massenkraft, d. h. die Fliehkraft (für die Masseneinheit) nicht überschreiten. Der Höchstwert dürfte je bei der Bewegungsumkehr stattfinden, wo der Abstand r_x am kleinsten ist. Die Bedingung lautet

$$r_x\,\omega^2 \leq \frac{dc_x}{dt} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

Um sich über das **„Spritzen" am Wasserspiegel** durch die Anschauung unterrichten zu können, ist es zweckmäßig, diejenige Strömung aufzusuchen, die nach dem **Ähnlichkeitsgesetz** (Abschn. 173) vor sich gehen würde, wenn man die Fliehkraft als Massenkraft durch die einfache Schwere ersetzt. Bei angenähert adiabatischer Änderung ist in den Formeln jenes Abschnittes $f_\lambda = 0$; die Gasgleichung wird gegenstandslos, die Zähigkeit und das spezifische Gewicht ändern sich nicht, d. h. $f_\eta = 1$; $f_\gamma = 1$. Es bleiben die Gleichungen

$$f_t = \frac{f_l}{f_u}; \qquad f_u^2 = f_p; \qquad f_m f_l = f_u^2; \qquad f_u f_l = 1$$

übrig, wobei $f_m = g/r_m\,\omega^2$ (für r einen Mittelwert gewählt) gegeben ist. Die Auflösung ergibt

$$f_l = 1/\sqrt[3]{f_m}; \qquad f_u = \sqrt[3]{f_m}; \qquad f_p = \sqrt[3]{f_m^2}; \qquad f_t = 1/\sqrt[3]{f_m^2}.$$

Wenn also etwa $f_m = 1/125$, so wird $f_l = 5$; $f_u = 1/5$; $f_p = 1/25$; $f_t = 25$. Statt einer Kammer von 100 mm Breite in der Turbine muß man eine solche von 500 mm Breite im Freien aufstellen; die 25 mal so langsame Schwingung der Wassersäule darin entspricht der 5 mal verkleinerten Schwingung in der Turbine, wenn dort auf die Oberfläche ein Druck von 25 at ausgeübt wird. Ein Versuch dieser Art in einem Rohr von rd. 270 mm Durchmesser zeigte, daß der Spiegel bei einer künstlich hervorgerufenen Auf- und Abschwingung **bis zur kritischen Grenze**, wo die Beschleunigung sich der Schwerenbeschleunigung nähert, so **gut wie völlig ruhig blieb.** Die an der Wand haftende Wasserschicht ist ungemein

dünn, und würde in der Turbine wegen der höheren Massenkraft erst noch auf $^1/_5$ ihrer Dicke zusammenschrumpfen.

Allerdings wird **die Corioliskraft den Spiegel in der Turbine, gegen den Umfang betrachtet, ziemlich schief stellen.** Ferner wird bei der Abströmung aus der Kammer nach der seitlich liegenden Kanalöffnung die weiter abliegende Wassermasse zurückbleiben, der Spiegel wird sich **gegen die Achse hin konkav** — und **beim Einströmen konvex wölben.** Trotzdem glauben wir, daß auf Grund des gemachten Versuches das „Spritzen" in der Turbine auch bei 1500 bis 2000 Spielen in der Minute nicht gefährlich werden dürfte.

Beispiel.

Die Ausrechnung von Beispielen zeigte, daß die axiale Beaufschlagung für größere Leistungen auf konstruktiv unbequeme Verhältnisse führt, so daß, wie auch in den Patentanmeldungen zum Ausdruck kommt, die radiale Beaufschlagung, mit gleich großem Ein- und Austrittshalbmesser, gewählt wurde. Eine besonders große Erschwerung bildet die Bedingung, die Spiegelbeschleunigung nicht über $r\,\omega^2$ hinauswachsen zu lassen.

Ein in eine Spitze ausgehendes Verpuffungsschaubild ist dem Anscheine nach ungünstig. Man ist gezwungen, den Druck (im Vergleich zur Kolbenmaschine) langsamer wachsen zu lassen, was übrigens infolge der kleinen Entleerungszeit und der endlichen Verbrennungsgeschwindigkeit wohl ohne besondere Maßnahmen von selbst herauskommen dürfte.

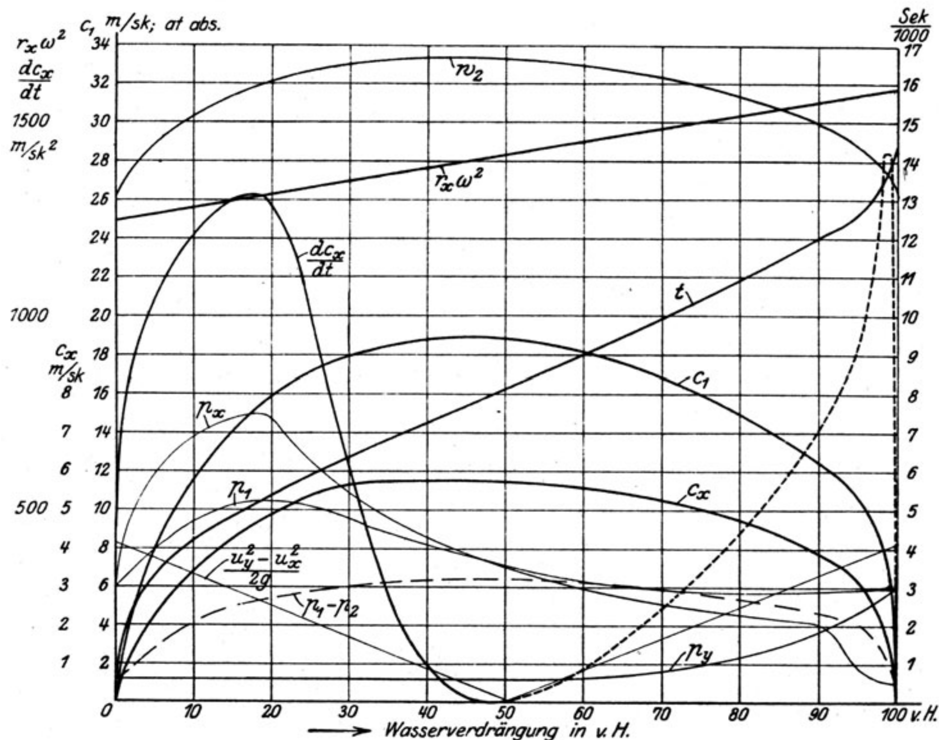


Abb. 1065. Schaulinien zum Entwurf einer Stauberturbine.

Auf diese Weise ist die in Abb. 1065 in Schaubildern dargestellte Lösung entstanden. Die Grundlinie ist der entleerte Rauminhalt (in v. H.); der Verpuffungsdruck steigt bei 20 v. H. auf 15 at abs.; die Verdichtung beginnt bei rd. 50 v. H. und steigt auf 6 at abs. Der mittlere „indizierte" Druck ist 6,2 at.

Man wählte den Spaltdurchmesser = 800 mm, die Drehzahl 625/min. die Schaufellänge für Ein- und Auslaß je 300 mm. Es wäre indes günstiger, diese Länge auf die Hälfte herabzusetzen, wodurch auch die Leistung halbiert würde. Der Wasserspiegel spielt (zylindrisch vorausgesetzt) zwischen den Halbmessern 290 und 350 mm, was bei 30 Kammern 2,2 l Verdrängung für eine Kammer ausmacht. Die Winkel sind $\alpha_1 = 30^0$; $\alpha_2 = 60^0$. Die Widerstandszahlen $\zeta_1 = \zeta_2 = 0{,}05$; $\zeta = 0{,}30$. Die Entleerungszeit ist 0,0145 Sek., die Dauer eines Spieles (Entleerung und Füllung) 0,029 Sek. Bei 60 : 625 = 0,096 sek Umdrehungsdauer sind mithin auf einen Umlauf bequem drei Spiele ausführbar. Es sind die Schaulinien für p_x; p_y; p_1; $p_1 - p_2$; c_x; c_1; w_2; $(u_y^2 - u_x^2)/2\,g$; $r_x\,\omega^2$; dc_x/dt (für diese bedeutet der punktierte Teil negative Werte) und die jeweilige Ausströmdauer t eingetragen. Die Reibungsverluste machen summarisch

berechnet 16 mkg für 1 kg durchströmendes Gewicht aus. Die Berechnung mit der Rohrreibungsformel $\Delta p/\gamma = \int \zeta_r (U/4F)(w^2/2g)\,dL$ führt mit einem Wert $\zeta_r = 0{,}02$ auf etwa 14 kgm Verlust für 1 kg durchströmendes Gewicht. Der Mischungsverlust dürfte in grober Schätzung etwa 5 mkg/kg ausmachen; die angewendeten Verlustziffern ζ_1, ζ_2, ζ sollten hiernach noch etwas erhöht werden. Der gesamte „hydraulische Wirkungsgrad" stellt sich auf (62 — 19) : 62 = 0,69. Schätzt man die Spaltverluste, die Lagerreibung usf. auf 5 v. H. ein, so ergibt sich ein „effektiver" Wirkungsgrad von 64 v. H. Die innere („indizierte") Leistung einer Kammer betrüge danach $0{,}0022 \cdot 6{,}2 \cdot 10^4 \cdot 3 \cdot 625 : 60 \cdot 75 \cong 56{,}8$ PS; diejenige der ganzen Turbine $30 \cdot 56{,}8 = 1704$ PS_i oder 1090 PS_{eff}.

Diese Zahlen werden nur angeführt, um eine Vorstellung von der Ausführungsgröße der Turbine zu gewinnen. Sie sind im wesentlichen grobe Schätzungen, da sich insbesondere die Vorgänge im Umleitkanal einer genaueren Vorausbestimmung entziehen.

Seit der Drucklegung des obigen hat Stauber gemäß neuer Patentanmeldung eine erhebliche Verbesserung der hydraulischen Turbine durch **Verwindung der Zellenwände** in dem Sinne erreicht, daß die **festen Leitkanäle verkürzt** werden. Eine letzte Ausgestaltung dieses Gedankens mit Verwindung der zu den Schaufeln führenden Wandenden bei gleichzeitiger Schiefstellung der inneren Wandteile ermöglicht sogar, daß sich eine unter Druck stehende Zelle gleichzeitig auf der rechten und der linken Seite, wie in Abb. 1065a bei A_1 und A_2 angedeutet, in zwei entsprechend versetzte ungefüllte Zellen entleeren kann. Die Einwirkung der Corioliskraft auf die Spiegelgestalt muß freilich hierbei wohl erwogen werden. Die Kürzung der Leitkanäle erlaubt, wie obige Abbildung lehrt, zur halb- ja zur gänzlich achsialen Beaufschlagung zu greifen und die Reibungsverluste werden wohl in erheblichem Maße herabgesetzt.

Gesamtergebnis.

Das Gesamtergebnis ist das Produkt aus dem Wirkungsgrad des Turbinenprozesses und dem Gütegrad des thermischen Prozesses. Den ersteren haben wir oben für ein Ausführungsbeispiel von rd. 1000 PS auf rd. 0,64 eingeschätzt. Bei größeren Leistungen würden die Abmessungen im Verhältnis von $\sqrt[3]{N_{eff}}$ wachsen, und wenn schon das Verhältnis L/D in der Reibungsformel sich nicht ändert, so würde doch die Rauhigkeit und Unregelmäßigkeit des Gusses im Verhältnis weniger ausmachen, so daß man für η_c günstigere Werte zu erwarten hätte.

Was den thermischen Prozeß anbelangt, so dürfte das „Spritzen", wie oben dargetan, kaum gefährlich werden. Betreffs der Verdampfung ist zu bemerken, daß die Zeitdauer der Einwirkung gegenüber der Humphrey-Pumpe auf vielleicht $^1/_{1000}$ und weniger sinkt, also kann das sich bildende Dampfpolster nicht ganz weggeblasen werden, es wird isolierend wirken. Ähnlich wie beim Flugmotor wird man demnach auf eine Verringerung der Wärmeverluste hoffen dürfen.

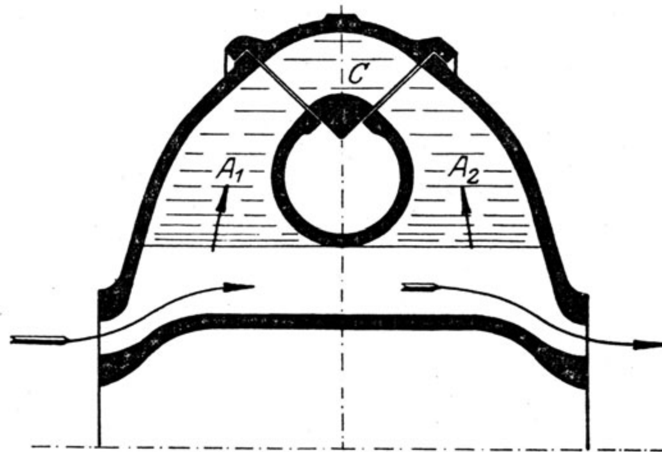


Abb. 1065a. Turbine mit beidseitiger Ein- und Abströmung.

Bei der Humphrey-Pumpe war der kleinste Verbrauch 2970 kcal/WasserPSst, was einen Brennstoffnutzungsgrad von 632/2970 = 0,213 ergibt. Nehmen wir die Verluste durch Wasserreibung zu 0,10, und den Wirkungsgrad des Gaserzeugers zu 0,78 an[1]), so erhalten wir als indizierten thermischen Wirkungsgrad, auf Gas bezogen $\eta_{i_{gas}} \cong 0{,}303$. Für die Stauber-Turbine dürfte man mit Rücksicht auf das Gesagte mehr, vielleicht 0,33 bis 0,35 einsetzen. Demnach ergäbe sich **als Wärmenutzungsgrad $0{,}35 \cdot 0{,}64 = 0{,}224$ auf Gas bezogen** und entsprechend mehr mit der beschriebenen neuesten Anordnung der Turbine.

[1]) Wie man aus den Angaben in der Z. d. V. D. Ing. 1914, S. 35, ausrechnen kann.

Dem Vernehmen nach ist die aus der Verbindung hervorragender Anstalten entstandene „Stauber-Turbinen-Gesellschaft m. b. H." Berlin im Begriffe, die tatsächlichen Ergebnisse an einer Versuchsturbine festzustellen. Man wird den hierüber zu erwartenden Mitteilungen wie auch den Maßnahmen, die zur Überwindung der zahlreichen konstruktiven Schwierigkeiten getroffen werden, mit Spannung entgegensehen.

207. Ausgeführte Gasturbinen.

Die Turbine der Société anonyme des Turbomoteurs, Paris.

Der erste ernstlich in Betracht fallende Versuch einer Ausführung im großen stammt von der oben bezeichneten Gesellschaft, deren treibende Kräfte die beiden Ingenieure Armengaud waren, Nachkommen des Herausgebers der früheren berühmten technischen Zeitschrift gleichen Namens.

Nach dem Bericht von A. Barbezat[1]), Ingenieur der Gesellschaft, wurden zunächst Vorversuche an einer 25 PS-Lavalturbine gemacht, wobei man Druckluft mit 5 at Pressung der Pariser Druckluftleitung

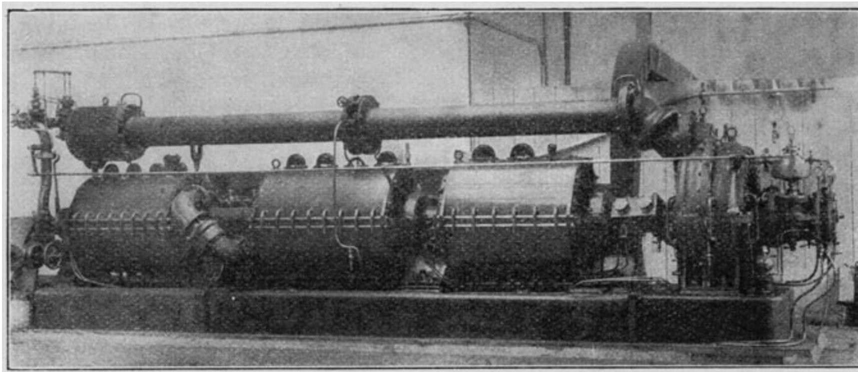


Abb. 1066. Gasturbine der Soc. an^{e}. des Turbomoteurs, Paris v. J. 1905.

entnahm. Die Turbine arbeitete mit unveränderlichem Verbrennungsdruck und benützte Erdöl als Brennstoff, welches, durch eine Düse zerstäubt, an einem glühenden Platindraht gezündet wurde.

Die nachfolgende große Ausführung Abb. 1066 besteht aus einem Curtisrad von 950 mm Durchmesser mit 33 Düsen von je 10 mm engstem Durchmesser, welches mit 4250 Uml./min einen Rateauverdichter von rd. 400 PS antreibt. Ein Teil der auf 5 at abs. verdichteten Luft dient als Verbrennungsluft, der Rest stellt die Nutzleistung der Turbine dar.

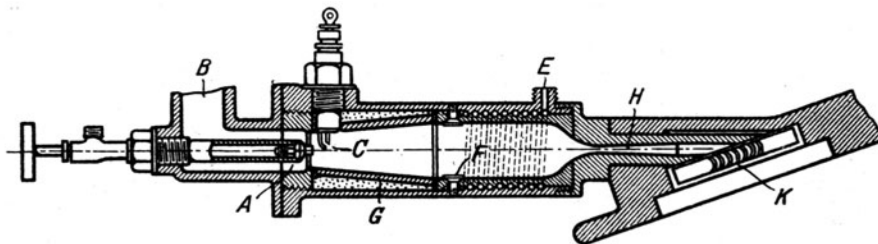


Abb. 1066a. Verbrennungskammer und Düse zu Abb. 1066.

Die Verbrennungskammer besitzt nach dem an Ch. Lemale erteilten D. R. P. Nr. 173447 die in Abb. 1066a dargestellte Einrichtung. Bei A tritt Erdöl unter Druck ein und wird, durch feine Löcher zerstäubt, mit dem bei B eingeführten Luftstrom vermischt und an C gezündet. Später wird die strahlende Hitze der Karborundumauskleidung G das Erdöl wohl schon in der Zuführung verdampfen und dann zünden. E ist der Eintritt des Kühlwassers, welches in einer Schlange vorgewärmt und ursprünglich bei F in das Brenngemisch eingespritzt wurde. H ist die Düse, K ein Radschnitt.

An der ausgeführten Turbine wurden die Gase nach der Entflammung in einem 5 m langen Kühlrohr, welches in der Abbildung über dem Kompressor liegend deutlich zu erkennen ist, durch Wassereinführung in dessen Mitte abgekühlt. Es mußte so viel Wasser zugesetzt werden, daß die Temperatur im Zwischenleitrad des Curtisrades unter 450—470° C sank, da sonst an dessen Schaufeln Anfressungen vorkamen, während das Laufrad infolge der eigenen Ventilation höhere Temperaturen aushielt.

---

[1]) Schweiz. Bauzeitg., Bd. LIII, Nr. 3 und Zeitschr. f. d. ges. Turbinenwesen 1909, S. 217.

Die Versuche ergaben folgendes Ergebnis:

Umlaufzahl i. d. Min.	4250
Temperatur nach Pyrometeranzeige vor den Düsen	560° C
Temperatur (nach Pyrometer) am Austritt der Turbine	420° C
Druck vor den Düsen (Verbrennungskammer)	4 kg/qcm abs.
Druck vor der Meßdüse	3 "
Durchmesser der Meßdüse	25 mm
Lufttemperatur beim Verlassen des Kompressors	87° C
Lufttemperatur im Versuchsraum	18° C
Wasserverbrauch in der Stunde	1840 l
Petroleumverbrauch in der Stunde	178 kg

Barbezat und Armengaud[1]) leiten ab, daß für die Adiabate der Feuergase näherungsweise die Formel

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^5$$

benützt werden kann. Ist also beispielsweise am Ende der Düse $t_2 = 400 - 450^\circ$ C vorgeschrieben, so muß im Innern bei 4 at abs. eine Temperatur $t_1 = 616 - 682^\circ$ C geherrscht haben, und die Angaben des Pyrometers sind, wie auch Barbezat bemerkt, durch die Strahlung des Kühlmantels erniedrigt. Auf alle Fälle muß die Verbrennungstemperatur, wie ersichtlich, sehr weit herabgesetzt werden, und dies ist der Hauptgrund für das über Erwarten ungünstige Ergebnis.

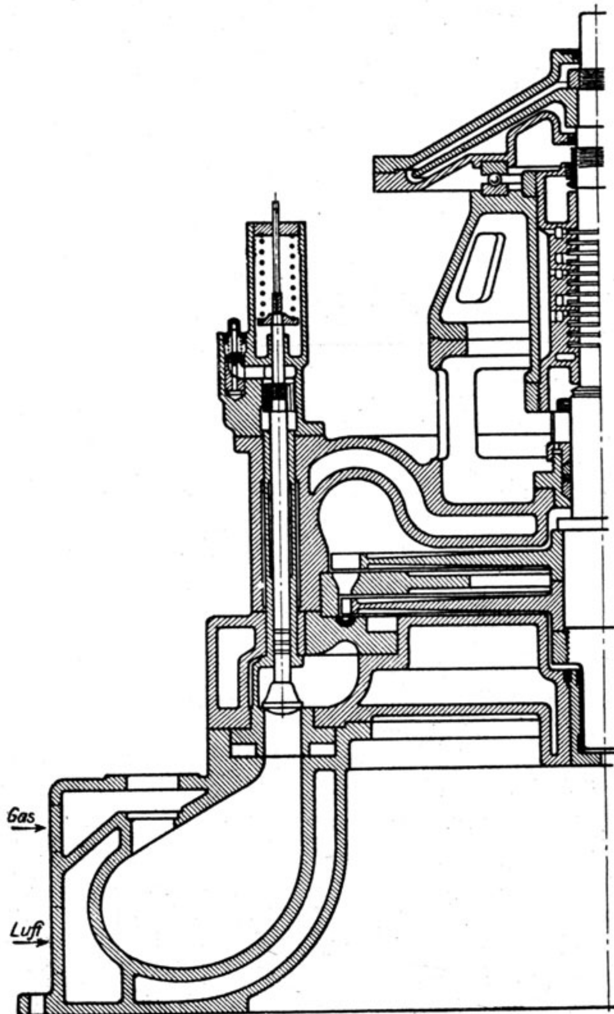


Abb. 1067. Anfänge der Holzwarth-Turbine v. J. 1908.

Das sekundliche Gewicht der abgegebenen Nutzluft ist nach Formel $G_{sek} = 0{,}397 f \frac{p_1}{\sqrt{T_1}}$ mit $f = 4{,}93 \cdot 10^{-4}$ qm; $p_1 = 30000$ kg/qm; $T_1 = 273 + 87 = 360$; $G_{sek} = 0{,}308$ kg. Die isothermische Verdichtungsarbeit in PS $N_i = \frac{G R T_0}{75} \lg n \left(\frac{p_2}{p_0}\right)$ beträgt mit $p_2/p_0 = 4$; $T_0 = 300$ $N_i = 50{,}0$ PS, und wenn der Wirkungsgrad des Kompressors mit 0,6 angesetzt wird, so ist die effektive Nutzleistung $N_e = 50 : 0{,}6 = 83{,}0$ PS, demnach der Verbrauch an Erdöl für die PS_e-st $= 178 : 83{,}0 = 2{,}14$ kg. Mit 10000 kcal als Heizwert für 1 kg ist endlich der Gesamtwirkungsgrad $632 : 2{,}14 \cdot 10000 = 0{,}0291$, also kaum 3 v. H. Die Turbine war knapp in der Lage, ihre eigene Verdichtungsarbeit aufzubringen. Dies braucht bei der außerordentlichen Abkühlung der Brenngase durch das eingespritzte Wasser nicht wunderzunehmen und bestätigt nur in jeder Beziehung die theoretischen Schlußfolgerungen.

Die Société anonyme des Turbomoteurs führte ihre Petrolturbinen als Antriebsmaschinen für Torpedos ein, die bis jetzt durch Druckluft allein fortbewegt wurden. Das Hinzufügen einer kleinen Menge flüssigen Brennstoffes und Ausnützung der Luft als Verbrennungsluft der Turbine kann hier bei gleichem Gesamtgewicht die Leistung wesentlich erhöhen.

Die Gasturbine von Holzwarth.

Holzwarth gebührt das Verdienst, die erste gewerblich verwendbare Gasturbine geschaffen zu haben. Die Anfänge seiner auf dieses Ziel mit zäher Ausdauer gerichteten

[1]) La turbine à gaz, in La Lumière électrique 1901. T. V, Nr. 7 u. 8.

Tätigkeit reichen in das Jahr 1908 zurück[1]). Schon die erste, in Hannover erbaute und erprobte Turbine Abb. 1067 arbeitete nach dem Verpuffungsverfahren ohne Vorverdichtung.

Die Wirkungsweise der neuesten Ausführung mit mäßiger Vorverdichtung ist schematisch in Abb. 1068 dargestellt, wobei die Skizze links die Lage der Steuerventile während der Ausdehnung, in der Mitte während der Spülung und rechts während der Ladung bedeutet. Die letztere erfolgt, wie ersichtlich, bei geschlossenem Düsenventil, und zwar so,

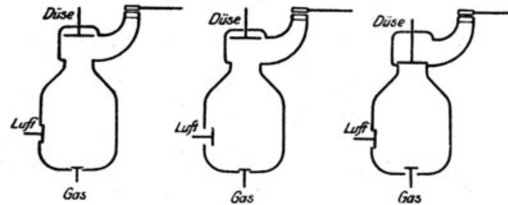


Abb. 1068. Ventilstellungen während eines Spieles.

daß zum Schluß nur Gas in den Luftinhalt einströmt, der die Kammer erfüllt. Doch kann ebensogut während der Spülungsperiode Gas zugeführt werden, in welchem Falle die Stellung rechts der Nachladung dient. Der zeitliche Verlauf des Druckes in der Kammer muß hiernach der in Abb. 1068a dargestellte sein. Nach der als augenblicklich vorausgesetzten Verpuffung AB findet während der Zeit t_e die Ausströmung statt, bei der die Pressung infolge der Massenwirkung des Strahles unter den Gegendruck sinken kann. Die hierauf einsetzende Spülung erhöht den Druck um ein Geringes, während vom Zeitpunkte D angefangen, nachdem das Düsenventil geschlossen hat, das Auf- und Nachladen gemäß Drucklinie DA vor sich geht.

An der ersten Ausführungsform Abb. 1067 erkennt man die Verpuffungskammer mit Steuerventil und zwei hintereinander geschaltete Geschwindigkeitskränze am Laufrad.

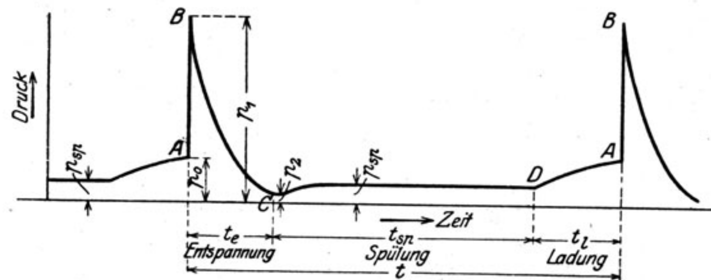


Abb. 1068a. Zeitlicher Verlauf des Innendruckes.

Es gelang nach Ersatz der Abreißzündung durch Hochspannungskerzen, die an mehreren Stellen der Kammer angebracht wurden, auch flüssige Brennstoffe zum vollständigen Verbrennen zu bringen. Sie wurden mittels Dieselscher Zerstäuberventile zugeführt und verpufften vollkommen, sobald das (durch Thermometer angezeigte) Zeitmittel der Temperatur in der Kammer für Petroleum nicht unter 400° C, für Steinkohlenteeröl nicht unter 375° C sank. Versuche mit Kohlenstaub mißlangen, indem nur etwa $\frac{1}{3}$ der zugeführten Menge zu verpuffen vermochte. Die Verpuffungsdrücke schwankten zwischen 5—7 at abs.

Im Jahre 1910 wurde eine zweite größere Versuchsturbine in Mannheim, Abb. 1069 und 1070, aufgestellt. Mit Anthrazit-Kraftgas betrieben, erwuchsen Störungen durch Verschmutzen des Turbogebläses, das den Teer zu wirkungsvoll abschied. Als hierauf Kraftgas aus Hüttenkoks erzeugt wurde, bereitete die Wasserstoffarmut desselben für die Zündung Schwierigkeiten. Starke Erwärmung der Verbrennungsluft durch die Wandungen gestaltete die Verpuffung „unstabil", d. h. die Verpuffungsspannung nahm nach Beginn eines Versuches rasch ab. Abb. 1071 zeigt eine nach Überwindung dieser Schwierigkeiten aufgenommene Zeit-Druck-Schaulinie, an der man erkennt, daß die Ladung bereits mit rd.

[1]) H. Holzwarth, Die Gasturbine, 1911, S. 125.

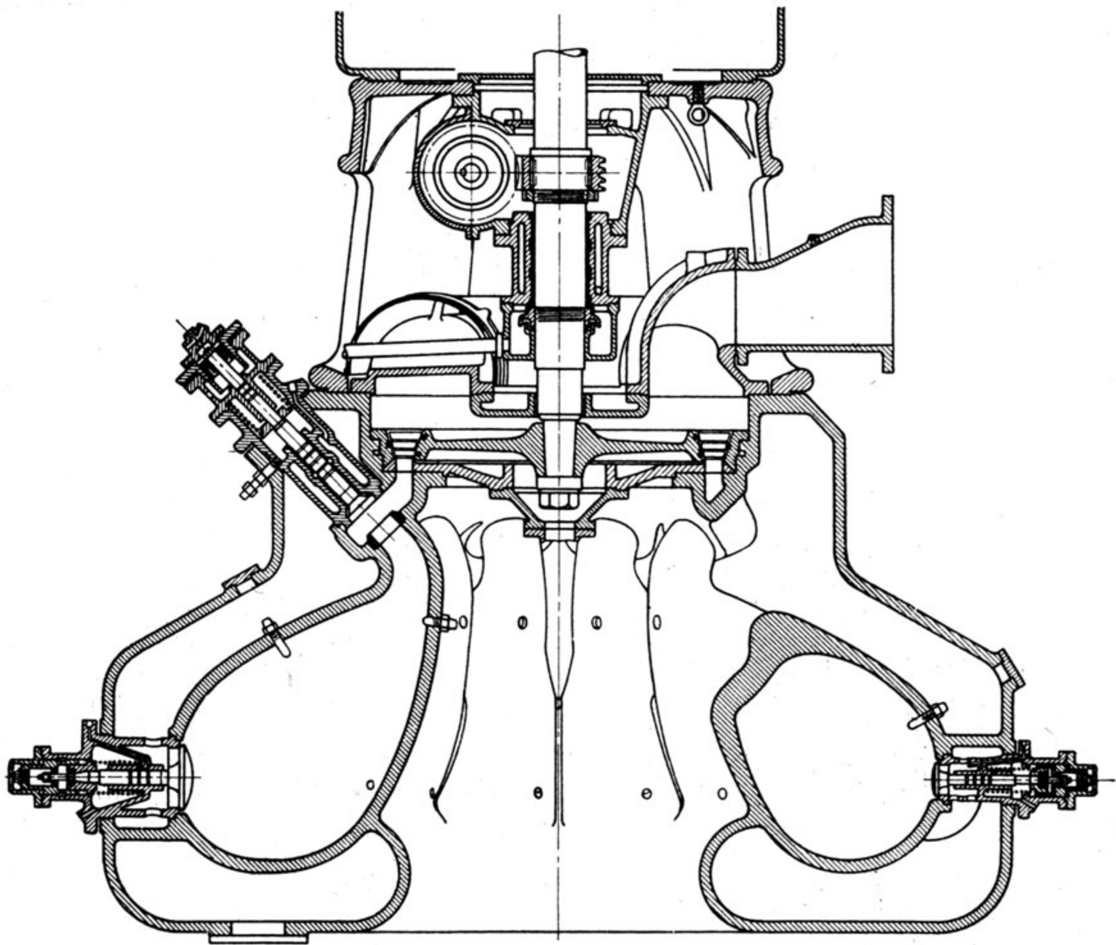


Abb. 1069. Mannheimer Turbine v. J. 1910.

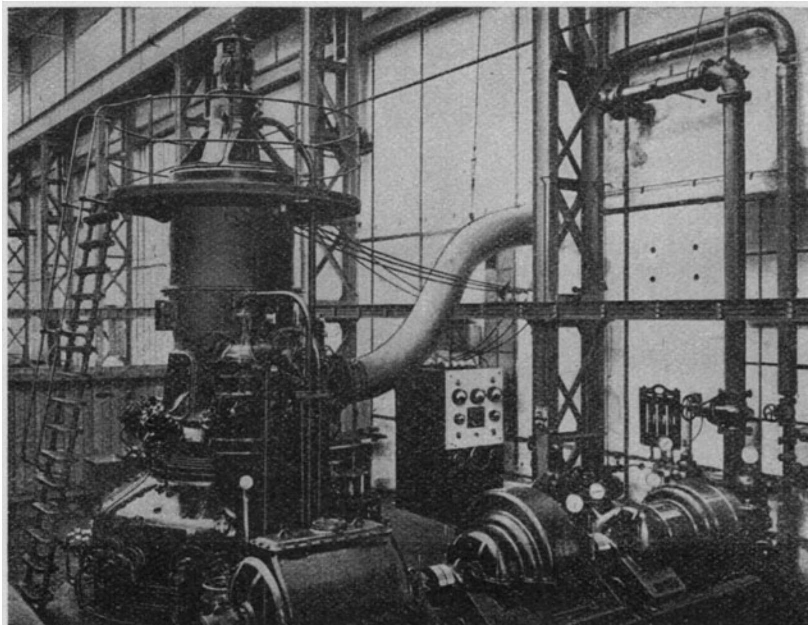


Abb. 1070. Lichtbild der Mannheimer Turbine mit Gasgebläsegruppe.

0,5 at Überdr. zugeführt wurde. Die Verpuffungsdrücke stiegen bis 9 at abs. Es zeigte sich indessen ein wesentlicher Unterschied, ob alle 10 Kammern oder nur 5 (je die zweite)

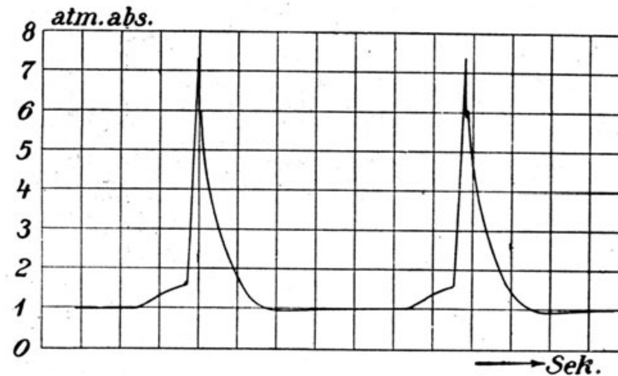


Abb. 1071. Zeitdruckschaubild v. J. 1910.

in Betrieb waren. Im ersten Fall verhinderte bei über 4,2 at abs. gehenden Verpuffungsdrücken ein im ersten Laufradkranz sich einstellender Überdruck das vollkommene Durch-

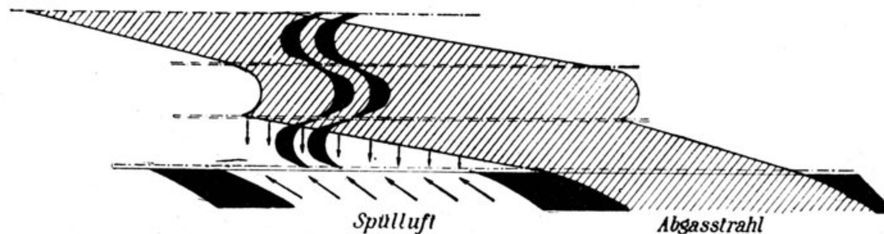


Abb. 1072. Behinderung der Spülung durch Stau- und Rückstrom im Laufrad.

spülen der leeren Nachbarkammer. In Abb. 1072 ist durch die lotrechten Pfeile der dem Spülen entgegenwirkende Gasstrom im Laufrad nach Holzwarth angedeutet. Als Grund des Staues wurde eine unrichtige Berechnung der Düsenerweiterung bezeichnet.

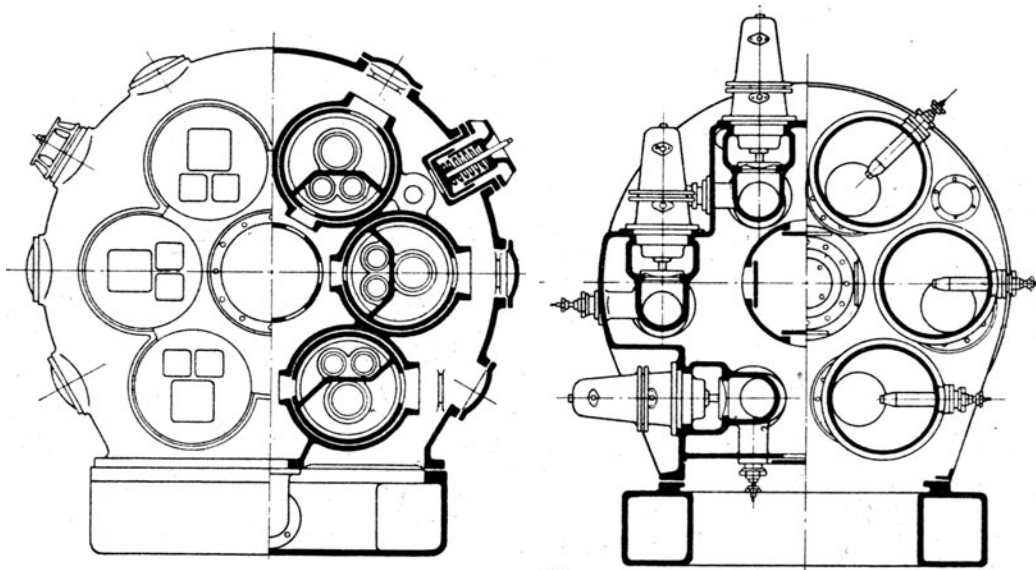


Abb. 1073a. Querschnitte zu Abb. 1073.

In konstruktiver Hinsicht ist ein wesentlicher Fortschritt gegenüber der Hannoverschen Turbine bemerkbar. Insbesondere sind die Düsenventile schief gestellt, um den Betrag

der Richtungsänderung des Gasstromes gegenüber Abb. 1067 zu verringern. Im Lichtbild 1070 ist die mit elektrischem Antrieb versehen gewesene Gruppe des Luft- und Gasgebläses sichtbar.

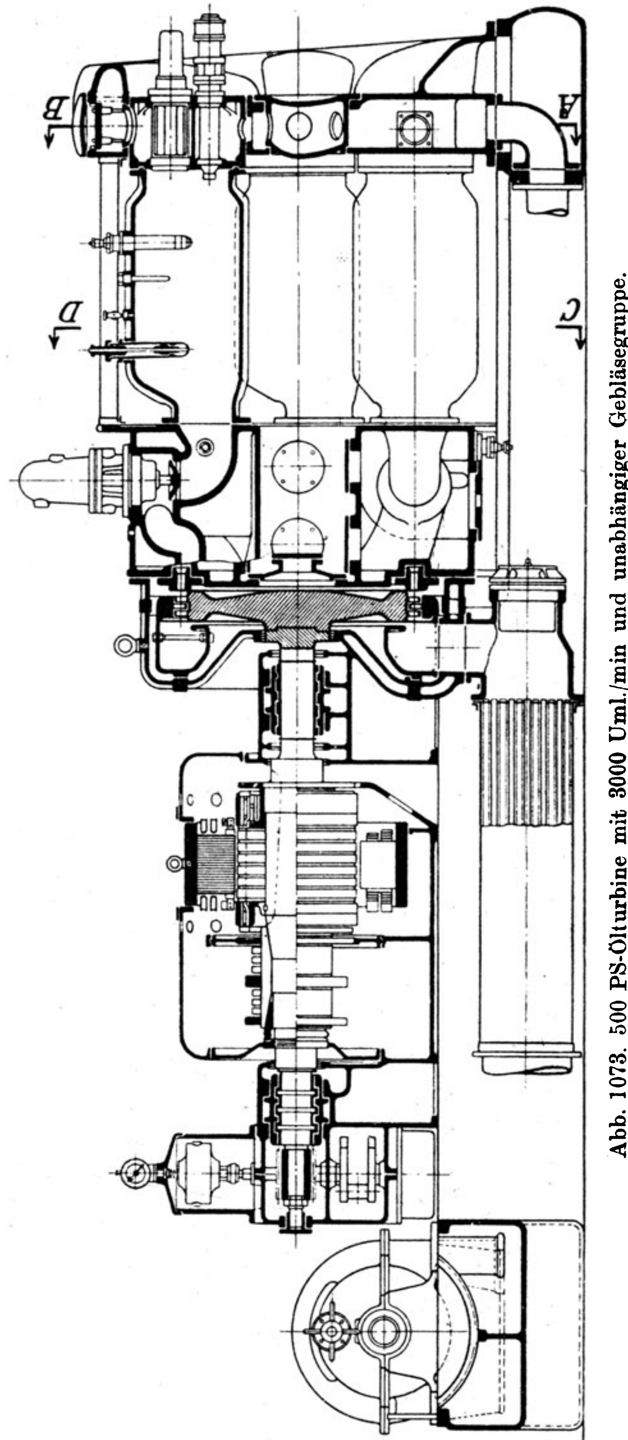


Abb. 1073. 500 PS-Ölturbine mit 3000 Uml./min und unabhängiger Gebläsegruppe.

Über die neueste Ausführung dieser Turbine, die in Gemeinschaft mit der Maschinenfabrik Thyssen & Co., Mühlheim, Ruhr, im Jahre 1914 erbaut wurde, berichtet Holzwarth in der Z. d. Ver. Deutsch. Ing. 1920. S. 197. Die Verbesserungen gegenüber der Turbine von Mannheim sind:

1. Erhöhung der Vorverdichtung auf 2,3 bis 3,0 at abs., wodurch der Verpuffungsdruck auf 12 bis 14 at gesteigert wird.

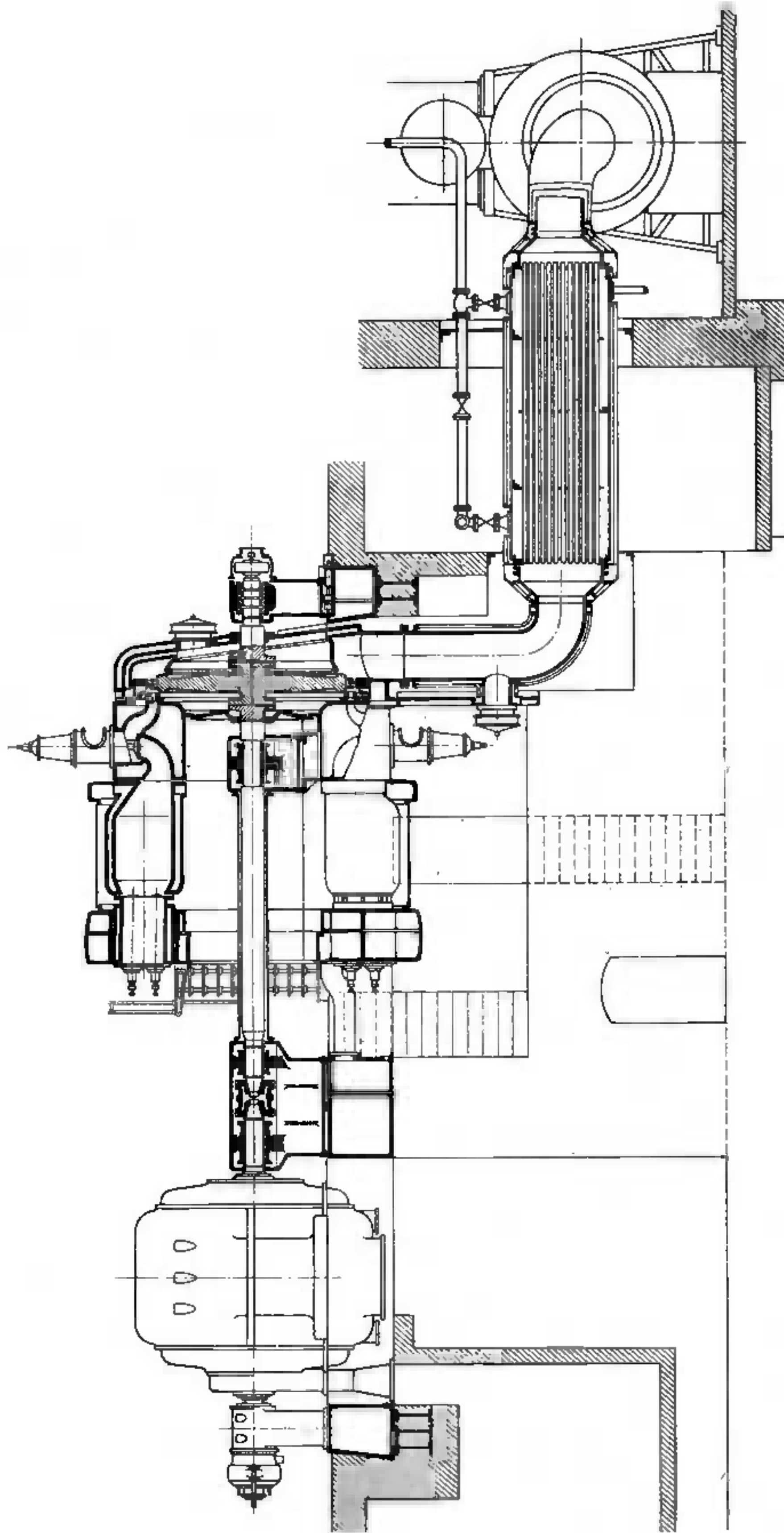


Abb. 1074. 5000 kW-Turbine mit 1000 Uml./min.

2. Verkürzung der Ausdehnungszeit. Je kürzer die Zeitdauer der Verpuffung und Ausdehnung, um so weniger Wärme geht an die Kammer- und Düsenwand verloren. Mit Recht schreibt Holzwarth den ungemein kleinen Wärmeverbrauch des Flugmotors der bis auf $^1/_{50}$ sek herabgesetzten Ausdehnungszeit zu. Während in der Großgasmaschine bei rund 90 Uml./min die Ausdehnungszeit rund $^1/_3$ sek beträgt, setzt Holzwarth sie in seiner Turbine auf 0,1 sek herab. Einer weiteren Verminderung steht die erforderliche Vergrößerung der Düsenquerschnitte und Schaufelungen, somit Ventilationsverluste entgegen.

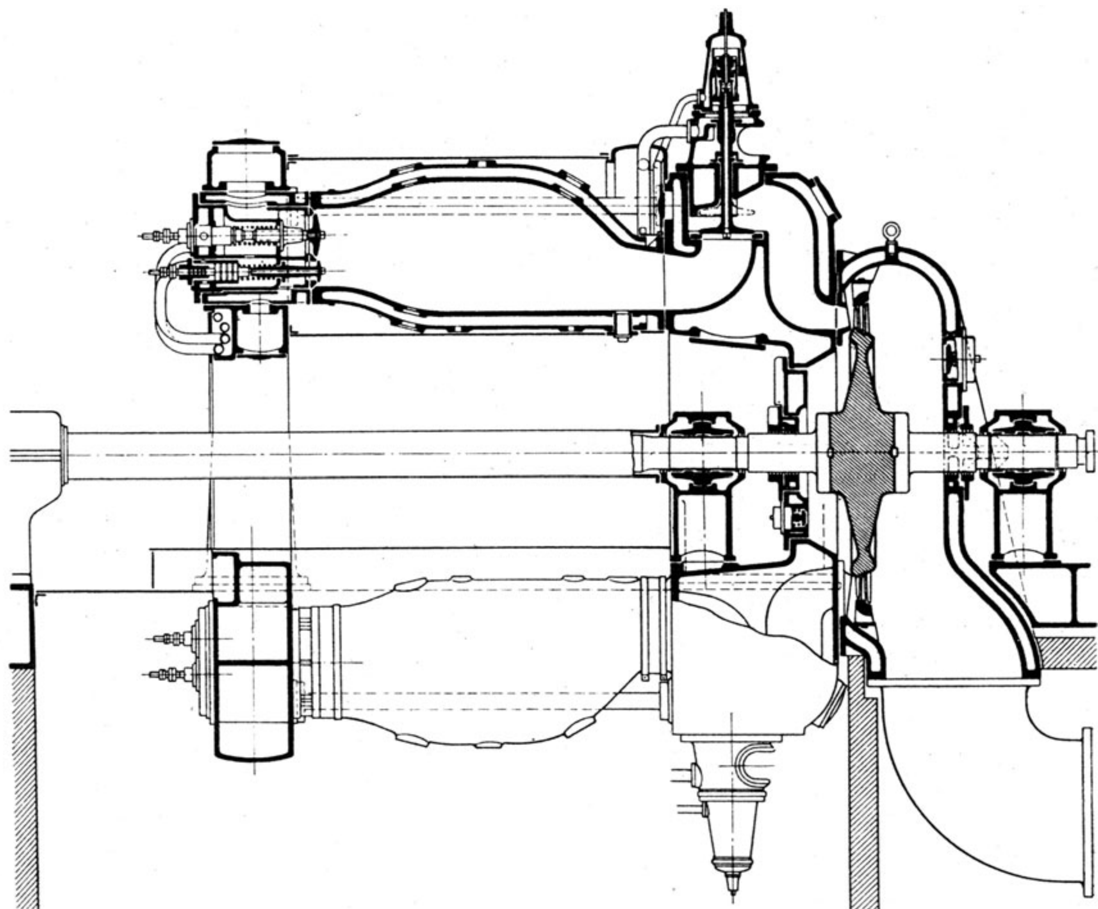


Abb. 1075. 10000 kW-Turbine mit 1500 Uml./min.

Die Gesamtanordnung der neuen Ausführung geht aus den Abb. 1073, 1074, 1075 hervor. Die erste bezieht sich auf eine 500 PS-Ölturbo-Dynamo mit 3000 Uml./min und angebauter unabhängiger Gebläsegruppe von 5—6000 Uml./min. Die zweite stellt eine 5000 kW-Turbine mit 1000 Uml./min bei 3,5 at abs. Vorverdichtung; die dritte eine 10000 kW-Turbine mit 1500 Uml./min dar. Wie ersichtlich, sitzen die Gas- und Luftventile in einem besonders angeschraubten Deckel der Verpuffungskammern nebeneinander. In Abb. 1073 sind die zwei Hochspannungszündkerzen und ein Thermometereinsatz gut erkennbar. Die Kammern sind mit einem Kühlmantel versehen. Die Düsenventile, mittels Ölfernsteuerung betätigt, schließen gegen den Druck der Kammer. Das Rad besitzt bei allen Ausführungen zwei Geschwindigkeitsstufen; es wird bei 500 PS fliegend angeordnet, bei größeren Einheiten mit einem Außenlager versehen. Die Scheibe ist der hohen Umfangsgeschwindigkeit entsprechend voll ausgeführt und wird nach de Lavalscher Art mit der Welle durch Flanschen verbunden. Der Stromerzeuger liegt bei größeren Einheiten auf der Seite der Gaseinströmung und ist durch bewegliche Kupplungen mit der Turbine verbunden. Die Auspuffgase strömen durch gekühlte Rohre in die Abwärmeverwertungskessel die im Schnitt in Abb. 1073, 1074 dargestellt sind. Der Raddurchmesser der 10000 kW-Turbine beträgt 2400 mm.

Konstruktive Einzelheiten.

Die Holzwarthsche Lösung für das heikelste Element der Gasturbine, d. h. die Schaufel, ist in Abb. 1076 dargestellt. Die Schaufeln werden aus einem Stück im Gesenk geschlagen und mit einer angeschmiedeten Kappe versehen, die am Rade einen zusammenhängenden Abschlußring bildet. Der Fuß ist durch gewindeartige Zacken festgehalten und mit einem Dreieckschlitz versehen, in den ein Keil eingetrieben wird, um zwischen Schaufel

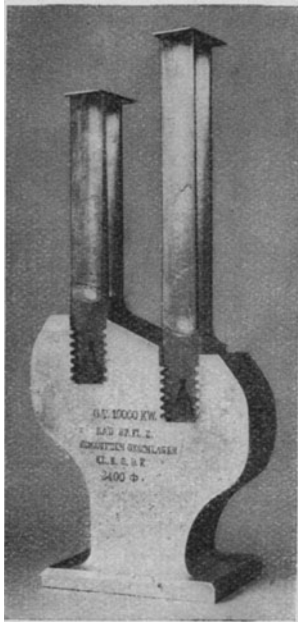


Abb. 1076. Schaufeln der Holzwarth-Turbine.

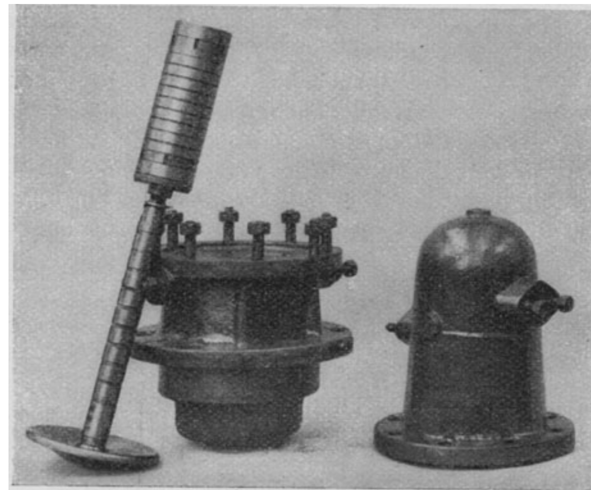


Abb. 1077. Düsenventil mit Steuerkolben.

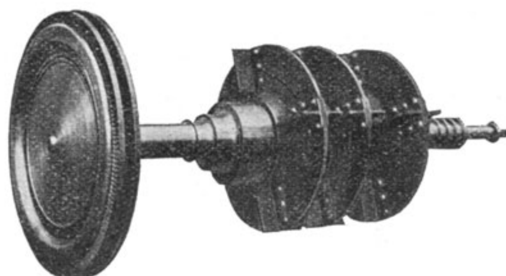
und Kranz eine Spannungsverbindung herzustellen. Als Baustoff wurde nach kostspieligen und zeitraubenden Versuchen in Gemeinschaft mit dem Stahlwerk der August-Thyssen-Hütte ein von dieser hergestelltes weiches Elektroeisen gewählt, dessen Festigkeitseigenschaften in nachfolgender Zahlentafel zusammengestellt sind.

Schaufelwerkstoff	Prüfung	
	bei Zimmertemperatur	bei 480° C
Streckgrenze kg/cm²	4204 oben 3185 unten	1975
Bruchbelastung kg/cm²	4540	2675
Dehnung (10fache Meßlänge) v. H.	27,2	50,2
Querschnittsminderung v. H.	73	88,4

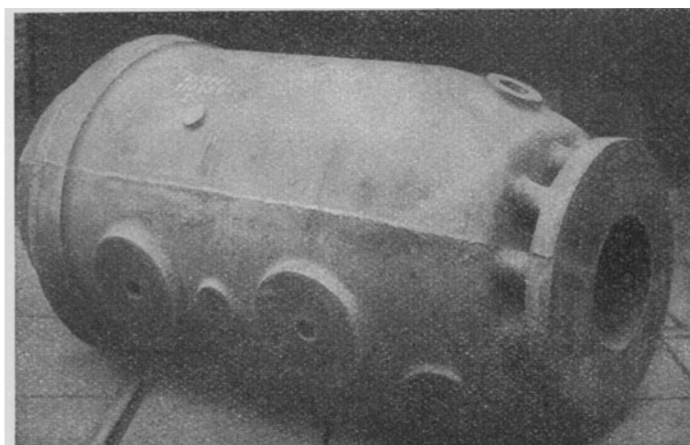
Wie hieraus hervorgeht, nimmt die Festigkeit dieses Baustoffes bei erhöhter Temperatur in erheblichem Maße ab. Wenn diese Schaufeln trotz längerer Erprobungsdauer weder Anfressungen noch Rauhungen zeigen, vielmehr eher geglättet, brüniert erscheinen und tatsächlich besser aussehen als Dampfturbinenschaufeln, so kann dies nur aus der vorzüglichen Wirkung der Luftkühlung des Rades erklärt werden. Umgekehrt darf gefolgert werden, daß diese Kuhlung eine sehr intensive sein muß. Voraussetzung für die Haltbarkeit ist, daß nicht nasser Dampf oder Wasser in größerer Menge mit den Feuergasen gemischt sind, da sich sonst schwefel- und salpetersaure Salze bilden und die Schaufel zerstören. Bei andern ebenfalls erprobten Baustoffen von größerer Härte oder an Schaufeln aus legiertem Stahl zeigten sich sehr bald Gefügeänderungen, Risse, Absplitterungen· diese Stoffe erwiesen sich als ungeeignet.

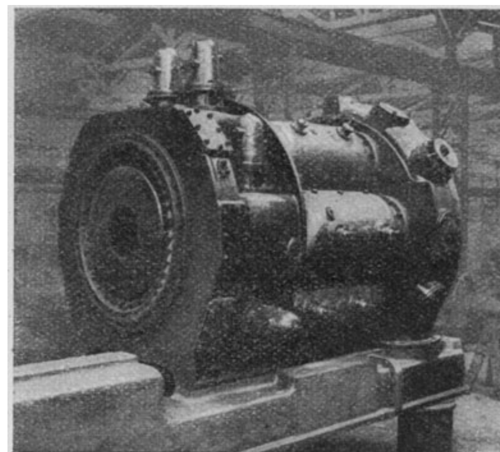
Über die Düsen und deren Kühlungsart wird von Holzwarth nichts Näheres mitgeteilt. Bei Düsen mit parallelem Austritt wurde die stärkere Strahlablenkung als Nach-

teil empfunden. Am zweckmäßigsten sollen sich Lavaldüsen mit nahezu dem gleichen kleinen Austrittswinkel, wie im Dampfturbinenbau, bewährt haben.


Abb. 1078 Laufrad der 500 PS Turbine mit Bremsflügel.

Eine besondere Bedeutung besitzt das Düsenventil. Es muß einerseits beim Aufladen der Kammer bis zur Zündung gasdicht schließen, sodann für das Abströmen möglichst rasch einen großen Querschnitt freigeben. Holzwarth fordert, daß das Düsenventil sich schon beim Auftreffen der ersten leichten Druckwelle bei der Explosion selbsttätig anhebe, indem hierdurch der Kammerinhalt in vermehrte Bewegung und Wirbelung geraten und dadurch vollkommen verbrennen soll. Die in Versuchen mit ruhenden Gasgemischen abgeleiteten Verbrennungsgeschwindigkeiten würden nach Holzwarth den Betrieb einer Turbine vollkommen unmöglich machen. In Wahrheit werden Zündgeschwindigkeiten von 60 m/sek und darüber erreicht. Wird jedoch die Zündung nach Schluß der Einlaßventile verspätet eingeleitet, so daß die Ladung sich schon verhältnismäßig mehr beruhigt hat, dann ist die Verbrennung träge, schleichend, unvollkommen. Abb. 1077 stellt das ausgebaute Düsenventil der 500 PS-Ölturbine mit dem Steuerungs-


Abb. 1079.
Verpuffungskammer der 5000 kW-Turbine


Abb. 1081. Kammern und Düsenring der 500 PS-Turbine.

kolben für die Öldrucksteuerung dar; von einer Kühlung desselben ist bei einer so kleinen Ausführung, wie begreiflich, abgesehen worden.

Abb. 1078 veranschaulicht das Laufrad der 500 PS-Turbine mit einem für die vorläufige Bremsung eingebauten Windflügel (da die Dynamo verspätet abgeliefert wurde). Die Außenansicht einer Verbrennungskammer und diejenige des gemeinsamen, zugleich Traggehäuse bildenden Abschlußdeckels zur 5000 kW-Turbine sind in Abb. 1079, 1080 ersichtlich. Abb. 1081 stellt den Zusammenbau der Kammern und Düsenventile der 500 PS-Turbine dar. Man erkennt, daß der Düsenring ein vollkommen zusammenhängendes Ganzes bildet.

Die Gesamtanordnung einer 5000 kW-Einheit mit 1000 Uml./min für das Kraftwerk Muldenstein zeigt Abb. 1082. Holzwarth zieht neuerdings vor, die gesamte Abwärme in der Gebläsegruppe zu verwerten, die als kleine Hilfsmaschine neben der Hauptturbine aufgestellt wird. Anordnung und Raumbedarf einer größeren Anlage von 20000 kW Leistung veranschaulicht Abb. 1083.

Eine Gasturbinenanlage für ein Pumpenwerk von 700 sek. Liter Förderung bei 10 at Förderdruck, 1500 Uml./min ist in Abb. 1084 dargestellt. Der Kondensator der Abwärmegruppe wurde in die Saugleitung eingebaut.

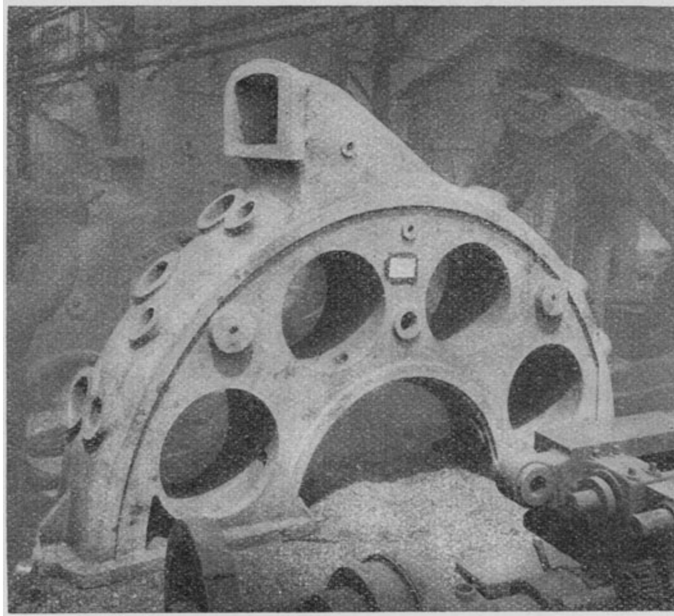


Abb. 1080. Deckel und Traggehäuse zur 5000 kW-Turbine.

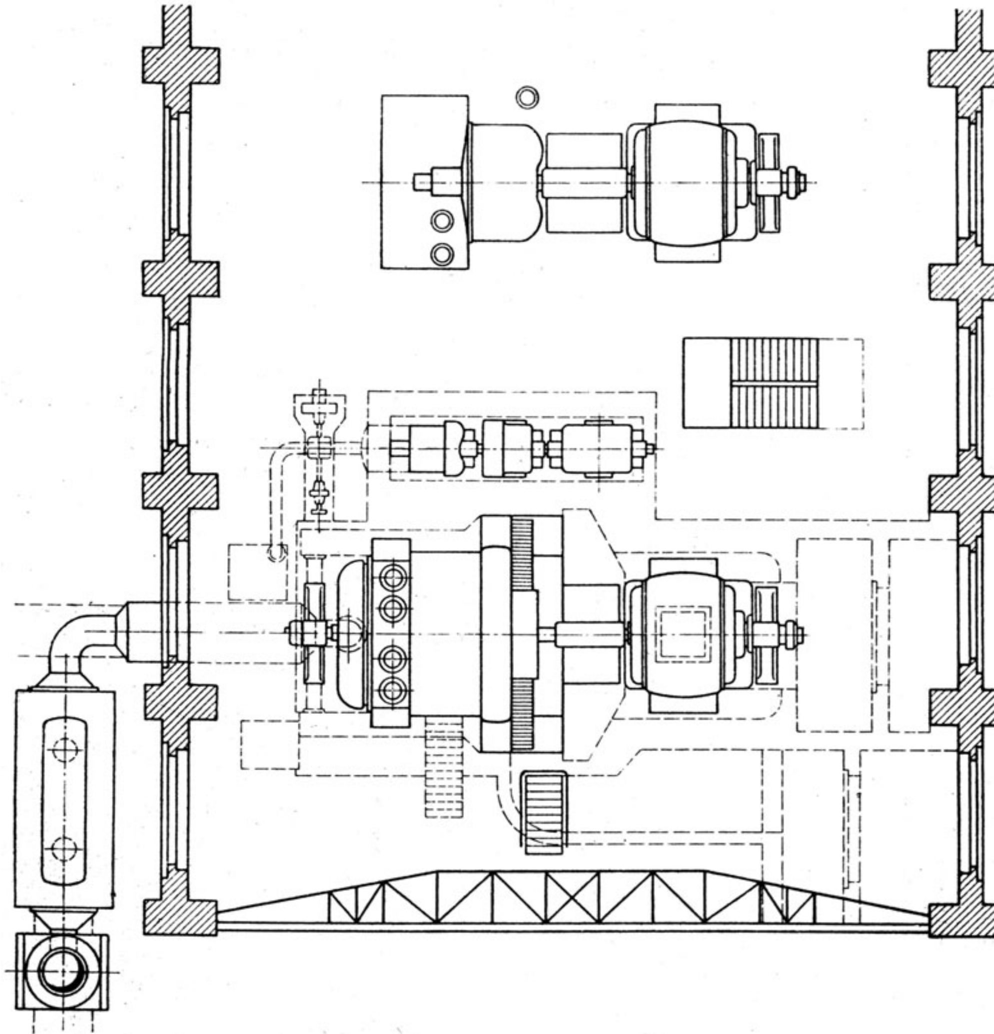


Abb. 1082. Gesamtanlage einer 5000 kW-Einheit.

Zusammenstellung der Gewichte in Tonnen.

Leistung kW		5000	12000	20000
Uml. i. d. Min.		1500	1500	1000
Gewichte:				
Gasturbine	t	190	250	320
Dynamo	t	62	107	145
Gebläse mit Grundplatte	t	21	65	85
Dampfturbine m. Grundpl.	t	10	25	45
Oberflächen-Kondensator	t	10	32	45
Abwärmeverwertung	t	51	120	168
Rohrleitungen	t	30	60	75
Gesamtgewicht	t	377	659	883
Gewicht f. d. Einheit d. Leistung kg/kW	kg	75,4	54,9	44,1
Fundament insgesamt	m³	560	840	1080
Schwerstes Einzelstück	t	20	35	50

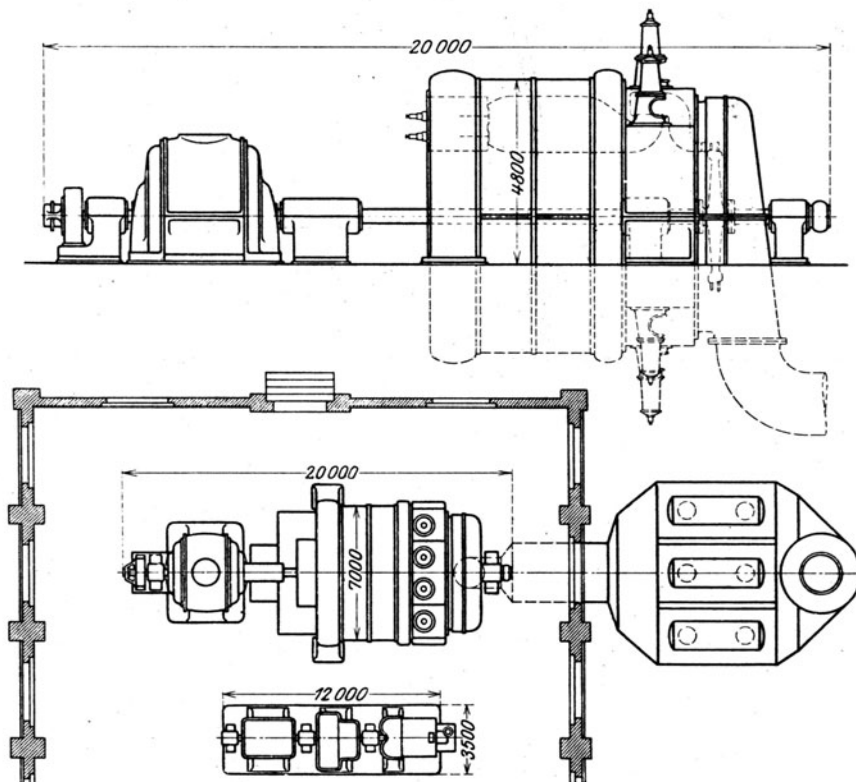


Abb. 1083. Raumbedarf einer 20000 kW-Anlage.

Über Versuchsergebnisse an seiner Turbine hat Holzwarth in der Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1920, S. 197 berichtet. Weitere Einzelheiten können aus der mir zur Verfügung gestellten nachfolgenden Zahlentafel entnommen werden. Auf diese bezieht sich das Zeit-Druck-Schaubild 1085 mit zeitweise stärkeren, auf 14,1 at abs. reichenden Explosiondrücken. Der zeitliche Abstand zweier Verpuffungen ist 1,3 bis 1,5 sek. Der Druckanstieg vor der Zündung bedeutet die Aufladeperiode. Sehr günstig ist die ungemein kurze, nur etwa 0,18 sek betragende Verbrennungs- und Auspuffdauer. Die lange Spüldauer erklärt den hohen Verbrauch an Spülluft, der freilich auch wegen der Schaufelkühlung erforderlich ist. Es ist anzunehmen, daß Holzwarth die schwachgespannte Spülluft einer Vorstufe des Verdichters entnehmen wird, mit entsprechender Steuerung der Spül- und Verbrennungsluft. Durch Vergleich der Verpuffungsdrücke mit den theoretischen Werten in Abschn. 203 kann auf den tatsächlich auftretenden Luftüberschuß geschlossen werden.

Bei den Versuchen wurde zunächst Gas, und nachher, aber noch in Überdeckung mit Gas, zusätzliche Verbrennungsluft eingeblasen. Gas wurde vor Verbrennungsluft geschlossen.

Die zusätzliche Verbrennungsluft wurde der Spülluftleitung entnommen. Der Gasdruck war höher gehalten worden als für die Aufladung allein erforderlich gewesen wäre.

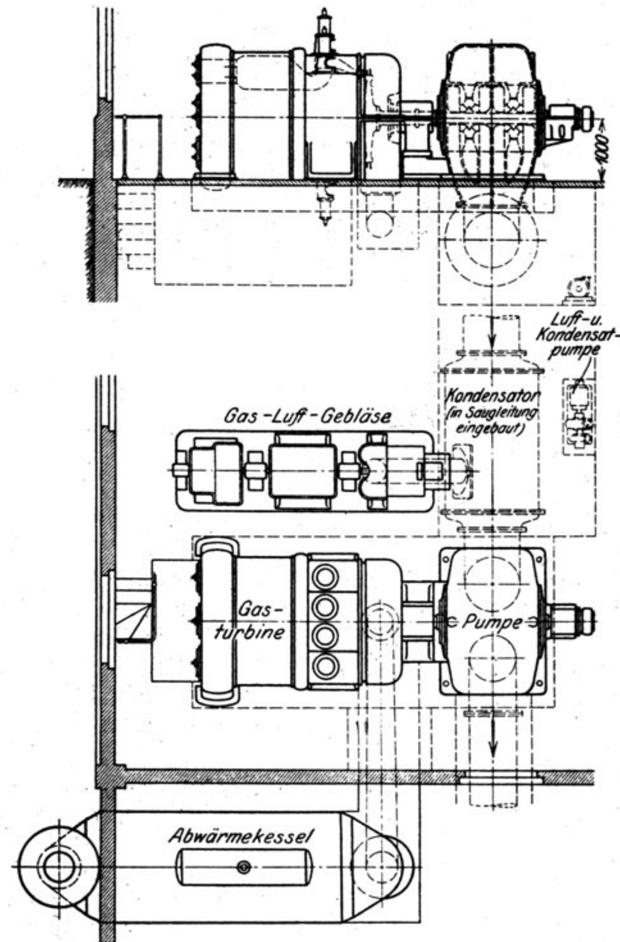


Abb. 1084. Pumpwerk mit Gasturbinenantrieb.

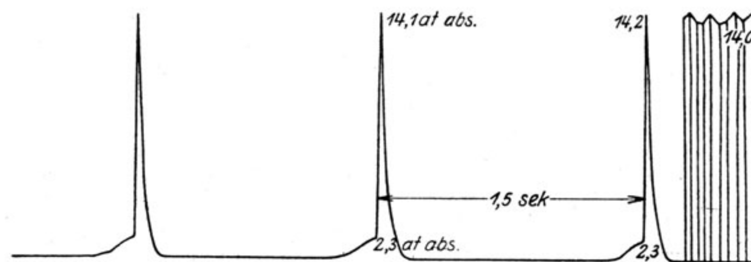


Abb. 1085. Zeit-Druck-Schaubild der 1100 PS-Versuchsturbine.

Versuch Nr. 4 der Eisenbahndirektion Berlin an der Versuchsturbine der Firma Thyssen & Co., A.-G., Mühlheim-Ruhr, Anfang Dezember 1919.

Zugeführte Gasmenge, 0° C 760 mm	cbm/st	630
Unterer Heizwert von 1 cbm Gas, 0° C, 760 mm, kalorimetrisch festgestellt	kcal	3860
Ans Rad abgegebene Leistung	$PS_{Umf.}$	984
Gesamtzahl der Spiele in der Stunde		20000
Gesamtzahl der arbeitenden Kammern		10
Größe der Explosionskammern	Liter	230

Ladedruck p_0 im Mittel	at abs.	2,1
Explosionshöchstdruck p_1 im Mittel	at abs.	11,0
Gegendruck p_2 im Mittel	at abs.	1,06
Mittlere Radumfangsgeschwindigkeit	m/sek	157
Zahl der Laufradkränze		2
Temperatur im Turbinenradraum (Auspuffraum)	°C	430
Verbrauch an Spülluft + zusätzliche Verbrennungsluft, bezogen auf 0° C; 760 mm	cbm rd.	16500
Druck der Spülluft unmittelbar hinter Kompressor	at abs.	1,23
Druck der zusätzlichen Verbrauchsluft hinter Kompressor . .	at abs.	2,3
Druck des Gases hinter Kompressor	at abs.	2,7

Eine Gesamtübersicht bietet die nachfolgende Zahlentafel.

	Versuch Nr. 1	2	3	4
Gasverbrauch auf 0° C 760 mm bezogen . . . . . m³/st	300	400	550	630
Heizwert auf 0° C 760 mm bezogen . . . . kcal/m³	—	—	—	3860
Leistung am Radumfang in . . . . PSUmf.	70	251	724	984
Wärmeverbrauch . . . . kcal. f 1 PSUmf./st	16430	6090	2915	2470
Thermischer Wirkungsgrad bezogen auf Leistung und Radumfang ohne Rücksicht auf Arbeitsgewinn aus der Abwärme und den Kraftverbrauch des Verdichters . . . . v. H.	3,9	10,4	21,8	25,6

Wie man aus der theoretischen Übersicht in Abschn. 203 entnehmen kann, würde die Abwärme in der Tat bei zulässigen Wirkungsgraden hinreichen, um mittels einer Dampfturbine das Gas- und Luftgebläse anzutreiben. **Wie groß der für die Beurteilung des praktischen Erfolges maßgebende Wirkungsgrad der effektiven Leistung ist, läßt sich aus diesen Angaben nicht ableiten.** Um dies zu können, müßte die Ventilationsarbeit des Rades und insbesondere der durch die Spülluft bei ihrer Durch- und Umströmung des Laufrades verursachte Arbeitsverlust bekannt sein. Ein Versuch hierzu ist in Abschn. 206 unternommen.

Zu dieser wichtigen Frage bringt ein Vortrag von Prof. W. Schüle[1]) folgende Aufklärungen. An der Versuchsturbine von 1000 PS Nennleistung wurde durch ein besonderes Verfahren die Leistung am Radumfang ermittelt und ergab bis 1200 PS. Nun gelte es jedoch eine letzte große Schwierigkeit zu überwinden. Es zeigte sich, daß ein sehr hoher Bruchteil der Radumfangsleistung im Radraum in Reibungs- und Wirbelungswärme umgesetzt wurde, und es wurde bald klar, daß die Spülluft, die dem Laufrad mit nur verhältnismäßig geringer Geschwindigkeit zugeführt wurde, an den Verlusten erheblich beteiligt war. Aber auch die Düsen- und Schaufelform, die Gestalt des Radraumes, die Spülzeit und die Belastung der Maschine spielen eine bedeutsame Rolle. Nachdem diese Ursachen bekannt waren, konnte man dazu übergehen, sie zu beseitigen und nach dieser Richtung bewegen sich zurzeit die Versuchsarbeiten.

Ebenfalls im Versuchsstadium befindet sich die Ölturbine. Es ist gelungen, mittels der bei Dieselmotoren üblichen Einblasung durch Druckluftzerstäuber das leichtere Handelsbenzol I vollkommen zu verbrennen, so daß jede Kammer mit Vollbelastung 50—60 Spiele (also mehr als die Versuchsgasturbine) minutlich zu machen vermag; nur müsse die Temperatur der Wandung hoch gehalten werden. Daher sei Hoffnung vorhanden, auch schwerere Benzolkohlenwasserstoffe restlos zu verbrennen. Die Messung der mittleren Temperatur durch ein in die Verbrennungskammer hineinragendes Thermometer hat 470—550° C im Rad- und 430 bis 470° C im Auspuffraum ergeben. Dabei geht von der Verbrennungswärme durch die 15 mm starke Stahlgußwand der Verbrennungskammer nur rund 9 v. H. des Heizwertes in das Kühlwasser über. Die Ausströmdauer beträgt weniger als 0,1 Sek.

In die Gasturbine wurde seither ein einkränziges Rad eingebaut, mit welchem Prof. Schüle thermische Wirkungsgrade am Radumfang bis zu 25 v. H., bezogen auf den Heizwert des verbrannten Gases, festgestellt hat (wobei die Verdichtungsarbeit durch die Abwärmeturbine geleistet werden soll).

Unmittelbar vor dem Abschluß gehen mir endlich von Herrn Holzwarth folgende den wahren Sachverhalt mit dankenswerter Klarheit feststellenden Mitteilungen zu: Der thermo-

[1]) Elektrotechn. Zeitschr. 1921. Heft 29 u. 30.

dynamische Wirkungsgrad (worunter H. offenbar das Verhältnis der Arbeit des theoretischen Verpuffungsprozesses mit nichtumkehrbarer Verbrennung zum Heizwert versteht) beträgt 45 v. H. Der thermische Wirkungsgrad am Umfang bei 2 at abs. Verdichtungsdruck 25 v. H., wird bei 3 at abs. Ladedruck auf 30 v. H. steigerbar sein. **Der effektive Wirkungsgrad, d. h. das Verhältnis der effektiv abgegebenen Arbeit zur zugeführten Wärme beträgt nach bisherigen Versuchen ca. 13 v. H.** Die Mittel zur Beseitigung der Mängel seien bekannt und werden angewendet, so daß man bei großen Einheiten mit einem effektiven Wirkungsgrad von 25 v. H. wird rechnen können.

3. Abgasturbinen für Flugzeugmaschinen.

Zur Verdichtung des Ladegemisches der Flugzeugmaschinen in großer Höhe über dem Erdboden werden bekanntlich Kreiselverdichter angewendet, die man durch Zahnradvorgelege oder durch Gasturbinen antreibt. Rateau, Moß[1]) und Sherbondy[2]) haben diesen Gedanken in Wirklichkeit umgesetzt. Abb. 1086 veranschaulicht die durch die General Electric Co. in Schenectady ausgeführte Turbine von Moß. Die Abgase des Kolbenflugmotors werden, wie ersichtlich, auf möglichst kurzem Wege dem ziemlich massig konstruierten Turbinenlaufrädchen, dessen Durchmesser weniger als 1′ engl. sein soll, zugeführt. Die Drehzahl beträgt 20000 Umdr. i. d. Min. Das Verdichterkreiselrad in einstufiger Ausführung ist mit radial stehenden Schaufeln versehen und drückt die angesaugte Luft in die Saugleitung des Motors. Die Turbine mit Kompressor und Motor wurde am Pikes Peak Summit, einem 4300 m hohen Berggipfel ausprobiert. Nach dem Einbau in ein geeignetes Flugzeug erreichte man in 5500 m Höhe 140 statt 70 Meilen Geschwindigkeit. Es gelang, eine Höhe von 11000 m zu erreichen. Nach den Aufzeichnungen des Höhenmessers würde man auf über 12000 m gelangt sein, wenn der Pilot infolge Versagens des Sauerstoffspenders nicht ohnmächtig geworden wäre, wodurch das Flugzeug bis auf etwa 1000 m Höhe senkrecht abstürzte, jedoch noch aufgerichtet werden konnte.

Ähnlich ist der Motor von Sherbondy, Abb. 1086a. Das Turbinenlaufrad besitzt 150 mm, das Kreiselrädchen 229 mm Durchmesser. Letzteres besteht aus 10 radial gestellten Flügeln; das Turbinenrad hat 72 Schaufeln, die Drehzahl soll bis 31500 gesteigert worden sein, wobei das Kreiselrad 378 m/sek Umfangsgeschwindigkeit erreichte. Das seitliche Spiel des Kreiselrades beträgt 0,6 mm, die Lieferung ist ~ 20 m³/min; die Verdichtung rund 2fach bei 20000′ Höhe. Die theoretische, im Auspuff zur Verfügung stehende Kraft sei 80 PS. Mit 66 v. H. Wirkungsgrad der Turbine und 60 v. H. Wirkungsgrad des Verdichters gelangt man auf 40 v. H Gesamtwirkungsgrad und 32 PS effektive Verdichtungsarbeit.

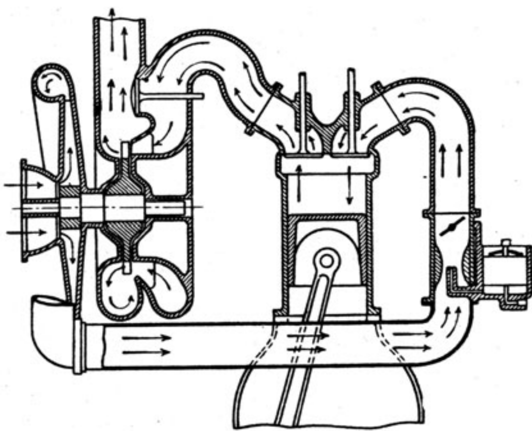


Abb. 1086.
Abgasturbine der General Electric Co.

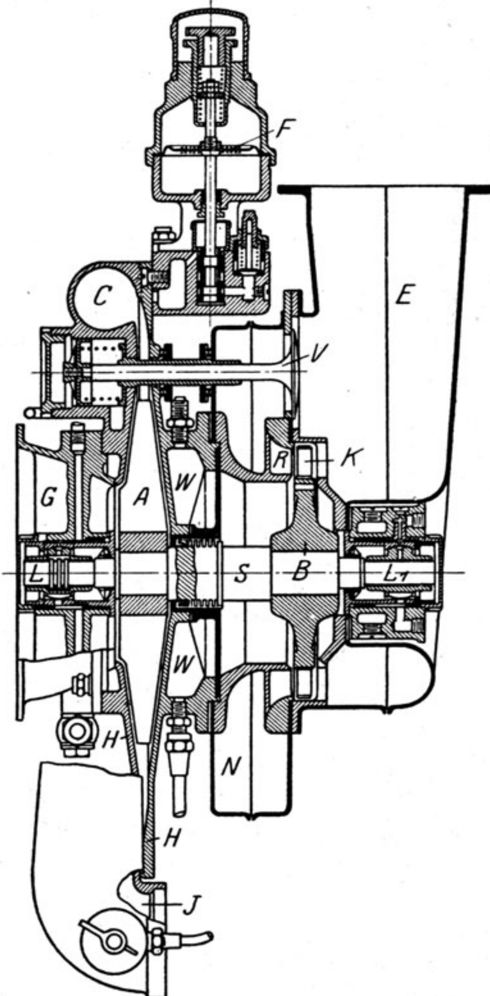


Abb. 1086a.
Abgasturbine von Sherbondy.

[1]) Nach Gas Engine 1920.
[2]) Nach Aerial Age, 1919.

Der Ölverbrauch bei Ladungsverdichtung durch die Turbine nimmt um 10 bis 15 v. H. zu. Da in 9000 m Höhe die Leistung ohne Verdichter auf 50 v. H. zurückgeht, während der Motor mit dem Verdichter an sich 100 v. H. leistet, steigt die effektive Leistung auf 90 v. H.; sie ist also 1,8mal so groß als ohne Verdichter. Man hofft in dieser Höhe Flugzeuggeschwindigkeiten von 320 km/st erreichen zu können. Der Libertymotor selbst besteht aus 2×6 Zylindern in V-Anordnung, unter 45^0 geneigt, mit je 127 mm Bohrung, 178 mm Hub, 1550 bis 1650 Umdr./min., 9,2 bis 9,79 m/sek Kolbengeschwindigkeit, 5,56fachem Raumverhältnis der Verdichtung, 8,15 bis 8,04 kg/cm² mittler. effekt. Arbeitsdruck, 226 bis 228 gr/PS_e-st Benzinverbrauch (ohne Gebläse), rd. 1 kg Gewicht für die effekt. PS. Da 1 kg Benzin rd. 12,8 m³ Luft benötigt, bedeutet die angenommene Lieferung des Gebläses das 1,16fache des theoretischen Bedarfes.

208. Der Kreiselverdichter.

Da die Gasturbine, soweit man bis jetzt übersieht, den Kreiselverdichter als Hilfsmaschine nicht entbehren kann, erscheint es angemessen, auf die Theorie desselben kurz einzutreten, um so mehr als diese auf den gleichen Grundsätzen aufgebaut ist, wie die der Dampfturbine. In der Tat ist der Arbeitsgang des „Turbokompressors" nichts anderes als die Umkehrung des Turbinenprozesses. Im folgenden beschränken wir uns auf die radiale Beaufschlagung, der die axiale Beaufschlagung an praktischer Wichtigkeit weit nachsteht.

Die Theorie der „fadenförmigen" Strömung, die bei der Turbine allen Ansprüchen genügt, führt indessen beim Kreiselverdichter mit seinen weiten Schaufelkanälen auf Unzukömmlichkeiten und sollte durch die „neuere Theorie" nach Abschn. 171 ersetzt werden, also insbesondere auf die Wirkung der „Zirkulation" Rücksicht nehmen. In jenem Abschnitt sind die Grundsätze für den Aufbau einer solchen Theorie allgemein entwickelt worden, die Ausarbeitung im einzelnen würde indes den Rahmen dieses Buches überschreiten. Wir beschränken uns daher im folgenden darauf, die Wirkung der relativen Wirbelströmung und Zirkulation durch den **Mittelwert der Änderung** zu berücksichtigen, die die Wirbelströmung an der **Umfangskomponente** w_u hervorbringt[1]).

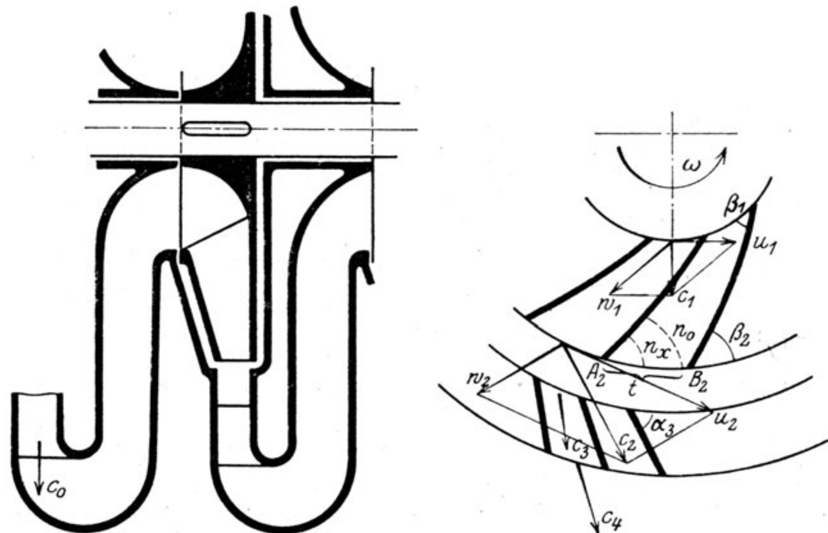


Abb. 1087. Kreiselverdichter.

1. Theorie mit Benützung der „mittleren" Zustände, allein mit Berücksichtigung der relativen Wirbelströmung. Es bezeichne im Einklang mit Abb. 1087.

c_0 die Eintrittsgeschwindigkeit (m/sek) in eine neue Stufe, identisch mit der Austrittsgeschwindigkeit am Diffusor der vorhergehenden Stufe. Für die allererste

[1]) In der Literatur über Kompressoren wird auf die neue Theorie bis jetzt nur im wohldurchdachten Bericht der Mitteilungen von Brown, Boveri u. Cie. 1919, S. 1 u. f., hingewiesen, im übrigen nur soweit die Strömung im Kanal in Frage kommt. Wir greifen im folgenden wiederholt auf diesen Bericht zurück; einige Abweichungen grundsätzlicher Art wird man unschwer feststellen. Im übrigen sei verwiesen auf:

Baer, Wirkungsgrad und Beaufschlagung von Turbokompr. Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1916, S. 245.
Flügel, Neues Verfahren d. Berechnung d. Kreiselverdichters. Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1918, S. 662.
Ostertag, Kolben und Turbokompressoren, Berlin 1919.

Stufe ist c_0 die Geschwindigkeit in der Zuleitung; der ihr entsprechende Druckverlust müßte vom Gefälle abgezogen werden;

c_1 die absolute mittlere Eintrittsgeschwindigkeit in das Rad wird als rein radial vorausgesetzt;

w_1 die Resultierende aus c_1 und $-u_1$;

w_1' w_2' die relativen Geschwindigkeiten bei gleichmäßiger Strömung mit tangentialem Ein- und Austritt, aber ohne Rüksicht auf die Wirbelströmung im Laufrad;

w_2 die mittlere, wirkliche relative Geschwindigkeit am Radaustritt;

c_2 die absolute Geschwindigkeit am Austritt aus dem Laufrade;

c_3 die absolute Geschwindigkeit beim Eintritt in den Diffusor;

c_4 die absolute Austrittsgeschwindigkeit am Austritt aus dem Diffusor;

u_1 u_2 die Umfangsgeschwindigkeit am Eintritt und Austritt des Laufrades;

Δp_{0-1} die (algebraische) Druckzunahme zwischen den Orten, die den Geschwindigkeiten c_0 und c_1 entsprechen;

Δp_{1-2} die Druckzunahme im Rade;

Δp_{2-4} die Druckzunahme zwischen Austrittsquerschnitt des Laufrades und dem Austrittsquerschnitt des Diffusors.

Die Reibungsarbeiten seien:

$$a_{r1} = \zeta_1 \frac{c_1^2}{2g}; \quad a_{r2} = \zeta_2 \frac{w_2^2}{2g}; \quad a_{r3} = \zeta_3 \frac{c_2^2}{2g} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

sie sind auf dieselben Weglängen bezogen, wie die oben aufgezählten Druckunterschiede, enthalten jedoch die Stoßverluste nicht. Die Beiwerte ζ_1 ζ_2 könnten auf Grund der üblichen Reibungsformeln für Kanäle mit veränderlichem Querschnitt eingeschätzt werden. In Wahrheit müssen die Widerstände durch Versuche ermittelt werden, wobei sich für ζ_2 insbesondere der Antrieb des Laufrades ohne Diffusor mit möglichst unbehindertem Austritt eignet. Infolge der weiter unten beschriebenen Ablösungserscheinungen ist nicht zu erwarten, daß ζ_2 von der Liefermenge unabhängig sei. Bei ζ_3 ist auf die vermehrten Verluste beim Umsetzen von kinetischer in potentielle Energie Rücksicht zu nehmen. Zu diesen **normalen** Reibungsarbeiten treten **besondere Stoß-** und **Wirbelungsverluste**, bei Abweichung von der **günstigsten Eintrittsrichtung des Luftstromes** in das Laufrad und in den Diffusor. Der Stoßverlust beim Eintritt ins Laufrad wird offenbar von dem Stoßwinkel und der Größe der Relativgeschwindigkeit w_1 abhängen, ähnlich der im Diffusor. Wir bezeichnen sie mit

$$a_{s1} = \zeta_{s1} \frac{w_1^2}{2g}; \quad a_{s2} = \zeta_{s2} \frac{c_2^2}{2g} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Die Verdichtungsarbeiten $\int v\,dp$ kann man bei kleinen Druckunterschieden durch $v\Delta p$ ausdrücken, wobei v jeweils der Mittelwert für die betreffende Druckstufe ist. Die Beziehungen zwischen den mechanischen Größen drückt man am besten mittels der Gleichungen der kinetischen Energie, diejenigen zwischen den Wärmemengen, die für die Entropiedarstellung benötigt werden, durch die Wärmegleichungen aus. So erhält man für die Strecken von p_0 bis p_1, von p_1 bis p_2, von p_2 bis p_4 die Gleichungen (im Laufrad auf die relative Bewegung und stets auf die Ausdrucksweise „Zunahme der Druckhöhe = Abnahme der kinetischen Energie usw." bezogen):

$$\int_0^1 v\,dp = v_{m1}(p_1 - p_0) = \frac{c_0^2 - c_1^2}{2g} - a_{r1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3a)$$

$$\int_1^2 v\,dp = v_{m2}(p_2 - p_1) = \frac{w_1^2 - w_2^2}{2g} - a_{s1} - a_{r2} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} \quad \ldots \quad (3b)$$

$$\int_2^4 v\,dp = v_{m3}(p_4 - p_2) = \frac{c_2^2 - c_4^2}{2g} - a_{s2} - a_{r3} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3c)$$

Bedeuten q_1, q_2, q_3 die Absolutwerte der für 1 kg auf den gleichen Wegen **entzogenen** Wärmemengen, q_{r1}, q_{r2}, q_{r3}, q_{s1}, q_{s2} die Reibungs- und Stoßverlustwärmen, i_0, i_1, i_2, i_3, i_4

die **Wärmeinhalte**, so lauten die Wärmegleichungen als Integrale von $dq_a + dq_r + dq_s = di - Avdp$.

$$-q_1 + q_{r1} = i_1 - i_0 - \int_0^1 v\,dp \quad \text{(4a)}$$

$$-q_2 + q_{s1} + q_{r2} = i_2 - i_1 - \int_1^2 v\,dp \quad \text{(4b)}$$

$$-q_3 + q_{s2} + q_{r3} = i_4 - i_2 - \int_2^4 v\,dp \quad \text{(4c)}$$

Um die aufgewendete „Stromarbeit“ zu berechnen, sehen wir vorläufig vom Undichtheitsverlust und von der Radreibung ab. Für je 1 kg Verdichtungsmittel, das vom Orte 0 zum Orte 4 gelangt ist, gilt gemäß der Gleichung der Gesamtenergie

$$A L_{\text{strom}} = i_4 - i_0 + A \frac{c_4^2 - c_0^2}{2g} + (q_1 + q_2 + q_3) \quad \text{(5)}$$

Die Außenarbeit stammt lediglich vom Laufrade her, und die von diesem abgegebene Arbeit berechnet sich nach dem Satz vom Antrieb, unabhängig vom Gaszustand, lediglich aus den Geschwindigkeiten als

$$L_{\text{strom}} = \frac{1}{g}(c_{2u} u_2 - c_{u1} u_1) \quad \text{(5a)}$$

Wir setzen die Ausdrücke (5) und (5a) einander gleich, indem wir erstens **rein radialen Zufluß**, d. h. $c_{u1} = 0$ **voraussetzen**, dann nach Summierung der Wärmegleichungen (4) die Änderung des Wärmezustandes $(i_4 - i_0)$ durch die **Verdichtungsarbeiten** ausdrücken. Mit der Bezeichnung

$$L_{\text{verd.}} = \int_0^1 v\,dp + \int_1^2 v\,dp + \int_2^4 v\,dp = \int_0^4 v\,dp \quad \text{(6)}$$

erhält man

$$L_{\text{verd.}} = L_{\text{strom}} - \Sigma(a_r + a_s) + \frac{c_0^2 - c_4^2}{2g} = \frac{c_{u2} u_2}{g} - [\zeta_1 c_1^2 + \zeta_2 w_2^2 + \zeta_3 c_2^2]\frac{1}{2g}$$
$$- [\zeta_{1s} w_1^2 + \zeta_{2s} c_2^2]\frac{1}{2g} + \frac{c_0^2 - c_4^2}{2g} \quad \text{(7)}$$

2. Abweichungen von der „Fadentheorie“. Einfluß der Wirbel- und Zirkulationsströmung.

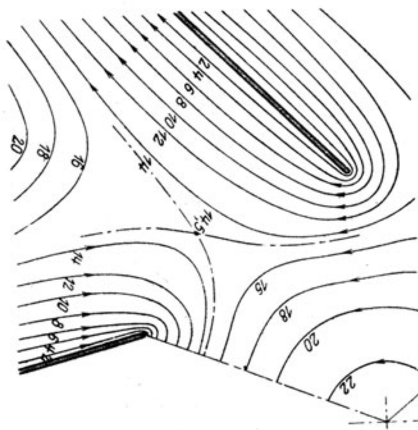


Abb. 1088. Wirbelströmung am Eintritt bei 6 Schaufeln.

Um zu einer Abschätzung der Größenordnung für die Abweichungen gegenüber der Annahme „fadenförmiger“ Strömung zu gelangen, wurden mit einer gespannten Gummimembrane die nachfolgend beschriebenen Bilder der ebenen radialen Strömung aufgenommen[1]).

Abb. 1088 stellt die Stromlinien für die reine Wirbelströmung am Einlauf in das Laufrad dar. Die Schaufelzahl z betrug 6 der Eintrittswinkel $\beta_1 = 45^0$, die Schaufeln waren gerade. In Abb. 1088a ist $z = 12$; $\beta_1 = \beta_2 = 45^0$.

Der Außenrand der Membrane wurde so weit gesenkt, daß an der Außenkante eine wagerechte Berührungsebene entstand, d. h. daß dort die Geschwindigkeiten = Null sind.

Aus den Stromlinien, die gleichen Unterschieden der Stromfunktion entsprechen, wurden nach Abschn. 171 die Geschwindigkeitskomponenten längs des Umfanges

[1]) Für die sorgfältige Durchführung dieser und der folgenden Arbeiten bin ich Herrn Ingenieur Ackeret zu Dank verpflichtet.

abgeleitet. An den inneren Schaufelkanten werden die Geschwindigkeiten unendlich groß, und es ist wichtig die Größenordnung dieses Wachstums festzustellen. Dies wurde grund-

Abb. 1088a. Wirbelströmung verbunden mit Zusatzzirkulation am Austritt.

sätzlich durch die Untersuchungen von Grammel[1]) ermöglicht, der für die Stromfunktion einer Potentialströmung in der Umgebung eines geraden Plattenendes den Ausdruck

$$\psi = 2 C \varrho^{\frac{1}{2}} \sin \vartheta/2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

aufstellt. Darin bedeuten ϱ, ϑ die Polarkoordinaten im Sinne von Abb. 1088b. Daraus folgen die Geschwindigkeitskomponenten in Richtung des Fahrstrahles ϱ und senkrecht dazu:

$$w_\varrho = \frac{C}{\sqrt{\varrho}} \cos \frac{\delta}{2}; \quad w_\varphi = -\frac{C}{\sqrt{\varrho}} \sin \frac{\delta}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8a)$$

Für $\delta = 3\pi/2 - \beta_1$ liefert w_φ die Umfangskomponente w_u im gewöhnlichen Sinn. Obwohl wir es hier mit einer Wirbelströmung zu tun haben, dürfte man Formeln (2) in unmittelbarer Nähe der Kante als angenähert gültig ansehen, da die Biegung der Membrane sich nur unwesentlich ändern würde, wenn man die Belastung d. h. den Wirbel, in unmittelbarer Nähe der Schaufelecke wegließe.

Nun wird indessen die Stromfunktion durch den Biegungspfeil der Membrane nur so lange dargestellt, als die Neigung der Biegungsfläche unendlich klein bleibt. Da in der Nähe der Kante theoretisch eine unendlich große Neigung vorhanden ist, versagt diese nützliche Analogie den Dienst, sobald man „Singularitäten" zahlenmäßig zu untersuchen hat. Es wäre in hohem Maße erwünscht, wenn der Wert von C theoretisch angebbar wäre. Da dies heute nicht der Fall ist, wurden aus dem Stromlinienbild Werte von C graphisch mit Benützung solcher Punkte abgeleitet, in denen die Flächenneigung nicht übermäßig groß ist. Zu diesem Zwecke ist nur erforderlich, für ein bestimmtes ϱ, ϑ in Gl. (8) die Größe von ψ auszumessen, woraus C und damit die Randgeschwindigkeit nach (8a) für $\varrho = 0{,}001$ m, d. h. der Rand der 2 mm dicken Schaufel berechnet werden kann. Da Gl. 8 nur für die unmittelbare Nachbarschaft der Kante gilt, so werden die Werte von C bei weiter abliegenden Punkten ungenau, und die Ergebnisse können nur als ungefähre Schätzungen bewertet werden. Die Umfangskomponenten im Ein- und Austrittszylinder sind in entsprechenden Punkten radial eingetragen.

Abb. 1088b. Strömung um eine Ecke.

Radiale Potentialströmung.

Diese „Durchflußströmung" wurde zunächst an einem aus geraden Schaufeln bestehenden Filter ermittelt, die man sich staffelförmig um gleiche Beträge erhöht aufgestellt denkt und die Membrane so spannt, daß sie im Unendlichen eine gleichförmige wirbelfreie

[1]) Die hydrodynamischen Grundlagen des Fluges 1917, S. 20.

Strömung darstellt. Die konforme Abbildung mit Hilfe der Funktion $Z = ae^z$ oder $Re^{i\Theta} = ae^{x+iy}$ liefert für den Halbmesser und den Winkel die Formel

$$R = ae^x; \qquad \Theta = y \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8\text{b})$$

Sind $v_x v_y$ und $V_x V_y$ die Komponenten der Geschwindigkeiten in entsprechenden Punkten, so ist[1])

$$v_x - iv_y = ae^z(V_x - iV_y)$$

oder in Polarkoordinaten, wenn w und W die Absolutwerte bedeuten,

$$we^{i\vartheta'} = ae^{x+iy} We^{i\Theta'},$$

somit ist

$$W = \frac{w}{ae^x} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8\text{c})$$

Die Richtung von W gegen R, Θ ist dieselbe wie die von w gegen x, y. Im übrigen kann W auch unmittelbar aus der Stromfunktion gewonnen werden.

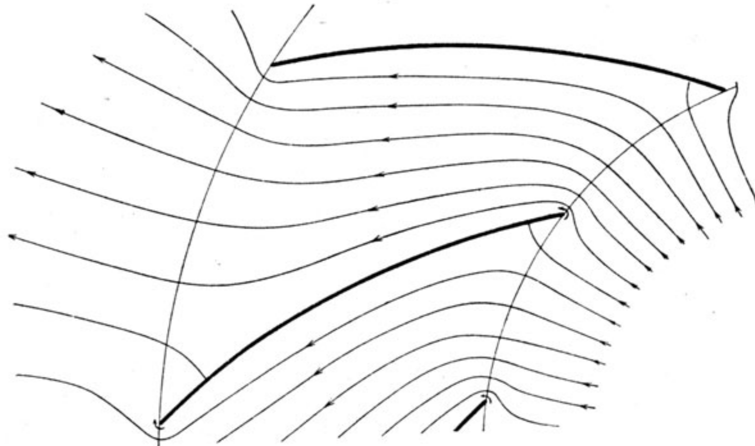


Abb. 1088c. Radiale Potentialströmung.

So entstand das Strombild 1088c für ein Laufrad von 12 Schaufeln mit den ursprünglichen Halbmessern $R_1 = 17$ cm, $R_2 = 31$ cm.

Stoßfreier Eintritt ins Laufrad.

Stoßfreiheit besteht, falls die unendlich (oder sehr) großen Geschwindigkeiten, mit welchen die Kante von der Wirbel- und von der Durchflußströmung im entgegengesetzten Sinne umflossen wird, einander gleich sind.

Die graphische Auswertung der Festwerte C in Gl. (8) führt auf das Verhältnis

$$\frac{C_{wirbel}}{C_{durchfluss}} \cong \frac{1}{4{,}25}.$$

Es muß mithin $\Delta\psi_p$ für die Durchflußströmung 4,25 mal so groß sein, wie $\Delta\psi_w$ für die Wirbelströmung.

Schreiben wir $n = 5000$/min als Drehzahl vor, so ist $\omega = 524$ und der Unterschied der Stromfunktion zwischen den innersten zwei Stromlinien in Abb. 1088a $\Delta\psi_w = b \cdot w$, wo b die in Metern gemessene Breite bedeutet, ergibt sich für eine Schaufelhöhe von 1 m zu $\Delta\psi_w = 0{,}26\ \text{m}^3$.

Es folgt $\Delta\psi_p = 4{,}25\ \Delta\psi_w$ und damit der gesamte sekundlich durchströmende Rauminhalt, da jeder Kanal in 7 Stromfäden geteilt ist, $V_t = 7 \cdot 12 \cdot \Delta\psi_p$. Hieraus berechnet sich der Mittelwert der radialen Zuflußgeschwindigkeit

$$c_{r1} = \frac{V_t}{2\pi r_1} = 87\ \text{m/sek.}$$

---

[1]) Grammel a. a. O. S. 52. Man beachte in den Formeln das — Zeichen.

Die Umfangsgeschwindigkeit am Eintritt ist $u_1 = r \cdot \omega = 89$ m/sek, also wäre die relative Geschwindigkeit w_1 ziemlich genau im Mittel unter 45^0 gerichtet, d. h. der Eintritt wäre auch im Sinne der Fadentheorie stoßfrei. Dieser Übereinstimmung ist mit Rücksicht auf das oben über den Genauigkeitsgrad Gesagte kein besonderes Gewicht beizulegen, um so weniger, als die praktische Beobachtung ergeben haben soll, daß es günstig ist, **im Sinne der Fadentheorie mit einem leichten Stoß auf die hohle Schaufelseite** einzutreten.

Die Abbildungen würden immerhin ermöglichen, sich ein Bild von der Verteilung der Geschwindigkeit über den Eintrittsquerschnitt zu verschaffen. Eine Abschätzung der Umfangskomponente, die von der Wirbelströmung allein stammt, scheint darauf hinzuweisen, daß der Mittelwert dieser Komponente mit der Umfangsgeschwindigkeit ziemlich überein stimmen dürfte

Stoßfreier Austritt der Potentialströmung.

Die Durchflußströmung ist mit einer Zirkulationsströmung zu verbinden, deren Stromverlauf, mittels der Membrane ermittelt, Abb. 1088 d veranschaulicht, in die auch die Umfangskomponenten w_u' eingezeichnet sind.

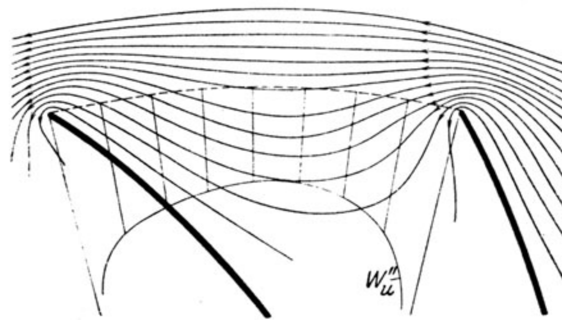


Abb. 1088 d. Potential-Zirkulationsströmung am Austritt.

Die graphische Ausmessung der C-Werte führt hier auf die Bedingung, daß zum Ausgleich der unendlich großen Kantengeschwindigkeiten die zwischen zwei Stromlinien fließende Menge $\Delta\psi_z$ etwa das 0,27fache von $\Delta\psi_p$ (der Durchflußströmung) sein sollte. Dies führt jedoch für die Umfangskomponente der aus der Durchfluß- und Zirkulationsströmung hervorgehenden relativen Austrittsgeschwindigkeit w_2 auf unwahrscheinliche, zu hohe Werte.

Hier ist also die Membranausmessung unzureichend. Von Wichtigkeit ist jedoch, daß die Strömung, wie ersichtlich, in das Innere des Kanales nicht tief eindringt, so daß in der Tat die Wirkung auf die Eintrittsseite vernachlässigbar ist.

Die resultierende relative Strömung

muß auch am Austritt mit dem Wirbel $-\omega$ behaftet sein, also muß man der Potential- und Zirkulationsströmung noch eine entsprechende Wirbelströmung überlagern. Damit der stoßfreie Austritt nicht gestört wird, wird diese für sich mit einer geeigneten Zirkulation verbunden. Dies bedingt, daß die Tangentialebene der gespannten und einer Normalpressung ausgesetzten Membrane an der Schaufelkante wagerecht bleibt, wie bei Abb. 1088 a bereits erläutert worden ist.

Die Umfangskomponenten der Geschwindigkeit dieser Wirbelströmung sind (radial nach einwärts) in die Abbildung eingetragen. Da anzunehmen ist, daß die Potential- und die Zirkulationsströmung eine gleichmäßige Geschwindigkeitsverteilung ergeben, deren Umfangskomponente mit der Projektion von w_2' auf die Tangente übereinstimmt, tritt hier eine neue Umfangsgeschwindigkeit hinzu, die **die Leistungsaufnahme des Rades beeinflusst.** Es ist daher wünschbar, ihren Mittelwert auf angenäherte Weise ohne Kenntnis des vollständigen Strömungsbildes ermitteln zu können. Zu diesem Zwecke wird es im Hinblick auf die geringe Krümmung der die Schaufelspitzen verbindenden Stromlinie (Abb. 1088 a) erlaubt sein, diese als mit dem Umfang zusammenfallend zu denken, d. h. anzunehmen, der Kanal wäre geschlossen, Ferner kann man annehmen, die elastische Membran werde an der Stelle, wo in Abb. 1087 die Spannweite n_x eingezeichnet ist, nach Gl. (13a) in Abschn. 171 gegen den Umfang bei kleinem Winkel β_1 die Neigung $n_x\omega$ aufweisen, die zugleich den Wert der relativen Wirbelungsgeschwindigkeit w_z ergibt. Die Spannweite nimmt bis auf die Kanalbreite n_0 zu, allein in der Ecke bei B_3 muß die Tangente an die Membrane wagerecht stehen, dort ist $w_z = 0$. Die Geschwindigkeit w_z wächst von Null linear gegen die Grenze $w_{z2} = n_0\,\omega$, die sie aber nicht erreicht, sondern auf Null abbiegen muß. Der Mittelwert mag in ungefährer Schätzung auf $\sim w_{z2}/2$ festgesetzt werden. Bedeutet t die Teilung

$= A_2 B_2$, so ist angenähert $n_0 = t \sin \beta_2$, also der **Mittelwert der Wirbelgeschwindigkeit in der Umfangsrichtung**

$$w_{zu} = \frac{t \sin \beta_2}{2} \cdot \omega = \frac{2 \pi r_2 \omega \sin \beta_2}{2 z} = \frac{\pi \sin \beta_2}{z} u_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (8\,\mathrm{d})$$

sofern z die Schaufelzahl bedeutet. Bei der kleinen Schaufelzahl ($= 12$) in Abb. 1088a ist w_{zu} nur etwa das 0,6 fache des Ausdruckes (8d). Als wahre relative Austrittsgeschwindigkeit ist alsdann die Summe aus der Grundgeschwindigkeit $w_2{}'_m$ und der Zusatzgeschwindigkeit w_{zu} anzusetzen.

Der Geschwindigkeitsplan Abb. 1089 wird hiernach wie folgt entworfen. Die Resultierende aus der radialen Geschwindigkeit c_1 und $-u_1$ ist die relative Geschwindigkeit w_1, bezogen

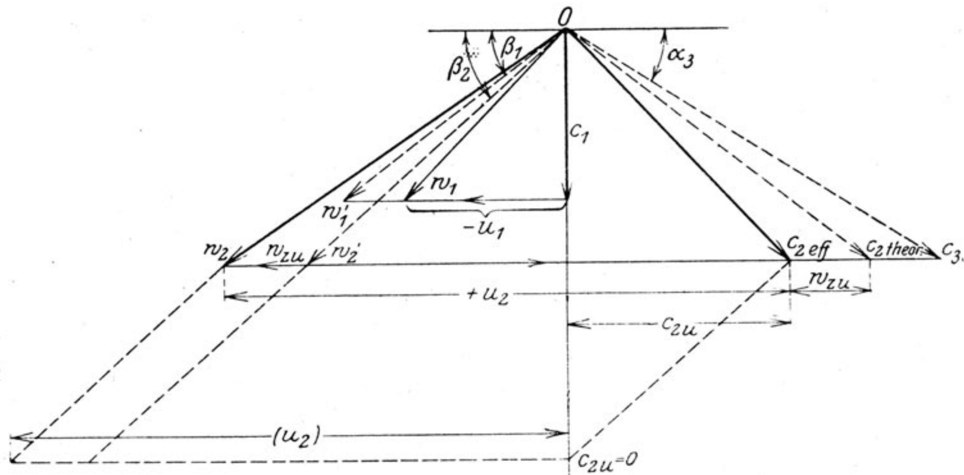


Abb. 1089. Geschwindigkeitsplan.

auf einen Punkt unmittelbar vor dem Laufrad. Ist die Schaufelneigung $= \beta_1$, so wird innerhalb der Schaufel (wenn diese genügend eng und lang gedacht wird) w_1 in die Richtung w_1' umgelenkt, wobei, von Änderungen des spezifischen Rauminhaltes abgesehen, wegen des stetigen Durchflusses die radialen Komponenten der beiden Geschwindigkeiten gleich groß sind. Am Schaufelaustritt sei der Winkel $= \beta_2$, demnach w_2' die Geschwindigkeit, sofern man vom relativen Wirbel absieht. In Wirklichkeit kommt die Komponente w_{zu} hinzu und ergibt w_2 als die wahre mittlere relative Geschwindigkeit, die, mit $+ u_2$ zusammengesetzt, die absolute Geschwindigkeit c_2 liefert. Hätte man w_{zu} nicht beachtet, so hätte man die punktiert eingetragene Geschwindigkeit $c_{2\,\mathrm{th}}$ erhalten. Die **maßgebende Umfangskomponente c_{2u} ist um w_{zu} kleiner als die scheinbare Komponente $c_2{}'_u$.** Dies bedeutet **keinen eigentlichen Energieverlust, wohl aber eine geringere Leistungsaufnahme des Rades, als ohne den relativen Wirbel der Fall wäre.**

Der Spalt zwischen Laufrad und Diffusor wird neuerdings breit gehalten (etwa bis zu $^1/_{10}$ des Raddurchmessers), weil die Erfahrung gezeigt hat, daß man an Wirkungsgrad gewinnt, und vor allem, daß der sonst oft entstehende durchdringende Pfeifenton ausbleibt. Von Reibung abgesehen, muß im Spalt gemäß Abschn. 168, weil keine Arbeit abgegeben wird,

$$c_u r = \text{konst.} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9)$$

sein. Der Durchfluß verlangt $2 \pi r b c_r = G v$, oder, falls b unveränderlich ist,

$$c_r r = \text{konst.} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9\,\mathrm{a})$$

Die Geschwindigkeiten c_u und c_r ändern sich verhältnisgleich, die Stromlinie ist eine logarithmische Spirale. Bei stoßfreiem Eintritt in den Diffusor sollte mithin $\alpha_3 = \alpha_2$ sein. Ist das nicht der Fall, so muß wieder die radiale Komponente von c_3 gleich sein der von c_2, woraus sich die Größe von c_3 ergibt.

Die Durchflußgleichungen lauten bei sinngemäßer Bezeichnung der Querschnitte für das Laufrad

$$G = \frac{F_1 w_1'}{v_1} = \frac{F_2 w_2'}{v_2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (10)$$

Im Spalt geht durch Undichtheit ein Teil der Luft verloren, so daß durch den Diffusor die Menge G' strömt und die Gleichungen

$$G' = \frac{F_3 c_3}{v_3} = \frac{F_4 c_4}{v_4} \quad \ldots \quad (11)$$

gelten. Wie bei der Dampfturbine kann man mit den zum Halbmesser senkrecht gemessenen Querschnitten und den radialen Geschwindigkeiten rechnen, was auf

$$G = \frac{F_{1r} w_1{}'_r}{v_1} = \frac{F_{2r} w_2{}'_r}{v_2}; \quad G' = \frac{F_{3r} c_{3r}}{v_r} = \frac{F_{4r} c_{4r}}{v_4} \quad \ldots \quad (12)$$

führt. Die Rauminhalte erhält man aus dem

3. Entropiebild für den ungekühlten Verdichter, Abb. 1089a, zu dem wir nun übergehen. Darin bedeutet A_0 den Ausgangszustand vor Eintritt in die Saugleitung, $A_0 A_1$ den Druckabfall bis vor das

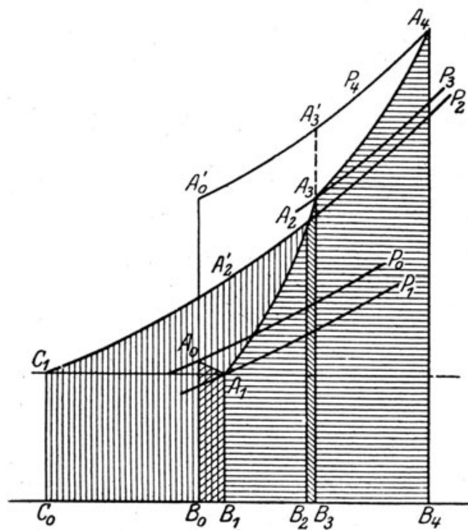


Abb. 1089a. Entropieschaubild (*S-T*-Tafel).

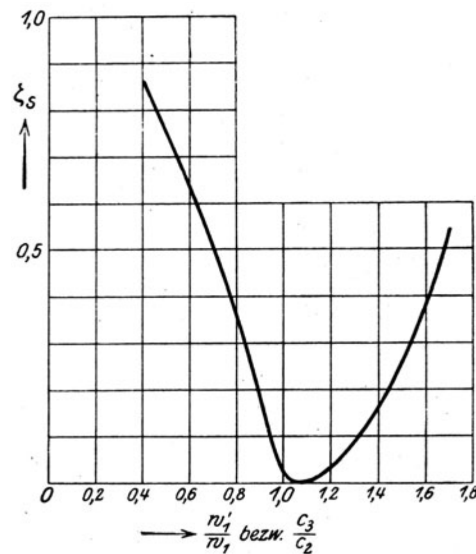


Abb. 1090. Stoßverlustzahlen ζ_s.

Laufrad. Die schräg schraffierte Fläche ist die Reibungswärme q_{r1}. Die Verdichtung im Rade führt von A_1 zu A_2. Die unterhalb $A_1 A_2$ befindliche wagerecht schraffierte Fläche ist die Reibungs- und Stoßwärme $q_{s1} + q_{r2}$. Die eigentliche Verdichtungsarbeit $A\int_1^2 v\,dp$ ist durch die lotrecht schraffierte Fläche gegeben. Die Verluste im Spalt und im Diffusor sind die schräg und die wagerecht schraffierte Fläche unterhalb $A_2 A_3$ bzw. $A_3 A_4$.

Man findet A_1, indem man bei festgelegtem c_0 und c_1 aus Gl. (3a) p_1 berechnet und zugleich die Fläche unter $A_0 A_1$ der Reibungsarbeit gleich macht. Ähnlich ist mit A_2, A_3, A_4 zu verfahren.

4. Widerstandszahlen. An greifbaren Angaben ist derzeit in der Literatur wenig enthalten. Verfasser hatte Gelegenheit, an einem 6stufigen Gebläse Versuche durchzuführen, aus welchen die Größe der Stoßverlustzahl abgeschätzt werden konnte. Sie ist in Abb. 1090 als Abhängige des Verhältnisses $w_1' : w_1$ bzw. $c_3 : c_2$ dargestellt. Es schien anschaulicher, das Größenverhältnis dieser Geschwindigkeiten eher als den „Stoßwinkel" zur Bezugsvariablen zu machen. Der stoßfreie Eintritt entspricht dem Verhältnis 1,0; bei kleinerer Luftmenge wird das Verhältnis < 1. Man erkennt, daß die Stoßzahl einen Mindestwert bei einem etwas über 1 hinausgehendem Verhältnis aufweist und gegen die Verringerung der Luftmenge empfindlicher ist als gegen die Vermehrung.

Was die **Kanalreibung** anbelangt, so ist der **Einfluß der Wirbelströmung** bei kleinen Liefermengen ein erheblicher. Die höchste Zirkulationsgeschwindigkeit am Schaufelrande ist nach Abschn. 171 $w_z = n_0 \omega$, also mit $n_0 = t \sin \beta_2$

$$w_{z\max} = \frac{2\pi \sin \beta_2}{z} u_2 \quad \ldots \quad (13)$$

Setzt man noch etwa $w_2 = u_2/2$, so wird sich mit praktisch üblichen Werten von β_2 und z ein Verhältnis $w_{z\max} : w_{2\,\text{norm.}}$ von bis zu $^1/_3$ ergeben. Geht die Lieferung auf $^1/_3$ herab, so **beginnt** in diesem Fall **die „Ablösung" des Strahles von der treibenden Schaufelseite, weil dort die relative Geschwindigkeit $w_{\text{rel.}} = w_{\text{Durchfluß}} - w_z = 0$ wird.** Bei weiterer Steigerung wird eine **Rückströmung einsetzen,** die sicher mit bedeutenden Verlusten verbunden ist. Da jedoch wegen des „Pumpens" (s. unten) die Lie-

ferung praktisch nie auf $^1/_3$ herabgehen durfte, so ist in normalen Betriebszuständen der Einfluß der Wirbelzirkulation wahrscheinlich kein erheblicher.

Die Stoßzahl im Diffusor begreift auch die Wirbelverluste der unvollständigen Ausfüllung des Kanales bei kleiner Liefermenge in sich. Es kann sich im übrigen bei gleicher Luftmenge **der Strahl einmal „anlegen", das andere Mal nicht, wodurch unstetige Sprünge in der Kennlinie** (s. unten) **auftreten.**

Die mitgeteilten Versuchsergebnisse konnten keine hohe Genauigkeit beanspruchen und sollen mehr nur die Form des Stoßgesetzes in dem besonderen Fall veranschaulichen.

5. Kennlinien und Wirkungsgrade. Die Hauptkennlinie besteht in der Darstellung der tatsächlichen Verdichtungsarbeit $\int_0^4 v\,dp = v_m \Delta p_e$ (oder „Druckhöhe" $\Delta p_e/\gamma_m$) in Abhängigkeit vom in der Zeiteinheit geförderten Rauminhalt. Wird dieser auf den Zustand am Radaustritt bezogen, so ist $V_{2\,sek} = F_2 w_2'$, und die Abszisse kann in geeignetem Maßstab auch als w_2' oder, bei stets gleichem u_2, als w_2'/u_2 aufgefaßt werden. Die theoretische Druckhöhe $v\Delta p_{\text{theor.}}$, die den Annahmen

$$c_0 = c_4 \quad \ldots\ldots (14) \quad \text{und} \quad \zeta_1 = \zeta_2 = \ldots = 0 \quad \ldots\ldots (15)$$

entspricht, ist nach Gl. (7), da man

$$c_{u2}' = c_{u2\,\text{theor.}} - w_{uz} \quad \ldots\ldots (16)$$

setzen muß

$$v_m \Delta p_{\text{theor.}} = \frac{c_{u2\,\text{theor.}}\, u_2}{g} - \frac{w_{uz}\, u_2}{g} \quad \ldots\ldots (17)$$

Darin nimmt bei gleich bleibendem u_2 gemäß Abb. 1089 die Komponente $c_{u2\,\text{theor.}}$ **infolge der zurückgebogenen Schaufel** mit wachsendem w_2 linear gegen Null ab. $c_{u2\,\text{theor.}}\, u_2/g$ wird daher in Abhängigkeit von V gemäß Abb. 1091 durch eine schräge Gerade H^* dargestellt. Von deren Ordinaten ist zunächst der unveränderliche Betrag $w_{uz}\, u_2/g$ abzuziehen und liefert in den Geraden H_0 die theoretische

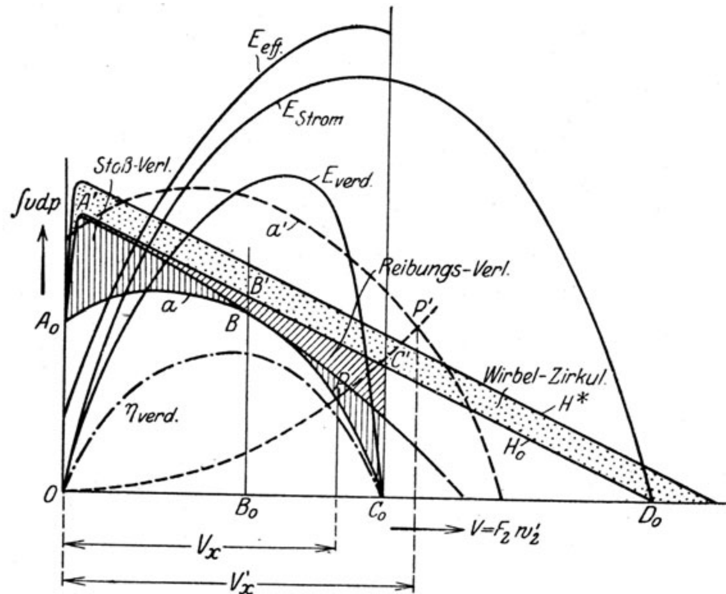


Abb. 1091. Verdichter-Kennlinien.

Arbeit $v_m \Delta p_{\text{theor.}}$ Diese weist bei $V = 0$ eine Unstetigkeit auf. Solange nämlich eine noch so kleine Strömung vorhanden ist, wird $c_{2\,uth} \sim u_2$ und nach Gl. (17) $v\Delta p' = u_2^2/g$; wenn aber die Strömung ganz aufhört, d. h. V streng $= 0$ wird, gibt es keine Ausflußgeschwindigkeit, und man erhält nach Gl. (3 b)

$$v_m(p_4 - p_0) = v_{m2}(p_2 - p_1) = (u_2^2 - u_1^2)/2g,$$

oder mit Vernachlässigung von u_1^2 gegen u_2^2 die Vereinfachung

$$(v\Delta p)_{V=0} \simeq \frac{u_2^2}{2g} \quad \ldots\ldots (18)$$

d. h. halb so groß wie $v\Delta p'$. Dies ist durch das scharfe Umbiegen von A' nach A_0 dargestellt. Um die wirkliche Verdichtungsarbeit zu erhalten, ziehen wir von $v\Delta p_{\text{theor.}}$ zunächst den Reibungsverlust Σa_r, daran anschließend den Stoßverlust Σa_s ab. Da sich in Abb. 1090 ζ_s bei $V = 0$ der Einheit nähert, geht bei kleinem V fast die ganze Energie $c_2^2/2g$ verloren; dann nimmt der Verlust ab, um im Punkte B, für welchen der Verdichter nahezu auf Stoßfreiheit eingestellt ist, zu verschwinden, darüber hinaus

wieder zuzunehmen, so daß die Kennlinie schließlich die Achse schneidet. Durch die relative Lage des frei wählbaren stoßfreien Zustands B kann man die Gestalt der Kennlinie in weitgehendem Maße beeinflussen.

Die **aufgenommene „Verdichtungsleistung“** ist das **Produkt aus der spezifischen Arbeit $v \Delta p_{\text{eff}}$ und dem sekundlichen Gewicht $G = V \cdot \gamma_2$;** sie wird durch die Schaulinie $E_{\text{verd.}}$ in Abb. 1091 dargestellt. Die **theoretische Verdichtungsleistung** entspricht der auf die Erzeugung des Flüssigkeitsstromes aufgewendeten Leistung $G c_{2u} u_2/g = E_{\text{strom}}$ und würde die theoretische Drucksteigerung $\Delta p_{\text{theor.}}$ ergeben. Daraus folgst der gewöhnlich als **„hydraulisch“** bezeichnete **Wirkungsgrad**

$$\eta_{\text{verd.}} = \frac{E_{\text{verd.}}}{E_{\text{strom}}} = \frac{v_m \Delta p_{\text{eff.}}}{v_m \Delta p_{\text{theor.}}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (19)$$

Es dürfte deutlicher sein, von einem **„Wirkungsgrad der Verdichtung“** zu sprechen, im Gegensatz zum **effektiven Wirkungsgrad des ganzen Verdichters,** der das **Verhältnis der nutzbaren Verdichtungsarbeit $G v \Delta p_{\text{eff}}$ zur Gesamtarbeit** bedeutet. Diese ist um die Rad- und Lagerreibung sowie um die durch Undichtheit verlorene Arbeit größer als E_{theor}. Man erhält also

$$\eta_{\text{eff.}} = \frac{E_{\text{verd.}}}{E_{\text{strom}} + E_{\text{reib.}} + E_{\text{undch.}}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (20)$$

Man unterscheidet noch die **Wirkungsgrade** bezogen auf **adiabatische und isothermische Verdichtung,** als Verhältnisse der bei der entsprechenden Verdichtungsart aufzuwendenden Arbeiten zur effektiven Gesamtarbeit; symbolisch angedeutet:

$$\eta_{\text{adiab.}} = \frac{E_{\text{adiab.}}}{E_{\text{gesamt}}}; \quad \eta_{\text{isoth.}} = \frac{E_{\text{isoth.}}}{E_{\text{gesamt}}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (21)$$

Dabei ist bekanntlich

$$E_{\text{ad}} = \frac{G p_0 v_0 k}{k-1}\left[\left(\frac{p_e}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1\right]; \quad E_{\text{isoth.}} = G p_0 v_0 \ln \frac{p_e}{p_0} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (22)$$

wenn $p_0 p_e$ Anfangs- und Enddruck (kg/qm) bedeuten. Der durch Gl. (20) dargestellte tatsächliche Wirkungsgrad wird häufig auf eine **polytropische Zustandsänderung** bezogen, indem man die Zustandslinie $A_0 A_1 A_2 A_4$ durch eine mittlere Polytrope ersetzt. Ist n der Exponent derselben, so ist

$$E_{\text{verd.}} = \frac{G p_0 v_0 n}{n-1}\left[\left(\frac{p_e}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}} - 1\right] \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (23)$$

Der **adiabatische Wirkungsgrad, bezogen auf die innere Leistung, d. h. Stromarbeit und Radreibung,** kann besonders einfach durch die Temperaturen dargestellt werden. Denn es ist $E_{\text{ad.}} = G(i_{\text{ad.}} - i_0)$; und wenn die kinetische Energie am Anfang und Ende vernachlässigbar (bzw. gleich groß) sind, ist die innere Leistung

$$E_i = G(i_e - i_0).$$

Also ist, durch die gleichnamigen Temperaturen ausgedrückt

$$\eta_{\text{inn. ad}} = \frac{E_{\text{ad.}}}{E_i} = \frac{T_{\text{ad.}} - T_0}{T_{\text{ende}} - T_0} \quad \ldots (24)$$

Die Druckziffer bedeutet im Sinne der „Regeln für Leistungsversuche an Ventilatoren und Kompressoren“, aufgestellt vom Verein deutscher Ingenieure, das dimensionale Verhältnis

$$\psi = \frac{\int_0^e v\,dp}{u_2^2/2g} = \frac{L_{\text{verd.}}}{(u_2^2/2g)} \quad \ldots (24\text{a})$$

Zum Vergleich der Ergebnisse verschiedener Verdichter empfiehlt es sich, die Kennlinien mit ψ als Ordinate zu entwerfen.

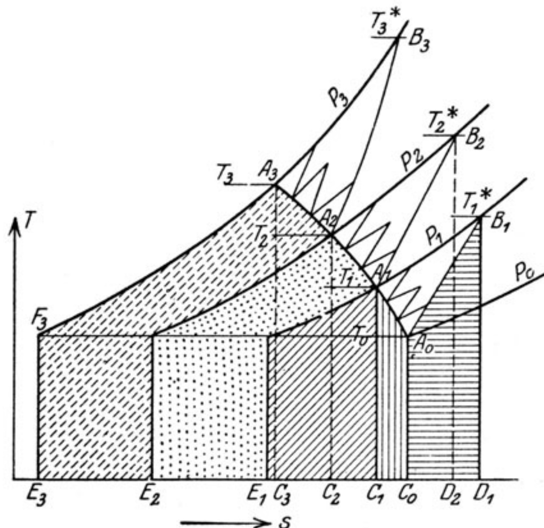


Abb. 1092. Mehrstufige Verdichtung mit Zwischen- oder Stufenkühlung.

6. Mehrstufige Verdichtung mit Gehäuse- oder Zwischenkühlung. Es bedeute in Abb. 1092 Linie $A_0 A_1$ das Entropiebild der einstufigen Verdichtung mit Gehäusekühlung, $A_0 B_1$ dasselbe ohne Kühlung. Es sei L_i die in dieser Stufe aufgewendete innere Arbeit, q_a die im Kühlwasser abgeleitete

Wärme, q_r die innere Reibungswärme für 1 kg. Da die Zustandsänderung nicht umkehrbar ist, muß man sich hüten, voreilig zu folgern, die „abgeleitete" Wärme sei die unterhalb von $A_0 A_1$ lotrecht schraffierte Fläche. Man muß vielmehr genau beachten, daß im Gase die Reibungswärme q_r entstanden, und daß nach außen q_a abgeleitet worden ist, demnach die in der Zustandskurve **„sichtbare Zufuhr" der Unterschied $q_r - q_a$** ist, der gemäß der Wärmegleichung

$$dq = dq_r - dq_a = di - A v\, dp \quad \text{. . . . . . . (25)}$$

Element für Element den Zustand ändert. Da aber in der Abbildung q negativ ist, so schreibt man besser

$$q_a = q_r + q' \quad \text{. . . . . . . (26)}$$

wenn q' den Absolutwert der lotrecht schraffierten Fläche bedeutet. Hätten wir gerade die Reibungswärme abgeleitet, so hätte sich eine Adiabate ergeben; die Verdichtung verläuft links davon, also müssen wir noch stärker kühlen. Das Energiegesetz fordert

$$A L_i = i_2 - i_1 + q_a \quad \text{. . . . . . . (27)}$$

falls die Änderung der kinetischen Energie vernachlässigt wird. Das Integral von (25) liefert

$$\int_1^2 A\, v\, dp = i_2 - i_1 - q,$$

also erhält man mit $q = -q'$

$$A L_i = \int_1^2 A\, v\, dp + q_r \quad \text{oder} \quad \int_1^2 A\, v\, dp = A L_i - q_r \quad \text{. . . . . . . (28)}$$

Die Reibungswärme ist nicht unabhängig von der Art der Zustandsänderung. Läßt man den Querschnitt unverändert, so nimmt bei der Kühlung — gleiches Fördergewicht vorausgesetzt — wegen des kleineren Rauminhaltes die Geschwindigkeit, also auch die Reibungswärme ab. Es wird dann aus doppelten Gründen an Arbeit gespart. **Die Verdichtungsarbeit als Summe der lotrecht und der schief schraffierten Flächen**

$$L_{\text{verd.}} = \int_0^1 v\, dp \quad \text{. . . . . . . (29)}$$

wird kleiner und q_r wird kleiner.

Dieselben Gleichungen gelten für mehrere hintereinander angeordnete Stufen, wie $A_1 A_2$; $A_2 A_3$ usf. Man darf also Gl. (28) auf den ganzen Verdichter ausdehnen. Die Verdichtungsarbeit ist dabei durch die Fläche $A_0 A_1 A_2 A_3 F_3 E_3 C_0$ Abb. 1092 dargestellt. Angenähert die gleiche Zustandslinie gilt auch, wenn man annimmt, daß für die Verdichtung von A_0 auf A_1 eine ganze Anzahl von Zwischenstufen nötig wären, wie durch die Zickzacklinien veranschaulicht wird.

Ohne Gehäuse- aber mit Zwischenkühlung mögen $A_0 B_1$; $A_1 B_2$; $A_2 B_3$ die Verdichtungslinien sein. Die in den beiden Zwischenkühlern aufgenommene Wärme ist

$$q_a = c_p (T_1^* - T_1) + c_p (T_2^* - T_2) \quad \text{. . . . . . . (30)}$$

Die Zunahme des Wärmeinhaltes ist $i^*_3 - i_0 = c_p (T_3^* - T_0)$, und so wird die innere Strömungsarbeit gemäß (27)

$$A L_i = c_p [(T_3^* - T_0) + (T_1^* - T_1) + (T_2^* - T_2)] \quad \text{. . . . . . . (31)}$$

Der innere Wirkungsgrad ist in allen Fällen

$$\eta_i = \frac{L_{\text{verd.}}}{L_i} \quad \text{. . . . . . . (32)}$$

Man erhält die Strömungsarbeit durch Abzug der Radreibung und des Undichtheitsverlustes von L_i. Die effektiv benötigte Arbeit ist die Summe von L_i und der Lagerreibung.

Die **Kennlinie des mehrstufigen Verdichters** entsteht durch Summierung der Anteile $v \Delta p$ in allen Stufen, die zum gleichen **Fördergewicht** gehören. Man sollte daher als Abszisse das sekundliche Gewicht wählen. Die Kennlinie wird die in Abb. 1091 dargestellte Form besitzen. Der Höchstwert des Wirkungsgrades tritt im allgemeinen an der Stelle stoßfreien Eintrittes, bei B auf.

Die Strömungsarbeit ist $= \Sigma c_{2u} u_2 / g$; bei festen Schaufelwinkeln ist $c_{2u} = k u_2$, und es wird $L_{\text{str.}} = (\Sigma k/g) u_2^2$. Die Reibungsverluste sind den Quadraten der Strömungsgeschwindigkeit und diese u_2^2 verhältnisgleich, also wird auch $L_{\text{verd.}} = \text{konst.}\, u_2^2$. **Bei ähnlich bleibenden Geschwindigkeitsdreiecken ändert sich der Wirkungsgrad der Verdichtung nicht und $\int_0^e v\, dp$ nimmt mit dem Quadrat der Umfangsgeschwindigkeit zu.** Die geförderte Menge wächst im einfachen Verhältnis mit u_2. Daraus ergibt sich eine einfache Konstruktion der Kennlinie a' zur Drehzahl n', wenn sie für die Drehzahl n bekannt ist. Man zeichnet die durch einen beliebigen Punkt P von a in Abb. 1091 vom Koordinatenanfang ausgehende Parabel. Macht man $V_x' = V_x n'/n$, so schneidet die Ordinate im Endpunkt von V_x' den neuen Wert der Druckhöhe aus. Die neue Kennlinie ist in der Abbildung (unmaßstäblich) eingepunktiert.

Von Wichtigkeit ist ferner folgendes **Ähnlichkeitsgesetz,** das sich auf die Veränderung des Anfangsdruckes bezieht. Sind alle Strömungsgeschwindigkeiten gleich groß, so wird (bei gleicher Drehzahl) gemäß Gl. (18) auch $\int_0^e v\,dp$ gleich bleiben. Mit der Polytrope als Zustandslinie wird also die Gleichheit

$$\frac{p_0 v_0 n}{n-1}\left[\left(\frac{p_e}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}}-1\right]=\frac{p_0' v_0' n}{n-1}\left[\left(\frac{p_e'}{p_0'}\right)^{\frac{n-1}{n}}-1\right] \quad \text{(33)}$$

bestehen. Der Exponent n ist in beiden Fällen gleich, weil die Reibungswärmen gleich sind. Hieraus folgt

$$\frac{p_e'}{p_0'}=\frac{p_e}{p_0} \quad \text{(34)}$$

sofern man dafür sorgt, daß $p_0 v_0 = p_0' v_0'$ oder $T_0 = T_0'$ werde. **Dies findet bei einer Drosselung in der Saugleitung statt.** Die Gleichheit der Strömungsgeschwindigkeiten fordert $G v_0 = F_0 c_0 = G' v_0$; oder $V_0 = V_0'$, d. h. der angesaugte Rauminhalt auf den Drosseldruck p_0' bezogen, ist gleich wie ohne Drosselung. Bezogen auf den Zustand vor der Drosselung ist der Rauminhalt

$$V_0^* = V_0' \cdot \frac{p_0'}{p_0} = V_0 \frac{p_0'}{p} \quad \text{oder} \quad \frac{V_0^*}{V_0} = \frac{p_0'}{p_0} = p \quad \text{(35)}$$

Aus (34) und (35) folgt, daß, **wenn wir die absoluten Drücke p_e und p_e' als Abhängige von V_0, bzw. V_0^* auftragen, entsprechende Punkte der beiden neuen Kennlinien auf Strahlen durch den Anfangspunkt liegen und diese im Verhältnis $p_0' : p_0$ teilen.**

7. Das Pumpen und seine Verhütung. Eine Erscheinung, die als unvermutete Störung den Konstrukteuren der Kreiselverdichter im Anfang unendlich viele Sorgen bereitete, ist das „Pumpen", d. h. ein plötzlich einsetzendes periodisches Zurückfluten der Druckluft durch den Verdichter hindurch ins Freie. Der Anprall des der Drehung entgegenwirkenden Strahles auf die Schaufeln war in mehreren Fällen so stark, daß die Schaufeln verbogen, ja zerbrochen wurden und während der Förderperiode des Pumpens in Stücken mit der Druckluft hinausflogen. Der Grund des Pumpens ist die **Unstabilität des dynamischen Gleichgewichts auf dem ansteigenden Ast der Kennlinie.** Der Vorgang spielt sich wie folgt ab. Es werde der Verdichter mit leerem Druckbehälter angelassen. Der Enddruck wird mit steigender Drehzahl gemäß einer Parabel b, Abb. 1093 wachsen, bis man in A den normalen Betriebszustand erreicht hat. Wird auf gleichbleibende Drehzahl geregelt, so nähert sich unter abnehmender Lieferung der Zustand dem Punkte A_m. Hier möge sich Gleichgewicht eingestellt haben. Nun soll plötzlich der Luftverbrauch auf den Betrag $V_x < V_m$ abnehmen. Infolge des eintretenden leichten Staues wird die Luftströmung gehemmt und die Lieferung nimmt ab. Sie kann aber nicht bei V_x stehen bleiben, da bei dieser Menge der erzeugbare Druck $p_x < p_m$ ist. Also sinkt die Lieferung bis auf Null zurück, und der Inhalt der Druckleitung entleert sich mit dem anfänglichen Überdruck $p_m - p_a$ in die Saugleitung. Ist p_a erreicht, so beginnt (infolge der inzwischen eingetretenen leichten Beschleunigung der Maschine) die Lieferung von neuem, und wächst fortwährend, da, wenn V_x erreicht ist, der erzeugbare Druck $p_x > p_a$ wäre, so daß die Lieferung unter ungemein rascher Beschleunigung der Luftsäule in außerordentlich kurzer Zeit, während welcher $p = p_a$ bleibt, bis auf V_b mit dem Zustand B wächst. Der Regler stellt die erforderliche höhere Leistung ein, und so wird die Druckleitung angefüllt, so daß unter abnehmender Lieferung wieder A_m erreicht wird, von wo ab sich das Spiel wiederholt. **Ein Betrieb innerhalb des labilen Pumpbereiches $A_0 A_m$ ist wegen der ungünstigen Beanspruchung der Maschine unratsam und unwirtschaftlich.**

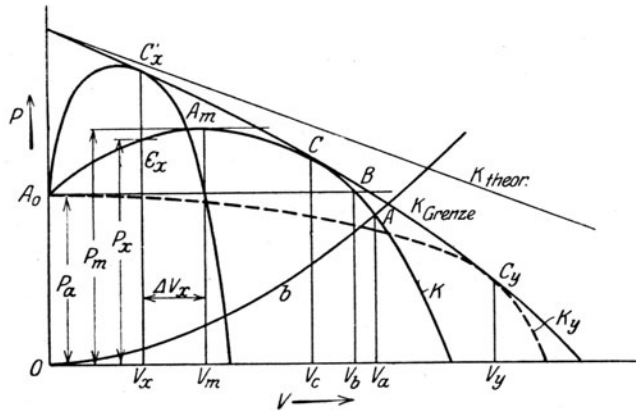


Abb. 1093. Das „Pumpen" und seine Verhütung.

Die **Abhilfe** wird meist durch das sogenannte **Abblaseventil** erreicht, welches, durch die Liefermenge beeinflußt, eine Verbindung zwischen Druck- und Saugleitung herstellt, sobald die Lieferung der Maschine die Pumpgrenze unterschreitet. Die Eröffnung muß so bemessen werden, daß gerade die bis zur Pumpgrenze fehlende Menge abgeblasen wird; d. h. wenn V_x die Nutzlieferung in Abb. 1093 ist, die Menge ΔV_x. Ein anderes Mittel mit etwas besserem Wirkungsgrad ist die **Saugdrosselung,** wodurch für jede unter V_m gelegene Lieferungsmenge eine neue Kennlinie mit tiefer liegendem Scheitelpunkt zur Geltung kommt, so daß mit etwas herabgesetztem Druck stabile Lieferung bis auf Null herab möglich ist. Die beste Abhilfe bestünde in der Regelung des Diffusoreintrittes nach Querschnitt und Winkel auf stets stoßfreien Eintritt. Bedeutet in Abb. 1093 $K_{\text{theor.}}$ die theoretische Drucklinie; K_{grenze} diejenige die nach Abzug der mit V^2 wachsenden Reibung übrig bleibt, so liegt der günstigste Betriebszustand in

der Nähe des Berührungspunktes der wirklichen Drucklinie K mit K_{grenze}. Durch Verkleinerung der Diffusorweite und der Schaufelneigung kann man die Stoßfreiheit bei der Liefermenge V_x einstellen, wodurch sich die steile Drucklinie ergibt, deren Scheitel links vom Berührungspunkt C_x gelegen ist, also **pumpenfreien Betrieb mit wesentlich besserem Wirkungsgrad als vorhin ermöglicht.** Wie oben bemerkt, kann freilich bei kleinen Liefermengen die **Strahlablösung im Laufrad als neue Verlustquelle** hinzutreten. Verlegt man den stoßfreien Eintritt weit hinaus nach C_y, so kann übrigens eine stetig fallende Drucklinie K_y erzielt werden, die überall pumpenfrei ist, aber offenbar unwirtschaftlich arbeitet.

In grundsätzlich anderer Art geht die Allgemeine Elektrizitätsgesellschaft gemäß ihrem D.R.P. Nr. 310586 und 322348 vom Jahr 1915 und 1918 vor. Es wird unmittelbar an den Verdichter eine verengte Rohrleitung von bestimmter Länge angeschlossen, die während der Anlaufperiode des Pumpens erhöhten Trägheitswiderstand ausübt und im Verdichter die Frequenz des Pumpens erhöht. Die Bremsleitung wird rechnerisch so bemessen, daß die Druckschwankungen im Verdichter und in der Druckleitung derart zu einer Interferenz kommen, daß keine praktisch bemerkbare Schwankung entsteht.

Was die **Regelung und Konstruktion** der Kreiselverdichter anbelangt, muß auf die angegebene Literatur verwiesen werden.

8. Über die erzielten **Wirkungsgrade** geben die nachfolgend mitgeteilten **Kennlinien** Auskunft. Abb. 1094 bezieht sich auf ein 2stufiges Spülluftgebläse von Brown, Boveri & Cie. zu einem Dieselmotor, mit 300 m³/Min. Ansaugevolumen, 1,3fachem Druckverhältnis,

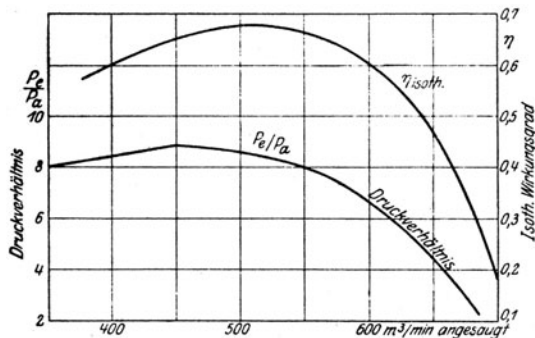


Abb. 1094.
Kennlinien für zweistufiges Spülgebläse.

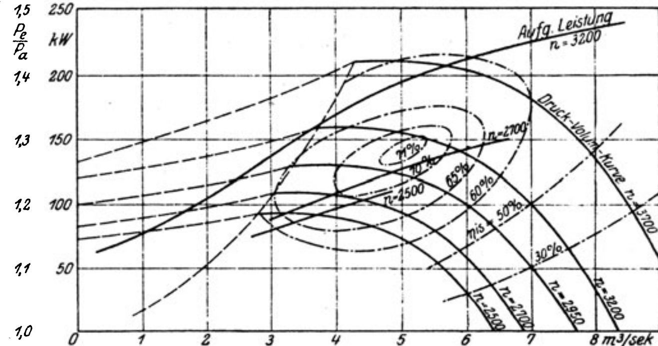


Abb. 1095.
Kennlinien für einen 11-stufigen Kompressor.

3200 Umdr./min. 195 kW aufgenommener Leistung. Die eingeschriebenen Wirkungsgrade beziehen sich auf isothermische Verdichtung. Der höchste Punkt der Wirkungsgradkurve erreicht 71 v. H. Ein einstufiges Gebläse gleicher Art für 480 m³/min. Lieferung weist bei 3400 bis 3800 Umdr./min. bis zu 78 v. H. isotherm. Wirkungsgrad auf.

Abb. 1095 bezieht sich auf einen Kompressor für 550 m³/min. Ansaugevolumen 8 at abs. Druck bei 3550 Umdr./min. Er besteht aus 11 Rädern mit Kühlung in 3 Stufen durch je 2 parallel geschaltete Außenkühler. Der Knick in der Druckkurve deutet den Beginn des Pumpens an.

Die Allgem. Elektrizitätsgesellschaft hat an einem mittels Dampfturbine angetriebenem Verdichter großer Leistung folgende Ergebnisse festgestellt:

Verdichter			
Drehzahl i. d. Min.	2940	Endtemperaturen der Luft °C	100,4
Minutlich angesaugte Luftmenge bezogen auf 0,83 at Anfangsdruck und 35° C m³/min	1460	Turbine:	
		Gemessene Kondensatmenge kg/st	37485
		Anfangsdruck at abs.	14
Enddruck der Luft at abs.	9,75	Anfangstemperatur °C	330
Verdichtungsverhältnis	11,74	Kühlwassertemperatur °C	25
Stündl. Kühlwassermenge m³/st	401,4	Kühlwassermenge	50fach
Eintrittstemperatur des Kühlwassers °C	18,06		

Der zugehörige Verdichter Abb. 1096 ist dreigehäusig; die Dampfturbine ist an die Niederdruckstufe angeschlossen, welche wegen der großen Luftmenge doppelseitig saugend ausgeführt ist. Die auf etwa 100° C erhitzte Luft wird im ersten Zwischenkühler auf 30° C abgekühlt, ähnlich im 2. Zwischenkühler. Die noch außerdem angebrachte Gehäusekühlung wird bei neueren Ausführungen nicht mehr verwendet. Der Verdichter bildet einen Teil der Anlagen der Victoria Falls and Transvaal Power Cy., die zum Betriebe ihrer Minen über eine Gesamtleistung von rd. 84000 PS in Druckluft verfügt.

Über die zu erwartenden Ergebnisse sehr großer, bislang nicht ausgeführter Verdichter wie sie für Großgasturbinen in Betracht kommen würden, teilt mir die A.-G. Brown, Boveri & Cie. folgendes mit:

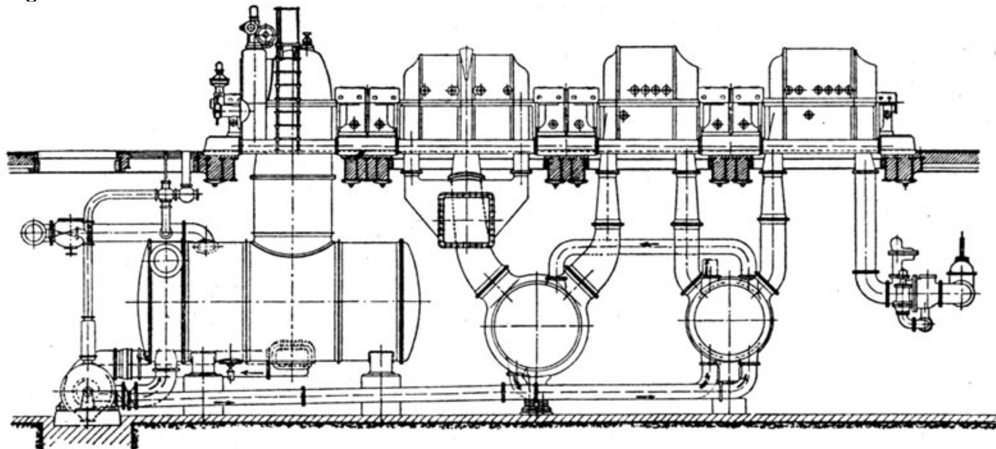


Abb. 1096. Verdichter für 1460 m³/min bei 11,74fachem Druckverhältnis, ausgeführt von der Allgemeinen Elektrizitäts-Gesellschaft.

Verdichtungsdruck at abs.		8		12		20	
A. Lieferung	m³/st			20000			
Drehzahl	i. d. Min.	3000	4000	3000	4000	3000	4000
Isotherm. Wirkungsgrad	v. H.	67	68	66	67	66	67
kW-Aufnahme	kW	1690	1665	2040	2010	2470	2430
B. Lieferung	m³/st			100000			
Drehzahl	i. d. Min.	3000		3000		3000	
Isotherm. Wirkungsgrad	v. H.	70		69		69	
kW-Aufnahmen	kW	8100		9800		11800	
C. Lieferung	m³/st			500000			
Drehzahl	i. d. Min.	2000		2000		2000	
Isotherm. Wirkungsgrad	v. H.	72		71		71	
kW-Aufnahme	kW	39400		47500		58000	

Für die Gruppe A sind die Zwischenkühlgehäuse angegossen, für Gruppe B, C getrennt (im Keller) aufgestellt. Für C müßte 2- bis 3gehäusige Ausführung in Aussicht genommen werden. Der Fortschritt in der Erkenntnis der inneren Vorgänge wird, wie die Firma hofft, den Wirkungsgrad in Bälde um

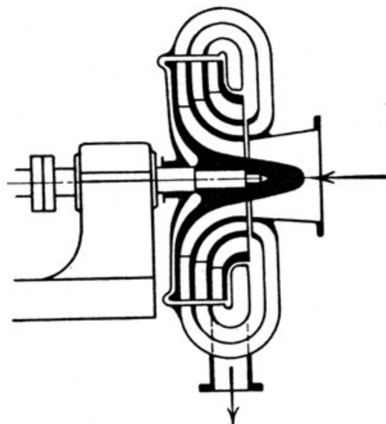


Abb. 1097. Verdichter mit mehrstufigen Verbundrädern.

3—5 v. H. zu erhöhen gestatten. Als weiteres Mittel des Fortschrittes wird eine Ausführung nach Abb. 1097 ins Auge gefaßt, wobei gewissermaßen mehrere Laufräder zusammengelegt und hintereinandergeschaltet werden, so daß die äußere Radreibung von 6 auf 2 Kreisflächen eingeschränkt wird. Diese Anordnung dürfte um so mehr auf Erfolg zählen können, je höher der Verdichtungsdruck ist.

Anhang.

XII. Die Aussichten der Wärmekraftmaschine.

209. Die höchstmögliche Arbeitsausbeute auf Grund des II. Wärmesatzes.

Es sei eine bestimmte Menge Brennstoff oder natürliche Wärme in Gestalt einer warmen Quelle gegeben, und es seien dem Ingenieur, der hieraus in einer Wärmekraftmaschine Arbeit gewinnen will, **unbeschränkte** Mittel, ja die Möglichkeit geboten, reibungsfreie Maschinen zu bauen. Wie groß ist der Höchstbetrag der Ausbeute, die erreichbar ist?

Die Antwort hierauf erteilt der II. Wärmesatz, und zwar am genauesten in der Form des Grundsatzes von der **Vermehrung der Entropie,** der wie folgt lautet:

Die Summe der Entropien aller an irgendeinem Vorgang beteiligten Körper ist am Ende des Vorganges größer als zu Beginn desselben. Nur im Idealfalle rein umkehrbarer Vorgänge bleibt die Entropiesumme unverändert.

Es ist mithin unmöglich, die Entropie eines vollkommen isolierten Systems durch bloße innere Vorgänge zu verkleinern. Wichtig ist die Forderung, daß alle am Vorgang beteiligten Körper berücksichtigt werden müssen. Es genügt daher nicht, die Zustände des Arbeitskörpers (Dampf, Gas) zu beachten, man muß auch die Entropien der Behälter, die die Wärme lieferten bzw. aufnahmen (oder der Kohle und des Sauerstoffes, durch deren Verbindung sie entstand) und der „Umgebung" in die Summe einbegreifen.

Herleitung aus dem Perpetuum mobile II. Art unter Einführung der nicht umkehrbaren Vorgänge.

Wir stellen uns Vorgänge beliebiger Art, die insbesondere **auch chemischer Art** und ungeschlossen sein dürfen, vor und greifen auf die im Abschn. 5 betrachteten zwei Carnotschen Prozesse zurück Der rechtsläufige derselben sei mit einer nicht umkehrbaren Zustandsänderung verbunden, die u. a. darin bestehen kann, daß die Temperatur des Körpers nicht mit der des Behälters übereinstimmt. Daher bedeuten für das Folgende T_1, T_2 **ausdrücklich die Temperaturen der Behälter.** Der linksläufige Prozeß aber werde umkehrbar und so geführt, daß die vom ersten geleistete Arbeit gerade aufgezehrt wird. Nun ist der Begriff eines nicht umkehrbaren Vorganges der, daß seine Folgen **durch kein uns zu Gebote stehendes Mittel vollständig,** d. h. **so aufgehoben werden können,** daß in keinem anderen Körper eine Zustandsänderung zurückbliebe. Unter dieser Voraussetzung kann die dem wärmeren Behälter durch unsere Kreisprozesse entnommene Wärme $Q_1 - Q_1'$ nur positiv sein, denn wäre sie Null, so hätten wir zum Schlusse genau denselben Zustand aller beteiligten Körper wie zu Beginn, wir hätten also die nicht umkehrbare Änderung des ersten Prozesses aufgehoben, was der Voraussetzung widerspricht. Wäre aber $Q_1 - Q_1' < 0$, so würde man ohne Arbeitsaufwand die Wärmemenge $Q_1' - Q_1$ aus dem kälteren Behälter in den wärmeren hinaufgeschafft haben, könnte dieselbe von hier in eine geeignete Maschine leiten und würde ein Perpetuum mobile zweiter Art erhalten, was unmöglich ist. Es muß daher

$$Q_1 - Q_1' > 0 \quad \text{und gleichzeitig} \quad Q_2 - Q_2' > 0$$

sein. Wegen der Gleichheit der Arbeiten ist aber $Q_1 - Q_2 = Q_1' - Q_2'$, also wird $Q_1 = Q_1' + \Delta$; $Q_2 = Q_2' + \Delta$ sein, wo Δ eine positive Größe bedeutet.

Für den umkehrbaren, d. h. den linksläufigen Kreisprozeß war

$$\frac{Q_1'}{T_1} - \frac{Q_2'}{T_2} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

somit erhalten wir, da $T_1 > T_2$ ist

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = \Delta\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) < 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Durch dieselben Überlegungen, die im Abschn. 5 gemacht worden sind, gelangt man bei einem beliebigen Kreisprozeß zur Formel

$$\oint \frac{dQ}{T} < 0 \quad \ldots\ldots (3)$$

wobei jedoch, wie wir nochmals betonen, T die Temperatur der Behälter ist.

Es sei nun in der früheren Abb. 6 ein **nicht geschlossener Prozeß** zwischen den Zuständen A und B **mit nicht umkehrbaren Vorgängen** im Arbeitskörper, aber nur umkehrbaren Änderungen der Wärmebehälter, der über die Bahn C verläuft, gegeben. Wir machen den Prozeß zu einem geschlossenen durch Anfügen der über C' laufenden und **in allen Teilen umkehrbaren** Zustandsänderung von B nach A. Im Integral von Clausius wollen wir die Summation zuerst von A nach B über den Zweig C, dann zurück von B nach A über C' ausführen; letztere Summe soll dann mit dem negativen Wert eingesetzt werden, indem man die Richtung des Prozesses umkehrt. So erhält man

$$\oint \frac{dQ}{T} = \int\limits_{\substack{A \\ \text{über } C}}^{B} \frac{dQ}{T} + \int\limits_{\substack{B \\ \text{über } C'}}^{A} \frac{dQ}{T} = \int\limits_{\substack{A \\ \text{über } C}}^{B} \frac{dQ}{T} - \int\limits_{\substack{A \\ \text{über } C'}}^{B} \frac{dQ}{T} < 0 \quad \ldots\ldots (4)$$

Es sei S_A, S_B die Entropie des Arbeitskörpers in A bzw. B; ebenso S'_A, S'_B der Anfangs- und Endwert der Entropie der Behälter, die während der gegebenen Zustandsänderung von A bis B (über C) mit dem Körper in Verbindung standen. Dann ist die **Zunahme der Entropie des Körpers** definiert durch das Integral über den **umkehrbaren** Zweig, d. h. C', der eben nur zu diesem Zwecke eingeschaltet wurde. Wir haben also

$$S_B - S_A = \int\limits_{\substack{A \\ \text{über } C'}}^{B} \frac{dQ}{T} \quad \ldots\ldots (5)$$

Die **Zunahme der Entropie der Behälter** während der wirklichen Zustandsänderung kann hingegen aus den wirklichen Wärmeelementen dQ und der Temperatur T berechnet werden, denn letztere bezieht sich auf die Behälter, und diese haben nur umkehrbare Änderungen erfahren. Hier gilt demnach

$$S'_B - S'_A = -\int\limits_{\substack{A \\ \text{über } C}}^{B} \frac{dQ}{T} \quad \ldots\ldots (6)$$

wobei das negative Vorzeichen angebracht werden mußte, da dQ die dem Körper zugeführte, mithin $-dQ$ die dem Behälter im algebraischen Sinne mitgeteilte Wärmemenge bedeutet. Wir erhalten durch Einsetzen der Werte (5), (6) in Gl. (4)

$$-(S'_B - S'_A) - (S_B - S_A) < 0 \quad \text{oder} \quad (S_B + S'_B) - (S_A + S'_A) > 0 \quad \ldots\ldots (7)$$

d. h. die Entropiesumme aller an der Zustandsänderung von A bis B beteiligten Körper ist am Ende des Vorganges in der Tat größer als zu Beginn derselben, was zu beweisen war.

Nun ist jeder Vorgang in der Natur bis zu einem bestimmten Grade mit Nichtumkehrbarkeit behaftet, da Reibung, Drosselung, Wärmeabfall u. a. nie ganz vermieden werden können. Also wird bei jedem Naturvorgang die Entropie der beteiligten Körper vermehrt, und so konnte Clausius zu seinem berühmten Ausspruch gelangen:

Die Entropie der Welt strebt einem Höchstwert zu.

Über die Deutung dieser Folgerung vergleiche man den Schlußabschnitt.

Planck geht bei der **Begründung des zweiten Wärmesatzes** in erster Linie davon aus, daß die umkehrbaren Prozesse als Folgen von idealen Gleichgewichtszuständen nur gedachte Grenzfälle darstellen, in Wahrheit jeder Prozeß nicht umkehrbar ist, daher auch nur in einem bestimmten Sinn erfolgt, über den aber das Energieprinzip allein nichts aussagen kann. Wenn indes eine gewisse Richtung der Änderung in Wirklichkeit bevorzugt wird, so müsse dies mathematisch, d. h. quantitativ dadurch zum Ausdruck kommen, daß **eine gewisse Funktion der Zustandsvariablen sich in einem Sinne ändert,** z. B. **beständig zunimmt.** Als solche Funktion wird dann die Entropie ermittelt.

Um nun die größte erzielbare Nutzbarkeit zu ermitteln, schließen wir Motoren für Strahlungsenergie selbstverständlich aus und halten uns an die Arbeitserzeugung mit Hilfe von **Energieträgern,** die der Maschine zugeführt werden. In einem Motor können auch mehrere Körper und Stoffe abwechselnd wirken, wie schon in der gewöhnlichen Dampfmaschine, der zunächst Kohle und Sauerstoff mit dem passiven Stickstoff die Energie zuführen, die dann zum Teil vom Dampfe übernommen wird und ihre endgültige Umwandlung erfährt. Motoren dieser Art haben die Bezeichnung „Mehrstoffmaschinen“ erhalten. Jeden einzelnen der Stoffe selbst nennen wir „Arbeitskörper“. Nach erfolgter Umwandlung müssen

alle „Arbeitskörper" die Maschine verlassen, um in die „Umgebung", d. h. atmosphärische Luft, einen Wasserlauf (den man bei der Kondensation seinen Weg durch die Maschine nehmen läßt) u. ä. abgeliefert zu werden. Daher bildet die Umgebung einen Teil unseres „Systems" und der Prozeß ist erst zu Ende, wenn jeder Arbeitskörper den Druck und die Temperatur der Umgebung angenommen hat. Um die Übersicht zu vereinfachen, wollen wir von der schließlich stattfindenden Vermischung und Diffusion in die Umgebung vorderhand absehen.

Ein Arbeitkörper (oder eine Gruppe von solchen), der mit der Eigenenergie $U+K$, wo U die innere, K die kinetische Energie bedeuten, der Maschine angeliefert wird, möge im Verlaufe des Prozesses mit einem Wärmebehälter von der Temperatur T_1, der selbst nur umkehrbare Umwandlungen erfährt, in Berührung treten und ihm die Wärmemenge Q_1 (mit oder ohne Temperatursprung) entziehen. Im übrigen soll jeder Wärmeaustausch fehlen, bis auf den mit der „Umgebung", welche wir als unendlich großen Behälter mit der Temperatur T_0 ansehen. Wenn der Arbeitskörper zum Schluß (innerhalb oder außerhalb der Maschine) die Temperatur T_0 angenommen hat, soll an die Umgebung im ganzen die Wärmemenge Q_0, und zwar so, daß der Zustand der Umgebung sich umkehrbar ändert, abgeliefert worden sein. Die Eigenenergie des Körpers betrage im Endzustande $U'+K'$. Die Gesamtenergie vor der Umwandlung muß nun gleich sein der Gesamtenergie nach der Umwandlung einschließlich der gewonnenen Arbeit L. Daher haben wir

$$U+K+Q_1=U'+K'+Q_0+L,$$

wobei alle Größen in mkg ausgedrückt sind. Die gewonnene Arbeit ist demgemäß

$$L=(U+K)-(U'+K')+(Q_1-Q_0) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Als technisch verwertbare Arbeit kann aber nicht der ganze Betrag L gelten. Selbst an einer idealen Maschine müssen wir den Betrag in Abzug bringen, der für das Herausschaffen des Körpers in die Umgebung erforderlich ist und durch das Produkt $p'V'$ ausgedrückt wird, wo p' den unveränderlichen Druck der Umgebung, V' den schließlichen Rauminhalt des Arbeitskörpers bedeuten. Hingegen wird auf der anderen Seite ein Gewinn erzielt, der in $U+K$ nicht enthalten ist, indem beim Hereinschaffen des Arbeitskörpers in die Maschine der Druck p des Raumes, aus dem er entnommen wurde, die Arbeit pV leistet, wenn V den anfänglichen Rauminhalt bezeichnet. Wir erhalten also als „technische Nutzarbeit"

$$L_t=L-p'V'+pV=(U+K+pV)-(U'+K'+p'V')+(Q_1-Q_0) \quad \ldots (9)$$

oder indem wir die „Wärmeinhalte" $J=U+pV$; $J'=U'+p'V'$ einführen

$$L_t=(J+K)-(J'+K')+(Q_1-Q_0) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Hier ist vorweg zu bemerken, daß jeder Betrag von kinetischer Energie, der im Endzustande enthalten ist, einen Verlust bedeutet, der, wie sich von selbst versteht, so weit als möglich vermieden werden muß.

Nun betrachten wir die vorkommenden Entropieänderungen. Der Arbeitskörper besitze im Anfangszustande die Entropie S. Als schließlicher Endzustand ist im Sinne der einleitenden Bemerkung der Druck und die Temperatur der Umgebung vorgeschrieben, so daß von vornherein die End-Entropie S' berechnet werden kann. Im weiteren kommt der Wärmebehälter in Frage, dessen Entropie um Q_1/T_1 abgenommen (oder um $-Q_1/T_1$ zugenommen), — wie auch die Umgebung, deren Entropie um Q_0/T_0 zugenommen hat, da wir voraussetzten, daß Q_0 umkehrbar abgeliefert sei. Die Gesamtzunahme der Entropie, die positiv sein muß, ist also

$$\Delta S=S'-S-\frac{Q_1}{T_1}+\frac{Q_0}{T_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

Berechnen wir Q_0 aus Gl. (11) und setzen wir es in Gl. (10) ein, so folgt:

$$L_t=(J+K)-(J'+K')+T_0(S'-S)+Q_1\frac{T_1-T_0}{T_1}-\Delta S T_0 \quad \ldots (12)$$

Hätten wir Wärmeaustausch mit noch weiteren Behältern, so würden weitere Glieder von der Form des vorletzten in der Gleichung auftreten.

Bei bekanntem Anfangs- und Endzustand sind in dieser Formel alle Größen bekannt, bis auf ΔS, welches ein Maß für die Nichtumkehrbarkeit der durchlaufenen Prozesse ist.

Je größer die Zunahme der Entropie war, d. h. je mehr nichtumkehrbare Zustandsänderungen wir hatten, um so kleiner wird L.

Für den Grenzfall $\Delta S = 0$, d. h. die in allen Teilen umkehrbare Zustandsänderung, erhalten wir den Höchstbetrag der Arbeit unter den gegebenen Verhältnissen. Bezeichnen wir diese mit L_0, so ist

$$L_t = L_0 - \Delta S \cdot T_0 \quad \ldots \ldots \quad (13)$$

was man in den Satz fassen kann:

Bei nicht umkehrbaren Vorgängen irgendwelcher (auch chemischer) Art erleidet die Nutzarbeit eine Verringerung um das Produkt aus der stattgefundenen Zunahme der Entropie aller am Prozeß beteiligten Körper und der Temperatur des wärmeableitenden Behälters, d. h. der Umgebung. — Wie aus der Ableitung hervorgeht, ist es hierbei ganz gleichgültig, in welchem Teil der Zustandsänderung die Zunahme erfolgte, ebenso ob sie auf einmal oder in Teilen zustande kam.

Beschreibt der Arbeitskörper einen Kreisprozeß, so ist $U = U'$, $p = p'$, $V = V'$, $S = S'$, und es wird mit $\Delta S = 0$

$$L_{t0} = Q_1 \frac{T_1 - T_0}{T_1} \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

d. h. wir kommen auf die Carnotsche Formel zurück und stellen wieder fest, daß der Arbeitsgewinn um so größer ist, bei je höherer Temperatur uns die Wärme zur Verfügung stand.

Hätten wir eine Wärmemenge Q_1 an einen Behälter von der Temperatur T_1 abgeleitet, so hätte das vorletzte Glied in Gl. (12) das negative Vorzeichen und L_t wäre um den Betrag verkleinert, den Q_1 mit Hilfe eines Carnotprozesses zwischen den Temperaturen T_1 und T_0 in der vollkommenen Maschine leisten könnte. Diese Arbeit wäre nicht verloren, sondern aufgespeichert, was durch die besondere Art des Prozesses bedingt sein kann. Für die Aufspeicherung einer Wärmemenge gilt also die Regel, daß sie bei möglichst hoher Temperatur zu erfolgen habe. Ein Beispiel hierfür bilden die Heizgase der Dampfkessel.

Jede anderweitige Wärmeableitung kommt der Umgebung zugute, vergrößert Q_0 damit auch ΔS, bedingt also Verlust.

Findet stetige Wärmeaufnahme statt und bedeutet dQ die bei der Behältertemperatur T an den Körper übergehende Wärmemenge, so tritt in Gl. (12) und (14) an Stelle von $Q_1 (T_1 - T_0)/T_1$ der Ausdruck

$$\int \frac{T - T_0}{T} dQ = \int \left(1 - \frac{T_0}{T}\right) dQ \quad \ldots \ldots \quad (14a)$$

ein. Man wäre geneigt zu folgern, daß auch hier T stets möglichst hoch sein müsse, um L_{t0}/Q_1 groß zu machen. Dies wäre jedoch ein Irrtum, wie das **berühmte Beispiel des (vollkommenen) Wärmeaustauschers (Regenerators)** dartut. Es wird hier die bei niederer Temperatur dem Arbeitskörper anfänglich zugeführte Wärme später bei gleicher Temperatur wieder abgeleitet, so daß in der Summe 14a gleich große Glieder $+ dQ\,(1 - T_0/T)$ und $- dQ\,(1 - T_0/T)$ paarweise vorkommen, die sich wegheben, ohne den Wirkungsgrad zu beeinträchtigen. Es ist also **unrichtig für Arbeitserzeugung durch Wärmeumwandlung den Carnotschen Prozeß als den „günstigsten" zu bezeichnen.** Es gibt unzählig viele andere, theoretisch ebenso günstige. Wohl aber kann der Wirkungsgrad bei gegebener Höchsttemperatur **nicht über den Carnotschen Wert steigen.** In praktischer Hinsicht ist freilich zu bemerken, daß wirksame Regeneratoren ungemein große Wärmeaustauschflächen bedingen und sich **wirtschaftlich** bis anhin nicht zu behaupten vermocht haben.

Der Ausdruck der größterzielbaren Arbeit kann noch zweckmäßig umgewandelt werden, wenn wir bemerken, daß die Anteile $T_0 S$ und $T_0 S'$ nichts anderes sind als die Helmholtzsche „gebundene Energie"; statt seiner „freien Energie" $U - T_0 S$ kommt in (12) der Ausdruck $J - T_0 S$ vor, den man geneigt wäre, „technische freie Energie" zu nennen, an Stelle der in der Physik gebräuchlichen Bezeichnung „thermodynamisches Potential". Führen wir die Zeichen

$$E = J - T_0 S; \quad E' = J' - T'_0 S' \quad \ldots \ldots \quad (15)$$

ein, so folgt, wenn wir $Q_1 = 0$; $K = K' = 0$ setzen

$$L_0 = J - J' - T_0 (S - S') = E - E' \quad \ldots \ldots \quad (16)$$

oder in Worten: **Die größte technische Nutzarbeit die durch Verbrennung oder eine beliebige andere chemische Umwandlung eines Stoffes (unter Ausschluß sonstiger Wärmeaufnahme) gewonnen werden kann, ist die Abnahme der technischen freien Energie zwischen Anfangs-**

und Endzustand[1]). Eine Maschine, die diese Arbeit zu liefern vermöchte, nennen wir vollkommen.

Unter dem **thermodynamischen Wirkungsgrad** versteht man das Verhältnis der aus einer bestimmten Stoffmenge in **der wirklichen Maschine erzeugten Arbeit zur Arbeit in der vollkommenen Maschine**

$$\eta_{\text{thermodyn.}} = \frac{\text{Arbeit der wirklichen Maschine}}{\text{Arbeit der vollkommenen Maschine}} = \frac{L_t}{L_0} \quad \ldots \ldots \quad (17)$$

Der „thermische" oder „wirtschaftliche" Wirkungsgrad oder der „Brennstoffnutzungsgrad" ist das Verhältnis der gewonnenen Arbeit zum Heizwert bei unveränderlichem Druck

$$\left.\begin{matrix}\eta_w \\ \eta_{\text{Brennstoff}}\end{matrix}\right\} = \frac{\text{Gewonnene Arbeit in kcal}}{\text{Heizwert bei unverändertem } p \text{ in kcal}} \quad \ldots \ldots \quad (18)$$

Es ist nun wichtig, daß in den Ausdruck der Höchstarbeit auch der Heizwert eingeführt werden kann. In Gl. (16) bezieht sich J auf den Druck p vor der Umwandlung, J' auf den Druck p' nach der Umwandlung. Wir führen J'_p als Wärmeinhalt beim Drucke p nach der Umwandlung ein, und schreiben unter Hervorhebung des Druckes durch Fußzeichen

$$J_p - J'_{p'} = (J_p - J'_p) + (J'_p - J'_{p'})$$

Der erste Klammerausdruck ist **der Gesamtheizwert H_p beim unveränderlichen Druck p,** der zweite Ausdruck verschwindet, sofern wir es mit gasförmigen Enderzeugnissen zu tun haben. Denn für solche ist $J'_p = \Sigma\int \mathfrak{C}'_p dT + C$ und $J'_{p'} = \Sigma\int \mathfrak{C}_{p'} dT + C$, und da innerhalb der technisch vorkommenden Grenzen $\mathfrak{C}'_p = \mathfrak{C}'_{p'}$, d. h. die spezifische Wärme sich mit dem Druck nur unmerklich ändert, so ist $J'_p = J'_{p'}$. Gl. (16) lautet also

$$L_0 = H_p - T_0(S - S') \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (19)$$

Man darf hier nicht in den Irrtum verfallen, zu glauben, als wäre es im Sinne dieser Formel für L_0 **gleichgültig, ob wir die Abgase mit dem Anfangsdruck p oder einem beliebig höheren p' entlassen,** denn von p' hängt S' ab. Bezeichnet $S'_p\, S'_{p'}$ die den Drucken $p\, p'$ zugeordneten Werte bei gleichem T, so ist $S'_{p'} - S'_p = AR'G \cdot \ln p'/p$, und um diesen Betrag (der einer isothermischen Ausdehnung der Abgase von p' auf p entspricht) ist die Nutzarbeit beim Gegendruck p' kleiner als beim Gegendruck p.

Man kann nun auch vom thermischen Wirkungsgrad der vollkommenen Maschine sprechen, der nach (18)

$$\eta_{wo} = \frac{L_0}{H_p} = 1 - \frac{T_0}{H_p}(S - S') \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (20)$$

ist, und wir erkennen, daß es drei Möglichkeiten gibt:

1. Die Entropie des Arbeitskörpers bleibt ungeändert, $S' = S$, und dann ist

$$L_0 = H_p$$

d. h. die erhältliche Höchstarbeit ist dem Heizwerte gerade gleich, $\eta_{wo} = 1$.

2. Die Entropie ist im Endzustande kleiner als im Anfangszustand $S' < S$, dann ist

$$L_0 < H_p$$

die Höchstarbeit kleiner als der Heizwert, $\eta_{wo} < 1$.

3. Die Entropie ist im Endzustande größer als im Anfangszustand $S' > S$, dann wird

$$L_0 > H_p,$$

die umkehrbar gewonnene Höchstarbeit ist größer als der Heizwert, $\eta_{wo} > 1$.

Dann ist nach Gl. (11)

$$Q_0 = T_0(S - S')$$

---

[1]) Man erkennt hiernach, daß die freie Energie eine sehr allgemeine Bedeutung besitzt und nicht bloß bei isothermischen Zustandsänderungen in Betracht kommt, wie Planck anzunehmen geneigt war. Daß die oben benützten Funktionen auch für die mit Temperaturänderungen verbundenen Prozesse der Gasmaschine eine fundamentale Rolle spielen, wurde in der technischen Literatur vom Verfasser (Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1898, S. 1088) hervorgehoben. Nach dem Erscheinen der 2. Auflage dieses Buches wurde ihm bekannt, daß in der wissenschaftlichen Literatur Gouy schon im Jahre 1889, Journal de physique, Bd. VIII, S. 501, die gleichen Formeln entwickelt hat. Seither gab M. E. Jouguet in Revue de Mécanique, Mars 1917, Anwendungen dieses Theorems auf verschiedene Aufgaben der Energieumwandlung.

negativ; der Überschuß der Nutzarbeit über den Heizwert ist die negative, d. h. vom Behälter aufgenommene Wärme. **Es wird Wärme der Umgebung in Arbeit verwandelt**[1]).

Man wolle hierin **ja kein Perpetuum mobile zweiter Art erblicken.** Wir verwandeln wohl die Wärme der Umgebung in Arbeit mit bloß einem Wärmebehälter, aber nicht so, daß im Zustande anderer Körper keine Änderung auftrete. Im Gegenteil, es wird der Arbeitskörper selbst, dessen Entropie die kostbare Eigenschaft $S' > S$ besitzt, umgewandelt und in einem anderen Zustand entlassen. Nachdem wir uns also auf rechtmäßigem Boden bewegen, entsteht die wichtige Frage, ob es Körper mit so starkem Überschuß von S' über S gibt, daß die unvermeidlichen Verluste gedeckt und die Ausbeutung der Wärme der Umgebung im großen lohnend werden könnte.

Die Antwort ist verneinend; es gibt nur Körper mit unwesentlicher Zunahme der Entropie, daher keine wirtschaftlichen Wärmekraftmaschinen dieser Art gebaut werden können. Um zu entscheiden, ob bei einer Stoffart $S' >$ oder $< S$ ist, war man früher auf den Versuch angewiesen. Im Jahre 1906 stellte Nernst eine äußerst fruchtbare Hypothese auf, die diese Aufgabe auf dem Wege der Rechnung aus der Kenntnis der spezifischen Wärmen und der Wärmetönung zu lösen erlaubt.

210. Berechnung der größten Nutzarbeit mit Hilfe des Nernstschen Wärmesatzes.

Das „Theorem" von Nernst, das heute als „III. Hauptsatz" eine fundamentale Wichtigkeit in der Wärmelehre erreicht hat, lautet in der Fassung, die ihm Planck gegeben hat[2]): **Die Entropie jedes „kondensierten", d. h. festen oder flüssigen Körpers, hat beim absoluten Nullpunkt den Wert Null.** Daraus folgt, daß für die endliche Temperatur T bei einer Zustandsänderung mit gleichbleibendem Druck die Entropie den **bestimmten Betrag**

$$S = G\int_0^T \frac{c_p\, dT}{T} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (21)$$

annimmt, daß also keine „unbestimmte Konstante" mehr beizufügen ist. S ist eine für jeden Zustand verschiedene aber **fest gegebene Zahl** (in kcal/°Temp.).

Einstein stellte in seiner Theorie der spezifischen Wärmen[3]) fest, daß auf Grund der „Quantentheorie" die spezifischen Wärmen bei der Annäherung an den absoluten Nullpunkt asymptotisch gegen Null konvergieren. Die Bestätigung dieser Theorie durch die glänzenden Versuche von Nernst ermöglichte dann, dem Theorem von Nernst die in Gl. (21) zum Ausdruck kommende Fassung zu geben, die in der Tat das Verschwinden von c_p fordert, da sonst bei der Annäherung an den absoluten Nullpunkt S (als. $= c_p \ln T$) gegen $-\infty$ ansteigen würde.

Um aus diesem Satze den Betrag der größten Nutzarbeit abzuleiten, schicken wir einige Hilfssätze voraus.

---

[1]) Manche Erfinder glaubten, daß man zum gleichen Ziele durch besondere Einrichtung des Arbeitsprozesses gelangen könnte. So hat Friedenthal vorgeschlagen, die bei einem beliebigen Brennkraftmotor in den Auspuffgasen enthaltene (positive!) Wärme Q_0, die theoretisch an den Behälter mit der Temperatur der Umgebung abzuliefern wäre, zum Verdampfen des passend gewählten Brennstoffes selbst zu verwenden, der bei der Temperatur T_0 sieden und eine solche Verdampfungswärme besitzen müßte, daß die für ein Spiel in den Prozeß tretende Menge die ganze Wärme Q_0 und noch etwas aus der Umgebung aufzunehmen vermöchte. Die Verbrennungsgase würden auf T_0 abgekühlt ins Freie entweichen, und es würde der ganze Heizwert des Brennstoffes und noch etwas mehr in Arbeit umgewandelt.

Diese theoretische Möglichkeit eines Wirkungsgrades, der $= 1$ oder noch größer wie 1 wäre, hat indessen gar keine praktische Bedeutung, und zwar abgesehen von der Frage, ob Brennstoffe von der erforderlichen hohen Verdampfungswärme beschafft werden können, einfach deshalb, weil ein bei atmosphärischer Temperatur siedender Brennstoff mit seinem Dampfe als gleichwertig, d. h. als „natürliches Gas" anzusehen ist. Ist H der Heizwert für ein Kilogramm des flüssigen Stoffes, und ist die Verdampfungswärme $= Q_0$, so ist der Heizwert des gasförmigen Stoffes $H' = H + Q_0$ für ein Kilogramm. In Arbeit möge umgewandelt werden H; wenn wir H als Bezugseinheit wählen, so ist der Wirkungsgrad $= 1$. Wenn aber das gleichwertige H' zugrunde gelegt wird, so wird in Arbeit umgesetzt $H' - Q_0$, und der Wirkungsgrad ist kleiner als 1. Im letzteren Falle können wir den Brennstoff gasförmig zugeführt denken, und der Motor arbeitet wie ein gewöhnlicher Gasmotor. Die Wärme Q_0 muß zum Schluß entzogen werden, allein wir erhalten genau soviel Arbeit wie vorhin. Die scheinbar so günstige Verwertung der Abwärme Q_0 nützt also in Wirklichkeit nichts, und diese Bemerkung gilt allgemein, denn die auf dem untersten Temperaturniveau für die Verdampfung zur Verfügung stehende Wärme ist wirtschaftlich wertlos.

[2]) Thermodynamik, 4. Aufl., S. 268.

[3]) Annal. d. Physik 1907.

a) Die Dampfdruckformel von Nernst.

Bedeutet $\mathfrak{r}$ die Verdampfungswärme für 1 Mol, so gilt die Gleichung von Clapeyron falls man von der Sättigung an die Gasgesetze als gültig ansieht, in der Form

$$\ln p_s = \int \frac{\mathfrak{r}\, d\, T}{A \Re T^2} + C_1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (22)$$

wo C_1 **chemische Konstante** benannt wird, und von Nernst[1]) für eine Anzahl Stoffe auf Grund besonderer Annahmen bestimmt worden ist. Da jedoch Nernst in Briggschen Logarithmen mit p_s in alten Atmosphären gerechnet hat, während oben p_s in kg/qm ausgedrückt ist, besteht die Beziehung $\ln p_s = 2{,}302 \log \left(p_{\text{alt. at}}\, 10333\right)$ und als Festwert in Gl. 22), wenn man nach $\log \left(p_{\text{alt. at}}\right)$ auflöst, ergibt sich

$$C_{\text{Nernst}} = \frac{C_1}{2{,}302} - 4{,}014 \quad \text{oder} \quad C_1 = 2{,}302 \left(C_{\text{Nernst}} + 4{,}014\right) \ldots \ldots \ldots (23)$$

Die wichtigsten Werte von C_{Nernst} sind:

H_2;	$C_N = 1{,}6$	CO_2;	$C_N = 3{,}2$
N_2;	„ $= 2{,}6$	CH_4;	„ $= 2{,}5$
O_2;	„ $= 2{,}8$	H_2O;	„ $= 3{,}6$
CO;	„ $= 3{,}5$	C_6H_6;	„ $= 3{,}0$

Wünscht man in Gl. (22) p_s in metrischen Atmosphären einzuführen unter Beibehaltung des natürlichen Logarithmus, so folgt aus $\ln p_s = \ln \left(p_s^{\text{at}} \cdot 10^4\right)$ auf der rechten Seite von Gl. (22) der Festwert

$$C_2 = (C_1 - \ln 10^4) = 2{,}3 \left[C_{\text{Nernst}} + 0{,}014\right] \ldots \ldots \ldots \ldots (24)$$

Im folgenden wird mit Benützung des Ansatzes

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + \alpha T + \beta T^2 + \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (25)$$

die Umformung (partielle Integration)

$$\int \frac{\mathfrak{r}\, d T}{A \Re T^2} = -\frac{\mathfrak{r}}{A \Re T} + \int \frac{d \mathfrak{r}}{A \Re T} = \frac{1}{A \Re}\left[-\frac{\mathfrak{r}_0}{T} - \alpha - \beta T \ldots + \int \frac{d \mathfrak{r}}{T}\right] + \text{konst.} \ldots (26)$$

benützt. Die Beziehung der hier auftretenden Integrationskonstanten zur Nernstschen Konstanten in Gl. (23) muß beachten, daß in der Formel von Nernst neben der Konstanten nur Funktionen von T stehen. Es muß also das Glied $+\alpha / A \Re$ zur Konstanten C_1 hinzugefügt werden, um das entsprechende Glied in Gl. (26) aufzuheben[2]). Man erhält also

$$\ln p_s = -\frac{\mathfrak{r}}{A \Re T} + \int \frac{d \mathfrak{r}}{A \Re T} + C_3 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (27)$$

mit

$$C_3 = C_1 + \frac{\alpha}{A \Re} = 2{,}3 \left(C_{\text{Nernst}} + 4{,}014\right) + \frac{\alpha}{A \Re} \ldots \ldots \ldots \ldots (27\text{a})$$

Wenn in Gl. (27) auf beiden Seiten $\ln 10^4$ abgezogen wird, erscheint p_s in kg/cm² und die neue Konstante wird

$$C_\alpha = C_3 - \ln 10^4 = 2{,}3 \left(C_{\text{Nernst}} + 0{,}014\right) + \frac{\alpha}{A \Re} \ldots \ldots \ldots \ldots (27\text{b})$$

b) Änderung von $\mathfrak{r}$ mit der Temperatur.

Bedeuten $\mathfrak{J}''$ und $\mathfrak{J}'$ die Wärmeinhalte für 1 Mol an den Grenzkurven, so ist

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{J}'' - \mathfrak{J}' \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (28)$$

Setzt man angenähert $\mathfrak{J}'' = \mathfrak{C}_{pg} T + K''$; $\mathfrak{J}' = \mathfrak{C}_{pfl} T + K'$ und betrachtet man diese spezifischen Wärmen als unveränderlich, wobei obendrein $\mathfrak{C}_{pfl}$ durch die spezif. Wärme $\mathfrak{C}_{fl}$ an der Grenzkurve ersetzt wird, so erhält man

$$\frac{d \mathfrak{r}}{d T} = \mathfrak{C}_{pg} - \mathfrak{C}_{fl} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (29)$$

Beim absoluten Nullpunkt ist $\mathfrak{C}_{fl} = 0$ (wenn man die theoretische Annahme macht, daß eine Flüssigkeit den absoluten Nullpunkt in unterkühltem Zustand erreichen könnte). Dann wird mit Rücksicht auf Gl. (25)

$$\left(\frac{d \mathfrak{r}}{d T}\right)_{T=0} = \alpha = \mathfrak{C}_{p0} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (29\text{a})$$

---

1) Theoret. Chemie, 7. Aufl., S. 742.

2) Den Hinweis auf diesen wichtigen Umstand verdanke ich Herrn Prof. Nusselt.

c) Die absolute Entropie.

Gemäß Gl. (21) erhalten wir die Entropie, indem wir, vom absoluten Nullpunkt an, der Einfachheit halber, mit einer unterkühlten Flüssigkeit beginnend Wärme bei unveränderlichem Druck, der vorläufig kleiner als der kritische angenommen wird, zuführen. Dann werden wir die Grenzkurve bei einer unter der kritischen gelegenen Siedetemperatur T_s erreichen und die Entropie wird für je 1 Mol auf $\int_0^{T_s} \mathfrak{C}_{fl}\, dT/T$ ansteigen. Während der darauf folgenden Verdampfung tritt der Betrag $\mathfrak{r}/T_s$ hinzu. Die Fortsetzung der Wärmezufuhr bei $p =$ konst. im Überhitzungsgebiet liefert $\int_{T_s}^{T} \mathfrak{C}_p\, dT/T$. Im ganzen erhalten wir

$$\mathfrak{S} = \int_0^{T_s} \frac{\mathfrak{C}_{fl}\, dT}{T} + \frac{\mathfrak{r}}{T_s} + \int_{T_s}^{T} \frac{\mathfrak{C}_p\, dT}{T} \quad \ldots \ldots \quad (30)$$

Ergibt die unbestimmte Integration des dritten Gliedes die Funktion $F(T)$, so können wir

$$\int_{T_s}^{T} \frac{\mathfrak{C}_p\, dT}{T} = F(T) - F(T_s) = \int^{T} \frac{\mathfrak{C}_p\, dT}{T} - \int^{T_s} \frac{\mathfrak{C}_p\, dT}{T}$$

setzen. Bedeutet ebenso $f(T)$ das unbestimmte Integral des ersten Gliedes, so ist $\int_0^{T_s} (\;) = f(T_s) - f(0)$. Da aber nach dem Satz von Nernst $f(0) = 0$ sein muß, so ist auch

$$\int_0^{T_s} \frac{\mathfrak{C}_{fl}\, dT}{T} = \int^{T_s} \frac{\mathfrak{C}_{fl}\, dT}{T},$$

wobei dann hier und oben keine willkürliche Konstante hinzuzufügen ist. Das Einschieben in Gl. (30) liefert

$$\mathfrak{S} = \int^{T_s} (\mathfrak{C}_{fl} - \mathfrak{C}_p) \frac{dT}{T} + \frac{\mathfrak{r}}{T_s} + \int^{T} \frac{\mathfrak{C}_p\, dT}{T} \quad \ldots \ldots \quad (31)$$

An Stelle des ersten Gliedes tritt gemäß Gl. (29) $-\int^{T_s} \frac{d\mathfrak{r}}{T}$ und dies mit $\mathfrak{r}/T_s$ wird gemäß Gl. (27) mit C_α nach Gl. (27b), indem wir den Druck in kg/cm² ausdrücken, durch $A\mathfrak{R}(-\ln p + C_\alpha)$ ersetzt. Man erhält

$$\mathfrak{S} = \int^{T} \frac{\mathfrak{C}_p\, dT}{T} - A\mathfrak{R} \ln p + A\mathfrak{R}\, C_\alpha \quad \ldots \ldots \quad (32)$$

Nun beweisen wir, daß dieser Ausdruck allgemein, auch für überkritische Drücke gilt. Es sei nämlich für den Zustand $p_1 T_1$ und $p_1 < p_k$ die Entropie $\mathfrak{S}_1$ berechnet worden. Wir machen auf umkehrbarem Wege eine Verbindung mit dem Zustand $p_2 T_2$, wo $p_2 > p_k$, ausfindig, und berechnen (im Gasgebiete) die Zunahme der Entropie nach der gewöhnlichen Regel:

$$\mathfrak{S}_2 - \mathfrak{S}_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{d\mathfrak{Q}}{T} = \int_{T_1}^{T_2} (\mathfrak{C}_p\, dT - A\mathfrak{B}\, dp) \frac{1}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\mathfrak{C}_p\, dT}{T} - A\mathfrak{R} \ln \frac{p_2}{p_1} \quad \ldots \quad (32\text{a})$$

Hieraus folgt mit Gl. (32)

$$\mathfrak{S}_2 = \int^{T_1} \mathfrak{C}_p \frac{dT}{T} - A\mathfrak{R} \ln p_1 + A\mathfrak{R}\, C_\alpha + \int_{T_1}^{T_2} \frac{\mathfrak{C}_p\, dT}{T} - A\mathfrak{R} \ln \frac{p_2}{p_1} = \int^{T_2} \mathfrak{C}_p \frac{dT}{T} - A\mathfrak{R} \ln p_2 + A\mathfrak{R}\, C_\alpha \quad (32\text{b})$$

Dieser Ausdruck hat dasselbe Bildungsgesetz wie Gl. (32), also ist die Formel für $\mathfrak{S}$ allgemein gültig.

d) Die Entropiekonstante von Nusselt.

Nusselt hat als Erster die unbestimmte Konstante im Ausdruck der Entropie ermittelt[1], mit Benutzung der Veränderlichen T, $\mathfrak{B}$ vermöge der Beziehung

$$d\mathfrak{S} = \frac{d\mathfrak{Q}}{T} = \frac{\mathfrak{C}_v\, dT}{T} + \frac{A p\, d\mathfrak{B}}{T} = \frac{\mathfrak{C}_v\, dT}{T} + A\mathfrak{R} \frac{d\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}},$$

[1] Zeitschr. f. d. ges. Turbinenwesen, 1917, S. 1 f.

in die er die mittlere spezifische Wärme zwischen 0 und T^0 abs. $\mathfrak{C}_{vm}$ einführt. Es ist

$$\mathfrak{C}_v\, dT = d(\mathfrak{C}_{vm} T) = \mathfrak{C}_{vm}\, dT + T\, d\mathfrak{C}_{vm},$$

daraus folgt die Entropie

$$\mathfrak{S} = \int \frac{\mathfrak{C}_{vm}\, dT}{T} + \mathfrak{C}_{vm} + A\,\mathfrak{R} \ln \mathfrak{V} + \mathfrak{S}_{0v} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (32\,c)$$

Gl. (32) ist nichts anderes als der Ausdruck der Entropie in dem Veränderlichen p, T. Zwischen der dort auftretenden Konstanten $\mathfrak{S}_{0p} = A\,\mathfrak{R}\, C_\alpha$ und $\mathfrak{S}_{0v}$ besteht eine Beziehung, die man durch Gleichsetzung von Gl. (32) und (32c) und Ersatz von $\mathfrak{V}$ durch p und T ermittelt.

Zunächst kann man mittels

$$\int \frac{\mathfrak{C}_{vm}\, dT}{T} + \mathfrak{C}_{vm} = \int \left(\frac{\mathfrak{C}_{vm}\, dT}{T} + \frac{T}{T}\, d\mathfrak{C}_{vm} \right) = \int \frac{d(\mathfrak{C}_{vm} T)}{T} = \int \frac{\mathfrak{C}_v\, dT}{T} + \mathfrak{C}_{v0}$$

zu $\mathfrak{C}_v$ zurückkehren, wobei $\mathfrak{C}_{v0}$ hinzuzufügen ist, weil $\int \mathfrak{C}_v\, dT/T$ reine Funktion von T ist, während die linke Seite $\mathfrak{C}_{v0}$ enthält (da man stets $\mathfrak{C}_{vm} = \mathfrak{C}_{v0} + T f(T)$ setzen darf). Die Glieder mit $\mathfrak{C}_p$ und $\mathfrak{C}_v$ ergeben

$$\int (\mathfrak{C}_p - \mathfrak{C}_v)\, dT/T - \mathfrak{C}_{v0} = A\,\mathfrak{R} \ln T - \mathfrak{C}_{v0},$$

und es bleibt, wenn man p in kg/m² ausdrückt, also in Gl. (32) C_3 an Stelle von C_α setzt:

$$\mathfrak{S}_{0v} = A\,\mathfrak{R}\,(C_3 - \ln \mathfrak{R}) - \mathfrak{C}_{v0} = A\,\mathfrak{R}\,[2{,}3\,(C_{\text{Nernst}} + 4{,}014) - \ln \mathfrak{R}] + \mathfrak{C}_{p0} - \mathfrak{C}_{v0}$$
$$= A\,\mathfrak{R}\,[2{,}3\,(C_{\text{Nernst}} + 4{,}014) + 1 - \ln \mathfrak{R}] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (32\,d)$$

Das ist der von Nusselt als fertiges Ergebnis angegebene Wert.

e) Gemische. Es möge nun ein Gemisch vorliegen, das vor der Umwandlung aus

n_1, n_2, $n_3 \ldots$ Molen der Molekülgattung A, B, $C \ldots$ mit den Partialdrücken,
p_1, p_2, $p_3 \ldots$ besteht. Nach der Umwandlung seien
n_1', n_2', $n_3' \ldots$ die Molzahlen der Molekülgattungen A', B', C' und
p_1', p_2', $p_3' \ldots$ die zugehörigen Partialdrücke.

Die gemeinsame Temperatur sei T.

Zwischen den Molzahlen bestehen die durch die Verbrennungsgleichungen geforderten Beziehungen. Bezeichnet beispielsweise für ein Gasgemisch

n_1, n_2, n_3, $n_4 \ldots$ die Molzahlen von H_2; CO; O_2; $CO_2 \ldots$,

wie sie sich aus Gasbeschaffenheit und Luftmenge ergeben, und bedeuten n_1', n_2', n_3', n_4' die Molzahlen von H_2O; CO_2; $O_2 \ldots$, so wird **nach einer vollständigen Verbrennung**

$$n_1' = n_1; \qquad n_2' = n_2 + n_4; \qquad n_3' = n_3 - \frac{n_1 + n_2}{2}; \qquad \ldots$$

Die Summen $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots$ vor und nach der Verbrennung ergeben eine Abnahme

$$\nu = (n_1 + n_2 + \ldots) - (n_1' + n_2' + \ldots) = \frac{n_1 + n_2}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (33)$$

die bei gleichem p, T eine entsprechende Raumverminderung verursacht.

Die Gesamtentropie S des Gemisches ist die Summe der Entropien der Einzelbestandteile, d. h.

$$S = \sum n\mathfrak{S} = n_1 \mathfrak{S}_1 + n_2 \mathfrak{S}_2 + \ldots = \int (n_1 \mathfrak{C}_{p1} + n_2 \mathfrak{C}_{p2} + \ldots) \frac{dT}{T}$$
$$- A\,\mathfrak{R}\,(n_1 \ln p_1 + n_2 \ln p_2 + \ldots) + A\,\mathfrak{R}\,(n_1 C_{\alpha 1} + n_2 C_{\alpha 2} + \ldots) \quad \ldots \ldots (34)$$

Ein gleichgebauter Ausdruck gilt für die Entropie nach der Umwandlung.

f) Änderung des Gesamtheizwertes und der Temperatur. Bei gleichbleibendem Druck ist

$$H_p = I - I' = (n_1 \mathfrak{J}_1 + n_2 \mathfrak{J}_2 + \ldots) - (n_1' \mathfrak{J}_1' + n_2' \mathfrak{J}_2' + \ldots).$$

Die Zunahme dH_p, die einer Erhöhung von T auf $T + dT$ bei gleichem Drucke entspricht, ist

$$dH_p = \sum n_1\, d\mathfrak{J}_1 - \sum n_1'\, d\mathfrak{J}_1'.$$

Wegen des gleichbleibenden Druckes ist $d\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{C}_{p1}\, dT$; $d\mathfrak{J}_2 = \mathfrak{C}_{p2}\, dT$; $\ldots$, somit erhält man

$$\left(\frac{dH_p}{dT}\right)_p = (n_1 \mathfrak{C}_{p1} + n_2 \mathfrak{C}_{p2} + \ldots) - (n_1' \mathfrak{C}_{p1}' + n_2' \mathfrak{C}_{p2}' + \ldots) \quad \ldots \ldots \ldots (35)$$

g) Die größte Nutzarbeit erhält man durch Einsetzen der Werte S, S' nach Gl. (34) in Gl. (19) $L_0 = H_p - T(S - S')$. Der Entropieunterschied lautet, wenn die gleichartigen

Summen durch $\sum$ bezeichnet werden:

$$S - S' = \int (\sum n \mathfrak{C}_p - \sum n' \mathfrak{C}_p') \frac{dT}{T} + A \mathfrak{R} (\sum n C_\alpha - \sum n' C_\alpha')$$
$$- A \mathfrak{R} (\sum n \ln p - \sum n' \ln p') \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (36)$$

Das erste Glied kann nach Gl. (35) als $\int dH_p/T$ ausgedrückt werden. Führen wir die Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} \sum n \ln p &= n_1 \ln p_1 + n_2 \ln p_2 + \ldots - n_1' \ln p_1' - n_2' \ln p_2' - \ldots \\ \sum n C_\alpha &= n_1 C_{\alpha 1} + n_2 C_{\alpha 2} + \ldots - n_1' C_{\alpha 1}' - \ldots \end{aligned}\right\} \quad \ldots (36\text{a})$$

ein, so schreibt sich L_0

$$L_0 = H_p - T \int \frac{dH_p}{T} + A \mathfrak{R} T \sum n \ln p - A \mathfrak{R} T \sum n C_\alpha \quad \ldots \ldots \quad (37)$$

Zu dem unbestimmt auszuführenden Integral ist, um es nochmals hervorzuheben, keine willkürliche Konstante beizufügen. Die Drücke sind in kg/cm² ausgedrückt, und für die C_α gilt mit Rücksicht auf Gl. (27b) und (29a)

$$C_\alpha = 2{,}3\,(C_{\text{Nernst}} + 0{,}014) + \frac{\mathfrak{C}_{p0}}{A \mathfrak{R}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (37\text{a})$$

Werden die Bestandteile unvermischt (einzeln) in die Maschine eingeführt, so bedeuten $p_1, p_2, \ldots$ die wirklichen Drücke, die meist alle dem Atmosphärendruck gleich sein werden.

h) Verbrennung von festem Kohlenstoff. Die Entropie des festen Kohlenstoffes kann für den Zustand $p_1 T_1$ durch eine Wärmezufuhr bei $p =$ konst. vom absoluten Nullpunkt an in der fertigen Form

$$\mathfrak{S}_k = \int^T \frac{\mathfrak{C}_k \, dT}{T} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (38)$$

dargestellt werden. Gemäß der chemischen Gleichung



$$C + O_2 = CO_2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (39)$$

besteht die Entropie vor der Verbrennung aus dem oben angeschriebenen $\mathfrak{S}_k$ und aus der Entropie von 1 Mol O_2, für welches Gl. (32) gilt. Nach der Verbrennung ist ein Mol CO_2 vorhanden, dessen Entropie auch durch Gl. (32) ausgedrückt wird, wenn man $\mathfrak{C}_p'$ und C_α' einführt. Alsdann ergibt sich

$$S - S' = \int^T (\mathfrak{C}_k + \mathfrak{C}_p - \mathfrak{C}_p') \frac{dT}{T} + A \mathfrak{R} (C_\alpha - C_\alpha') - A \mathfrak{R} \ln \frac{p}{p'} =$$
$$= \int^T \frac{dH_p}{T} + A \mathfrak{R} (C_\alpha - C_\alpha') - A \mathfrak{R} \ln \frac{p}{p'} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (40)$$

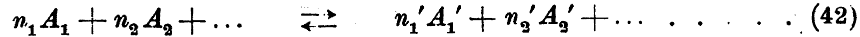
Handelt es sich um eine verwickeltere Verbrennung, wie z. B. im Wassergasprozeß, so ist die Herleitung die gleiche, und führt auf den mit abgekürzten Summenzeichen geschriebenen Ausdruck

$$L_0 = H_p + T \left\{ - \int^T \frac{dH_p}{T} - A \mathfrak{R} \sum n_{\text{gas}} C_\alpha + A \mathfrak{R} \sum n_{\text{gas}} \ln p \right\} \quad \ldots \ldots \quad (41)$$

der gleichgebaut ist, wie Gl. (37), nur daß in den **Konstanten** und im **Gliede mit ln p bloß die gasförmigen Molekülgattungen zu berücksichtigen sind,** wie durch die Fußzeichen angedeutet wurde.

i) Van t'Hoffs isothermische Maschine und die Gasdissoziation. Für die Höchstarbeit einer isothermisch arbeitenden Maschine gab Van t'Hoff die folgende bemerkenswert einfache Ableitung. Die „reagierenden" Stoffe mit den Molzahlen $n_1, n_2, \ldots$ werden aus Behältern mit den Drücken $p_1, p_2, \ldots$ entnommen; und nach der Umwandlung wird jede Molekülgattung $n_1', n_2', \ldots$ in andere Behälter mit den Drücken $p_1', p_2', \ldots$ hineingedrückt. In der „Maschine", die hier durch einen einfachen „Kasten" vertreten wird, findet eine iso-

thermische Umwandlung (Verbrennung) statt, die, wenn die Stoffarten durch A_1, A_2 ... und A_1', A_2', ... bezeichnet werden, der betreffenden **chemischen Gleichung**



$$n_1 A_1 + n_2 A_2 + \dots \rightleftarrows n_1' A_1' + n_2' A_2' + \dots \quad (42)$$

genügen muß. Beispielsweise wäre bei der Wasserbildung $2\,H_2 + O_2 \rightleftarrows 2\,H_2O$ und man hätte $n_1 = 2$; $n_2 = 1$; $n_1' = 2$. Um den isothermischen Zustand aufrechtzuerhalten, wird dem Kasten Wärme entzogen oder mitgeteilt, die aus den einzelnen Heizwerten (der Wärmetönung) gemäß Gl. (42) berechnet werden kann, allein für das weitere nicht in Betracht kommt.

Eine Arbeit wird bei dieser Vorrichtung dadurch gewonnen, daß man die Stoffe B mittels idealer Kolbenmaschinen durch **isothermische Verdichtung** oder **Ausdehnung in umkehrbarer** Weise aus ihren Behältern in den chemischen **„Verbrennungsraum"** hinein und aus ihm herausbefördert. Zu diesem Zwecke werden alle Behälter und der „Kasten" auf gleicher Temperatur T erhalten, und jede der Kolbenmaschinen wird mit dem Zentralbehälter durch Leitungen verbunden, in die am Anschluß eine „halbdurchlässige" Scheidewand eingebaut würde, die nur je für die betreffende Molekülgattung durchlässig ist, für die übrigen nicht. So ist Platin nach Planck in glühendem Zustand für H_2 durchlässig, für O_2, N_2 nicht. Bedeuten nun

π_1, π_2, ... die Partialdrücke der Stoffe A_1, A_2 ...
π_1', π_2', ... „ „ „ „ A_1', A_2' ...

im Verbrennungsraum, wo diese Stoffe sich im Zustande der **„Dissoziation"** thermodynamisch das **Gleichgewicht halten,** so wird beim **Hineinbefördern der n_1-Mole** des Stoffes A_1 die Arbeit

$$A \mathfrak{R} T n_1 \ln \frac{p_1}{\pi_1}$$

(in kcal) gewonnen, falls $p_1 > \pi_1$. Wäre $p_1 < \pi_1$, so würde der Logarithmus negativ, man hätte negativen Gewinn, d. h. man müßte Arbeit aufwenden. Ähnliche Ausdrücke gelten für die übrigen Stoffe. Im ganzen wird als Arbeit eines vollzogenen „Spieles" die algebraische Summe

$$L_0 = A \mathfrak{R} T \left[n_1' \ln \frac{\pi_1'}{p_1'} + n_2' \ln \frac{\pi_2'}{p_2'} + \dots + n_1 \ln \frac{p_1}{\pi_1} + n_2 \ln \frac{p_2}{\pi_2} + \dots \right]$$

$$= + A \mathfrak{R} T \ln \frac{p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots}{p_1'^{n_1'} p_2'^{n_2'} \dots} - A \mathfrak{R} T \ln \frac{\pi_1^{n_1} \pi_2^{n_2} \dots}{\pi_1'^{n_1'} \pi_2'^{n_2'} \dots} \quad (43)$$

gewonnen, und dies **ist die der chemischen Gleichung (42) entsprechende Höchstarbeit,** da alle Vorgänge umkehrbar verlaufen sind. Sie muß gleich bleiben, wie wir auch den Prozeß ändern, falls nur Anfangs- und Endzustand sich nicht ändern. Durch Veränderung der Gasfüllung im „Verbrennungsraum" (Hineindrücken von passiven Stoffen in beliebigen Mengen) können sich die Teildrücke π_1, π_2 ... ändern, L_0 muß bleiben. Daraus folgt, daß der Ausdruck

$$K_p = \frac{\pi_1^{n_1} \pi_2^{n_2} \dots}{\pi_1'^{n_1'} \pi_2'^{n_2'} \dots} \quad (43a)$$

von der Größe der π nicht abhängt, sondern bloß eine Funktion der Temperatur sein kann. Gl. (43) kann dann abgekürzt als

$$L_0 = - A \mathfrak{R} T \ln K_p + A \mathfrak{R} T \sum n_1 \ln p_1 \quad (44)$$

geschrieben werden. Da ursprünglich nur die einfachen Verhältnisse π_1/p_1 ... auftreten, kann man alle Drücke in kg/cm² ausgedrückt denken. Andererseits wird bei gleichen Anfangs- und Enddrücken $p_1 p_2 \dots L_0$ durch den allgemein gültigen Ausdruck (37) wiedergegeben. Die Gleichsetzung der beiden ermöglicht es, $\ln K_p$ wie folgt auszudrücken:

$$A \mathfrak{R} T \ln K_p = - H_p + T \int \frac{d H_p}{T} + A \mathfrak{R} T \sum n C_a \quad (45)$$

Besonders einfach wird der Zusammenhang Gl. (44), falls alle Stoffe der Atmosphäre bei $p_1 = p_2 = \dots 1$ kg/cm² entnommen und in diese entlassen werden, da dann alle $\ln p = 0$ sind, so daß man

$$L_0 = - A \mathfrak{R} T \ln K_p \quad (46)$$

erhält. K_p und L_0 bedingen sich gegenseitig; daher ist es von Wert, weitere Bestimmungsmöglichkeiten für K_p zu besitzen. Solche gewinnt man aus der Grundgleichung (19), indem man die Änderung berechnet, die L_0 bei gleichem p, aber um dT erhöhter Temperatur erfährt. Die partielle Differentiation liefert mit Rücksicht auf Gl. (34) und (35)

$$\left(\frac{dL_0}{dT}\right)_p = -(S - S'),$$

also wird

$$L_0 = H_p + T\left(\frac{dL_0}{dT}\right)_p \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (47)$$

In diese **Helmholtzsche Gleichung** schiebt man den Ausdruck (44) ein und erhält

$$\frac{d(\ln K_p)}{dT} = \frac{H_p}{A\Re T^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (48)$$

Man kann in den Ausdruck von K_p den Rauminhalt $\mathfrak{V}$ durch die Gasformel $p = \Re T/\mathfrak{V}$ einführen. In der Chemie ist der Begriff der **Konzentration** z, d. h. die Anzahl der Mole in 1 m³, also

$$z = \frac{1}{\mathfrak{V}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (47\text{b})$$

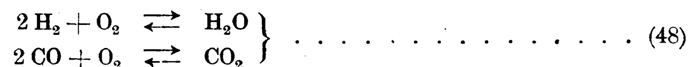
viel gebräuchlich. Man erhält $p = \Re T z$, also

$$K_p = K_z(\Re T)^\nu \quad \text{mit} \quad K_z = \frac{z_1^{n_1} z_2^{n_2} \ldots}{z_1'^{n_1'} z_2'^{n_2'} \ldots} \quad \text{und} \quad \nu = (n_1 + n_2 + \ldots) - (n_1' + n_2' \ldots) \quad (47\text{c})$$

Verläuft die Umwandlung ohne Änderung der Molzahl, d. h. ist $\nu = 0$, so sind K_p und K_z gleich.

Nehmen an der **Umwandlung feste Stoffe** teil, so kann von der Arbeit zu deren Einbringen und Herausschaffen abgesehen werden. Die Form der Funktionen $K_p K_z$ ändert sich nicht, sie enthalten jedoch nur die auf die gasförmigen Stoffe Bezug habenden Größen. Man kann nachweisen, daß auch Gl. (45) ihre Gültigkeit beibehält. Bei der Verbrennung von Kohle nach Formel $C + O_2 = CO_2$ ist demnach $K_p = p_{O_2} : p_{CO_2}$.

Gehen **mehrere Umwandlungen**, die sich gegenseitig nicht beeinflussen, **gleichzeitig** vor sich, so kann im Versuch von Van t'Hoff jede für sich vorgenommen werden, und für jede gilt Beziehung (43), als ob die übrigen nicht vorhanden wären. Wohl aber findet insofern eine Beeinflussung statt, als eine und dieselbe Molekülgattung in mehreren Umwandlungen vorkommt. Beispielsweise mögen die Umwandlungen



$$\left.\begin{array}{l} 2\,H_2 + O_2 \rightleftarrows H_2O \\ 2\,CO + O_2 \rightleftarrows CO_2 \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (48)$$

gleichzeitig vor sich gehen. Berechnen wir die bei **vollständiger Verbrennung** einer beliebigen Menge vorhandenen Molzahlen und, es seien diese

für	H_2	O_2	H_2O	CO	CO_2	N_2
	0	n_0	n_1	0	ν_1	n_2

In Wahrheit wird die Verbrennung keine vollständige sein, und es bleiben bei einer bestimmten Temperatur T, x Mole von H_2O und y Mole von CO_2 zersetzt, oder wenn wir das Gemisch von tiefer Temperatur aus erhitzen: es dissoziieren sich x Mole H_2O, y Mole CO_2. Dadurch werden x Mole H_2, y Mole CO und $(x + y)/2$ Mole O_2 gebildet. Somit sind die wirklichen Molzahlen

für	H_2	O_2	H_2O	CO	CO_2	N_2
	x	$n_0 + \frac{x+y}{2}$	$n_1 - x$	y	$\nu_1 - y$	n_2

Bezeichne man die Summe vor der Dissoziation mit

$$n = n_0 + n_1 + \nu_1 + n_2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (49)$$

so ist sie nach der Dissoziation]

$$n' = n + \frac{x+y}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (49\text{a})$$

Die Teildrücke stehen im Verhältnis der Molzahlen, und es ist, wenn p den Gesamtdruck bedeutet, der Teildruck

$$\text{für } H_2 \quad p_1 = \frac{x}{n'}p; \qquad \text{für } O_2: p_2 = \frac{n_0 + \frac{x+y}{2}}{n'}p; \qquad \text{für } H_2O; \quad p_3 = \frac{n_1 - x}{n'}p \quad \ldots \quad (50)$$

Ähnliche Ausdrücke gelten für CO, CO_2, N_2.

Die Dissoziationsgleichung (43a) lautet dann für Wasserdampf:

$$K_{p_H} = \frac{p_1^2 p_2}{p_3^2} = \frac{x^2\left(n_0 + \frac{x+y}{2}\right)}{(n_1 - x)^2\left(n + \frac{x+y}{2}\right)} p \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (51)$$

ähnlich ergibt sich für Kohlensäure

$$K_{p_{CO}} = \frac{y^2\left(n_0 + \frac{x+y}{2}\right)}{(\nu_1 - y)^2\left(n + \frac{x+y}{2}\right)} p \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (52)$$

Aus diesen Gleichungen wären im allgemeinen Fall x und y zu bestimmen. Da jedoch bei Atmosphärendruck unter 2000° abs. die Zersetzung eine sehr geringfügige ist, kann man näherungsweise x und y neben den anderen Molzahlen vernachlässigen, und erhält die einfache Auflösung

$$\frac{x}{n_1} = \sqrt{\frac{n}{n_0}\frac{K_{p_H}}{p}}; \qquad \frac{y}{\nu_1} = \sqrt{\frac{n}{n_0}\frac{K_{p_{CO}}}{p}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (53)$$

Der Fall $n_0 = 0$, dem aber praktisch keine Bedeutung zukommt, ist leicht auf ähnliche Weise zu lösen.

k) Zahlenwerte von L_0 und K_p. Auf dem Wege der Rechnung wird man aus den als bekannt vorausgesetzten spezifischen Wärmen nach Gl. (35) H_p, daraus nach Gl. (37) L_0 bestimmen, welches für den Fall, daß alle Teildrücke = 1 at sind, nach Gl. (46) K_p ergibt. Gelingt es, wie im Abschnitt über Gasturbinen dargelegt wurde, die spezifischen Wärmen als quadratische Funktionen von T darzustellen, so wird H_p die Form

$$H_p = H_{p0} + aT + bT^2 + cT^3 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (54)$$

annehmen. Nach Gl. (37) ist dann

$$L_0 = H_{p0} + aT(1 - \ln T) - bT^2 - \frac{c}{2}T^3 - A\mathfrak{R}T\sum nC_\alpha \quad \ldots \ldots \quad (55)$$

Die Bedingung, daß alle Teildrücke vor und nach der Verbrennung = 1 kg/cm² sein müssen, zeigt, daß es sich um eine Maschine handelt, bei der die Abgase entweder nicht als Gemisch austreten oder dann durch halbdurchlässige Wände gesiebt und auf 1 at verdichtet werden. Wir kommen auf den hierdurch verursachten Arbeitsverlust unten zurück.

Der thermische Wirkungsgrad der vollkommenen Maschine Van t'Hoffscher Art

$$\eta_0 = \frac{L_0}{H_p} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (56)$$

bezogen auf den zur jeweiligen Temperatur gehörender Heizwert zeigt für die hauptsächlichen Brennstoffe eine höchst einfache Abhängigkeit von der Temperatur. Man darf für eine **ungefähre Übersicht** angenähert setzen

$$\eta_0 = 1 - \frac{T_0}{T_u} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (57\,a)$$

wobei folgende Zahlenwerte gelten:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Für die Umwandlung } 2\,CO + O_2 = 2\,CO_2 & \text{gilt} & T_u = 3200 \\ \text{,, ,, ,, } 2\,H_2 + O_2 = 2\,H_2O & \text{,,} & T_u = 4500 \\ \text{,, ,, ,, } C + O_2 = CO_2 & \text{,,} & T_u = 50000 \\ \text{,, ,, ,, } CH_4 + 2\,O_2 = CO_2 + 2\,H_2O & \text{,,} & T_u = 33000 \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (57\,b)$$

Genauer wäre, insbesondere für H_2 die Form $\eta_0 = \eta_a - T_0/T_u$ mit $\eta_a > 1$.

Stufenweise Verbrennung von C. Es bezeichne H_1, H_2, H den Heizwert für die Verbrennungen $C + O_2/2 = CO$; $CO + O_2/2 = CO_2$; $C + O_2 = CO_2$. Ferner seien die Entropien von C, CO, CO_2 bzw. S, S_1, S_2. Dann können die Höchstarbeiten der drei Prozesse als

$$L_1 = H_1 - T(S - S_1); \qquad L_2 = H_2 - T(S_1 - S_2); \qquad L = H - T(S - S_2)$$

geschrieben werden. Da $H_1 + H_2 = H$, so ist auch $L_1 + L_2 = L$. Die thermischen Wirkungsgrade seien

$$\eta_1 = \frac{L_1}{H_1} = 1 - \frac{T}{T_{1u}}; \qquad \eta_2 = \frac{L_2}{H_2} = 1 - \frac{T}{T_{2u}}; \qquad \eta = \frac{L}{H} = 1 - \frac{T}{T_u}.$$

Man kann den letzten wie folgt ausdrücken:

$$\eta = \frac{L_1 + L_2}{H} = \frac{L_1}{H_1}\frac{H_1}{H} + \frac{L_2}{H_2}\frac{H_2}{H} = \eta_1 \frac{H_1}{H} + \eta_2 \frac{H_2}{H}.$$

Daraus folgt der unmittelbar schwer bestimmbare Wert

$$\eta_1 = \frac{H}{H_1}\left(1 - \frac{T}{T_u}\right) - \frac{H_2}{H_1}\left(1 - \frac{T}{T_{u2}}\right) = 1 + \frac{T}{T_{u1}} \quad \text{mit} \quad + \frac{1}{T_{u1}} = \frac{H_2}{H_1 T_{u2}} - \frac{H}{H_1 T_u}.$$

Der Zahlenbetrag von T_{u1} darf der Größenordnung nach auf $\sim$ 1600 eingeschätzt werden und ist von der Temperatur abhängig. Das wichtige an dem Ergebnis ist, daß **der thermische Wirkungsgrad der motorischen Verbrennung von C zu CO mit wachsender Temperatur über den Wert 1 hinausgeht,** daß also hier **Wärme der Umgebung in mechanische Arbeit mitverwandelt wird.** Praktisch ist diese Tatsache bedeutungslos, da man das erzeugte CO gewiß nicht in die Atmosphäre entweichen lassen wollte; bei dessen motorischer Verbrennung zu CO_2 muß aber so viel Wärme an die Umgebung abgeliefert werden, daß **gegenüber der unmittelbaren Verbrennung** von C zu CO_2 selbstredend **kein Vorteil erzielbar ist.**

Dabei sind die Heizwerte näherungsweise die folgenden:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{für 2 Mole CO:} && H_p = 135000 + 444{,}2\,(T/100) - 40{,}7\,(T/100)^2 + 0{,}693\,(T/100)^3 \\
&\text{„ 2 „ } H_2: && H_p = 113860 + 418{,}6\,(T/100) + 12{,}7\,(T/100)^2 - 0{,}876\,(T/100)^3 \\
&\text{„ 1 kg at C:} && H_p = 97700 + 50{,}3\,(T/100) \\
&\text{„ 1 Mol } CH_4: && H_p = 191000 - 213{,}0\,(T/100) - 6{,}48\,(T/100)^2
\end{aligned}\right\} \quad (57\text{c})$$

Der letztangeführte Wert ist eine Extrapolation, die höchstens bis 1000° abs. gelten wird.

Gehen mehrere der Umwandlungen Gl. (57b) gleichzeitig vor sich, so kann der Wirkungsgrad wie folgt gefunden werden. Aus der Grundformel $L = H_p - T(S - S')$, die wir für zwei Prozesse, wenn sie sich getrennt abspielen, in der abgekürzten Form

$$L_1 = H_1 - T\Delta S_1; \quad L_2 = H_2 - T\Delta S_2 \quad \ldots\ldots\ldots (57\text{d})$$

anschreiben, folgen die Wirkungsgrade $\eta_1 = 1 - \frac{T\Delta S_1}{H_1}$; $\eta_2 = 1 - \frac{T\Delta S_2}{H_2}$. Bei gleichzeitiger Wirkung ist $L = H_1 + H_2 - T(\Delta S_1 + \Delta S_2)$, somit $\eta = 1 - T\frac{\Delta S}{H}$. Setzt man ΔS_1; ΔS_2 aus (57d) ein, so erhält man $\eta = \eta_1 \frac{H_1}{H} + \eta_2 \frac{H_2}{H}$. Nach (57a) ist aber $\eta_1 = 1 - T/T_{u1}$; $\eta_2 = 1 - T/T_{u2}$, und diese Werte in η eingeschoben liefern

$$\eta = 1 - \frac{T}{T_{mu}} \quad \text{mit} \quad \frac{1}{T_{mu}} = \frac{H_1}{T_{u1} H} + \frac{H_2}{T_{u2} H} \quad \ldots\ldots\ldots (58)$$

Für die aus L_0 zu ermittelnden Temperaturfunktionen $K_p K_z$ finden Nernst, Schüle[1]) und Nusselt, wenn die Drücke in kg/cm² ausgedrückt werden, folgende Werte (in Briggschen Logarithmen)

T	400	1000	1500	2000	3000
für Kohlensäure $\log K_p$.	— 64,9	— 20,2	—	— 5,3	— 0,5
$\log K_z$.	—	—	— 16,3	— 11,6	— 6,9
für Wasserdampf $\log K_p$.	—	— 19,7	— 11,0	— 6,6	—
$\log K_z$.	—	—	— 17,5	— 11,2	— 9,1

Aus diesen Zahlen erhellt, im Hinblick auf Gl. 53), daß man **in den technischen Abgasen von der Dissoziation bis über 1500° abs. absehen kann.**

Auch während der Verbrennung spielt die Dissoziation nur eine kleine Rolle. Wir verweisen auf die grundlegende Abhandlung von Nusselt[2]).

l) Abnahme der Entropie nach der Verbrennung, auf gleiches p, T bezogen. Bei der Verbrennung von C, CO, H_2-Gemischen nimmt die Entropie ab, und ihre Änderung kann bequem (wenn auch

[1]) Thermodynamik Bd. II, indes mit Außerachtlassung der Glieder α/AR in Gl. (27) a. a. O.

[2]) Z. f. d. ges. Turbinenwesen 1917, S. 25.

nur angenähert) mit Hilfe der Formeln (57a) (58) ermittelt werden. Es ist nämlich für die vollkommene Maschine bei beliebiger Temperatur und dem Anfangs- und Enddruck $p_0 = 1$ kg/cm²

$$\eta_0 = 1 - \frac{T}{T_{um}} = \frac{L_0}{H_p} = \frac{H_p - T(S - S')}{H_p}.$$

Daraus folgt, wenn der Zustand durch Fußzeichen angedeutet wird,

$$S_{p_0 T} - S'_{p_0 T} = \frac{H_{p_0 T}}{T_{um}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (58a)$$

Bei einem anderen Druck p, aber der gleichen Temperatur T erhält man mit Rücksicht auf Gl. (32)

$$S_{pT} - S'_{pT} = \frac{H_{p_0 T}}{T_u} - \nu A \Re \ln \frac{p}{p_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (58b)$$

Da $\nu = \Sigma n - \Sigma n'$ meist positiv zu sein pflegt, so wird die Abnahme $S - S'$ mit steigendem Druck etwas kleiner.

Da ferner die Änderung von H_p nicht bedeutend ist, erkennt man, daß **die Abnahme der Entropie von C, CO, H_2-Gemischen von der Temperatur fast unabhängig, bei reinem Kohlenstoff fast = Null ist.**

m) Arbeitsverlust infolge nicht umkehrbarer Mischung der gasförmigen Bestandteile. In der Wirklichkeit werden die gasförmigen Bestandteile nicht durch halbdurchlässige Wände hindurch in den Verbrennungsraum mit den ihnen zukommenden Teildrücken hineingepreßt, sondern mischen sich und diffundieren ineinander. Der Energieinhalt (also die Temperatur) ändert sich nicht, wohl aber nimmt die Entropie wegen der Raumzunahme zu. Es ist als ob jeder Bestandteil in den von den übrigen eingenommenen Raum wie in ein Vakuum arbeitslos überströmen würde. Sei p der gemeinsame Druck vor und nach der Mischung, und es seien

$n_1, n_2, n_3, \ldots$ die Molzahlen, $p_1, p_2, p_3, \ldots$ die Teildrücke nach der Mischung.

Mit $n = n_1 + n_2 + \ldots$ bestimmen sich die letzteren zu

$$p_1 = \frac{n_1}{n} p; \quad p_2 = \frac{n_2}{n} p; \quad \ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (59)$$

Die Entropiesumme vor der Mischung ist

$$S = \Sigma n \left(\int \frac{\mathfrak{C}_p \, dT}{T} - A \Re \ln p + \mathfrak{S}_0 \right)$$

in ähnlicher Weise sei sie als S^* nach der Mischung ausgedrückt, wobei nur p durch $p_1, p_2, \ldots$ zu ersetzen ist. Der Arbeitsverlust ist dann

$$\Delta L = T(S^* - S) = A \Re T \left[n_1 \ln \frac{p}{p_1} + n_2 \ln \frac{p}{p_2} + \ldots \right] \quad \ldots\ldots\ldots (60)$$

Er stellt, wie man sieht, die **Summe der Arbeiten dar, die durch isothermische Ausdehnung der Bestandteile von p je auf ihren Teildruck gewonnen werden könnte.**

Schiebt man (59) ein, so entsteht

$$\Delta L = T(S^* - S) = A \Re T \ln \left\{ \left(\frac{n}{n_1}\right)^{n_1} \left(\frac{n}{n_2}\right)^{n_2} \ldots \right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (61)$$

In Wirklichkeit werden einer Brennkraftmaschine das frische Gas und die Luft schon als Gemische zugeführt. Enthalten dieselben keinen gemeinsamen Bestandteil, so darf man Gl. (61) anwenden, indem man unter $n_1 n_2$ die Gesamtzahl der Gas- und Luftmole versteht.

Beispiel. 1 Mol Gas, welches einen Heizwert von 1066 kcal/m³ besitzt, möge mit 2 Mol Luft gemischt werden. Bei $T = 288$ ist mit $n_1 = 1$; $n_2 = 2$; $n = 3$ der Verlust nach Gl. (61) $\Delta L = 1090$ kcal der gesamte Heizwert $H = 1066 \cdot 24{,}2$, mithin der Verlust in Teilen des Heizwertes

$$\zeta = \frac{\Delta L}{H} = \frac{1090}{25800} = 0{,}042 \text{ oder } 4{,}2 \text{ v. H.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (61a)$$

In seiner Abhandlung[1]) über diesen Gegenstand sagt Nusselt, daß der Diffusionsverlust bei der Mischung von Gas und Luft gleich bleibt, selbst wenn das Gas beträchtliche Mengen nicht brennbarer Bestandteile, z. B. beim Luftgas Stickstoff enthalte. Dem ist aber nicht so. Sonst würden zwei gleichgeartete Gase bei gleichem Druck und gleicher Temperatur zusammengebracht durch gegenseitige „Diffusion" auch eine Entropievermehrung erfahren, was seit Gibbs als unrichtige Folgerung erkannt ist. Man muß vielmehr die Entropie des gemeinsamen Bestandteiles mit dem nach der Mischung sich einstellenden resultierenden Teildruck für die ganze Menge als einheitliche Größe berechnet in die Grundformel $\Delta L = T(S^* - S)$ einsetzen.

[1]) Z. f. d. ges. Turbinenwesen, 1917, S. 3.

Beispiel. Eine Mischung von zwei Gasen mit den Molzahlen n_1, n_2 werde bei gleichem p, T mit der Mischung von zwei Gasen mit den Molzahlen n_3, n_4 zusammengebracht. Dabei mögen n_2 und n_3 der gleichen Stoffart angehören. Man findet mit $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$

$$\Delta L = A \Re T \left[n_1 \ln \frac{n}{n_1 + n_2} + n_2 \ln \frac{n_2 n}{(n_1 + n_2)(n_2 + n_3)} + n_3 \ln \frac{n_3 n}{(n_2 + n_3)(n_3 + n_4)} + n_4 \ln \frac{n}{n_3 + n_4}\right] \quad (61\text{b})$$

Es möge nun das erste Gemische bestehen aus $n_1 = 0{,}48$ Gas, $n_2 = 0{,}52\, N_2$ das zweite Gemisch (Luft) aus $n_3 = 1{,}42\, N_2$; $n_4 = 0{,}42\, O_2$, so daß wieder 1 und 2 Mole mit gleichem Heizwert wie im ersten Beispiel zusammentreffen. Formel (61b) ergibt bei $T = 288$ abs.

$$\zeta' = \frac{320}{25800} = 0{,}0124 \quad \text{oder} \quad 1{,}24 \text{ v. H.} \quad (61\text{c})$$

Der Verlust ist auf weniger als ein Drittel des ursprünglichen Wertes gesunken.

Da nun obiges Beispiel ein Mittel der im praktischen, im Gasmaschinenbetrieb vorkommenden Verhältnisse darstellt, so **können wir feststellen, daß der Verlust der nichtumkehrbaren Gas- und Luftvermischung ein praktisch belangloser ist,** wie Nernst schon vor Jahren ausgesprochen hat.

Entmischung der Abgase. Die Grundformel

$$L_v = H_p - T(S - S') \quad (62)$$

gilt unabhängig davon, ob die Abgase gemischt bleiben, oder ob man sie, wie in Gl. (46) vorausgesetzt wird, entmischt; allein man muß in beiden Fällen den richtigen Wert für S' einsetzen. Bei einer Entmischung wird S' kleiner und L_0 würde um den Betrag

$$\Delta L' = A \Re T \left[n_1' \ln \frac{p'}{p_1'} + n_2' \ln \frac{p'}{p_2'} + \ldots\right] \quad (63)$$

wo die Striche die Abgase kennzeichnen sollen, vermindert. Wenn beispielsweise die Abgase aus je einem Mol CO_2 und N_2 bestehen, die getrennt aus der Maschine beim Drucke von 1 at austreten, so ist S' gleich groß, als wenn man sie gemischt (im halb so großen Rauminhalt) beim Drucke von 2 at und gleicher Temperatur entweichen lassen würde. In letzterem Falle kann aber durch isothermische Ausdehnung die Zusatzarbeit $\Delta L'$ genommen werden.

Dieser Unterschied ist beim Gebrauch der Formel (46) wohl zu beachten. Dabei fällt als **scheinbarer Widerspruch auf,** daß die offenbar **„vollkommene" Van t'Hoffsche Maschine** eine **kleinere Arbeit liefert** als die **minder vollkommene,** die eine **Gasmischung zuläßt.** Hiergegen ist jedoch nichts einzuwenden, denn thermodynamisch kommt es nur darauf an, daß ein vorgeschriebener Endzustand aus dem vorgeschriebenen Anfangszustand auf rein umkehrbarem Wege erreicht werde. Wünscht man die Abgase in ihre Bestandteile geschieden zu erhalten, dann muß man die nach Van t'Hoff erforderliche größere Arbeit aufwenden.

Der Gewinn bei Belassung der Abgase in ihrer Vermischung ist übrigens nicht beträchtlich. Betrachten wir beispielsweise eine Maschine mit reinem CO Betrieb, von welchem 1 Mol mit 2facher theoretischer Luftmenge, d. h. mit 4,76 Mol verbrannt wird. Um die größte Arbeit in der Van t'Hoffschen Maschine zu gewinnen, muß man $O_2 N_2$ in der Luft trennen, jedoch nur in der theoretischen Menge, d. h. um 0,5 Mol O_2 zu erhalten. Die Gegenwart der überschüssigen Gase beeinflußt den Wirkungsgrad nicht, sie braucht die Van t'Hoffsche Maschine nicht zu durchlaufen. Das als Produkt erhaltene CO_2-Mol wird nun mit dem überschüssigen $O_2 N_2$-Rest umkehrbar gemischt. Zieht man von der erhaltenen Arbeit den Aufwand für die Trennung des $O_2 N_2$ in 2,38 Mol theoretischer Luft ab, so bleibt als reiner Gewinn die Arbeit von 766 kcal übrig. Der Heizwert von 1 Mol CO bei 1 kg/cm² und 288° abs. 15° C ist $2800 \cdot 24{,}2$ und so ergibt sich ein Gewinn an Wirkungsgrad von $766 : 2800 \cdot 24{,}2 = 0{,}0113$ oder 1,13 v. H. Bei einer anderen Temperatur T ist der Gewinn $0{,}0113 \cdot T/288$. **Der Wirkungsgrad der ohne Entmischung arbeitenden CO-Maschine bei 2facher Luftmenge ist also** mit Rücksicht auf Gl. (57a)

$$\eta = 1 - \frac{T}{3200} + \frac{0{,}0113\, T}{288} = 1 - \frac{T}{3660} \quad (63\text{a})$$

Die Änderung ist im Bereiche der praktisch wichtigen Temperaturen gering.

n) Einfluß chemisch unbeteiligter durch den Prozeß gehender Körper. Chemisch unbeteiligt ist der Stickstoff (bis auf Spuren, die bekanntlich stets mitverbrennen), der überschüssige Sauerstoff, anfänglich vorhandene Kohlensäure u. a. Da wir für die praktisch in Betracht fallenden Verhältnisse (atmosphärischer Druck und Temperatur) von einer Dissoziation absehen können, so kommen diese Stoffe vor und nach der Verbrennung mit gleichen Molzahlen vor. Sofern es sich um die Verbrennung von fester Kohle handelt, ist auch die gesamte Molzahl gleich groß, daher ändert sich der Teildruck der passiven Stoffe nicht. Bei gasförmigen Brennstoffen nimmt die Molzahl meist ab, die Teildrucke nehmen etwas zu. Doch ist der Einfluß unbedeutend; praktisch genommen haben die passiven Stoffe vor und nach der Verbrennung gleichgroße Entropien, die sich im Unterschied $S - S'$ wegheben. Auch auf H_p üben sie keinen Einfluß, da diese Größe den gesamten Heizwert der frischen „Ladung" bedeutet.

Daraus folgt: **Die Gegenwart chemisch unbeteiligter Körper ändert praktisch die Höchstarbeit nicht in merklichem Maße.**

Spielt sich der Prozeß jedoch bei höherer Temperatur ab, so ändert sich der Dissoziationsgrad der Abgase je nach der Menge der Beimischungen, und der Einfluß kann merklich werden.

o) Arbeitsverlust infolge der nichtumkehrbaren Verbrennung. Die Brennstoffe bilden während der Verbrennung, wie sie in Wirklichkeit vor sich geht, kein „Dissoziationsgleichgewicht", daher ist die Verbrennung ein nichtumkehrbarer Vorgang; für das folgende wird die Dissoziation als so klein vorausgesetzt, daß die Verbrennung eine vollständige ist.

Betrachten wir eine Gasmaschine (oder Turbine), bei der das Ladegemisch vom Zustand $p_0\,T_0$ adiabatisch auf $p_2\,T_2$ verdichtet und **bei gleichbleibendem Druck verbrannt** wird, so daß man Zustand $p_2\,T_3$ erreicht. Indem wir mit Fußzeichen Druck und Temperatur und durch einen Strich die vollzogene Verbrennung andeuten, wird die Entropievermehrung während der Verbrennung $\Delta S = S'_{p_2 T_3} - S_{p_2 T_2}$ und der Arbeitsverlust ist, wenn T_0 die Temperatur der Umgebung bedeutet

$$\Delta L = T_0 (S'_{p_2 T_3} - S_{p_2 T_2}) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (66)$$

Im Sinne der Gl. (22a), Abschn. Nr. 201, erreicht man $p_2\,T_3$ auch, indem man bei $p_2\,T_2$ die Mischung verbrennt, wodurch ihre Entropie in $S'_{p_2 T_2}$ übergeht, und indem man nun den Heizwert H_{p_2} „von außen" zuführt. Ist T_{zm} eine bestimmte mittlere Verbrennungstemperatur, so kann man

$$H_{p_2 T_2} = T_{zm} (S'_{p_2 T_3} - S'_{p_2 T_2}) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (67)$$

schreiben. Ferner ist

$$S'_{p_2 T_3} - S_{p_2 T_2} = (S'_{p_2 T_3} - S'_{p_2 T_2}) - (S_{p_2 T_2} - S'_{p_2 T_2}) \quad \ldots \ldots \ldots (67\text{a})$$

Den zweiten Klammerausdruck kann man nach Gl. (58b) umformen und erhält

$$\Delta L = T_0 \left[\frac{H_{p_2 T_2}}{T_{zm}} - \left(\frac{H_{p_0 T_2}}{T_{um}} - \nu A \mathfrak{R} \ln \frac{p_2}{p_0}\right)\right] \quad \ldots \ldots \ldots (68)$$

Wenn man hierin angenähert $H_{p_2 T_2} = H_{p_0 T_0}$ setzt, und von der Raumverminderung ν absieht, so erhält man die durch ΔL verursachte Wirkungsgradabnahme

$$\zeta = \frac{\Delta L}{H_{p_0 T_0}} \simeq \frac{T_0}{T_{zm}} - \frac{T_0}{T_{um}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (68\text{a})$$

Für eine bestimmte Gasbeschaffenheit und „Umgebung" (d. h. Kühlwasserbeschaffenheit) sind $T_{um}, T_0, H_{p_0 T_0}$ gegebene Werte, und man erkennt, daß ζ **um so mehr abnimmt, je größer T_{zm}, d. h. je höher die Vorverdichtung getrieben wird.** So erhält eine von der klassischen Thermodynamik aus ganz anderen Gesichtspunkten abgeleitete alte Regel ihre neuartige Begründung.

Man kann den Einfluß der Verdichtung wie folgt abschätzen. Bei im ganzen n' Molen ist $H_{p_2 T_2} = n'\overline{\mathfrak{C}}_p'(T_3 - T_2)$, wenn $\overline{\mathfrak{C}}_p$ einen Mittelwert bedeutet. Mit der Abkürzung $T_h = H_{p_2}/n'\overline{\mathfrak{C}}_p'$ folgt $T_3 = T_2 + T_h$ und angenähert $T_{zm} = (T_2 + T_3)/2 = T_2 + T_h/2$, also erhält man

$$\zeta = \frac{T_0}{T_2 + T_h/2} - \frac{T_0}{T_{um}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (69)$$

Beispiel. Für ein Gasgemisch von CO, H_2 sei $T_{um} = 3600$ abs., $T_0 = 288$ abs., $T_h = 1460$ abs. (Gl. (69) liefert

Bei der Verdichtungstemp.	T_2 abs.	288	580	830	1000	1500
Verdichtungsverhältnis	p_2/p_1	1	11,6	40	77,2	324
Arbeitsverlust	ζ in $v \cdot H$	20,3	14,0	10,5	8,6	4,9

Hieran erkennt man, daß der Verlust insbesondere beim Prozeß ohne Vorverdichtung mit 20 v. H. ein ganz erheblicher ist. Bei 40facher Verdichtung sinkt er auf rund 10 v. H., und so könnte im **Dieselmotor, wenn man alle übrigen Verluste zu vermeiden vermöchte, ein Wirkungsgrad von 90 v. H. erreicht werden.**

p) Der thermische Wirkungsgrad unter der Annahme, daß die Verbrennung die einzige Nichtumkehrbarkeit des Arbeitsganges bildet.

α) Bei der Gleichdruckverbrennung ergibt sich mit der in 68a eingeführten Näherung $H_{p_2 T_2} = H_{p_0 T_0}$

$$\eta_{\text{nicht umkehrb.}} = \eta_{\text{umkehrb.}} - \zeta = 1 - \frac{T_0}{T_{um}} - \left(\frac{T_0}{T_{zm}} - \frac{T_0}{T_{um}}\right) = 1 - \frac{T_0}{T_{zm}} \quad \ldots . (70)$$

Dabei ist T_{zm} nach (67) als mittlere Verbrennungstemperatur zu ermitteln. Will man die genannte Annäherung nicht zulassen, so wird der allgemeine Ausdruck

$$L = H_{p_0 T_0} - T_0 [S_{p_0 T_0} - S'_{p_0 T_0}] - \Delta L$$

zu benutzen sein, wo $\varDelta L$ den Ausdruck (66) bedeutet. Da allgemein

$$S_{pT} = n\int^{T}\frac{\mathfrak{C}_p\,dT}{T} - A\mathfrak{R}n\ln p - n\Xi_0$$

bedeutet, erhält man, wenn alle S eingesetzt und in dieser Form ausgedrückt werden

$$L = H_{p_0T_0} - T_0\left[\int_{T_0}^{T_2}\frac{dH_p}{T} - \nu A\mathfrak{R}\ln\frac{p_2}{p_0} + S'_{p_2T_3} - S'_{p_2T_2}\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (71)$$

Man kann also L und damit η ausrechnen, ohne den Unterschied der Entropie vor und nach der Verbrennung zu kennen.

Dies leuchtet übrigens unmittelbar ein, wenn man überlegt, daß nach dem Energiesatz

$$L = H_{p_0T_0} - Q_a \quad \ldots\ldots\ldots \quad (72)$$

sein muß, wo Q_a die an die Umgebung abzuleitende Wärme bedeutet. L ist bestimmt, sobald Q_a bestimmbar gemacht wird. Daß dies mit Hilfe der Entropietafel **graphisch leicht gelingt,** hat Verfasser in der Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1898, S. 1045, gezeigt. Hierbei wurde für die

q) Isothermische Verbrennung die Formel des Wirkungsgrades abgeleitet, die hier Aufnahme finden möge. Der von mir a. a. O. als „erweiterter Carnotprozeß" bezeichnete Arbeitsvorgang beginne beim Zustand $p_0\,T_0\,v_0$ mit einer adiabatischen Verdichtung auf $p_1\,T_1\,v_1$. Hierauf finde isothermische Verbrennung (die zugleich „adiabatisch" ist, weil man keine Wärme zu- oder ableitet) bis zum Zustand $p_2\,T_1\,v_2$ statt und eine adiabatische Ausdehnung auf $p_3\,T_0\,v_3$. Endlich isothermische Verdichtung auf $p_0\,T_0\,v'$. Wir **schließen eine Raumverminderung aus,** d. h. wir setzen $n = n'$: $\nu = 0$, $v_0 = v'$. Die Energiegleichung der Verbrennung lautet

$$U_{p_1T_1} = U'_{p_2T_1} + L_{1-2} \qquad \text{oder} \qquad U_{p_1T_1} - U'_{p_1T_1} = U'_{p_2T_1} - U'_{p_1T_1} + L_{1-2} \quad \ldots \quad (73)$$

wenn L_{1-2} die Ausdehnungsarbeit bedeutet. Am angegebenen Orte wurde bewiesen, daß die Isotherme bei $n = n'$ das Gesetz $pV =$ konst. befolgt; daher ist $L = T_1 ARG \ln p_1/p_2$. Die linke Seite in (73) ist $H_{p_1T_1}$; rechts ist $U'_{p_2T_1} = U'_{p_1T_1}$, da wir vollkommene Gase voraussetzen, es bleibt also

$$H_{p_1T_1} = A\mathfrak{R}T_1 n' \ln\frac{p_1}{p_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (74)$$

Die „Auspuffwärme" Q_a ergibt sich aus der isothermischen Verdichtung am Ende als

$$Q_a = A\mathfrak{R}n' T_0 \ln\frac{p_0}{p_3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (75)$$

Eine Beziehung zwischen den Pressungen ergibt sich aus der für die Adiabaten geltenden Forderung $S_0 = S_1$ und $S_2' = S_3'$, oder $(S_1 - S_0) + (S_2' - S_3') = 0$, d. h. mit der Entropieformel (32), (35) und mit (74) (75)

$$\int_{T_0}^{T_1}\frac{dH_p}{T} + \frac{Q_a}{T_0} - \frac{H_{p_1T_1}}{T_1} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (76)$$

Hieraus Q_a in $L = H - Q_a$ eingesetzt, liefert

$$L = H_{p_0T_0} - T_0\left[-\int_{T_0}^{T_1}\frac{dH_p}{T} + \frac{H_{p_1T_1}}{T_1}\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (77)$$

Wenn wir in diese Formel die Vereinfachung $\mathfrak{C}_p = a_p + bT$, $\mathfrak{C}_p' = a_p' + b'T$ und insbesondere $a_p' = a_p$ einführen, so ergibt sich schließlich der Wirkungsgrad

$$\eta_{\text{isoth.}} = \frac{L}{H_{p_0T_0}} = \left[1 - \frac{(b'-b)}{2\,H_{p_0T_0}}(T_1 - T_0)\,T_0\right]\frac{T_1 - T_0}{T_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (78)$$

Diese Formel wurde von Nusselt[1]) dahin gedeutet, daß in ihr nur der Einfluß der veränderlichen Wärmetönung bei einem gewöhnlichen Carnotprozeß zwischen den Temperaturen T_0, T_1 zum Ausdruck kommt. Diese Ansicht trifft nicht zu denn es ist unter den gleichen Annahmen

$$H_{p_1T_1} = H_{p_0T_0} - \frac{b'-b}{2}(T_1^2 - T_0^2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (78\text{a})$$

und hieraus ergibt sich der Wirkungsgrad eines wirklichen Carnotprozesses, dem $H_{p_1T_1}$ bei der Temperatur T_1 „von außen" zugeführt wird, für den jedoch als **„verfügbare" Energie nach wie vor $H_{p_0T_0}$ angesehen werden muß**

$$\eta_{\text{Nusselt}} = \frac{H_{p_1T_1}}{H_{p_0T_0}}\left(\frac{T_1 - T_0}{T_1}\right) = \left[1 - \frac{(b'-b)}{2\,H_{p_0T_0}}(T_1^2 - T_0^2)\right]\frac{T_1 - T_0}{T_1} \quad \ldots\ldots \quad (78\text{b})$$

---

[1]) Z. f. d. ges. Turbinenwesen, 1917, S. 28.

Der Unterschied ist in die Augen springend; mit dem einfachen Carnotgesetz ist die Übereinstimmung nicht zu erreichen. Formel (78) bleibt der richtige Ausdruck des isothermischen Wirkungsgrades unter den angegebenen Bedingungen.

211. Wie muß der Prozeß günstigster Arbeitsausbeute im einzelnen beschaffen sein?

Der zweite Wärmesatz stellt die einzige Forderung auf, daß wir nichtumkehrbare Prozesse nach Tunlichkeit vermeiden müssen. Da aber jedes vollkommen umkehrbare Verfahren diese Bedingung gleich gut erfüllt, so stehen wir vor der **erstaunlichen Tatsache, daß vom rein thermischen Standpunkt nicht ein, sondern meist unendlich viel verschiedene Prozesse den Höchstbetrag der Arbeitsausbeute gewährleisten können.**

Die theoretische Anweisung, nicht umkehrbare Vorgänge zu vermeiden, trifft in vielen Punkten mit dem zusammen, was die alltägliche Erfahrung (der „gesunde Menschenverstand") eingibt. Die hauptsächlichen technischen Nichtumkehrbarkeiten sind ja **die Reibung, die Drosselung, jeder Temperatursprung,** also **Vernichtung kinetischer Energie, Wärmeverluste,** und es ist selbstverständlich, daß wir diese nach Möglichkeit zu vermeiden suchen werden. Dies gelingt für die beiden ersten Arten, indem wir die Herstellung der Maschine verfeinern und geeignete Geschwindigkeiten und Querschnitte wählen. Der Temperatursprung kann herabgesetzt werden durch genügend durchlässige und große Heiz- bzw. Kühlflächen.

Endlich werden wir **den „Arbeitskörper" aus der Maschine mit der Temperatur und dem Druck der Umgebung** und mit verschwindend kleiner Geschwindigkeit **entlassen,** d. h. **die Abwärme tunlichst verwerten.**

Alles andere ist bei voller Umkehrbarkeit der Prozesse willkürlich; insbesondere ist es theoretisch zulässig, bei beliebig niedrigen Temperaturen zu arbeiten; ja in der Grenze wäre der isothermische Vorgang bei Atmosphärentemperatur der bequemste. Sobald aber mit Rücksicht auf die praktische Ausführung eine erste Nichtumkehrbarkeit unvermeidbar ist, hört die Willkürlichkeit auf und die Fortsetzung des Prozesses muß die unter den gegebenen Umständen günstigsten Wege einschlagen. Es ist nützlich, sich dies an einigen Beispielen klar zu machen.

a) Der Dampfturbinenprozeß.

Für die mit Dampf arbeitende Maschine muß man es als eine unabänderliche Notwendigkeit hinnehmen, daß die Kohle unter dem Kessel auf die übliche Weise verbrannt wird, daß also die Heizgase mit der Verbrennungstemperatur unter Atmosphärendruck als Energieträger „angeliefert" zu gelten haben, während das zu verdampfende Wasser mit Kühlwassertemperatur in den Kreislauf eintritt. Die nicht im Zustande chemischen Gleichgewichtes erfolgende Verbrennung bildet die erste große Nichtumkehrbarkeit, die man nur umgehen könnte, wenn man zum Brennkraftmotor überginge. Nachdem die Verbrennungsgase einmal, gewissermaßen als endlichgroßer Wärmebehälter, gegeben sind, ist die weitere Aufgabe die mit diesem Vorrat möglichst schonend zu verfahren.

Der Idealprozeß, der dem üblichen Arbeitsgang am nächsten kommt, ist das **„Gegenstromverfahren".** Das kalte Speisewasser wird zunächst mit kalten, d. h. mit den abgehenden Heizgasen, und erst nach Maßgabe seiner Erwärmung mit wärmeren Teilen derselben in Berührung gebracht. Sobald Verdampfung eintritt, bleiben freilich Druck und Temperatur unveränderlich, während die Heizgase sich notwendigerweise abkühlen. Dies stellt uns vor eine große Schwierigkeit, die man zwar „theoretisch" überwinden kann, indem man die Verdampfung auch im Gegenstrome mit stetig wachsendem Druck vor sich gehen läßt, allein nur um den Preis großer Verwicklungen im Dampfkessel. Dieser müßte in Abteilungen geteilt sein, die das Dampf- und Wassergemisch der Reihe nach durchläuft, unter jeweiliger adiabatischer Verdichtung auf den nächst höheren Druck. Endlich müßte der Dampf im Gegenstrom auf die Eintrittstemperatur der Verbrennungsgase überhitzt werden. Nachdem der Wärmevorrat auf diese Weise erschöpft wäre, könnte keine Wärmemitteilung und dürfte kein Wärmeentzug stattfinden: Wir müßten adiabatisch umkehrbar (d. h. ohne Reibung und Drosselung) bis auf die Temperatur der Umgebung (des Kondensators) expandieren. Hierauf erreichten wir den Druck der Umgebung durch isothermische Wärmeentziehung (Kondensation) mit entsprechender Verdichtung. Während der Ausdehnung erzeugen wir kinetische Energie, die umkehrbar, d. h. ohne Stoß und ohne Reibung, an das Laufrad abgegeben werden muß, so vollständig als möglich.

Die zweite Hälfte dieses Prozesses wird durch das wirkliche Dampfturbinenverfahren schon in recht befriedigender Weise verwirklicht; die erste Hälfte, der Verdampfungsprozeß, enthält dagegen noch arge Nichtumkehrbarkeiten.

Ein anderer ebenso vollkommener und theoretisch besonders einfacher Idealprozeß ist das folgende Verfahren, welches dem von Lorenz eingeführten polytropischen Prozeß nachgebildet ist. Eine geeignete

Menge Speisewasser wird von Anfang an adiabatisch auf die Temperatur der Heizgase verdichtet, worauf die beiden unter stetem Wärmeaustausch durch vollkommen durchlässige Heizwände im **Parallelstrom umkehrbar** die Umgebungstemperatur erreichen, und zwar die Heizgase unter atmosphärischem Druck, während der Dampf durch Ausdehnung kinetische Energie erzeugt, die wir in der Turbine ausnützen. Schließlich würde der Dampf wieder isothermisch auf Atmosphärendruck verdichtet.

So einfach sich der Prozeß beschreiben läßt, so schwierig wäre seine Verwirklichung. Die adiabatische Verdichtung des Speisewassers würde auf Tausende von Atmosphären führen, und die Wärmezufuhr während der Ausdehnung ist bei der sehr kleinen zur Verfügung stehenden Heizfläche nicht bloß der einstufigen Lavalschen Düse, sondern auch der vielstufigen Turbine so gut wie eine Unmöglichkeit.

Die unendlich vielen **theoretisch vollkommenen Prozesse nützen also dem praktischen Ingenieur wenig. Er muß sich an das historisch Gewordene der Maschine halten und das Nichtumkehrbare an ihr schrittweise soweit als möglich auszumerzen suchen** —, es sei denn, daß eine geniale Erfindung die bisher unwegsamen Pfade gangbar macht.

b) Der Brennkraftmaschinenprozeß.

Die Verbrennung unter dem Dampfkessel ist nicht umkehrbar, weil die sich bindenden Bestandteile nicht im chemischen Gleichgewicht stehen. Um dies Gleichgewicht zu erreichen, muß man sich in das Gebiet der Dissoziation begeben, wo sich die Bestandteile des verbrennenden Gemisches nach Maßgabe einer (adiabatischen) Ausdehnung schrittweise und umkehrbar verbinden können. Dies würde theoretisch in einem Gasmotor vor sich gehen können und würde, wie schon Prof. E. Meyer (Berlin) ausgesprochen hat, den „praktischen" Idealprozeß der Brennkraftmaschine bilden.

Will man die **Umkehrbarkeit in allen Teilen vollkommen sichern,** so wird der Prozeß außerordentlich verwickelt, und man wird am bequemsten auf die sog. halbdurchlässigen Wände zurückgreifen, die die Eigenschaft besitzen, bestimmte Gas- oder Flüssigkeitsmoleküle frei hindurchdiffundieren zu lassen, andere hingegen nicht. Die Osmose flüssiger Lösungen bietet zahlreiche Beispiele sehr vollkommener „semipermeabler Membranen". Wir stellen die Hypothese auf, daß es Stoffe gebe, die für alle technischen Gase halbdurchlässige Wände bilden können, und werden die Bestandteile des „Ladegemisches" jeden für sich isothermisch auf einen solchen Druck verdichten, daß eine darauffolgende adiabatische Kompression sie gerade auf den Partialdruck führt, den sie im Verbrennungsgemisch haben müssen. Hierauf schieben wir jede Komponente durch eine eigene halbdurchlässige Wand gleichzeitig in den „Verbrennungsraum" (dessen Größe im Anfange gleich Null ist) hinein und lassen durch Fortrücken des Kolbens den Rauminhalt des Verbrennungsgemisches unter Abfuhr der durch das teilweise Verbrennen entstehenden Wärme an einen Behälter, sich so vergrößern, daß weder der Druck noch die Temperatur sich ändern, also etwa indem wir eine geeignete Flüssigkeit verdampfen. Nachdem das ganze Gemisch in den Verbrennungsraum gepreßt wurde, setzt man die Ausdehnung unter derartiger Zuführung der vorhin im Behälter aufgespeicherten Wärme fort, daß die Temperatur unverändert bleibt. Hierauf lassen wir das Gemisch sich adiabatisch bis auf die Temperatur der Umgebung ausdehnen, um es isothermisch auf den Druck der Umgebung zu verdichten und auszustoßen. Alle Vorgänge sind umkehrbar, also erhalten wir die Höchstarbeit; doch ist zu beachten, daß nach dem „Massenwirkungsgesetz" der Chemie die Vereinigung der Brennstoffe trotz Überführung in atmosphärischen Zustand nicht vollkommen sein wird, so daß ein, wenn auch ungemein kleiner, Verlust unvermeidbar ist.

Dieser Idealprozeß hat die Eigentümlichkeit, daß es auf die Temperatur der Dissoziations-Isotherme gar nicht ankommt, wie im Sinne unserer früheren Darlegung für den vollkommenen Prozeß sein muß. Aber es wäre weit gefehlt, wenn man folgern wollte, daß auch für den wirklichen Gasmotor die Höhe der Verbrennungstemperatur gleichgültig ist. Die Verbrennung ist ein nicht umkehrbarer Vorgang, und wir haben oben bewiesen, daß der Wirkungsgrad um so mehr steigt, bei je höherer Temperatur dieselbe erfolgt.

Bevor der Betrag der Höchstausbeute an Arbeit bekannt war, konnte man glauben, daß das heute Erreichte dem theoretisch Möglichen bereits nahekommt, und dann wäre jedes Bestreben, die Wirtschaftlichkeit zu steigern, vergeblich gewesen. **Seit Nernst wissen wir, daß dem nicht so ist; allein auch hier bewährt sich die reine Theorie mehr nur als kritischer Maßstab. Es kann keine Rede davon sein, Anstalten zur Verwirklichung des Idealprozesses zu machen, unsere konstruktiven Mittel reichen hierzu nicht aus.** Der Ingenieur muß wieder **an Hand der historischen Entwicklung die „schwachen", d. h. verbesserungsfähigen Punkte aufsuchen und den Hebel des Fortschrittes da ansetzen.**

212. Der gegenwärtige Entwicklungszustand der Kolbenmaschine, des Gasmotors und der Turbine.

Im Kampfe der drei hauptsächlichsten Kraftmaschinenarten: der alten Kolbendampfmaschine, der Dampfturbine und der Brennkraftmaschine, hat der Fortschritt der einen Art stetsfort den Fortschritt der anderen angeregt und tatsächlich zur Folge gehabt. Die Meinung, daß diese oder jene Abart alsbald von der Bildfläche verschwinden müsse, hat sich als irrtümlich herausgestellt, da die praktische Verwendung der Kraftmaschine ver-

wickelten Verhältnissen zu genügen hat, und das Endurteil nicht doktrinär von einem engen Gesichtspunkt aus gefällt werden kann.

Kommt nur die Güte der Wärmeausnützung in Frage, so stehen die Brennkraftmaschinen, unter diesen in erster Reihe die Dieselsche Schwerölmaschine voran. Im Baue der letzteren sind weitere Fortschritte gemacht worden. Man hofft in einem Zylinder bald 1000 PS beim Viertaktprozeß entwickeln zu können. Der Zweitakt ist beispielsweise in der Ausführung von Gebr. Sulzer in Einheiten von 4000 PS Gesamtleistung und an einer Versuchsmaschine bis zu 2000 PS Leistung in einem Zylinder erprobt worden. Es ist eine Betriebszuverlässigkeit erreicht worden, die den Dieselmotor auf den Rang einer Großmaschine erhebt, die bei den bedeutendsten Anlagen Berücksichtigung fordern wird. Neuerdings können bekanntlich neben Rohnaphtha auch die schweren Destillate des Steinkohlenteeres aus den Kokereien, die Teeröle, ja Teere selbst, im Dieselmotor ruß- und schmutzfrei verfeuert werden.

Bei größeren Einheiten ist wiederholt ein Verbrauch von 180 g und darunter an flüssigem Brennstoff von 10000 kcal Heizwert festgestellt worden. Dies bedeutet einen Gesamtwirkungsgrad

$$\eta = \frac{632}{0{,}18 \cdot 10000} = 0{,}35,$$

d. h. **35 v. H. des Heizwertes werden in effektive Arbeit umgesetzt,** was die höchste bis heute erreichte Ausbeute darstellt. Schon von der 30 PS-Einheit an wird ein Wirkungsgrad von 30 v. H. gewährleistet. Kein Wunder, daß die Ölmaschine gegenwärtig zum bevorzugten Motor für Frachtdampferantrieb zu werden beginnt. Eine Begrenzung seiner Anwendungsfähigkeit wird nur die relativ beschränkte Menge und der von vielen Faktoren abhängende Preis der flüssigen Brennstoffe bilden.

Der überaus größte Teil der Wärmekraftmaschinen ist aber auf die Kohle angewiesen, da natürliches Gasvorkommen sehr beschränkt ist und das Gichtgas der Hochöfen fast in Gänze für den Gasmotor mit Beschlag belegt sein dürfte.

Der Sauggasmotor hat sich für mäßig hohe Leistungen sehr gut eingebürgert und weist von Jahr zu Jahr bessere wirtschaftliche Ergebnisse auf. An Motoren von Deutz, Güldner und anderen ist mit Sicherheit 25 v. H. Gesamtwirkungsgrad festgestellt und überschritten worden[1]). Über die Ergebnisse ganz großer Sauggasmotoren mit Leistungen von über 1000 PS sind einwandfreie Veröffentlichungen unseres Wissens nicht vorhanden, wir müssen daher, um den Verbrauch derselben einzuschätzen, auf die Hochofengasmotoren zurückgreifen. Die von der A.-G. Augsburg-Nürnberg gelieferten Rombacher Motoren haben für die indizierte PS-st 1880 kcal, für die effektive PS-st mit 0,82 mechanischen Wirkungsgrad 2290 kcal verbraucht, und dies bedeutet 27,5 v. H. thermischen Wirkungsgrad, bezogen auf Gas als Brennstoff. Wäre ein Gaserzeuger von 0,85 Wirkungsgrad die Quelle des Kraftgases, so hätte man $0{,}85 \cdot 27{,}5 = 23{,}4$ v. H. gesamten thermischen Wirkungsgrad. Der Großgasmotor erscheint daher in ungünstigerem Licht als der Kleinmotor, aber wir müssen an obiger Schätzung bis zum Beweise des Gegenteils festhalten.

Viel Aufsehen hat der Gasmaschinenprozeß in der Ausgestaltung von Humphrey[2]) erregt, der mit den großen Pumpen in Chingford bei rd. 2 m Zylinder Durchm. mit 0,43 kg Anthrazit bei Voll- und 0,37 bei halber Leistung eine effektive Pumpenpferdekraftstunde leistet. Dies gibt 3430 bzw. 2970 kcal. für die Pumpenpferdekraftstunde, was dem Verbrauch der Großgasmaschine nicht ganz nachkommt.

Die angeführten Ergebnisse sind der Kolbenmaschine gegenüber in jedem Falle außerordentlich hoch, da die beste Kolbenmaschine[3]) für die indizierte PS-st etwa 2850 kcal verbrauchte. Auch bei dem hoch eingeschätzten mechanischen Wirkungsgrad von 94 v. H.

---

[1]) So fand beispielsweise Brauer an einem Güldnermotor von 120 PS Leistung einen Verbrauch von 0,305 kg Anthrazit für die effektive PS-st einschließlich Anheizen bzw. 0,275 kg nach vertragsmäßigem Abzug für Anheizen endlich 0,320 kg als Ergebnis einer Zwischenmessung, auf 8000 kcal Heizwert bezogen, was in derselben Reihenfolge 25,9; 28,8; 27,6 v. H. Gesamtwirkungsgrad entspricht.

[2]) Engeneering 1909. II. S. 515. 1913, Febr. 41. Z.d.V.d. Ing. 1913. S. 885, 1914. S. 35.

[3]) So die dreistufigen Maschinen der Berliner Elektrizitätswerke in Moabit, die von der d. Görlitzer Maschinenbauanstalt und von Gebr. Sulzer in Winterthur geliefert worden sind. Noch der Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1902, S. 187 verbrauchten die Sulzer Maschinen bei 12,3 Atm. Kesselüberdruck 314° Überhitzung, 2930 PS_i für die indizierte PS-st 4,05 kg Dampf, oder etwa 2930 kcal. Diese Zahl wurde nach einer Mitteilung der Lieferantin später auf 2850 kcal herabgedrückt.

entspricht dies einem Verbrauch von 3030 kcal für die effektive PS-st. Nehmen wir endlich den Wirkungsgrad des Dampfkessels mit 85 v. H. an, was nur unter sehr günstigen Umständen zulässig sein dürfte, so stellt sich der Verbrauch für die effektive PS-st auf 3560 kcal in Kohle gemessen und führt auf einen Gesamtwirkungsgrad von

$$632 : 3560 = 17{,}8 \text{ v. H.}$$

Die moderne Dampfturbine mit hoher Überhitzung hat diesen Betrag bei weitem überflügelt, wie beispielsweise durch die Versuche an den Turbinen der Allgemeinen Elektrizitätsgesellschaft in Rummelsburg nachgewiesen worden ist. Hier wurden 2716 kcal für die effektive PS-st verbraucht, also 23,3 v. H. der Dampfwärme in effektive Leistung umgesetzt, was mit ebenfalls 0,85 Kesselwirkungsgrad

rd. 20 v. H.

Gesamtwirkungsgrad von Kohle zur effektiven Leistung ausmacht. Wenn hierbei die Kühlwassertemperatur auch ausnahmsweise niedrig war, so wird in Zukunft mit weiteren Fortschritten der Kondensation zu rechnen sein, und auch die Überhitzung hat die praktisch zulässige obere Grenze noch nicht erreicht. Dampf- und Gasmaschine stehen sich hiernach im Verhältnis 17,8 : 23,4, Turbine und Gasmaschine wie 20 : 23,4 gegenüber.

Wenn wir nun die großen betriebstechnischen Vorteile der Dampfturbine in Betracht ziehen, wie die geringe Zahl der bewegten Teile, Abwesenheit jeder gleitenden Dichtung mit ihren Schwierigkeiten der Schmierung und den Gefahren des Einreibens, geringer Raumbedarf, vorzügliche Regulierung, geringer Verschleiß, daher kleine Reparaturkosten, so wird es klar, daß **die Dampfturbine mit vollem Rechte die Herrschaft im Großkraftbetriebe angetreten hat und diese für absehbare Zeit behalten wird.** Im Gebiete der kleinen Leistungen, d. h. bis zu etwa 500 PS, dauert ein Wettkampf zwischen Kolbendampfmaschine, Dampfturbine und Gasmotor unvermindert an. Es hat allgemein überrascht, zu sehen, welche Wunder hier die richtig geleitete Anfangs- und Zwischenüberhitzung zu wirken vermochte. So hat die früher ziemlich geringschätzig behandelte Lokomobilmaschine in ihren neuen Ausführungsformen von Wolf und Lanz sich schon bei 100 PS Leistung den größten ortsfesten Maschinen in der Wirtschaftlichkeit an die Seite gestellt[1]).

Einen erneuten Ansporn zur Weiterentwicklung erhielt die Kolbenmaschine in dem von Stumpf geschaffenen „Gleichstromverfahren“[2]), welches die Schwierigkeiten, die der Betrieb mit hoch überhitztem Dampfe bedingt, wie beispielsweise die ungleiche Ausdehnung des Zylinders an den heißen Enden und am kühlen Mittelteil überwunden hat. Der für eine Einzylindermaschine bis jetzt unerreicht niedrige Dampfverbrauch im Verein mit der einfachen Steuerung werden der Maschine sicher im Gebiete mittlerer Leistungsgrößen weiteres Feld erobern, ohne indessen eine wesentliche Verschiebung der Verhältnisse von Turbine zur Kolbenmaschine bewirken zu können. In der Tat hat die Dampfturbine auch bei kleineren Leistungen sehr gute Ergebnisse aufzuweisen, wie beispielsweise die früher angeführte 300 kW-Zoelly-Turbine, die bei nahezu gleichem Anfangszustand des Dampfes wie die Stufenmaschine 7,32 kg für die kW-st oder 4,9 kg für die effektive PS-st verbraucht hat.

Die Veränderung des Wärmeverbrauchs mit abnehmender Leistung war früher bei der Dampfturbine recht ungünstig, hat sich aber in den letzten Jahren so wesentlich gewandelt, daß die Turbine geradezu bessere Verhältnisse aufweist als die Kolbenmaschine. So wurde an der Turbine der Allgemeinen Elektrizitäts-Gesellschaft festgestellt, daß zwischen voller und halber Belastung bei Einregulierung der Zusatzdüsen sozusagen kein Unterschied im spezifischen Dampfverbrauch besteht. Sonst weisen gute Turbinen etwa 10 bis 15 v. H. Zunahme bei halber Last auf, und sind in dieser Beziehung gleichgestellt

---

[1]) Gutermuth fand an einer Wolf-Lokomobile (Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1908, S. 1590) bei 329° C vor der Maschine, 15 at Kesselüberdruck 110 PS_i Leistung einen Dampfverbrauch von 3,95 kg und einen Wärmeverbrauch von 3650 kcal für die effektive PS-st, was einen Gesamtwirkungsgrad von 17,3 v. H. ergibt, also die großen Sulzermaschinen erreicht. Bei einer Lanzschen Lokomobile mit Lentzsteuerung hat Graßmann 0,366 kg Kohlenverbrauch und 3,37 kg Dampfverbrauch für die effektive PS-st festgestellt.

[2]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1908, S. 1114 und 1558. Der Dampfverbrauch einer 500 PS-Stumpfmaschine für die indizierte PS-st wird mit 4,6 kg und für die nutzbare kW-st mit 7,55 kg angegeben bei 12,6 Atm. Überdruck, 331° C Temperatur vor der Maschine, 307 kW Nutzleistung und 0,075 at abs. Kondensatordruck. Die Auspuffpressung im Dampfzylinder betrug 0,145 at abs.

mit dem Dieselmotor, dessen Verbrauch bei großen Einheiten etwa von 185 g auf 225 g, bei kleinen von 235 g auf 285 g, also um rd. 21 v. H. steigt. Bei Gasmotoren darf man lineare Zunahme des Gesamtverbrauches mit der Belastung annehmen, wobei der Leerlaufverbrauch bis zu $^1/_3$ des Höchstverbrauches steigen kann. Hieraus ergibt sich bei halber Last ein bis um 50 v. H. größerer spezifischer Verbrauch als bei normaler Last. Die modernen Reguliermethoden der Turbine mit Überlastungsventilen gestatten endlich eine hohe Überbeanspruchung, so daß auch in dieser Beziehung der Turbine ihren Rivalen gleichwertig oder sogar überlegen ist.

213. Verbesserungsvorschläge für das Arbeitsverfahren der Wärmekraftmaschine.

a) Geschichtlicher Rückblick.

Über die reiche Vorgeschichte der Dampfturbine wird man durch das Buch: „Roues et turbines à vapeur" von K. Sosnowski, Paris 1897, gut unterrichtet; es bildet im wesentlichen eine Zusammenstellung älterer Patente auf Grund des Studiums Pariser Archive.

Abgesehen von der in der Einleitung beschriebenen ägyptischen Eolipile und dem Brancaschen Rad sind bis gegen Ende des 18. Jahrhunderts keine weiteren Berichte von Belang erhalten[1]). Mit dem Aufschwung der Kolbenmaschine wurde indes der Erfindungsgeist mächtig angeregt, und alsbald tauchte eine Flut von Patenten auf, die selbstverständlich in der überwiegenden Mehrzahl wertlos sind, doch immerhin vereinzelte Vorschläge enthalten, die von scharfsinnigem Erfassen der Vorgänge in der Turbine Zeugnis ablegen.

1791 beschreibt James Sadler eine nach Art des Segnerschen Rades gebaute Reaktionsturbine.

1792 wurde in Amerika eine „Bailey Jack" genannte Gleichstromturbine patentiert und nach „Power" (1908) auch ausgeführt. Doch handelte es sich noch um harmloses Bratspießdrehen.

Real und Pichon konstruierten 1827 die erste vielstufige Gleichdruckturbine. Das Laufrad besaß allerdings nur primitive ebene Schaufeln, das Leitrad war mit schiefen Bohrungen an Stelle der Düsen versehen. Durch die Leitscheiben wurden einzelne Abteilungen gebildet, in welchen sich die Räder bewegten. Die Stufenzahl war 31.

Im Jahre 1853 legte Tournaire der französischen Akademie eine ungemein klare Beschreibung der vielstufigen Überdruckturbine vor. Er betont darin, daß die Wirkung im wesentlichen auf der Verschiedenheit der Pressungen zwischen Ein- und Austritt der Schaufeln bestehe, durch welche die relative Geschwindigkeit vergrößert wird. Der Querschnitt der Schaufel beim Eintritt müsse größer sein als beim Austritt. Er erkennt, daß die sonst notwendige sehr hohe Umfangsgeschwindigkeit durch Anwendung vielstufiger Ausdehnungen herabgesetzt werden kann.

Vorläufer von Curtis sind John und Ezra Harthan in ihrem englischen Patent Nr. 144 vom Jahre 1858. Die Anwendung zweier Geschwindigkeitsstufen bei Gleichdruckturbinen ist hier mit voller Klarheit wohl zum ersten Male vorgeschlagen, die Erweiterung der Querschnitte und übrigens auch die Teilung des Druckgefälles aufgezählt.

Der gleiche Gedanke wurde viel später, im Jahre 1864, allein in einer praktisch wertlosen Form von Perrigault und Farcot patentlich geschützt.

Erwähnenswert sind die Patente von Altham, 1892, die eine Turbine mit Gegenlauf des Leit- und Laufrades betreffen. Die in das Rad eingefrästen halbkreis-wannenförmigen Schaufelkanäle haben mehreren modernen Turbinen zum Vorbild gedient. Es war zweifache Umkehrung des Dampfstrahles vorgesehen.

b) Neuere Vorschläge für Dampf als Energieträger.

Annäherung an den Carnotschen Prozeß.

Vermeidung der Wärmezufuhr bei niedriger Temperatur an das Speisewasser, indem man den klassischen Carnotschen Prozeß bei der Dampfmaschine dadurch verwirklicht, daß der Auspuffdampf nur bis zu einem bestimmt großen Wassergehalt kondensiert wird, so zwar, daß eine hierauf vorzunehmende adiabatische Verdichtung auf den Kesseldruck das Gemisch gerade in flüssiges Wasser von Kesseldampftemperatur verwandelt. Dieser Vorschlag, der von der klassischen Thermodynamik aus-

[1]) Nach einer Mitteilung von Feldhaus in seinen „Deutsche Erfinder", München 1898, und in der Zeitschrift f. d. ges. Turbinenwesen 1908, S. 570, soll im „Püsterich von Sondershausen" ein Jahrhunderte altes Erzgefäß sich erhalten haben, das als Dampferzeuger der auch von Branca benutzten Art anzusehen ist.

ging und dessen Durchführung noch von Thurston[1]) als wünschbar hingestellt worden ist, hat zunächst viel Verlockendes an sich. Bei einer mit Sattdampf zwischen 12 und 0,2 kg/qcm arbeitenden Dampfmaschine verspricht die Anbringung des Dampfverdichters eine Wärmeersparnis von rund 10 v. H.; bei 0,1 kg/qcm Gegendruck steigt die Ersparnis sogar auf 15 v. H. Trotzdem müssen wir den Prozeß als Utopie bezeichnen, da einmal der erforderliche Kompressor nahezu die Größe des Hochdruckzylinders einer Dampfmaschine erhalten müßte. Hauptsächlich aber **wegen der wesentlichen Schwierigkeit, daß** in einer gewöhnlichen Kolbenmaschine **Dampf und Wasser sich während der Verdichtung trennen und nur in unvollständigen Temperaturaustausch treten würden.** Schließlich auch, daß alle eindringende Luft ständig in den Kessel befördert würde.

Verwandt hiermit ist das Verfahren von Dolder[2]). Der hochüberhitzte Dampf soll in einer Düse bis auf den Kondensatordruck expandieren, aber im Laufrade nur einen Teil der Strömungsenergie abgeben. Die Turbine soll also einerseits langsam laufen, andererseits große Austrittswinkel erhalten. Dem austretenden Dampf wird unter tunlichster Wahrung seiner kinetischen Energie in einem Kühlkörper eine gewisse Wärmemenge entzogen. Hierauf soll er sich in **einer Düse durch die eigene lebendige Kraft auf den Anfangsdruck verdichten.**

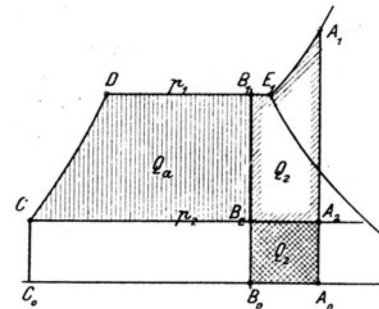


Abb. 1098. Verfahren von Dolder.

In der (nicht maßstäblichen) Abb. 1098 ist die Entropiedarstellung des Vorganges bei Voraussetzung reibungsloser Bewegung wiedergegeben. $A_1 A_2$ ist adiabatische Ausdehnung; beim Kondensatordruck p_2 muß die Wärmemenge

$$A_2 A_0 B_0 B_2 = Q_2$$

entzogen werden, so daß im Zustand B_2 die dem Dampfe innewohnende lebendige Kraft hinreicht, ihn auf p_1 zu verdichten. Zu diesem Behufe ist nach früherem notwendig, daß diese lebendige Kraft in Wärmemaß der Fläche

$$C D B_1 B_2 = Q_a$$

gleich sei. Die ursprüngliche kinetische Energie vor dem Rade ist dem Inhalte der Fläche $C D A_1 A_2 C$ gleich, und es folgt, daß der Prozeß die Fläche

$$B_1 A_1 A_2 B_2 B_1 = Q_i$$

in innere Arbeit umgewandelt hat. Dieser theoretisch anziehenden Idee, welche eine Luftpumpe entbehrlich machen würde, stellt sich als Hindernis entgegen, daß die Strömung mit Widerständen verbunden ist, die lebendige Kraft aufzehren, so daß man B_2 nach links verschieben, d. h. mehr Wärme, als oben angenommen, entziehen muß. Hierdurch wird der Wirkungsgrad schon rein theoretisch bedeutend herabgezogen. Ferner wird sich der Dampf bei der Wärmeentziehung immer nur örtlich an den Kühlflächen niedergeschlagen, und diese kondensierten Teile werden ihre Geschwindigkeit nahezu ganz einbüßen. Der zurückbleibende (zu wenig nasse) Dampf ist indessen auch bei reibungsfreier Bewegung nicht imstande, sich von B_2 auf B_1 zu verdichten, da hierzu vielmehr die ganze, dem Zustande B_2 entsprechende Dampfnässe in mikroskopisch feiner Verteilung mit gleicher Geschwindigkeit im Dampfe mitströmen müßte. Auch wenn wir uns in das Gebiet reiner Überhitzung begeben, d. h. B_2 auf die Grenzkurve verlegen, wo der Wirkungsgrad noch höher würde, wird sich an den Kühlflächen unweigerlich Kondensat niederschlagen. Aus diesen Gründen ist das Verfahren praktisch aussichtslos.

Die Mischungsturbine.

Ein Gedanke, der die Erfinder immer wieder anzieht, ist: Die Geschwindigkeit des Dampfes durch Beimischung von Flüssigkeiten oder Gasen bzw. Dämpfen herabzusetzen, um mit kleinen Umfangsgeschwindigkeiten auszukommen, daher die Bezeichnung „Mischungsturbine" gestattet sein mag. Ein besonders belehrender Versuch dieser Art wurde von Escher, Wyß & Cie. durchgeführt, indem man Quecksilber in den expandierenden Dampfstrahl einspritzte. Der Versuch scheiterte, abgesehen von anderem, schon daran, daß sich **das fein verstäubte Quecksilber mit dem Kondensate bis zur Unzertrennlichkeit innig mischte.** Nach einem Vorschlag von Piguet (1894) sollte die Beimengung der fremden Stoffe in einer Art von Injektor vor sich gehen. Der Erfinder übersah, daß die Mischung gewissermaßen nach den Gesetzen des unelastischen Stoßes vor sich geht, und daß man, wenn die Geschwindigkeit erheblich herabgesetzt werden soll, Verluste an lebendiger Kraft in den Kauf nehmen muß, die $^1/_2$ bis $^3/_4$ der verfügbaren Arbeit erreichen.

Die Beimischung von Flüssigkeiten muß neben dem Stoßverlust auch eine schlechte Wirkung in der Schaufel ergeben, da die einzelnen Tropfen des „Staubregens" bei der scharfen Bahnkrümmung aus der Dampfmasse ausscheiden werden.

[1]) Transact. Amer. Soz. Mech. Eng. 1901.
[2]) Schweiz. Bauzeitung, Januar 1904.

Der Abwärmeaustausch-(Regenerator)

ist durch das D. R. P. Nr. 129182 von Lewicki, v. Knorring, Nadrowski und Imle[1]) in Vorschlag gebracht worden, um die Abwärme bei Heißdampfturbinen nutzbar zu machen. Der noch stark überhitzte Abdampf einer Turbine wird in Heizkörper geleitet, die im Wasser- oder Dampfraume eines Kessels aufgestellt sind und dort Wasser verdampfen oder den Dampf überhitzen sollen. Lewicki fand[2]) bei Versuchen, daß unter Anwendung eines auf 460 bis 500° C überhitzten Frischdampfes der Abdampf der Turbine mit 309 bzw. 343° C entwichen ist. Es liegt auf der Hand, daß eine Rückgewinnung des hier aufgespeicherten Wärmezuschusses einen Gewinn darstellt, dessen Größe Lewicki bei halber und bei Vollast mit 12,5 bzw. 14,5 v. H. ermittelt hat. Indessen arbeitete seine Turbine mit einer ungenügenden Umfangsgeschwindigkeit. Wenn man die Wahl hat zwischen schlechtem „hydraulischen" Wirkungsgrad der Turbine und guter Regenerierung einerseits, oder gutem hydraulischen Wirkungsgrad, aber Regenerierung einer kleinen Wärmemenge anderseits, so wird letztere Einrichtung wirtschaftlicher sein.

Die Vorwärmung des Speisewassers durch Dampf aus dem Zwischenbehälter

oder einer Zwischenstufe der Dampfturbine ist von Sauvage[3]), Cotteril[4]) empfohlen und von Ancona[5]) als theoretisch vorteilhaft nachgewiesen worden. Die stufenweise Vorwärmung wird empfohlen im D. R. P. Nr. 182366 vom Jahre 1906 durch J. Fischer. Das Verfahren hat inzwischen eine so **große praktische Bedeutung** erlangt, daß wir ihm in Absch. 215 eine besondere Betrachtung widmen.

Die Zwischenüberhitzung

bezweckt bei Kolben-Dampfmaschinen die Verhinderung des Niederschlages im großen Zylinder und wurde meist durch den hoch überhitzten Frischdampf, der vor dem Eintritt in die Maschine Heizröhren im Zwischenbehälter durchstreicht, bewirkt Die Verbesserung des Dampfverbrauches ist unzweifelhaft nachgewiesen, indes nicht so erheblich, daß die Einrichtung weite Verbreitung hätte gewinnen können. Knorring, Lewicki und Nadrowski befürworten im D. R. P. Nr. 188644 vom Jahre 1902 mehrfache Zwischenüberhitzung für Dampfturbinen. Für diejenige Zwischenstufe, die mit einem Druck von 1 at abs. arbeitet, demnach den Überhitzer keinem inneren Überdruck aussetzt, soll die Temperatur bis auf 500° C und darüber getrieben werden. Da für die Wärmeausnutzung nicht das Druck-, sondern das Temperaturgefälle maßgebend ist, kann an der theoretischen Wirksamkeit nicht gezweifelt werden. Die Schwierigkeiten sind die verlustlose Weiterleitung so hoch überhitzten Dampfes und seine Wirkungen auf die Dampfverteilungsorgane. Eine größere Versuchsanlage ähnlicher Art soll von S. Z. de Ferranti erbaut worden sein; Ergebnisse sind nicht bekannt geworden.

Die Dauerüberhitzung

soll einen Prozeß bezeichnen, bei welchem man hoch überhitzten Dampf unter stetiger weiterer Heizung isothermisch expandieren ließe, um so des Vorteiles der Wärmezufuhr bei höchster Temperatur teilhaftig zu werden. Denkt man sich den Prozeß mit auf 400° überhitztem Dampf von 12 at Druck so durchgeführt, daß die schließliche adiabatische Ausdehnung bei 0,1 kg/qcm zum gesättigten Zustande zurückführt, so ergibt sich gegenüber der einfachen Überhitzung auf 400° und sofortiger adiabatischer Ausdehnung auf 0,1 kg/qcm ein Gewinn von rd. 12 v. H. Die auf der Isotherme zuzuführende Wärmemenge beträgt rd. 30 v. H. der zum Verdampfen und Überhitzen notwendigen Wärmemenge. Leider würde die praktische Durchführung auch dieses Prozesses, den man bei der vielstufigen Dampfturbine versucht wäre anzuwenden, selbst bei unmittelbarster Verbindung des Motors mit dem Kessel an den Abkühlungs- und Reibungsverlusten der Zu- und Ableitungen scheitern. Eine Annäherung an diesen Prozeß bilden die Patente von Ferranti[6]).

Überhitzung durch Vermischen von Brenngasen mit Dampf

wurde vom Physiker Pictet im Jahre 1899 (D. R. P. Nr. 122950) empfohlen. Es sollten Kohlenwasserstoffe in ein Gemisch von Dampf und Luft mit von Anfang an höherer Pressung eingespritzt und zum Verbrennen gebracht werden. Pictet dachte an eine Ausdehnung im Kolbenmotor. Arbeitet er mit Auspuff, so ist indes seine Maschine ein Petroleummotor mit Wassereinspritzung; will er aber Kondensation anwenden, so erhält die Luftpumpe so bedeutende Abmessungen, daß die Vorteile der höheren Anfangsüberhitzung wieder aufgewogen werden. Es macht sich hier der unangenehme Umstand geltend, daß der Hauptmotor eine um die Arbeit der Luftpumpe und des Kompressors größere Leistung entwickeln, mithin entsprechend größer sein muß. Man hat also einen Aufwand für den Leerlauf der erwähnten Hilfsmaschine und den vergrößerten Leerlauf der Hauptmaschine, der, wie durch eine Rechnung nachweisbar ist, die Vorteile wieder aufzehrt. Das Gleiche ist der Fall, wenn wir den Prozeß in einer

---

[1]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1902, S. 783.
[2]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1901, S. 1716.
[3]) Ann. des Mines 1890, Bd. XVII, S. 433.
[4]) Engineering 1890, Bd. I, S. 527.
[5]) Das Wärmediagramm, Z. d. Ver. deutsch. Ing, 1897, S. 554.
[6]) Beispielsweise Schweiz. Pat. Nr. 30634 v. J. 1903.

Dampfturbine durchführen wollten, **wo durch schrittweise Brennstoffzufuhr die Dauerüberhitzung erreichbar wäre.** Schon kleine Mengen von Luft verhindern uns, dem theoretischen Vakuum näherzukommen, und ein Hauptvorteil der Dampfturbine wird dadurch preisgegeben.

Erweiterung des Temperaturgefälles durch die Mehrstoffdampfmaschine.

Wir haben in der Wahl schwersiedender Flüssigkeiten beim gewöhnlichen Dampfmaschinenprozeß ein Mittel, die Wärmezufuhr bei höheren Temperaturen zu erzwingen; es seien hier die Patente von A. Seigle und die Mehrstoffdampfmaschine von Schreber erwähnt. Ersterer läßt einen schwerflüchtigen Kohlenwasserstoff, z. B. Solaröl, das bei 350 bis 450° verdampft, in einem Dampfmotor Arbeit leisten, worauf in einem als Dampfkessel gebauten Oberflächenkondensator durch das sich niederschlagende Öl Wasser verdampft und in gewohnter Weise als Triebkraft verwendet würde. Schreber schlägt als erste Stufe Anilin vor, auf Grund der günstigen thermischen Eigenschaften, d. h. des vorteilhaften Verhältnisses der Verdampfungs- und der Flüssigkeitswärme dieses Stoffes. Will man den Vorteil der Wärmezufuhr bei hoher Temperatur ausnutzen, so darf eben das besagte Verhältnis nicht zu klein werden. Schreber[1]) betont ferner die früher übersehene Notwendigkeit, durch Vorwärmer den hohen Wärmeinhalt der Abgase der Feuerung weiterhin zu verwerten, womit freilich auch ein weiteres Element der Betriebserschwerung eingeführt wird.

Dieses Aufsetzen einer oder mehrerer Stufen auf den gewöhnlichen Dampfmaschinenprozeß erscheint ungemein verführerisch und die Verbesserung des Wirkungsgrades erheblicher als durch irgendeines der vorher erwähnten Mittel. Die Mehrstoffdampfmaschine verdient zweifelsohne hohe Beachtung und würde es rechtfertigen, weitere Mittel zur Erforschung geeigneter Flüssigkeiten aufzuwenden. Bis heute sind zwei große Schwierigkeiten unbehoben, 1. die chemische Unbeständigkeit der vorgeschlagenen Stoffe bei hoher Temperatur, 2. beim Anilin und ähnlichen deren hochgradige Giftigkeit (bei obendrein nicht ausgesprochen scharfem Geruche), weshalb auch von chemischen Fachleuten an der industriellen Verwertbarkeit dieses Stoffes gezweifelt wird.

Die Abwärmemaschine

beabsichtigte, den letzten Unterschied zwischen Kondensatordampf- und Kühlwassertemperatur auszunutzen. Der Prozeß besteht bekanntlich darin, daß man durch Niederschlagen des Wasserdampfes in einem Oberflächenkondensator schweflige Säure verdampft und in einer Kolbenmaschine Arbeit leisten läßt. Der Dampf der schwefligen Säure wird seinerseits ebenfalls in einem Oberflächenkondensator durch das Kühlwasser kondensiert. Die Daseinsberechtigung dieses Vorschlages beruht in der Erfahrungstatsache, daß die Kolbendampfmaschine in der Regel mit einem Vakuum arbeitet, welches 0,1 kg/qcm, ja häufig 0,2 kg/qcm überschreitet. Diesen Drücken entspricht noch eine Temperatur von rd. 45 bzw. 60° C, während die Mitteltemperatur des Einspritzwassers vielfach um 10 bis 20° C zu liegen pflegt. Hier sind mithin theoretisch 35 bis 50° C Temperaturgefälle zu gewinnen, was sogar bei einer Carnotschen Maschine mit z. B. 180° oberer Temperaturgrenze einen Gewinn von $^{35}/_{135}$ bzw. $^{50}/_{120}$, d. h. 26 bzw. 42 v. H. ergeben würde. Wir sind durch die Veröffentlichungen von Josse über die bedeutenden praktisch-konstruktiven Schwierigkeiten, die zu überwinden waren, unterrichtet. Eine der größten Gefahren bildete das Undichtwerden des Kondensators, wobei die schweflige Säure durch das Wasser zu Schwefelsäure oxydiert wird und die Schmiedeeisenteile in kürzester Frist (z. B. in einer Nacht) so zu zerstören vermag, daß die Weiterbenutzung des Kondensators unmöglich wird. Nach kurzem Aufblühen ist daher fast vollständiger Stillstand in der Verwendung dieser Motorenart eingetreten. Der Fortschritt der Kondensation erlaubt es, die untere Temperaturgrenze in der Dampfturbine selbst genügend auszunützen.

Die Luftdampfmaschine von Pictet

stellt einen eigentümlichen Weg dar, um den Temperatursprung einer Auspuffdampfmaschine nach unten zu erweitern. Pictet gedenkt komprimierte Luft, auf die Temperatur des Dampfes erwärmt und mit diesem gemischt, in die Maschine zu leiten. Stände das Mengenverhältnis der Luft zum Dampfe ungefähr wie 2 : 1, so würde der Teildruck des letzteren nach Pictet ungefähr $^1/_3$ des jeweiligen Gesamtdruckes ausmachen. Betrüge dieser 1 kg/qcm, so entfiele auf den Dampf etwa $^1/_3$ kg/qcm Teildruck, er würde mithin bei freiem Auspuff fast ebenso tief expandieren wie sonst bei Anwendung der Kondensation. Hieraus folgert Pictet, daß auch der Dampfverbrauch dieser Auspuffmaschine dem nahe käme, der sich bei Kondensationsbetrieb ergibt. Mag hier auch ein Gewinn herausschauen, so ist doch die Anlage so verwickelt, daß mit fast gleichen Kosten eine Wasserrückkühlanlage mit Kondensation aufgestellt werden kann, die zweifellos bedeutend bessere Ergebnisse liefern würde.

Dem vielleicht bestechenden Äußeren des Pictetschen Vorschlages gegenüber wurde schon in der III Auflage, abgesehen von den praktischen Schwierigkeiten, auf die grundsätzlichen Verluste aufmerksam gemacht, die eine mit Mischung verschiedener Dampf- oder Gasarten arbeitende Maschine nie vermeiden kann. Es wird die Mischung von Dampf und Luft, die mit Rücksicht auf das Rosten des Dampfkessels nur vor dem Dampfzylinder (in einem Behälter) zusammentreffen dürfen,

[1]) Dinglers Polytechn. Journ., Nov. 1902. Seither ausführlich dargestellt in der ausgezeichneten Studie: Die Theorie der Mehrstoffdampfmaschinen, Leipzig 1903.

entweder vollständig sein oder nicht, bez. in einigen Teilen vollständig, in andern nicht. Da, wo sie es nicht ist, expandiert der Dampf beim Auspuff auf 1 at und nicht auf den Teildruck, verläßt die Maschine als nasser Dampf mit 100° Temperatur und wärmt obendrein die benachbarten Luftteilchen auf die gleiche Höhe an. Da, wo die Mischung vollständig ist, findet ein Verlust zufolge der Vermehrung der Entropie der sich mischenden Teile statt, die einer Entwertung des Wärmeinhaltes gleichkommt. Um diesen Verlust zahlenmäßig zu ermitteln, betrachten wir den Vorgang der hier stattfindenden Diffusion bei unveränderlichem Druck an Hand der Skizze Abb. 1099. Bei A trete der Dampf, bei B die Luft ein, bei C das Gemisch aus. Wendet man auf die zwischen den Schnitten A, B und C enthaltene Gemischmenge den Energiesatz an, so findet man das einfache Gesetz

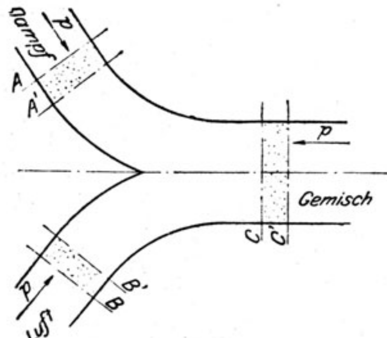


Abb. 1099. Thermodynamischer Mischungsverlust.

$$G_1 i_1 + G_2 i_2 = G_1 i_1' + G_2 i_2',$$

worin i_1 der Wärmeinhalt des Dampfes, i_2 der Wärmeinhalt der Luft vor der Mischung i_1', i_2' dasselbe nach der Mischung, G_1, G_2 das Dampf- bzw. Luftgewicht bedeuten. Als weitere Beziehung ist die Gleichheit der Rauminhalte der sich gegenseitig durchdringenden Dampf- und Luftmengen herbeizuziehen:

$$G_1 v_1' = G_2 v_2'.$$

Man berechnet nun die Entropie $S = G_1 s_1 + G_2 s_2$ vor und die Entropie S' nach der Mischung. Das Produkt $(S' - S)\, T_0$ gibt den Arbeitsverlust an, der bei Ausdehnung auf die Temperatur T_0 durch die Mischung bedingt ist. So findet sich für $G_1 = 1$, $G_2 = 2$, 10 at abs. Anfangsdruck, gesättigten Dampf, Luft von gleicher Temperatur — nach der Diffusion: der Teildruck des Dampfes 4,3 at, derjenige der Luft 5,7, die gemeinsame Temperatur, 446° absolut, die Zunahme der Entropie 0,16 Einheiten, mithin bei Ausdehnung auf 0° C ein Verlust von $(S' - S)\, T_0 =$ rd. 44 kcal.

Verwendung schwerer Dämpfe nach Rahmer, Leblanc, Zuppinger.

Die Verwendung von schweren Dämpfen, d. h. solchen von hohem Molekulargewicht, bezweckt die Herabsetzung der Ausflußgeschwindigkeit, wodurch die Ausnützung des ganzen Druckgefälles in weniger Stufen bei mäßigen Umfangsgeschwindigkeiten ermöglicht werden soll.

Die Ausflußformel

$$\frac{w^2}{2g} = -\int v\,dp = \frac{k}{k-1}\, p_1 v_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]$$

für adiabatische Zustandsänderung kann man vermöge der allgemeinen Gasgleichung (die auch bei Dämpfen angenähert erfüllt ist) $p_1 v_1 = \frac{\mathfrak{R}}{m} T_1$, wobei $\mathfrak{R} = 848$ den für alle Gase gültigen Festwert (kg, m, sek als Einheiten), m das Molekulargewicht bedeuten, auf die Form

$$w^2 = \frac{2gk}{k-1}\,\frac{\mathfrak{R}\,T_1}{m}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]$$

bringen, und erkennt, daß unter sonst gleichen Umständen **die Ausflußgeschwindigkeit der Quadratwurzel aus dem Molekulargewicht umgekehrt proportional ist.**

Allerdings nimmt k bei hochmolekularen Stoffen im allgemeinen ab, was w etwas erhöht.

Recht günstig steht der von Rahmer, D. R. P. Nr. 108017, vorgeschlagene Quecksilberdampf da, bei welchem $m =$ rd. 200 ist, und gegenüber Wasserdampf unter sonst gleichen Umständen w auf ein Drittel, infolge des größeren k sogar noch weiter herabgesetzt erscheint.

Leblanc beschäftigte sich mit Kohlenstofftetrachlorid CCl_4, für den $m =$ rd. 154, also günstig ist, der indes an dem Übelstande leidet, mit Wasser bei hoher Temperatur Salzsäure zu bilden. Da Wasser als Kühlwasser für den Kondensator unentbehrlich ist, besteht eine Gefahr bei Undichtheiten.

Zuppinger faßte schwere Kohlenwasserstoffe ins Auge, und ist betrebt, deren chemischen Zerfall bei hohen Temperaturen zu verhindern.

Seit wir mit verhältnismäßig kleinen Stufenzahlen hohe Wärmegefälle vorteilhaft haben ausnützen gelernt, hat die Herabsetzung der Ausflußgeschwindigkeit ihre frühere Wichtigkeit verloren. Man wird die Einfachheit des Dampfbetriebes nur ganz erheblichen sonstigen Vorteilen opfern.

Die Natronmaschinen

kann man abkürzend die vielfach vorgeschlagene Dampfmaschine nennen, bei der Natronlauge als Zwischenglied benutzt wird. Konzentrierte Natronlauge erfährt bei der Verdünnung mit Wasser oder sich niederschlagendem Dampf eine starke Erwärmung, die zu weiterer Dampferzeugung verwendet werden kann. Bekannt ist die Honigmannsche Lokomotive, die ihren eigenen Abdampf verschluckte

und so Frischdampf erzeugte. Solange man im Auge behält, daß die freiwerdende „Verdünnungswärme" wieder aufgewendet werden muß, wenn wir die verdünnte Lauge eindampfen, um sie wirkungsfähig zu machen, wird man nicht auf Abwege geraten.

Der ernsteste Versuch auf diesem Gebiete stammt von E. Zander, der den Prozeß der Honigmann-Lokomotive wie folgt verbessert: Die verdünnte Natronlauge wird in stetigem Strom in einen unter beispielsweise 10 at stehenden Verdampfer geführt und der Dampf, der während des Eindampfens gewonnen wird, nicht wie bei Honigmann ins Freie entlassen, sondern in einer Kolbenmaschine oder Turbine arbeitsleistend verwertet. Der Abdampf wird unter Atmosphärenspannung mit der konzentrierten Lauge, wie bei Honigmann, in einem besonderen Gefäß in Berührung gebracht, und die Mengenverhältnisse der beiden so geregelt, daß die Temperatur auf etwa 200° C steigt, so daß durch Einbau von Verdampfungsröhren frischer Dampf von etwa 10 at Druck erzeugt wird, der ebenfalls in einer Dampfmaschine Arbeit leistet. Die verdünnte Lauge fließt im Gegenstrom an der konzentrierten vorbei in den Eindampfer zurück, so daß die Temperaturen nahezu verlustlos ausgetauscht werden. Der Gewinn dieses Verfahrens liegt darin, daß die Temperatur im Eindampfer je nach der Konzentration auf 300 bis 320° gesteigert werden kann, so daß die von den Verbrennungsgasen herstammende Wärme dauernd bei dieser höheren Temperatur mitgeteilt wird, wodurch die Temperaturgrenzen ebenso stark erweitert werden wie bei der Mehrstoffdampfmaschine.

Als Nachteile sind in theoretischer Beziehung anzuführen der Verlust des Wärmeüberschusses in den Heizgasen unterhalb von 300°, da bei dem Prozeß keine weiteren Vorwärmer benötigt werden. Ferner die nicht umkehrbare Vermischung des Abdampfes mit der Natronlauge. Vor allem aber die Frage des Baustoffes, da konzentrierte Laugen Schmiedeeisen angreifen.

Eine gewisse Klasse von Erfindern glaubt indessen vor allem auf diesem Felde um den zweiten Wärmesatz herumzukommen, als ob die Theorie der Lösungen nicht gerade auf diesem Satze aufgebaut wäre. Die meisten Maschinenfabriken Mitteleuropas werden sich der zähen Zudringlichkeit erinnern, mit der Projekte dieser Art um das Jahr 1900 herum angeboten und angepriesen wurden. Leider sind verschiedene Anstalten erst „durch Schaden klug geworden".

b) Verbesserungsvorschläge für das Arbeitsverfahren der Brennkraftmaschinen im besonderen.

Bloß theoretisches Interesse beansprucht der Vorschlag von Friedenthal, bekannte Brennstoffe, z. B. Spiritus, mit Wasser in solchem Verhältnis zu mengen, daß die gesamte Abwärme des Motors zur Verdampfung der für ein Spiel aufzuwendenden Gemischmenge gerade hinreicht.

Könnte eine Maschine dauernd in dieser Weise betrieben werden, so würde gar keine Abwärme abgegeben, also würde scheinbar der gesamte Heizwert in Arbeit umgewandelt. Ein Dauerbetrieb dieser Art ist indes unmöglich, was man am leichtesten einsieht, wenn man den Grundgedanken des Prozesses auf den reinen Gasmotor überträgt. In einem vollkommenen Wärmeaustauscher kann man die während eines Spieles austretende Abwärme ganz auf die frische Ladung übertragen und so in der Tat alle Abwärme im Motor zurückbehalten. Aber die Folgerung, daß diese Wärme in Arbeit umgewandelt worden ist, wäre irrtümlich. Der Wärmeaustausch bewirkt nur eine von Spiel zu Spiel höhere Erhitzung der frischen Ladung, ohne bei gleichbleibenden Druckverhältnissen den Wirkungsgrad zu verbessern, und der Betrieb müßte bei zu hoch gestiegener Temperatur alsbald abgebrochen werden, wobei in der zuletzt abgegebenen Abgasmenge all die zurückbehaltene Wärme wieder zum Vorschein käme.

Eine Verbindung des Diesel-Motors mit der Gasturbine wurde von A. Büchi im D. R. P. Nr. 204630 vorgeschlagen.

Der Hochdruckteil der Verdichtung, die Verbrennung und ein Teil der Ausdehnung sollen in einem Diesel-Motor erfolgen, um die Schwierigkeit der hohen Temperaturen von der Turbine fernzuhalten. Nur nach starker Entspannung auf einen Druck von wenigen Atmosphären mit der entsprechenden ungefährlichen Temperatur würden die Abgase in die Turbine treten, wo ihre Arbeitsfähigkeit bei mäßigen Geschwindigkeiten voll ausgenützt werden könnte.

Die Dampfgasmaschine bezweckt die Ausnützung der Wärme in den Abgasen zur Erzeugung von gespanntem Dampf, der während der Ausdehnung mit den Brenngasen gemischt Arbeit leisten würde. Dieses Verfahren wurde bekanntlich zum ersten Male im Motor von Simon 1878 angewendet und verlassen, verschwindet indes nicht aus der Patentliteratur. Ein Beispiel bietet das D. R. P. Nr. 175312 der Gasmotorenfabrik Deutz, nach welchem der Dampf durch eine besondere Wärmequelle erzeugt werden soll. Theoretisch ist ein Gewinn sicher; ob auch wirtschaftlich, erscheint zweifelhaft. Zwar meint Güldner[1], daß der Grundgedanke einer solchen „Dampfgasmaschine" nicht kurzerhand verworfen werden könne; allein die Mischung des verhältnismäßig kalten Dampfes mit den hoch-

[1] Das Entwerfen und Berechnen der Verbrennungsmotoren. Berlin 1903, S. 31.

erhitzten Arbeitsgasen ist eine starke Nichtumkehrbarkeit, die vermieden werden sollte. Auch wird die unterste Temperaturstufe nicht ausgenutzt, da man die Abgase nicht unter den Taupunkt abkühlen darf.

Schon im Jahre 1895 haben Lorenz und Taucher diese Mängel durch den im D.R.P. Nr. 87523 niedergelegten Vorschlag zu beseitigen gesucht, die Abwärme einer Gasmaschine einschließlich der durch die Zylinderwand übergehenden Mengen zur Erzeugung von Dampf zu verwenden, diesen aber getrennt auf die Rückseite des Gaskolbens wirken zu lassen.

c) Gewinnung von Nebenerzeugnissen aus festen Brennstoffen. Der „Urteer" und die Gasturbine. Fortschritte der Feuerungsanlagen.

Die Gewinnung von Nebenerzeugnissen aus festen Brennstoffen ist heute nur auf dem Wege der Vergasung des Brennstoffes möglich, wobei insbesondere bei Braunkohle durch Einhaltung möglichst tiefer Temperaturen zunächst der wertvolle „Urteer" erzeugt wird. Dessen weitere chemische Verarbeitung liefert eine große Zahl wertvollster Stoffe, wie Benzol, Schmieröle, Harzschmiere, Kerzen, Seife, Ammoniaksulfat, Anilinfarben, Spreng- und Riechstoffe, Desinfektions- und Heilmittel, Lacke, Hartgummi u. a. Je nach Umständen können diese Stoffe zur wirtschaftlichen Hauptsache, das erzeugte Gas zum „Nebenerzeugnis" werden, für dessen Verwertung in großen zentralisierten Kraftwerken eine betriebssichere Gasturbine trotz geringeren Brennstoffnutzungsgrades eher in Betracht fallen würde, als die Kolbengasmaschine mit ihrer beschränkten Leistungsfähigkeit und den bekannten betriebstechnischen Nachteilen. So ist denn wahrscheinlich die Entwicklung der Gasturbine an diejenige der Urteergewinnung zwangsweise gebunden.

Die Ansichten über die Zukunft des Urteeres sind gespalten. Zwei wichtige Kundgebungen der letzten Zeit von anerkannten Fachmännern, Roser und Rummel[1]), gehen in ihren Schlußergebnissen auseinander. Beide geben als schweren, — nur vom privatwirtschaftlichen Interesse leicht hingenommenen Nachteil den Mehrverbrauch an Kohle bei der Gewinnung der Nebenerzeugnisse zu, der auf gleiche Leistung bezogen bis zu 40 v. H. betragen kann. Ebenso wird anerkannt, daß Gasmaschine und Gasturbine bei kleineren Leistungen so stark an Wirkungsgrad einbüßen, daß überhaupt nur angenäherte Vollbelastung in Frage kommt. Die stets auftauchenden „Spitzenleistungen" müßten daher mittels kohlengefeuerten Dampfanlagen oder unter Verwertung von flüssigem Brennstoff durch Dieselmotoren gedeckt werden. Roser bringt die in Abb. 1099a dargestellte Veränderlichkeit des Kohlenverbrauchs zur Anschauung, die für sich selbst spricht (bei Gasanlagen ist Teer und Salzgewinnung in Aussicht genommen) und vertritt die Ansicht, daß, wie ersichtlich, der Mehrverbrauch an Kohle durch vorzügliche Gasanlagen vermeidbar ist, daß er aber, sobald die Nebenerzeugnisse ein glänzendes wirtschaftliches Ergebnis sichern, auch vom Standpunkte des Volksganzen verantwortet werden könnte. Rummel gelangt zum Schluß, daß die Zeit für große Gaskraftanlagen noch nicht gekommen sei. Die Umstellung der Dampfkraftwerke auf Gaskraft, die man durchführen müßte, wenn die Nebenerzeugnisse im Volkshaushalt eine Rolle spielen sollen, würde für Deutschland mit den Preisen von 1920 eine Anlagesumme von rd. 32 Milliarden Mark ausmachen. Die Verbindung von Dampfkraftwerken mit Heizwirtschaft sei heute noch in Brennstoffverbrauch und Gesamtkosten überlegen. Immerhin entwirft auch Rummel ein anziehendes Zukunftsbild für spätere Ausgestaltung, wenn durch Überlandleitungen von hochgespanntem Heiz- und Kochgas auch die größten Gasmengen sicheren Absatz werden zu finden vermögen. Fügen wir hinzu, daß die Chemie der Kohlenforschung sich in ihren Anfängen befindet, und daß vielleicht eine nicht ferne Zukunft die in ihren Folgen unabsehbare Errungenschaft bringen kann: Kohle wirtschaftlich in flüssigen Brennstoff umzuwandeln. Hierdurch würden aus Gründen der Betriebszuverlässigkeit die Aussichten der Gasturbine wachsen.

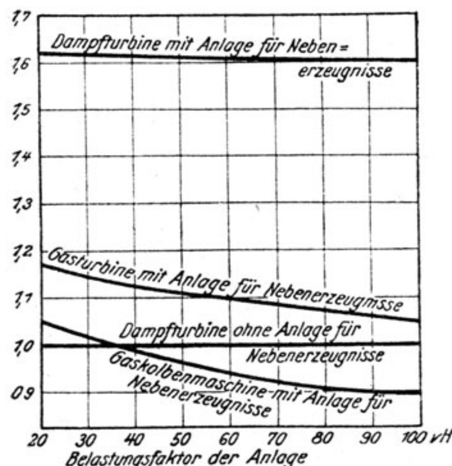


Abb. 1099a. Verhältnismäßiger Brennstoffverbrauch mit und ohne Nebenerzeugnisse.

Auf der andern Seite scheint die Kohlenstaubfeuerung neuerdings die Schwierigkeiten, die ihr vor einem halben Menschenalter ein unrühmliches Ende bereitet haben, zu überwinden, wodurch wieder der Großdampfturbine ein Vorsprung gesichert wird.

214. Elektrizität aus Kohle und die Gasketten.

Verglichen mit der von Nernst erwiesenen thermodynamischen Möglichkeit, eine Ausbeute von 96 bis 98 v. H. des Heizwertes zu erzielen, steht die Brennkraftmaschine für

[1]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1920, S. 565 bzw. 857.

flüssige Brennstoffe selbst bei Ausnützung des letzten Abwärmerestes noch sehr tief, und vollends unbefriedigend ist das Ergebnis, wenn Kohle als Brennstoff dient. Anderseits ist bekannt, daß die Umformung elektrischer Energie in mechanische mit Wirkungsgraden von 95 bis 98 v. H. gelingt. Es entsteht mithin die berechtigte Frage, ob die eingeschlagene Richtung nicht im ganzen falsch sei, und ob wir nicht den Motorenbau überhaupt aufgeben sollten, um uns dem Probleme der unmittelbaren Erzeugung von Elektrizität aus Kohle zuzuwenden.

Um Elektrizität aus Wärme („Kohle") zu erzeugen, gibt es[1]) zunächst eine Anzahl mittelbarer Verfahren, wie z. B. der von Nernst stammende Vorschlag, die Energie der Kohle durch Verhüttung im Hochofen auf Eisen oder Zink zu übertragen und diese Metalle im galvanischen Element auf Elektrizität zu verarbeiten. Oder man könnte die Abnahme der elektromotorischen Kraft mit der Temperatur in den umkehrbaren galvanischen Ketten (Akkumulatoren) derart ausnützen, daß man ein hocherhitztes Element bei kleiner Spannung unter Wärmezufuhr ladet, hierauf abkühlt und unter Wärmeableitung bei großer Spannung entladet. Der Unterschied der zu- und abgeleiteten Wärmemengen würde im Verhältnis des Carnotschen Satzes in elektrische Energie umgewandelt. Indes selbst die mit geschmolzenen Elektrolyten arbeitenden Elemente würden nur im Bereiche von etwa 500 bis 860° C verwendbar sein, was einen theoretischen Wirkungsgrad von rd. 35 v. H. bedeutet; dazu aber sind die zum Erwärmen und Abkühlen der Ketten notwendigen Wärmemengen gegenüber den nutzbar verwerteten so groß, daß die unvermeidlichen Verluste den Wirkungsgrad zu stark beeinflussen müßten. Es wäre mithin eine Vereinigung mit anderen Ketten notwendig, um sowohl den Sprung bis auf die Temperatur der Umgebung auszunützen, als auch den Wärmeinhalt der mit etwa 900° C entweichenden Feuergase des ersten Prozesses aufzunehmen.

Was die unmittelbare Erzeugung, sei es aus gelöstem Kohlenstoff selbst oder aus dem Kohlenoxydelement, anbelangt, so bedeuten die Arbeiten von Haber eine Vertiefung in wissenschaftlicher Beziehung, allein für das Kohlenoxydelement müßte beispielsweise glühendes Glas als Elektrolyt benutzt werden, daher von vornhinein große Wärmeverluste durch Strahlung zu gewärtigen wären. Außerdem könnte nur äußerst geringe Stromdichte erzielt werden, und so würde das Gewicht des Elementes, auf 1 PS bezogen, ins Ungeheuerliche wachsen.

Einen erheblichen Fortschritt bedeuten die Untersuchungen von E. Baur-Zürich und seiner Mitarbeiter. Die letzte Ausgestaltung, die das Verfahren in Verbindung mit W. D. Treadwell gewann, ist im Schweiz. Pat. Nr. 78591 Kl. 109 vom Jahre 1916 und den D.R.P. Nr. 325783 und 325784 Kl. 21b vom Jahre 1917 beschrieben. Die Einrichtung der uns vorzugweise interessierenden Gaskette ist die folgende. Als geeignete „Gaselektroden", d. h. Stoffe, von welchen die Gase in solcher Form aufgenommen werden, daß Strombildung vor sich geht, ohne daß der sich entwickelnde Prozeß Veränderungen der Elektrode hervorruft, dienen für die Brenngase vorzugsweise Eisen, das wechselweise oxydiert und desoxydiert wird; für die Brennluft Hammerschlag. Als Elektrolyt wird insbesondere geschmolzene Soda verwendet, die ein aus gebrannter Magnesia bestehendes Diaphragma durchtränkt, welches die Elektroden ihrer wirksamen Oberfläche entlang berühren. Innerhalb der Kette spielen sich die in Abb. 1100 eingeschriebenen Prozesse ab, wobei die freien Elektronen wie üblich durch + und — -Zeichen in den chemischen Formeln angedeutet sind

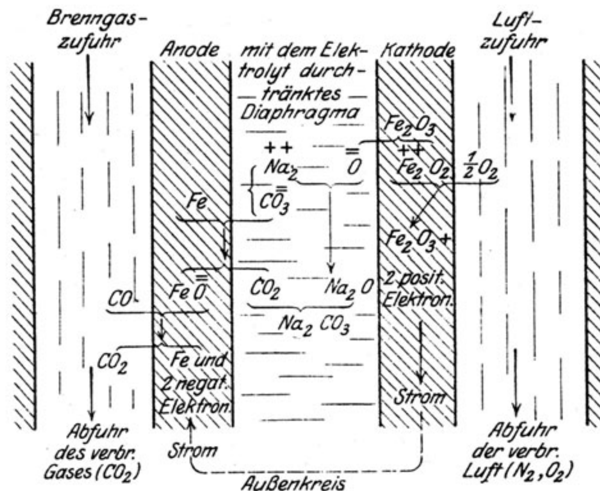


Abb. 1100. Gaskette von Baur.

An der Luftelektrode findet zunächst die Spaltung


$$Fe_2O_3 = (2\overset{++}{Fe}O) + \overset{=}{O} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

statt. $\overset{=}{O}$ wird durch das Doppelion $\overset{++}{Na_2}$ zum neutralen Na_2O gebunden; seine Entziehung stört das an der Elektrode bestehende Dissoziationsgleichgewicht, so daß unter Hinzutritt des Luftsauerstoffes die Reaktion:


$$(2\overset{++}{Fe}O) + \tfrac{1}{2}O_2 = Fe_2O_3 + 2 \text{ positive Elektronen} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

[1]) Nach seinerzeitiger freundlicher Mitteilung von Prof. R. Lorenz (Frankfurt).

mit der Freimachung von 2 positiven Elektronen hinzutritt, die im Dauerprozeß als Strom von der Elektrode abgenommen werden. Im Elektrolyt wandert das Ion CO_3 zur Gaselektrode und oxydiert diese gemäß Gleichung



$$\overset{=}{CO_3} + Fe = Fe\overset{=}{O} + CO_2 \quad \ldots \quad (3)$$

Das neutrale CO_2 findet sich durch Diffusion mit dem neutralen Na_2O zusammen, und wird erneut elektrolytisch in $\overset{++}{Na_2}$ und $\overset{=}{CO_3}$ dissoziiert. Die Aufnahme von O in die Gaselektrode stört das Dissoziationsgleichgewicht, welches durch den Schlußprozeß



$$Fe\overset{=}{O} + CO = CO_2 + Fe + 2 \text{ negat. Elektronen} \quad \ldots \quad (4)$$

wieder hergestellt wird, so daß der Stromkreis, indem man leitende Verbindung der Elektroden herstellt, sich schließt. Ebenfalls gemäß Gl. (4) wirkt Wasserstoff, wenn wir CO durch H_2 und CO_2 durch H_2O ersetzen. Die Elektroden werden, wie ersichtlich, selbsttätig „depolarisiert", sind also unbeschränkt wirksam. Die Gewähr für eine gute Energieausbeute liegt in der umkehrbaren Aufnahme und Abgabe der Gase durch die Elektroden, welcher Umstand einen wesentlichen Teil des Schutzanspruches ausmacht. Das Dissoziationsgleichgewicht tritt bei 900° ein. Überschreitet der CO_2-Rauminhalt 15 v. H., so spielt sich übrigens an der Gaselektrode neben Gl. (4) die Reaktion



$$3\,FeO + CO_2 \rightleftarrows Fe_3O_4 + CO \quad \ldots \quad (5)$$

ab. In thermodynamischer Hinsicht ist zu bemerken, daß der Höchstbetrag der erhältlichen Arbeit unabhängig von der Energieform ist, in der sie in Erscheinung tritt. Hier ist es die elektrische Energie, als Produkt aus der elektromotorischen Kraft E des Elementes und der überströmenden Elektrizitätsmenge. Letztere wird, auf ein elektrochemisches Äquivalent des wirksamen Stoffes bezogen, mit F bezeichnet und beträgt 96540 Coulomb für 1 g Äquivalent oder $96540 \cdot 10^3$ Cb für 1 kg Äquivalent. Die elektrische Arbeit EF in V/Cb kann in kcal ausgedrückt werden, indem man beachtet, daß

$$1 \text{ kg/m} = 9{,}81 \cdot 10^7 \text{ erg},$$

mithin

$$1 \text{ V/Cb} = 10^7/(9{,}81 \cdot 10^7) = 1/9{,}81 \text{ m/kg}, \quad \text{oder} \quad = 1/(9{,}81 \cdot 427) = 0{,}239 \cdot 10^{-3} \text{ kcal}$$

ist. Somit wird

$$EF = (96540 \cdot 10^3)\ (0{,}239 \cdot 10^{-3})\,E = 23050\,E \text{ in kcal für 1 kg Äquivalent},$$

sofern E in Volt eingesetzt wird. Die Formel der Höchstarbeit lautet also gemäß Abschn. 209

$$(EF)_{kcal} = H_p - T\,(S - S') \quad \ldots \quad (6)$$

oder wenn η der thermische Wirkungsgrad der vollkommenen Maschine bei der Temperatur T ist,

$$(FE)_{kcal} = \eta\, H_p.$$

So ergibt sich für die Verbrennung $H_2 + O_2/2 = H_2O$, wenn wir bei $T = 290$ abs. angenähert $\eta = 1$ setzen, mit $H_p = 57400$ kcal/mol, indem wir beachten, daß in der elektromotorisch wirksamen Reaktion H_2 zwei positive Elektronen transportiert, $E = 57400 : 2 \cdot 23050 = 1{,}243$ Volt in Übereinstimmung mit bekannten Versuchsergebnissen [1]).

Nehmen wir für vorliegende Gaskette ein Kraftgas mit 24 v. H. Raumteilen CO, 18 v. H. Raumteilen H_2 an, so ergeben sich nach Gl. 57a Abschn. 210 die Wirkungsgrade für die Einzelbestandteile bei der in der Kette herrschenden Temperatur $T = 900 + 273 = 1173°$ abs. zu 63,4 und 73,9 v. H. Hieraus folgt der Gesamtwirkungsgrad für das Gemisch $\eta = 0{,}684$, bezogen auf den bei 900° C erhältlichen Heizwert. Da dieser um rd. 1,50 v. H. höher sein dürfte als der bei 15° C, so ist der Wirkungsgrad auf den normalen Heizwert bezogen, der etwa 63500 kcal für 1 Mol des reinen H_2CO-Brenngasgemisches ausmacht:

$$\eta = 0{,}70 \quad \ldots \quad (8)$$

Die theoretische elektromotorische Kraft der Kette wäre hiernach:

$$E = \frac{0{,}70 \cdot 63500}{2 \cdot 23050} = 0{,}965 \text{ Volt} \quad \ldots \quad (9)$$

Nimmt man an, daß 20 v. H. hiervon durch den inneren Widerstand aufgezehrt werden, so bleibt theoretisch eine elektrische Leistung von 56 v. H. übrig. Das Gesamtergebnis hängt von der Ausnützbarkeit der Abfallwärmen ab. Als Verluste sind zu buchen: 1. Die in den abziehenden Gasen enthaltene Wärmemenge, 2. die nach außen durch Leitung und Strahlung abgegebene Wärme, 3. der durch unvollständige Verbrennung verlorene Heizwert, 4) Gasundichtheiten im Innern des Ofens, 5. elektrische Verluste durch mangelhafte Isolation oder sonstigen innern Stromausgleich (Kurzschluß). Diesen Verlusten steht als Einnahme die thermodynamisch unvermeidliche Wärmeableitung gegenüber, die den $(1 - \eta)$ten Teil, also hier 30 v. H. des Heizwertes ausmacht, und grundsätzlich (falls mit kleinem Luftüberschuß gearbeitet werden kann) hinreicht, um das frische Gemisch auf 900° C vorzuwärmen. Um zu beurteilen,

[1]) Nernst, Theoret. Chem. 1913, S. 776.

ob und wie dies praktisch durchgeführt werden kann, ist eine deutlichere Vorstellung über den Aufbau einer Kettenbatterie unerläßlich. Herr Prof. Baur teilt mir mit, daß als Bauelemente prismatische Stäbe aus gebrannter Magnesia von etwa 25 mm im Quadrat bei etwa 1 m Länge verwendet werden können, die mit einer zentralen Bohrung von etwa 10 mm Durchmesser versehen sind. Diese Bohrung wäre mit grobem Eisenfeilicht, bzw. für die Luftelektrode mit einem Gemisch von Eisenoxydoxydul in körnigem Zustand gefüllt. Durch bei 900° C widerstandsfähige Rohre würde an einem Ende in eine Gruppe das Brenngas in eine benachbarte Gruppe die Luft geleitet, und an den anderen Enden die Verbrennungsprodukte bzw. der Luftüberschuß in Empfang genommen. Isolierte Leiter führen den elektrischen Strom nach außen. Die mittlere Länge des innern Stromweges von der Anode zur Kathode kann auf etwa 20 mm geschätzt werden; der Weg, den die erzeugte Stromwärme im Mittel bis zu einer Elektrode zurückzulegen hat, wäre etwa 10 mm.

Über die Hauptfrage, von der alles abhängt, nämlich mit welcher Stromdichte gearbeitet werden darf, wird mir mitgeteilt, daß bei der beschriebenen Bauart aus 1 m³ Rauminhalt eine Leistung von rd. 1 kW mit 20 v. H. Stromwärmenverlust herausgeholt werden kann. Dies bedeutet für 1000 kW einen Ofen von 10 m im Kubus, was eine erhebliche Höhe des Anlagekapitals in sich schließt. Eine Überschlagsrechnung zeigt, daß die Strahlungs- und Leitungsverluste durch die Stromwärme bei ausführbarer Wärmeisolation gut gedeckt werden können. Da die thermodynamisch abzuleitende Wärme nahezu hinreicht, um die erforderliche Gasvorwärmung zu leisten, so könnte der Wärmeinhalt der Abgase in Abwärmekesseln und Dampfturbinen ausgenützt werden, was immerhin einen Zuwachs an Leistung von rd. 5 v. H. des Heizwertes ergeben könnte. Als erschwerende Umstände für die praktische Verwirklichung des Verfahrens sind zu nennen: 1. die wohl kaum genügend sicher abzuschätzende Wirkung der unter hoher Temperatur vor sich gehenden elektrochemischen Prozesse auf den Bestand der Diaphragmen und Elektroden; 2. die Schwierigkeit der richtigen Ableitung der Strom- und der thermodynamischen Verlustwärme an das frische Gasgemenge; 3. die Schwierigkeit der praktischen baulichen Ausführung mit den zahlreichen, dicht zu haltenden Luft und Gasleitungen aus feuerbeständigem Stoff; die Isolation von mehr als hundert in Reihe zu schaltenden Einzelkörpern, um auf höhere Spannungen zu kommen; der Schutz gegen die sich entwickelnden Dämpfe des Elektrolyten; 4. die Notwendigkeit, den Ofen ununterbrochen auf hoher Temperatur und in Betrieb zu erhalten, da Leerlauf mit starken Verlusten verbunden ist; die schwierige Zugänglichkeit nach erfolgter Stillegung (und Abkühlung) zum Zwecke der Überprüfung und Ausbesserung.

Es liegt auf der Hand, daß diese Schwierigkeiten kaum in einem Laboratorium geklärt und behoben werden können, sondern daß Versuche im großen, mit reichen Mitteln, den einzig gangbaren Weg bilden dürften und wohl Jahre für die Lösung beanspruchen würden. Angesichts der Ausbeute, die höher zu werden verspricht, als was die Wärmekraftmaschine erreichen kann, darf die Beistellung jener Mittel als wünschbar bezeichnet werden.

Die Ausführung der Kette als Kohleelement, bei dem (infolge der hohen Temperatur) C zuerst zu CO verbrannt und dieses nachher in einer Gaskette zu CO_3 oxydiert würde, hat theoretisch folgenden Vorteil voraus. Die EMK der Kette $C + O_2 \rightleftarrows CO_2$; ($\alpha$) ist von der Temperatur fast unabhängig, die von $CO + \frac{1}{2} O_2 \rightleftarrows CO_2$; ($\beta$) nimmt mit wachsender Temperatur erheblich ab; also muß diejenige von $C + \frac{1}{2} O_2 \rightleftarrows CO$; ($\gamma$) in gleichem Maße zunehmen, damit die in den beiden Zwischenstufen erzielte Arbeit gleichgroß sei, wie bei unmittelbarer Oxydation zu CO_2. Es könnten dann die beiden Ketten gewissermaßen in Schichten übereinander angeordnet werden, und die thermodynamisch freiwerdende Wärme des Prozesses (β) würde unmittelbar den thermodynamischen Bedarf des Prozesses (γ) decken können. Die Frage der Aschen- und Schlackenbildung und Wegräumung, wie auch der in fester Kohle (wie auch Koks) stets vorhandene Schwefel mit seinen schädlichen Wirkungen, verbieten wohl, vorläufig an die Verwirklichung dieser Kombination zu denken, für die ja überhaupt die vorherige Lösung der reinen Gaskette eine unerläßliche Vorbedingung bildet.

215. Durch bekannte Mittel gegenwärtig erreichbare beste Ergebnisse.

Greifen wir aus den vorgeschlagenen Verbesserungsvorschlägen diejenigen heraus, die unmittelbar, ohne langwierige Vorversuche, verwirklichbar sind, so gewinnen wir folgendes Bild über die heute erreichbare höchste Wirtschaftlichkeit.

a) Hochwirtschaftliche Dampfturbinenanlagen.

α) **Steigerung des Anfangsdruckes und der Anfangstemperatur.** Der Einfluß dieser beiden kommt in Abb. 1101 zum Ausdruck, die den thermischen Wirkungsgrad bei 0,04 at abs Luftleere und verschiedenen Anfangsdrücken darstellt, und beispielsweise abzulesen erlaubt, daß der Übergang von 20 at auf 30 at abs. Anfangsdruck bei 350° Anfangstemperatur

den thermischen Wirkungsgrad der vollkommenen Maschine von 34,6 auf 36,2 v. H. steigert. Beim Übergang von 30 auf 40 at abs. steigt der Wirkungsgrad von 36,2 auf 37,4 v. H.

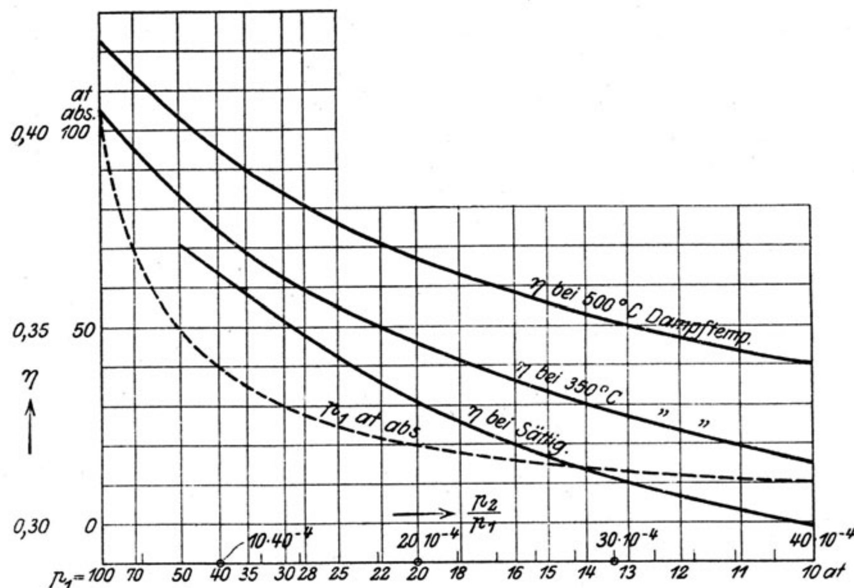


Abb. 1101. Thermische Wirkungsgrade der vollkommenen Maschine bei 0,04 at abs. Luftleere.

Rechnen wir 80 v. H. als effektiven Wirkungsgrad für die Turbine und 85 v. H. für den Kessel, und nehmen wir 10 v. H. Druckzuschlag für den Kessel an, so erhalten wir die Zahlenreihe

Kesseldruck at abs.	22	33	44	110
Brennstoffnutzungsgrad v. H.	23,5	24,6	25,4	27,5

β) **Vorwärmung des Speisewassers durch Dampf aus Zwischenstufen der Turbine.** Dieses neuerdings mit Energie aufgegriffene Verfahren ist nichts anderes, als die Anwendung des „Regenerators“ auf den Dampfturbinenprozeß (vgl. Abschn. 209). Die an das kalte Speisewasser zugeführte Wärme kann thermodynamisch nur äußerst ungünstig ausgenutzt werden. Man kann ihren schlechten Einfluß ganz beseitigen, indem man dem sich dehnenden Dampf die gleiche Wärmemenge bei gleicher Temperatur entzieht, und sie zur Vorwärmung des frischen Speisewassers verwendet. Hierdurch wird die übliche Speisewasservorwärmung durch Rauchgase gegenstandslos. Da dann aber der Kaminverlust ein zu großer würde, ist gleichzeitig die Einführung der Luftvorwärmung durch den letzten Kesselzug unbedingtes Erfordernis. Das Schema einer derartigen Anlage wird durch Abb. 1102 veranschaulicht. Die Vorwärmung des Speisewassers kann durch Misch- oder durch Oberflächenkondensierung des Zwischendampfes erfolgen. Im ersten Fall würde man die Spannkraft des Dampfes wie in der Strahlpumpe zur Beförderung des Speisewassers benutzen können, so daß besondere Pumpen wegfielen. Nehmen wir der Einfachheit halber an, daß die Vorwärmung bis auf die Temperatur des jeweils zugeführten Dampfes getrieben werden kann und daß das Kondensat auch bei Anwendung von Vorwärmschlangen sogleich dem Speisewasserstrom zugeleitet wird. Es sei in der 1. Vorwärmstufe i_1' der zum Druck p_1 gehörende Flüssigkeitswärmeinhalt ähnlich für die folgenden. An Hand der in die Abbildung eingetragenen

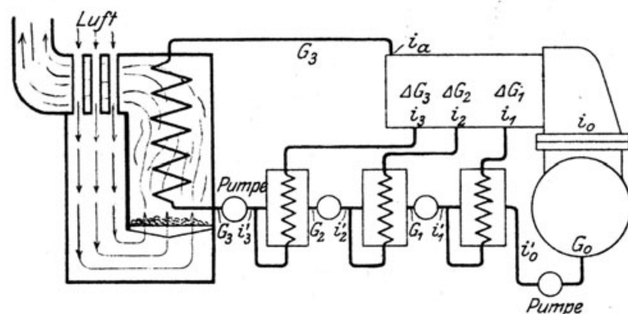


Abb. 1102. Speisewasservorwärmung aus Zwischenstufen der Turbine.

weiteren Bezeichnungen geht der Wärmeaustausch gemäß den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \varDelta G_1 i_1 + G_0 i_0' &= G_1 i_1' \\ \varDelta G_2 i_2 + G_1 i_1' &= G_2 i_2' \\ \varDelta G_3 i_3 + G_2 i_2' &= G_3 i_3' \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

vor sich, wobei $G_1 = G_0 + \varDelta G_1$; $G_2 = G_1 + \varDelta G_2$; $G_3 = G_2 + \varDelta G_3$. **Durch Auflösung von** (1) ergeben sich, mit den Bezeichnungen

$$\alpha_1 = \frac{i_1' - i_0'}{i_1 - i_1'}; \quad \alpha_2 = \frac{i_2' - i_1'}{i_2 - i_2'}; \quad \alpha_3 = \frac{i_3' - i_2'}{i_3 - i_3'} \quad \ldots \ldots \ldots (2)$$

die aufeinanderfallenden Gewichte

$$G_1 = (1 + \alpha_1)\,G_0; \qquad G_2 = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2)\,G_0; \qquad G_3 = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2)(1 + \alpha_3)\,G_0 \quad (3)$$

und die innere Leistung N_i, wenn alle Gewichte auf die Stunde bezogen werden

$$632\,N_i = G_0(i_1 - i_0) + G_1(i_2 - i_1) + G_2(i_3 - i_2) + G_3(i_a - i_3) \quad \ldots \ldots (4)$$

Schreibt man abkürzend

$$\varPhi = (i_1 - i_0) + (1 + \alpha_1)(i_2 - i_1) + (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2)(i_3 - i_2) + (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2)(1 + \alpha_3)(i_a - i_3) \quad (5)$$

so ist

$$632\,N_i = \varPhi\, G_0; \qquad G_0 = \frac{632\,N_i}{\varPhi} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (6)$$

Der vom Kessel zu leistende Wärmeaufwand ist

$$Q = G_3(i_a - i_3') \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (7)$$

Daraus folgt der Wärmeverbrauch für die innere Pferdekraftstunde

$$Q_i = \frac{Q}{N_i} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (8)$$

Findet keine Vorwärmung durch Zwischendampf statt, so ist $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$; $G_3 = G_0$, $\varPhi_0 = i_a - i_0$; $Q_0 = G_0(i_a - i_0')$ und man findet als Verhältnis des Wärmeverbrauchs bei gleicher Leistung

$$\frac{Q_i}{Q_{i0}} = \frac{i_a - i_3'}{i_a - i_0'} \frac{\varPhi_0}{\varPhi} \cdot \frac{G_3}{G_0} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (9)$$

Die erzielbare Ersparnis hängt von der Zahl der Vorwärmstufen und von den Temperaturverhältnissen ab. In Abb. 1103 ist beispielsweise $(Q_i - Q_{i0})/Q_{i0}$ in v. H. für eine Turbine mit $p_a = 18$ at abs. $t_a = 330^\circ$ C; $p_0 = 0{,}04$ at abs.; $N_i = 20000$ PS; $n = 3000$ und 7 Stufen mit den Zwischendrücken 7,5; 2,8; 1,0; 0,48; 0,22; 0,10 at abs. bei dreistufiger Vorwärmung dargestellt[1]). Dabei ist vorausgesetzt, daß der erste Vorwärmer an die Stufe mit 0,22 at Druck angeschlossen ist. Die Y- und die X-Achse stellen die Temperaturen und den Wärmeinhalt der Turbinenstufen dar, an die der 2. und 3. angeschlossen sind; die Z-Achse ist der Gewinn in v. H. Man erkennt, daß ein Höchstwert von 7,0 v. H. erreicht wird, wenn man den 2. Vorwärmer an 0,48, den 3. an 2,8 at anschließt. Eigentümlicherweise kann das gleiche Ergebnis auch bei anderer Anschlußfolge erzielt werden, z. B. wenn die Anschlußpressungen 0,48; 2,8; 7,5 at abs. betragen, wobei die Vorwärmtemperatur von 130° C auf 165° C steigt. Die in den Kondensator gelangenden Dampfmengen sind in beiden Fällen etwa 0,9 derjenigen ohne Vorwärmung. Die Kühlfläche kann in gleichem Verhältnis verkleinert werden. In den Kessel muß etwa 1,075- bzw. 1,14 mal so viel als ohne Vorwärmung befördert werden. Hieraus folgt aber nicht etwa eine Vergrößerung der

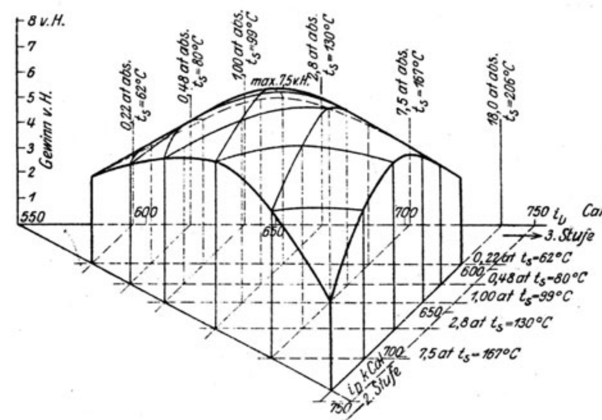


Abb. 1103. Wärmeersparnis bei dreistufiger Speisewasservorwärmung.

[1]) Der Diplomarbeit von Ing. Sibler an der Eidgen. Techn. Hochschule entnommen.

Heizfläche, da vielmehr die übertragene Wärme geringer, das Temperaturgefälle größer ist. Eine ähnlich durchgeführte Rechnung ergab, daß der Gewinn mit der Zahl der Vorwärmstufen wie folgt wächst:

Zahl der Vorwärmstufen	1	2	3	4	5
Höchstgewinn in v. H.	5,2	6,8	7,5	8,2	8,6

Man erkennt, daß mehr als 2 bis höchstens 3 Stufen anzuordnen praktisch nicht mehr lohnend wäre.

Bei der praktischen Ausgestaltung der Zwischenvorwärmung müssen die nötigen Vorkehrungen für ungestörte Funktion die Anordnung getroffen werden. So schützt C. Baumann im Engl. Patent Nr. 3151 vom Jahre 1915 eine Entlüftung des Vorwärmers durch Verbindung von dessen Dampfraum mit dem Kondenserinnern mittels einer engen Leitung; ebenso bei Oberflächenvorwärmern die Rückleitung des gebildeten Dampfkondensates in die Saugleitung der Kreiselpumpe, die das Kondensat aus dem Hauptkondenser durch ein U-förmiges Überfallrohr absaugt, dessen Ablaufschenkel wieder zum Zweck der Entlüftung mit dem Hauptkondenser verbunden wird. Ähnlich bei Mischvorwärmung. Der Vorwärmer soll ferner so angeordnet sein, daß bei versagender Ableitung des Kondensates dieses die Heizflächen überflutet und unwirksam macht, ohne daß ein Überfließen des Kondensates in die Turbine möglich wäre. Baumann schützt ferner im Engl. Patent Nr. 16432 vom Jahre 1915 insbesondere die Verbindung der einstufigen Zwischenvorwärmung mit einem darauffolgenden Rauchgasvorwärmer und einem Wärmeaustauscher für die frische Verbrennungsluft im letzten Rauchgaszuge.

Rechnen wir mit einer Verbesserung des Wirkungsgrades durch die Vorwärmung im Verhältnis von 1 : 1,075, so ergibt sich im Anschlusse an die Angaben unter α) die Zahlentafel:

Kesseldruck at abs.		22	33	44	110
Brennstoffwirkungsgrad bei 0,8 Turb., 0,85 Kesselwirkungsgrad, 350° Dampftemperatur, 0,04 at abs. Luftleere	v. H.	25,3	26,4	27,3	29,6

Diese Ziffern können selbstverständlich nur bei tadelloser Instandhaltung der Anlage und einem sorgfältig vorbereiteten (indes mit Unrecht als „Parade" bezeichneten) Versuch erreicht werden. Wie weit man im Jahresdurchschnitt darunter bleibt, hängt von der Vollkommenheit des Betriebes und insbesondere von der durchschnittlichen Belastung des Werkes ab.

In England sind mehrere Anlagen mit Hochspannung bis rund 34 at und Dampftemperaturen bis 370° C in Ausführung begriffen.

γ) Die **„Mehrspannungsanlage"** von Bauer. In der lesenswerten Studie über „Wirtschaftlichkeit der Schiffsantriebe"[1]) schlägt Bauer vor, die Hauptmenge des Betriebsdampfes in Hochdruckkesseln mit 50 at Üb., und 480° C Temperatur Anfangszustand zu erzeugen, und in einer Hochdruckturbine auf 16 at abs., sodann in einer dreistufigen Kolbenmaschine auf 0,2 at abs., endlich in einer Niederdruckturbine auf 0,05 at abs. zu entspannen. Die für die Hilfsmaschinen der Kraftanlage benötigte Dampfmenge, die auf 15,5 v. H. des Verbrauches der Hauptmaschinen —, sowie diejenige für die sonstigen Schiffshilfsmaschinen, die auf 20 v. H. eingeschätzt wird, sollen in besonderen mit 16 at abs. arbeitenden Dampfkesseln erzeugt und nach Gebrauch in den Zwischenbehälter der Niederdruckdampfzylinder bei 1,7 at abs. Druck geleitet werden.

In diesen Hilfskesseln wird auch das Speisewasser für die Hauptkessel vorgewärmt; außerdem kommt Vorwärmung des Speisewassers mit dem Dampf einer Zwischenstufe und mit den abziehenden Rauchgasen zur Verwendung. In den letzten Rauchzug wird ein Luftvorwärmer eingebaut. Die Aufstellung einer Kolbenmaschine macht die Rückwärtsturbine entbehrlich und es spielt wirtschaftlich keine Rolle, daß für die Rückwärtsfahrt der Dampf auf 16 at abgedrosselt werden muß.

Auf Grund von Versuchen mit einer Hochspannungsturbine rechnet Bauer für die erste Entspannungsstufe mit bloß 63 v. H. Wirkungsgrad; für die *HD*- und *MD*-Stufe der Kolbenmaschine werden 77 v. H., für den *ND*-Zylinder, 68,5 v. H., für die Abdampfturbine, 67 v. H. als thermodynamischer effektiver Wirkungsgrad angesetzt. Infolge dieser für den Schiffsbetrieb wohl angemessen (wenn auch vielleicht zu vorsichtig) gewählten Ziffern, und mit Rücksicht auf die nicht unbeträchtliche, von den Hilfsmaschinen in entwertetem Zustand angelieferte Dampfmenge ergibt sich bei 82,5 v. H. Kesselwirkungsgrad ein Brennstoffnutzungsgrad von rund bloß

22 v. H.

Immerhin ist beachtenswert, daß auch die von Bauer mit herangezogenen Vergleichsrechnungen einer Mehrstoffanlage mit hochsiedendem Erdöldestillat und Wasserdampf auf bloß 21,7 v. H. thermischen

[1]) Jahrb. d. Schiffbautechn. Ges. 1920, S. 109.

Wirkungsgrad führt. Auch die Teilung der Anlage in zwei Mittelwellen mit Ölmaschinen und zwei Seitenwellen mit Mehrdruck-Dampfturbinenantrieb bei einem Verhältnis der Leistungen von 1 : 1,8 bringt es bloß auf 24,6 v. H. Wirkungsgrad.

δ) **Die Quecksilber- und Wasserdampfturbine der General Electric Co.** Nach den im Jahre 1914 erschienenen Veröffentlichungen[1]) ihres Chefingenieurs Emmet wurde in den Werken der General Electric Co. Schenectady eine mit Quecksilberdampf betriebene Versuchsturbine erprobt, um die Möglichkeit darzutun, mit Hilfe dieses hochsiedenden Stoffes, höher gelegene Temperaturgrenzen, als Vorstufe der Wasserdampfturbine auszunutzen.

Der Quecksilberkessel arbeitete mit 0,7 at Üb. oder 378° C Temperatur. Im Quecksilberkondensator wurde Wasserdampf von 12,2 at Üb., also 191° C Temperatur, die im Überhitzer auf 274° C gebracht wurde, erzeugt. Aus dem Verhältnis der Verdampfungswärmen ergab sich, daß auf 1 kg Wasserdampf rd. 10 kg Quecksilberdampf entfallen. Die Leistungsvergrößerung der Dampfturbine betrug 66 v. H. bei 15 v. H. Mehrverbrauch an Brennstoff. Die Wärmeausbeute stieg somit auf das 1,66 : 1,15 = 1,45 fache, oder die Verbesserung betrug 45 v. H.

Diese Ergebnisse veranlaßten mich, die Zweistoffanlage, Quecksilberwasserdampf, näher untersuchen zu lassen. Herr Ing. Jaquet unterzog sich[2]) dieser Arbeit, und stellte zunächst die in Abb. 1104 veranschaulichte Entropietafel des Quecksilberdampfes auf Grund der in der Literatur vorhandenen Angaben über die physikalischen Eigenschaften (Spannungskurve, Verdampfungswärme, spezifische Wärme für den flüssigen Zustand = 0,033 für Dampf ergab sich $c_p = 0,025$ usf.) dieses Stoffes auf. Mit ihrer Hilfe führte die Durchrechnung einer Kraftanlage; auf folgende Ergebnisse.

	a) Quecksilberdampfturbine				b) Wasserdampfturbine		
1	Quecksilber-Kessel-Druck . . .	at abs	2,0	15	Anfangsdruck im Verdampfer	at abs.	18
2	„ Überhitz-Temp. . .	°C	470	16	Anfangstemperatur im Verdampfer	°C	206
3	Anfangsdruck in Quecks.-Turb.	at abs.	1,7	17	Überhitzungstemperatur . . :	„	300
4	Anfangstemperatur „ „	°C	450	18	Kondensatordruck	at abs.	0,04
5	Enddruck „ „	at abs.	0,07	19	Kondensatortemperatur	°C	29
6	Endtemperatur „ „	°C	236	20	Im Vorwärmer mitzuteilende Flüssigkeitswärme	k cal/kg	181,2
7	Adiabatisches Gefälle H_0 . . .	k cal	17,0	21	Im Quecksilberkondenser mitzuteilende reine Verdampfungswärme	„	462,4
8	Eff. thermodyn. Wirkungsgrad	v. H.	70	22	Im Überhitzer mitzuteilende Überhitzungswärme . . .	„	52,1
9	Spezif. Quecksilberdampfverbrauch	kg/PS$_e$-st	53,05	23	Adiabatisches Wärmegefälle .	„	232,8
10	Kondensationswärme	k cal/kg	62,87	24	Eff. thermodyn. Wirkungsgrad	v. H.	75
11	Im Kessel zuzuführende Flüssigkeitswärme	„	5,56	25	Spezif. Dampfverbrauch . . .	kg/PS$_e$-st	3,62
12	Im Kessel zuzuführende Verdampfungswärme : . .	„	68,0				
13	Im Kessel zuzuführende Überhitzungswärme . . .	„	1,76				
14	Gesamte Verdampfungswärme	„	75,32				

Das Verhältnis des Quecksilbers und des Wassergewichtes ergibt sich aus dem Wärmeaustausch im Quecksilber-Kondensator. Setzen wir infolge der hohen Temperatur von 236° C einen Verlust von 12 v. H., die Rohrleitungen eingeschlossen, voraus, so stehen auf 1 kg Quecksilber $62,87 \cdot 0,88$ k cal zur Verfügung, und mit diesen kann man

$$\frac{62,87 \cdot 0,88}{462,4} = 0,12 \text{ kg}$$

vorgewärmtes Wasser verdampfen. Die Vorwärmung und Überhitzung erfolgt durch die Rauchgase. Die Arbeitsverteilung berechnet sich wie folgt:

1 kg Quecksilber/st leistet 1 : 53,05 = 0,0188 PS,
0,12 kg Wasserdampf/st „ 0,12 : 3,62 = 0,0332 PS.
Auf 1 PS in Quecksilber entfallen mithin in Wasser 1,76 PS.

Der Wärmeaufwand für 1 kg Quecksilber ist . . . . 75,3 k cal
Dazu tritt der Wärmeaufwand für Vorwärmung und Überhitzung von 0,12 kg Wasser = 0,12 (181,2 + 52,1) . . . . = 28,0 k cal
Insgesamt . . . . 103,3 k cal
Der Arbeitsgewinn ist 0,0188 + 0,0332 = 0,0520 PS/st, oder $0,052 \cdot 632$ . . . . = 32,8 k cal
Bei 0,85 Kesselwirkungsgrad ist der Aufwand an Brennstoffheizwärme 103,3/0,85 . . . . = 121,5 k cal
Mithin **der gesamte thermische Wirkungsgrad (= Brennstoffnutzungsgrad) 32,8/121,5** . . . . = **0,27 k cal**

[1]) Proc. Amer. Inst. Electr. Eng. 1914, S. 473.

[2]) In seiner Diplomarbeit an der Eidgen. Techn. Hochschule.

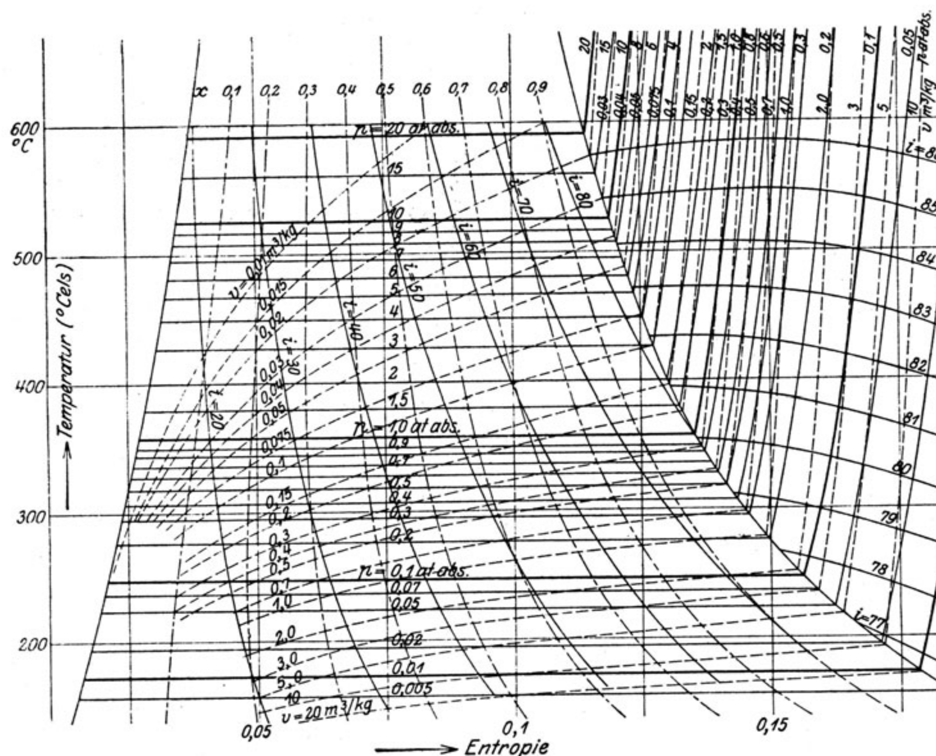


Abb. 1104. Entropietafel für Quecksilberdampf.

Die Entropiediagramme des Hg- und des H_2O-Prozesses sind maßstäblich auf 1 kg Hg bezogen, in Abb. 1104a, dargestellt.

Abmessungen der Quecksilberturbine. Für die angenommenen Verhältnisse ergibt sich:

Angenommener Druckverlust zwischen Kessel und Turbine	0,3 at
„ Temperaturverlust „ „ „ „	20° C
Anfangsdruck vor der Turbine	1,7 at abs.
Anfangstemperatur vor der Turbine	450° C
Adiabatisches Gefälle auf 0,07 at abs.	17,0 k cal
Adiabatische Ausströmgeschwindigkeit	$c_{th} = 378$ m/sek
Effekt. Ausströmgeschwindigkeit mit $\varphi = 0,95$	$c_1 = 359$ „
Es sei die vorgeschriebene effekt. Gesamtleistung	$N_e = 18000$ PS
Hiervon entfallen auf die Quecksilberturbine $1/(1+1,76) \cdot N_e$	$N_q = 6550$ PS
Sekundlich erforderliches Quecksilbergewicht $N_q \cdot 53,0/3600 =$	96,5 kg/sek

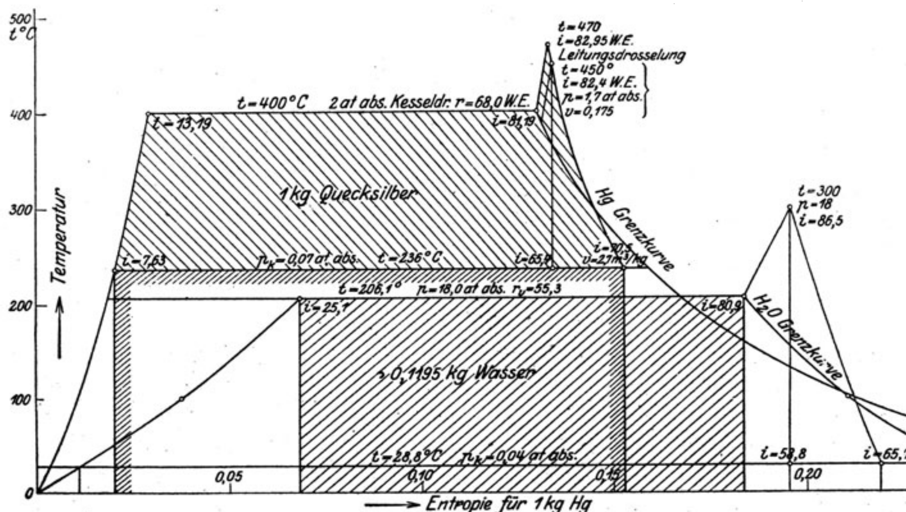


Abb. 1104 a. Entropieschaubild für 1 kg Hg und die zugehörige Menge H_2O.

Bei 3000 Uml./min und 188,5 m/sek Umfangsgeschwindigkeit, d. h. 1,2 m Durchmesser, $\alpha_1 = 24^0$ sind mit $v_1 = 2{,}7$ m³/kg zwei parallelgeschaltete einstufige Räder erforderlich, mit einer Schaufellänge von je etwa 230 mm am Eintritt und 280 mm am Austritt. Damit ist man wohl an die Grenze der Leistungsfähigkeit bei 3000 Uml./min angelangt, während die Wasserdampfturbine mit 11450 PS Leistung von dieser Grenze noch weit entfernt ist. Größere Leistungen würden uns also zwingen, mit der Drehzahl auf 1500 herabzugehen, wodurch die Ausführung in der Anlage kostspieliger wird.

Die Wärmeverteilung in den Rauchgasen ergibt sich aus dem Wärmebedarf der einzelnen Stufen. Mit 1500° C als angenommener Anfangstemperatur der Verbrennung ergibt sich nachfolgende (auf die Veränderlichkeit der spezifischen Wärme der Rauchgase Rücksicht nehmende) Zahlentafel.

Reihenfolge der Stufen	Quecksilberkessel	Quecksilberüberhitzer	Wasserdampfüberhitzer	Quecksilberflüssigkeitsvorwärmer	Wasserflüssigkeitsvorwärmer
Auf 1 kg Quecksilber erforderliche Wärmezufuhr . . . . kcal	68,0	1,76	0,12·52,1	5,56	0,12·181,2
In Hundertsteln der Gesamtwärme . . . . v. H.	65,8	1,7	6,1	5,4	21,1
Rauchgastemperaturen am Ein- und Austritt . . . . °C	150—670	670—649	649—568	568—494	494—192

So gewinnend auch der Gedanke, das Quecksilber als höhere Stufe dem Wasserdampfprozeß vorzusetzen, bei den guten thermischen Eigenschaften dieses Stoffes ist, so wird man doch durch das errechnete Ergebnis von 27 v. H. Gesamtwirkungsgrad im Vergleich mit dem was reiner Wasserdampfbetrieb zu bieten verspricht, enttäuscht. Dabei ist als Druckverlust zwischen Kessel und Turbine der geringe Betrag um 0,3 at angesetzt wurden, der, wie eine Rechnung erweist, einschließlich des Überhitzers erreichbar ist, allein doch zur Anwendung die volle Öffnung darbietender Absperrschieber statt der üblichen Ventile und zu sorgfältigster Leitungsanordnung zwingt. Weit mehr als dieser Übelstand fallen ins Gewicht

1. Die hohe Giftigkeit des Quecksilberdampfes, die bei der Versuchsanlage der General Electric Co., einerseits zur Schweißung der Kesselelemente zwang, anderseits die Umhüllung sämtlicher Flanschendichtungen mit Kappen erforderlich machte, die unter leichte Luftleere gesetzt wurden, um austretende Dämpfe in einem Hilfskondensator niederzuschlagen.

2. Der hohe Preis des Quecksilbers und der bedeutende Vorrat, der durch die Füllung des Kessels bei größeren Anlagen bedingt ist.

ε) **Die Hochdruckölmaschine mit weitgehendster Abwärmeverwertung.** Da die Ölmaschine schon an sich die höchste Wärmeausbeute aufweist, so ist der Zusatzgewinn durch vollkommenste Verwertung ihrer Abwärme von vornherein vielversprechend. Eine Hauptfrage dabei ist, ob die im Deckel und im Zylindermantel übergehende Wärme durch Verdampfung des Kühlwassers auf das wünschbare höhere Temperaturniveau gebracht werden kann.

Still[1]) gebührt das Verdienst, an einer 400 PS-Versuchsmaschine die Möglichkeit des praktischen Betriebes bei Verdampfung des Kühlwassers, erwiesen zu haben. Die Schmierfähigkeit der Zylinderlaufflächen blieb trotz etwa 180° C Kühlwassertemperator erhalten. Damit ist der Weg für weitgehende Abwärmeverwertung eröffnet.

Der Dampfturbinenkonstrukteur wird es vorziehen, den Dampf in einer Turbine mit Zahnradvorgelege und hochwertiger Kondensation auszunutzen. Der Voranschlag für die dann zu erwartende Wärmeausnutzung würde schätzungsweise wie folgt lauten:

		Mittlere Verhältnisse	Beste Verhältnisse
Brennstoffwärme	v. H.	100	100
In indizierte Arbeit in der Ölmaschine umgewandelt	„	44,0	47,5
Mechanischer Wirkungsgrad	„	70,0	76,0
Effektive Arbeit	„	30,8	36,0
Reibungsarbeit	„	13,2	11,5
Verlust in den Abgasen	„	10,0	8,0
Verlust durch Strahlung u. a.	„	3,0	2,5
Gesamte nutzbare Abwärme	„	43,0	42,0
Thermischer Wirkungsgrad des Abwärmekessels und der Turbine zusammen .	„	20,0	20,0
In Dampf gewonnene Arbeit	„	8,6	8,4
Gesamte Arbeitsausbeute	„	39,4	44,4

[1]) Engineer, 30. Mai 1919. Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1919, S. 813.

Die als „beste Verhältnisse" angeführten Zahlen, sind Angaben von Mathot[1]) entnommen. **Die Schlußziffer von rd. 45 v. H. als Gesamtwirkungsgrad, stellt die höchste Ausbeute dar, die heute unter Aufwendung aller bekannten Mittel als wahrscheinlich erreichbar bezeichnet werden kann.**

Da es sich hier jedoch nur um die in jeder Hinsicht **mit Vorzügen ausgestalteten,** aber der Menge nach hinter der Steinkohle, weit zurückstehenden **Treiböle** handelt, so **bleiben die Aussichten für die Ausnützung der hauptsächlichen Brennstoffe** der Erde noch wie vor sehr **unbefriedigende.** Dies veranlaßt uns auf die begrifflichen Grundlagen der Wärmelehre nochmals zurückzukommen, insbesondere auch deshalb, weil die neuere Formulierung des II. Hauptsatzes zu mannigfachen Mißverständnissen Veranlassung gegeben hat.

216. Entwertung der Energie. Machs Einwände gegen den Energie- und Entropiesatz.

So oft wir Arbeit aus Wärme erzeugen wollen, so oft müssen wir einen gewissen Teilbetrag der verfügbaren Wärmemenge im Sinne des zweiten Hauptsatzes an die tiefere Wärmequelle abgeben, und um diesen Betrag ist die ursprüngliche Wärmemenge von vornherein in Hinsicht auf unsere menschlichen Zwecke entwertet.

Die Umwandlung von elektrischer in mechanische Energie und umgekehrt geht bekanntlich mit sehr kleinen Verlusten vor sich. Ebenso setzen gewisse galvanische Ketten die chemische Energie mit ungemein hohem Wirkungsgrad in elektrische Energie um. Verglichen mit diesen Energiearten scheint die Wärmeenergie überhaupt „minderwertig" zu sein. Man hat dies auch so ausgedrückt, daß wenn Wärme überhaupt entsteht, ein „prädestinierter" Verlust mitentstanden, gewissermaßen mitgebucht ist. Hieraus hat Mach in seinen Prinzipien der Wärmelehre (1. Aufl., S. 344) unberechtigte Schlüsse auf eine vermeintliche begrenzte Gültigkeit des Energiesatzes gezogen. Er vertritt den Standpunkt, daß Clausius in der Aufstellung des Entropiesatzes $\Sigma Q/T = 0$ für umkehrbare Vorgänge den Entropiewert Q/T (ursprünglich „Äquivalenzwert" genannt) absichtlich so gewählt habe, daß die Substanzauffassung desselben ausführbar sei. Überall, wo eine Reaktion verschwindet und dafür anderwärts eine gleichartige erscheint, mache sich das Bedürfnis nach einer einfachen geläufigen Auffassung des Vorganges und damit der Substanzbegriff geltend. So seien die Begriffe Wärmemenge, Elektrizitätsmenge u. a. durch die Beobachtung entstanden, daß ein Körper sich auf Kosten des andern erwärmt, elektrisiert usw. So richtig dies für die angeführten sehr alten Begriffe ist, so sehr muß man bezweifeln, daß Clausius mit der Entropie eine Substanzvorstellung verbunden hätte oder auch nur eine Substanz„auffassung" hätte durchführen wollen. Daß eine Versuchung vorhanden ist, sich etwa den Vorgang umkehrbarer Wärmemitteilung so vorzustellen, als ob dabei zugleich die Entropiemenge Q/T vom Behälter ab und in den Körper hineinflösse, soll zugegeben werden, aber nur, um den in dieses Gebiet Eintretenden zu warnen, sich ihr hinzugeben. Schon Clausius hat ja für nichtumkehrbare Vorgänge die Zunahme der Entropie erkannt, **und Zunahme ist unverträglich mit der Vorstellung der Substanz,** an der gerade die Unveränderlichkeit der Menge den erwünschten Halt darbietet. Die „Entropie" kann und soll als abstrakter Begriff nur der Stellvertreter des in ihrer Definition enthaltenen Gedankenkomplexes sein.

Mach findet, daß der aus dem naiven Denken herstammende Trieb, überall Substanz zu vermuten, beim Energiesatz in noch viel höherem Maße in Erscheinung trete, und frägt, ob dessen Anwendung beim Energiebegriff nicht ebenso eingeschränkt sei wie bei der Entropie. Er gelangt zu einer Bejahung und damit merkwürdigerweise zu einer Einschränkung der Gültigkeit des Energiesatzes. Da auch beim klassischen Carnotprozeß stets ein Teil der zugeführten Wärme an den unteren Behälter abgegeben werden muß, erklärt Mach, es habe keinen gesunden Sinn, einer Wärmemenge, die man nicht in Arbeit verwandeln kann, noch einen Arbeitswert beizumessen (S. 345). Zwar sieht er voraus, daß der Zweifel an der unbegrenzten Gültigkeit des Energieprinzips ebenso Befremden erregen werde als ein Bezweifeln der Konstanz der Wärmemenge die Nachfolger Blacks befremdet hätte, verharrt aber bei seiner Feststellung. Diesem Zweifel stellen wir folgende Erwägung entgegen: Wir sind in der Lage, Temperaturen zu erzeugen, die dem absoluten Nullpunkt auf einige Grade nahekommen, und der induktive Schluß ist zwingend, daß wir ihm uns in Zukunft noch mehr nähern können. Also wird ein umkehrbarer Ausdehnungsprozeß auf diese Temperatur hinab irgendein gegebenes Wärmequantum bis auf ganz kleine Reste in Arbeit umwandeln. Daß das tiefe Temperaturniveau ein künstliches ist und die Umwandlung anderweitiger mechanischer Arbeit in Wärme bedingt, hat nichts zu bedeuten. Der Energiesatz befaßt sich nicht mit den Kosten, die eine Umwandlung verursacht, es sagt bloß aus, daß die Umwandlung nach festen Verhältnissen vor sich geht.

Noch zwingender ist die Vorstellung der isothermischen Ausdehnung eines vollkommenen Gases, bei der die zugeführte Wärmemenge restlos in mechanische Arbeit übergeht, während die innere Energie, d. h. die lebendige Kraft der Gasmoleküle, unverändert bleibt, und nur die Molekülabstände größer werden.

Es ist also nichts mit diesen Machschen Einwänden. Ein anderes wäre der Hinweis auf die radioaktiven Erscheinungen, durch die neue Quellen der Energie, von deren Vorhandensein wir keine Ahnung hatten, erschlossen werden. Wir erörtern diese Frage weiter unten.

---

[1]) Denkschrift „A new Prime mover" von Still, 1919.

Kehren wir zur „Entwertung" der Energie, die die Wärmeabgabe an die tiefste Temperaturquelle bedingt, zurück, so ist auf alle Fälle festzustellen, daß der Entropie keine Schuld an ihr beizumessen ist. Hätten wir einen Wärmebehälter mit hinreichend tiefer Temperatur zur Verfügung, so könnten wir auch Wärme mit beliebig hohem Wirkungsgrad in Arbeit umsetzen. Hier liegt die Wurzel für den Vergleich der Entropie mit einem Gewicht, den Zeuner durchgeführt hat. Die Entropie $Q_1 : T_1$ liefert durch Vermehrung mit der Temperatur-„Fallhöhe" $(T_1 - T_0)$ die nutzbare Arbeit $Q_1 \cdot (T_1 - T_0)/T_1$, ähnlich wie das Produkt aus Wassergewicht und Fallhöhe die Arbeit der idealen hydraulischen Maschine.

Eine Entwertung zweiter Art ist bedingt durch die Zunahme der Entropie aller an dem Vorgang beteiligten Körper, die im Idealfalle Null wäre, in Wirklichkeit endlich bleibt. Sie bedingt eine Vergrößerung der an den kälteren Behälter abzuleitenden Wärme über das unter idealen Verhältnissen unumgänglich notwendige Maß hinaus.

Die Entropievermehrung eines bestimmten Prozesses hängt aber nur von dessen eigener Natur ab, und nicht von den Zustandsänderungen, die vorher oder nachher stattfanden. Der Arbeitsverlust anderseits als Produkt aus der Entropievermehrung und der Temperatur der tiefsten Quelle (Umgebung) ist dieser Temperatur verhältnisgleich. Wäre diese „Null", so könnten wir ungestraft nichtumkehrbare Vorgänge zulassen, „sündigen", der Verlust wäre auch Null. Streng genommen dürfen wir also nicht die Zunahme der Entropie, sondern vielmehr die Unzulänglichkeit der irdischen Verhältnisse, speziell die zu hohen Temperatur unserer „Umgebung" anklagen, wenn das Ergebnis der Wärmemaschine nicht befriedigt. Da indes an der Temperatur der Umgebung nichts zu ändern ist, während die Herrschaft über nichtumkehrbare Prozesse mit den Fortschritten der Technik wächst, so bleibt die Vermehrung der Entropie (d. h. ihr Produkt mit der Temperatur der Umgebung) dennoch der beste Maßstab für die vermeidbare Entwertung der Energie.

Diese Überlegungen werden genügt haben, zu zeigen, daß die Bemühungen, den Begriff der Entropie ganz auf der Vorstellung des Verlustes der nichtumkehrbaren Prozesse aufzubauen, wenig Aussicht auf durchschlagenden Erfolg haben dürften. Diese Vorstellung ist zu sehr unseren menschlichen Zwecken und den Verhältnissen des Erdballes angepaßt, entbehrt daher der vollen Allgemeinheit, die von einem abstrakten Lehrsatz verlangt werden muß.

Die Entropie-Polemik im „Electrician".

Im Zusammenhange mit diesen Bemerkungen wird eine Polemik Interesse bieten, die sich in der Zeitschrift „The Electrician", Jahrgang 1903, aus Anlaß der Präsidialansprache, die J. Swinburne vor der „Institution of Electrical Engineers" hielt, abgespielt hat. Wir geben die Aussprüche der Teilnehmer nur dem Sinne nach (nicht wörtlich) wieder. Unsere eigenen Bemerkungen sind in eckigen Klammern eingeschlossen.

J. Swinburne. „In den meisten Lehrbüchern herrscht ein unglückliches Mißverständnis über Entropie. Der erste, der sie einführte, war, ich glaube Gibbs (s. deutsche Übersetzung der „Thermodynamischen Studien", die 1870 erschienen) [und Clausius?], der in der Hauptsache mit hypothetischen umkehrbaren Prozessen und solchen Dingen wie ideale Gase operiert. Jedermann, der bloß diese Abhandlung liest, würde eine falsche Vorstellung von der Entropie erhalten. Den praktischen Gebrauch des Entropiediagrammes verdanken wir trotz der Konfusion über Entropie Macfarlane Gray (Proc. Inst. Mech. Eng. 1889) [Belpaire verwendete das Entropiediagramm schon im Jahre 1873], dessen Entropiedefinition ebenso fehlerhaft ist wie die von Gibbs, allein da er nur umkehrbare Prozesse betrachtet, so behält er numerisch recht. Es ist eben üblich, die Entropie durch die Gleichung $dS = dQ : T$ zu definieren, und dies ist falsch. Ebenso behauptet man, daß der Inhalt einer Fläche im TS-Diagramm gleich ist der entsprechenden Fläche im pv-Diagramm. Dies ist wohl der Ursprung von Zeuners Vergleich der Entropie mit Wärmegewicht, eine Gedankenverwirrung, die ständig wächst. Die Unzulänglichkeit einer Maschine kommt gerade im Unterschied der TS- und der pv-Fläche zum Vorschein. [?] Dann besteht arge Konfusion zwischen den Arbeitskörpern und den Behältern. Die Entropie hat es wesentlich mit den Behältern zu schaffen. [?] Die Definition der Entropie, die ich beanstande, kommt nicht bloß in Ingenieurhandbüchern vor, sondern auch in neun Zehnteln der Lehrbücher über mathematische Physik, weil dem Schreiber immer nur die umkehrbaren Prozesse vorschweben. So definiert man adiabatische und isentropische Prozesse als synonym. Unglücklicherweise ist die Entropie auch in die Hände von Mathematikern gefallen. Für den Mathematiker ist die Hauptsache, daß dS ein vollständiges Differential ist. Von den unzähligen Beispielen der Physik wählt er gerade dieses, dessen fragwürdiger Charakter darin besteht, daß es nie in der Natur existiert. Dies zeigt, daß es unendlich leichter ist, mit mathematischen Symbolen zu hantieren, als ihre physikalische Bedeutung klar zu erfassen.

[Auf diesen stürmischen Ausfall, der auch die Größen unserer Wissenschaft nicht verschont, aber ein interessantes Durcheinander von Wahrheit und Irrtum ist, antwortet:]

J. Perry. „In den Handbüchern, die Herr Swinburne beanstandet, steht folgendes: Wenn dQ die Wärme bedeutet, die in ein System eintritt, das die absolute Temperatur T, den Druck p und das Volumen v besitzt, und wenn wir $dQ : T = dS$ setzen, so ist S eine Eigenschaft des Systems, die [deren Zahlenausdruck] den gleichen Wert annimmt, so oft das System in den alten Zustand (p, T, v) zurück-

kehrt nach irgendwelchen Zustandsänderungen. Dies ist der zweite Wärmesatz. Was soll hieran Falsches sein? Meint Herr Swinburne, daß der zweite Wärmesatz falsch ist? Das unmittelbare Rechnen mit Entropie, die eine inhärente Eigenschaft [Beizahl] des Körpers ist, wie p, v oder T, hat dem modernen Studierenden Hunderte von irreführenden Vorstellungen erspart. Wenn Herr Swinburne dies bestreitet, so weiß er nicht was er spricht."

J. Swinburne. „Es ist nicht üblich, über eine Präsidialaussprache zu diskutieren, [!] allein da meine Entropiebemerkungen in einer Fußnote des Abdruckes enthalten waren, will ich Herrn Perry antworten. Die Aussage von Perry, was der zweite Wärmehauptsatz sei, ist unkorrekt. Er hätte sagen müssen: ‚In einem vollkommen umkehrbaren Prozeß, den es nie geben kann, d. h. in einem unmöglichen hypothetischen erdachten Fall ist $dQ:T$ . . . usw.‘ Manche Autoren betrachten die Entropie als den ‚Quantitätsfaktor der Wärme‘. Aber in der arbeitslosen Ausdehnung eines Gases bleibt die Energie konstant und die Entropie nimmt stetig zu ohne Wärmezufuhr, also kann sie nicht ein ‚Wärmefaktor‘ sein. Ferner, obwohl wenn dS ein vollständiges Differential ist, S eine Funktion der Zustandsparameter sein muß, bestreite ich die Behauptung, daß wenn S eine Funktion der Koordinaten ist, dS ein vollständiges Differential sein müßte. [!] Wer dies behauptet, versteht Entropie nicht und benützt seine Mathematik blindlings. Solange der Studierende glaubt, daß die Flächen im TS- und im pv-Diagramm gleich sind, leidet er Schaden."

[Diese Flächen sind gleich im Falle umkehrbarer Vorgänge, also müssen sie immer gleich sein, da einem Punkte pv immer der gleiche Punkt TS entspricht.]

J. Perry. „In meiner Aussage sind p, T, v ausdrücklich genannt, um anzudeuten, daß im ganzen System dieselbe Temperatur und derselbe Druck herrschen, daher darf man mir nicht das arbeitslos sich ausdehnende Gas vorhalten, für das diese Forderung nicht erfüllt ist. Swinburnes Hauptirrtum scheint darin zu bestehen, daß er glaubt, wenn $dQ=0$ ist, daß dann auch $\int dQ:T=0$ sein müsse. Sein Verfahren gleicht dem eines Knaben, der Euklid nicht glauben will und sich an einem durch gespannte Schnüre gebildeten realen Dreieck beweist, daß das Quadrat der Hypotenuse größer ist als die Summe der Quadrate der Katheten."

S. Evershead. „Nach all diesen Erklärungen ist der Entropiebegriff ebenso dämmerig wie bisher." [Evershead stellt verschiedene Definitionen der Entropie zusammen, von denen die wichtigste die folgende nach Maxwell-Tait ist: Entropie ist derjenige Teil der inneren Energie, der mittels einer idealen Maschine in Arbeit umgewandelt werden kann. So kommt denn die erstaunliche Tatsache zum Vorschein, daß Maxwell in den sieben ersten Auflagen seiner „Theory of heat" eine ähnliche vollkommen unzutreffende Deutung der Entropie gegeben und nach W. Robinson erst in der achten Auflage im Jahre 1885, S. 189, den Irrtum wahrgenommen hat.

Diese bedenklichen Enthüllungen bewogen den Herausgeber des „The Electrician", sich an den bekannten angesehenen Gelehrten Sir Oliver Lodge zu wenden, der sich auf S. 560 wie folgt äußert:]

Sir Oliver Lodge. „Das Produkt aus Temperatur und Entropieänderung ist die dem Arbeitskörper mitgeteilte Wärme $Q=\int TdS$, wobei T (und p, v) sich auf den Arbeitskörper selbst bezieht, und nicht auf Dinge, die außerhalb des Körpers oder auch nur in Berührung mit ihm sind. In diesem Falle ist die Summe der Entropieänderungen für einen Körper, der in den Anfangszustand zurückkehrt, $=0$. Versteht man unter T die Temperatur der Behälter, so ist die Summe größer oder kleiner als Null, je nach Definition. Bei solcher Behandlung gehört die Entropie keinem bestimmten Einzelkörper, während sie eigentlich (properly speaking) einer bestimmten Menge Materie angehören sollte, gerade wie Volumen oder Dichte. Es ist ein Irrtum, anzunehmen, daß Entropie nur bei irreversiblen Vorgängen zunehmen kann. Das einfachste Beispiel: isothermische Ausdehnung der Luft, ist vollkommen umkehrbar, aber nicht isentropisch. Entropie ändert sich bloß beim Wärmeübergang zu niederer Temperatur."

[Hiermit war eine Bombe auch in das wissenschaftliche Lager geworfen, und zwei Größen allerersten Ranges, Planck und Poincaré, beeilen sich, den Fehdehandschuh aufzunehmen.]

M. Planck (S. 694). „Sir Oliver Lodge spricht Ansichten über Thermodynamik aus, die ich seit meiner ersten Beschäftigung mit dieser Wissenschaft bekämpft habe. Herrn Swinburnes Erörterungen gehören zu den klarsten [?] Darlegungen der Sachlage, insbesondere wenn er schreibt, daß die Natur nie eine Veränderung unternimmt, es sei denn, daß ihren Interessen durch eine Vergrößerung der Entropie gedient werde, während die Menschen die von der Natur gestatteten Änderungen wieder so einzurichten bestrebt sein müssen, daß ihre Interessen, d. h. der Gewinn von Arbeit, so gut als möglich gefördert werden. Nur in bezug auf den Umstand, daß dS ein Differential ist, will ich bemerken, daß wir darunter in Deutschland nicht mehr und nicht weniger verstehen, als daß S bis auf eine Konstante vollkommen durch die jeweiligen Zustandskoordinaten bestimmt ist, und gerade weil dS ein Differential ist, $dQ:T$ aber nicht immer, kann auch dS nicht immer $dQ:T$ gleich sein."

[Hierauf wiederholt Planck seine wohlbekannte Formulierung der Entropiezunahme.]

H. Poincaré (S. 688). [Gibt als Zusammenfassung einer sehr abstrakt mathematischen Darstellung folgende Sätze:] „Die Entropie ist eine Funktion der Koordinaten. Sie ist nicht zu definieren durch die Gleichung $dS=dQ:T$, welche Beziehung, einer anderen Betrachtungsart angehörend, nur für umkehrbare Änderungen zutrifft. Falls das Weltall als „isoliertes System" betrachtet wird, kann es nie wieder in einen Zustand, den es inne hatte, zurückkehren, weil dann auch die Entropie, die eine Funktion der Koordinaten ist, den alten Wert wieder annehmen würde, während sie immer zunehmen muß."

[Dieses Beharren der führenden Geister auf den Fundamenten des zweiten Hauptsatzes regt den mathematischen Physiker O. Heaviside zu folgender Anfrage an, deren zweifelnden, wenn auch nicht offen ausgesprochenen Grundton man deutlich herausempfinden wird.]

O. Heaviside (S. 735). „Ich möchte Prof. Planck gerne fragen, wie die ‚Interessen' der Natur aufgefaßt werden sollen, denen man nur durch Entropievermehrung dienen kann. Meine Ansichten sind etwas altmodisch, ich meine, daß in der Natur jeder nichtumkehrbare Vorgang mit einer Zerstreuung (Dissipation) der Energie verbunden ist, was genau dasselbe sagt als die Zunahme der Entropie. Diese subtile Größe hat entschieden etwas ‚Geisterhaftes' an sich und ist zu wandelbar, um als physikalischer Zustand zu gelten, auch wenn sie Funktion der Zustandskoordinaten ist. Plancks Ausdrucksweise würde eine Wahl seitens der Natur voraussetzen, aber die Natur hat keine Wahl, da nach Goethe nicht einmal Gott selbst den Gang der Natur ändern könnte, was ganz wissenschaftlich gesprochen ist. Übrigens erbringt die Diskussion den Beweis, daß die Ingenieure das Bedürfnis nach einer anschaulicheren Bezeichnung der Entropie empfinden."

[Nachdem O. Lodge erklärte, daß sein Artikel eine mehr für Studenten bestimmte elementare Auseinandersetzung gewesen, und daß er mit Planck in allem einverstanden sei, antwortet dieser an die Adresse von Heaviside:]

M. Planck (S. 821). „Daß die Natur ein Interesse an der Entropievermehrung habe, will in meiner Auffassung nichts anderes besagen, als daß die Entropie in der Wirklichkeit immer zunimmt, ebenso wie die Energie immer unverändert bleibt. Die Frage, ob die Entropie etwas ‚Geisterhaftes' an sich hat, will ich nicht anschneiden, und bin ganz befriedigt durch die Gewißheit, daß die Entropie eine Größe ist, die ohne Zweideutigkeit gemessen werden kann. Wenn ein Gas arbeitslos expandiert, bleibt seine Energie trotz der Zunahme der Entropie unverändert. Wo ist also hier eine Zerstreuung von Energie? Man kann wohl, wie Rayleigh und Helmholtz getan haben, die Begriffe der ‚verfügbaren' oder ‚freien' Energie einführen, allein das Gesetz, das sich auf diese bezieht, gilt nur für isotherme Prozesse. Daher bleibt als allgemeines Maß der Nichtumkehrbarkeit nur die Zunahme der Entropie übrig."

[Wir schließen den Bericht über diese bemerkenswerte Aussprache, die dem Studierenden gute Gelegenheit bieten dürfte, zu prüfen, ob er alle Seiten des Entropiebegriffes richtig erfaßt hat. Daß Planck selbst die Rolle der „freien Energie" zu stark einengt, haben wir früher dargetan.]

217. Die Herleitung des II. Hauptsatzes aus dem Begriff der Wahrscheinlichkeit.

Die moderne Richtung der Naturwissenschaft läßt den zweiten Hauptsatz der Wärmelehre und mit ihm die Entropie in einem höheren Begriff und Prinzip aufgehen, indem sie beide auf die Wahrscheinlichkeit des physikalischen Geschehens zurückführt. Im einzelnen ist die neue Auffassungsweise für „vollkommene" Gase, auf Grundlage der Atomhypothese vor allem von L. Boltzmann[1]) ausgearbeitet worden. Die Moleküle werden als nach einem gewissen Gesetz zentrale Kräfte aufeinander ausübende, und „elastische" Körper aufgefaßt, so daß bei allen Zusammenstößen, auch gegen die Wand, die gesamte kinetische Energie erhalten bleibt. Wie immer auch ein Anfangszustand gegeben war, so wird durch die unzähligen Zusammenstöße nach einer Zeit in hinlänglich großen Räumen ein Zustand der Beharrung entstehen, bei dem die Dichte in allen Teilen nahezu dieselbe, die Bewegung aber eine „molekular ungeordnete" geworden ist, so daß an jeder Stelle das Vorkommen einer bestimmten Art von Zusammenstößen genau so wahrscheinlich ist als das der entgegengesetzten. Ändert man die äußeren Bedingungen, so sind für das gasförmige System neue Zustände möglich, und es ist eine erstaunliche Errungenschaft, daß man die Wahrscheinlichkeit dieser Zustände als verhältnismäßig einfache Zahlenausdrücke angeben kann. Zum Schluß zeigt sich die nicht minder erstaunliche Tatsache, daß die thermodynamisch berechnete Entropie dem Logarithmus dieser Wahrscheinlichkeit proportional ist. Boltzmann hält es für sicher, wie seither auch schon mannigfach ausgeführt wurde, daß das gleiche auch für flüssige und feste Körper wird ausgesagt werden können, sobald man geeignete Theorien ihrer molekularen Zusammensetzung aufgestellt hat. Wenn also jede Zustandsänderung mit einer Vermehrung der Entropie verbunden ist, so bedeutet das nichts anderes, als daß die Natur mit „Vorliebe" von unwahrscheinlicheren zu wahrscheinlicheren Zuständen fortschreitet.

Der zweite Wärmehauptsatz wäre hiernach eine einfache nnd notwendige Folge der Einführung der „statistischen" Betrachtungsweise, d. h. der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Atomhypothese in die Naturwissenschaft. Die Wahrscheinlichkeitstheorie wäre aber das Allgemeinere, Höhere, wie denn auch Planck mit ihrer Hilfe höchst wichtige Folgerungen auf einem ganz anderen Gebiete, der Lehre von

[1]) Vorlesungen über Gastheorie, Leipzig 1896.

der Strahlung, abgeleitet hat. Dieser bedeutende Physiker sieht daher in der neuen Betrachtungsweise einen Fortschritt[1]), der das physikalische Weltbild der Naturwissenschaft von antropomorphen Elementen, wie den Satz vom „Perpetuum mobile“ zweiter Art, befreit. Letzterer beziehe sich so sehr auf das dem Menschen Erreichbare, auf die vom Fortschritte der Technik bedingte Ausführbarkeit von Maschinen und Prozessen, daß es nicht als letzte Form der Naturerkenntnis bestehen könne.

Führt nun auch das Gesetz der zufälligen Zusammenstöße der Moleküle in der überwiegenden Mehrzahl der Fälle auf eine Zunahme der Entropie, so können, — ja müssen auch Zusammenstöße mit der gegenteiligen Wirkung vorkommen, so zwar, daß z. B. örtlich eine selbsttätige Anhäufung von Molekülen mit höherer Geschwindigkeit, d. h. Temperaturerhöhung zustande kommt, und so „Wärme vom kälteren zum wärmeren Körper“ hinströmt. Oder es kann örtlich eine größere Zahl von Molekülen in der Raumeinheit zusammentreffen, wodurch eine Druckerhöhung entsteht, die man unmittelbar auf einen verschiebbaren Kolben wirken und so Arbeit verrichten lassen könnte.

Die Brownsche Bewegung und die „Schwankungen“.

Die Überzeugung der Physiker, daß solche Vorkommnisse möglich sind und sich tatsächlich ereignen, wurde zur „Gewißheit“ gesteigert, seit die Theorie der „Brownschen Bewegung“ von Einstein und Smoluchowski aufgestellt und durch die Beobachtung in allen Teilen bestätigt worden ist. Läßt man in ein mit Flüssigkeit gefülltes Gefäß kleine (pulverförmige) Teilchen eines festen Stoffes, dessen spezifisches Gewicht größer als das der Flüssigkeit ist, herabfallen, so sinken diese zunächst zu Boden. Bald aber werden sie durch unsichtbare Kräfte emporgewirbelt und beschreiben in der Flüssigkeit unregelmäßige Zickzackbahnen, kehren zum Boden zurück, werden wieder emporgehoben usf. Diese „Brownsche Bewegung“ ist nach der neuen Theorie eine Folge der Stöße, die jene Teilchen von den Molekülen der Flüssigkeit erleiden. Je kleiner sie sind, desto häufiger wird ein zufällig kräftigerer Molekülstoß imstande sein, sie der Schwere entgegen hinaufzutreiben, oder wenn sie bei gleich großem spezifischen Gewicht schon an sich in der Flüssigkeit schweben, sie darin herumzustoßen. Man kann mit Hilfe der Wahrscheinlichkeit berechnen, wie groß das Zeitmittel der zwischen zwei Stößen zurückgelegten Bahnstrecke ist.

In einem homogenen Körper kann der Zustand äußerlich, **„makroskopisch“** besehen, unveränderlich sein, in den kleinsten Raumteilen wird durch zufällige Anhäufung oder Abströmung von Molekülen beständig ein Wechsel der Temperatur und des Druckes stattfinden, es treten fortwährend **„mikroskopische Schwankungen“** auf. Auch hierfür hat man experimentelle Beweise, und es wird allgemein die Bläue des Himmels den zahllosen unendlich kleinen Schwankungen des Druckes in den höheren Schichten der Atmosphäre zugeschrieben, durch die das Licht zerstreut wird und nach gewissen optischen Gesetzen blaue Strahlen nach unten entsendet.

Dem Zufalle sind innerhalb des durch die vorhandene Energie Möglichen keine Grenzen gesetzt. So könnte eine leere Bombe lediglich durch örtlich gesteigerte Molekularbewegung sich selbst sprengen. (Dieselbe Bombe im Weltall von einer beschränkten Gashülle umgeben und, wie wir annehmen wollen, „energetisch isoliert“, könnte jedoch **nicht in beliebig viele Stücke** zerspringen, sondern höchstens in so viele, daß die Gesamtenergie der sich automatisch auf Null Grad absolut abkühlenden Gashülle und der Eigenmaße hinreichte, die Trennungsarbeit in den entstehenden Fugen zu leisten.)

Oder es müßte eine schwere Eisenkugel in einem Wassergefäß durch Konzentration der Molekülstöße, **wenn man genügend lange wartet,** schließlich bis an die Oberfläche erhoben werden können. Befestigt man sie an einer geführten Stange mit Übertragnng der Bewegung mittels geeigneter Sperrklinken auf ein Schaltrad, so kann dieses in intermittierende Drehung versetzt werden und Arbeit leisten. So scheint die moderne Physik, grundsätzlich gesprochen, Aussichten auf ein Perpetuum mobile II. Art zu eröffnen, denn die gewonnene Arbeit wäre der Wärme der Umgebung entnommen, indem die den Molekülen geraubte Energie durch die Umgebung wieder ersetzt, d. h. die Temperatur des Wassers unverändert erhalten wird. Diese oft angetroffene Ansicht veranlaßt uns, auf die Grundlagen jener Wahrscheinlichkeitstheorie in Kürze einzutreten.

Die Zustands-Wahrscheinlichkeit.

Um dem Leser eine Vorstellung vom eigentümlichen Begriff der „Wahrscheinlichkeit eines Zustandes“ zu vermitteln, geben wir im folgenden mit Umgehung der strengen Methoden der „statistischen Mechanik“ eine anschaulich populäre Darstellung in Anlehnung an ein zweckmäßig gewähltes Beispiel.

Ein Gefäß vom Rauminhalte V_0 sei mit einer Gasmenge gefüllt, die im ganzen aus N_0 Molekülen besteht. Wir denken uns darin den Rauminhalt V_1 abgegrenzt und fragen, welches die Wahrscheinlichkeit dafür ist, daß durch die Zusammenstöße der Moleküle N_1 Moleküle in jenem Raum zufällig zusammentreffen. Die Grundvoraussetzung der statistischen Mechanik ist, daß irgendein herausgegriffenes Molekül durch die zufälligen Zusammenstöße mit andern Molekülen auf einer regellosen Zickzackbahn im Laufe der Zeit in jeden noch so entlegenen Raumteil hineingelangt. Greift man einen Raumteil ΔV heraus und beobachtet man die Summe der Zeitdauern $\Sigma \Delta z = z$, während deren das Molekül in jenem Raumteil sich aufgehalten hat, bezogen auf eine sehr lange Zeit Z, so versteht man unter der „Wahrschein-

[1]) Die Einheit des physikalischen Weltbildes, Vortrag, Leipzig 1909.

lichkeit", das Molekül im Raumteil ΔV anzutreffen, den Quotienten

$$\Delta w = \frac{z}{Z}.$$

Eine weitere grundlegende Annahme, die in sich plausibel ist, besteht darin, daß die Zeitdauer des Aufenthaltes dem Rauminhalt proportioal gesetzt wird, so daß sich die Wahrscheinlichkeit auch als

$$\Delta w = \frac{\Delta V}{V_0}$$

schreiben läßt.

In unserem Beispiel handelt es sich um den Teilinhalt V_1, somit wird die Wahrscheinlichkeit

$$w = \frac{V_1}{V_0}.$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich **zwei bestimmte** Moleküle zu gleicher Zeit im Raume V_1 befinden?

Diese gewinnt man durch die Überlegung, daß, wenn beispielsweise die Wahrscheinlichkeit für ein Molekül $= {}^1/_{100}$ ist, das Teilchen bei 100 Sekunden Beobachtungsdauer 1 Sekunde lang im Raume V_1 anzutreffen sein wird. Diese Sekunde ist gewissermaßen der eine günstige Fall auf 100 mögliche Fälle. Für das zweite Molekül gilt dieselbe Wahrscheinlichkeit. Die Wahrscheinlichkeit des gleichzeitigen Eintreffens der günstigen Ereignisse ist dann bekanntlich gleich dem Produkt der einzelnen Wahrscheinlichkeiten, und so wird

$$w_2 = \left(\frac{V_1}{V_0}\right)^2.$$

Schließlich ist die Wahrscheinlichkeit N_1 **bestimmte Moleküle** zu gleicher Zeit im Rauminhalt V_1 anzutreffen,

$$W = \left(\frac{V_1}{V_0}\right)^{N_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Ebenso ist die Wahrscheinlichkeit N_2 bestimmte Moleküle im Teilraume V_2 vorzufinden $= (V_2/V_0)^{N_2}$. Die Wahrscheinlichkeit des gleichzeitigen Eintreffens dieser beiden Ereignisse ist wieder das Produkt der soeben angeschriebenen Wahrscheinlichkeiten, falls die N_1 und N_2 keine gemeinsamen Moleküle enthalten. Nun wollen wir annehmen, es sei $V_1 + V_2 = V_0$ und $N_1 + N_2 = N_0 =$ der Gesamtzahl der Moleküle, und wir fragen nach der Wahrscheinlichkeit, daß in V_1 **eine beliebige** aus N_1 Molekülen bestehende Gruppe, gleichzeitig in V_2 eine beliebige andere aus N_2 Molekülen bestehende Gruppe enthalten sei. Diese Wahrscheinlichkeit ist um so viel größer als diejenige von bestimmten Gruppen, als es Möglichkeiten hat, die N_0 Moleküle auf V_1 und V_2 zu verteilen. Denken wir uns alle Permutationen aus den N_0 Molekülen (indem man jedes mit einer Nummer versieht) untereinander geschrieben. Durch einen senkrechten Strich trennen wir links N_1 Moleküle von den rechts übrig bleibenden N_2 Molekülen ab. In der linken Kolonne werden nun so viele Male Gruppen **von gleichen Molekülen** vorkommen, als man aus N_1 Elementen für sich Permutationen bilden kann, d. h. $N_1!$; diese zählen physikalisch als eine Gruppe, ähnlich auf der rechten Seite. Von den $N_0!$ Permutationen bleiben also nur $(N_0!) : (N_1!\,N_2!)$ als physikalisch in Betracht fallende Fälle übrig, und die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$W = \frac{N_0!}{N_1!\,N_2!}\left(\frac{V_1}{V_0}\right)^{N_1}\left(\frac{V_2}{V_0}\right)^{N_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Wir berechnen den Logarithmus dieses Ausdruckes unter Anwendung der Formel von Stirling, wonach für große Zahlen angenähert

$$a! = \left(\frac{a}{e}\right)^a \quad \text{somit} \quad \lg n\,(a!) = a\,(\lg n\, a - 1) \cong a \lg n\, a \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2\text{a})$$

gesetzt werden kann. Wir führen zugleich die **bei gleichmäßiger Verteilung** in V_1 und V_2 sich befindlichen Molekülzahlen N_{10}, N_{20} ein, die den Verhältnissen

$$V_1 : V_0 = N_{10} : N_0; \qquad V_2 : V_2 = N_{20} : N_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2\text{b})$$

entsprechen, und erhalten nach leichter Umrechnung

$$\lg n\, W = N_1 \lg n \frac{N_{10}}{N_1} + N_2 \lg n \frac{N_{20}}{N_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2\text{c})$$

Wahrscheinlichkeit und Entropie.

Die Entropiezunahme gegenüber der gleichmäßigen Verteilung der Moleküle unter der besonderen Voraussetzung, daß die **Temperatur unveränderlich bleibt,** ist, wenn G_0, G_1, G_2 die Gewichte in den entsprechenden Räumen bedeuten:

$$S - S_0 = G_1\,(c_v \lg n\, T + A R \lg n\, v_1 + h) + G_2\,(c_v \lg n\, T + A R \lg n\, v_2 + h) - G\,(c_v \lg n\, T + A R \lg n\, v_0 + h).$$

Bezeichnet γ_0 das Gewicht eines Moleküls, so können als spezifische Rauminhalte $v_0 = V_0/N_0\gamma_0$; $v_1 = V_1/N_1\gamma_0$; $v_2 = V_2/N_2\gamma_0$ eingesetzt werden, und man erhält mit Rücksicht auf 2b

$$S - S_0 = A\,R\,\gamma_0\left[N_1 \lg n \frac{N_{10}}{N_1} + N_2 \lg n \frac{N_{20}}{N_2}\right] \quad \ldots\ldots (3)$$

Bezeichnet m das auf Wasserstoff bezogene Molekulargewicht, $\mathfrak{N}$ die Zahl der Moleküle in einem Kilogramm-Mol, so ist $m = \mathfrak{N}\gamma_0$ und da $\mathfrak{R} = m\,R$, so folgt $R\,\gamma_0 = (\mathfrak{R}/m)(m/\mathfrak{N}) = \mathfrak{R}/\mathfrak{N}$. Man pflegt diesen Festwert mit

$$k = \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{N}} \quad \ldots\ldots (4)$$

zu bezeichnen, so daß sich die Gasgleichung für 1 Mol als

$$p\,\mathfrak{V} = k\,\mathfrak{N}\,T \text{ und allgemein } p\,V = k\,N\,T \quad \ldots\ldots (5)$$

schreibt. Setzt man $R\,\gamma_0 = k$ in Gl. (3) ein, so ergibt sich die berühmte Beziehung

$$S = A\,k \lg n\, W + S_0 \qquad \text{oder} \qquad W = e^{(S-S_0)/Ak} \quad \ldots\ldots (6)$$

d. h. **die Entropie ist, von einer Konstanten abgesehen, dem Logarithmus der Wahrscheinlichkeit verhältnisgleich;** die Wahrscheinlichkeit ist eine exponentielle Funktion der Entropie. Die Gleichung läßt erkennen, daß **die Zunahme der Entropie im Sinne des zweiten Hauptsatzes** nichts anderes bedeutet als den **Übergang des in sich abgeschlossenen Systemes von Zuständen geringerer zu solchen größerer Wahrscheinlichkeit.**

Einführung der isothermischen Arbeit.

Wir denken uns die angegebene Verdichtung im Raume V_1 durch einen zu diesem Zwecke vorübergehend eingebauten Kolben bewerkstelligt, der einen Raum V_1' mit $N_{10} + \varDelta N$ Molekülen abgrenzt und dessen Inhalt auf V_1 verkleinert. Dabei soll im ganzen Raume V_0 die Temperatur unverändert erhalten werden. Da wir ein vollkommenes Gas voraussetzen, ist die innere Energie am Ende gleich groß wie am Anfang, und die zur Verdichtung aufgewendete Arbeit $A\,L$ wird als Wärme an die Umgebung abgeleitet; d. h. es ist

$$A\,L = Q \quad \ldots\ldots (6a)$$

Da ferner die Verdichtung umkehrbar vor sich geht, so erfährt das ganze System eine Entropieabnahme

$$S - S_0 = -\frac{Q}{T}, \quad \ldots\ldots (7)$$

somit kann Gl. (6) in der ebenfalls berühmten Form

$$W = e^{-\frac{Q}{AkT}} \quad \ldots\ldots (8)$$

geschrieben werden.

Die vermeintliche Leistungsfähigkeit eines auf selbsttätigen Druckschwankungen beruhenden Perpetuum mobile II. Art.

Die geschilderte Selbstverdichtung könnte theoretisch zur Arbeitsleistung wie folgt herangezogen werden. Man würde den Raum V den wir fortan der Kürze halber mit V bezeichnen wollen, als Zylinder ausführen und auf einer Seite durch einen beweglichen Kolben, auf der anderen durch einen Boden abgrenzen, in welchem durch eine Öffnung F die Verbindung mit dem Raume V_0 hergestellt wird. Eine Kolbenstange leitet die zu erhaltende Arbeit nach außen. Ist die Verdichtung eingetreten, so soll der Kolben dem Über- (oder Unter-)druck so rasch nachgeben, daß durch F nur ein verschwindend kleiner Teil der eingedrungenen Gasmenge abfließen kann. Die Ausdehnung sei trotz dieser Raschheit isothermisch. Diese Annahmen sind so günstig, daß in Wirklichkeit nur ein Bruchteil der so errechneten Arbeit erhältlich wäre.

Der erwähnte Zylinder soll sich ganz innerhalb des Raumes V_0 befinden, so daß die äußere Kolbenseite dem Drucke p, der in V_0 herrscht, ausgesetzt ist. V_0 sei groß gegenüber V, so daß p sich nur unmerklich ändert. Ist $\varDelta V$ der vom Kolben bestrichene Rauminhalt, während der Druck im Inneren von $p + \varDelta p$ auf p abnimmt, so ist die von der inneren Kolbenseite aufgenommene Arbeit $(p + \varDelta p/2)\,\varDelta V$; die äußere gibt die Arbeit $p \cdot \varDelta V$ ab. Als „Nutzarbeit“ (von jeglicher Reibung abgesehen) bleibt $\varDelta p \cdot \varDelta/2$, und da für die Isotherme $p\,V =$ konst., also $\varDelta p/p + \varDelta V/V = 0$ ist,

$$\varDelta L = \frac{pV}{2}\left(\frac{\varDelta p}{p}\right)^2 \quad \ldots\ldots (9)$$

übrig. Ebenso groß ist die zur künstlichen Erzeugung der Verdichtung erforderliche Arbeit, d. h. es ist $A\,\varDelta L$ auch die in Gl. (7) und (8) auftretened Wärmemenge Q. Führt man die Bezeichnung

$$\frac{\varDelta p}{p} = \xi \quad \ldots\ldots (10)$$

ein, so wird mit $p\,V = G\,R\,T = N\,k\,T$

$$\frac{\varDelta Q}{A\,k\,T} = \frac{A\,\varDelta L}{A\,k\,T} = \frac{A\,N\,k\,T}{A\,k\,T}\,\frac{\xi^2}{2} = N\frac{\xi^2}{2} \quad \ldots\ldots (11)$$

und die zu ξ gehörige Wahrscheinlichkeit gemäß Gl. (8)

$$W = e^{-N\xi^2/2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (12)$$

Mit dem so gewonnenen Ausdruck der Wahrscheinlichkeit könnte grundsätzlich unsere Aufgabe zu Ende geführt werden. Um jedoch einen Anschluß an die in der statistischen Mechanik übliche Darstellung zu erhalten, betrachten wir nun

Unendlich kleine Zustandsgebiete.

Wir denken uns eine außerordentlich große Zahl von Kolbenvorrichtungen der beschriebenen Art gleichzeitig in Tätigkeit, und überlegen, wie groß die Zahl derjenigen ist, die zu einer bestimmten Zeit eine Verdichtung in den Grenzen Δp und $\Delta p + d\Delta p$, also einen Wert ξ bis $\xi + d\xi$ aufweisen.

Diese (unendlich kleine) Zahl darf der unter (12) ausgedrückten Wahrscheinlichkeit und dem Intervall $d\xi$ proportional gesetzt werden. Teilt man sie durch die Gesamtzahl der Vorrichtungen, so erhält man die **Wahrscheinlichkeit im Sinne der statistischen Mechanik**[1]), für die mithin der Ansatz

$$dW = Ce^{-N\xi^2/2}\,d\xi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (13)$$

benutzt werden kann, mit einem noch unbestimmten Beiwert C. Diese Wahrscheinlichkeit verschwindet mit $d\xi$ zugleich, während W nach (12) endlich bleibt. Doch ist zu bemerken, daß für ξ, d. h. Δp, der Ein- oder Austritt von mindestens 1 Molekül in Frage kommt, so daß streng genommen $d\xi$ eigentlich nicht verschwinden kann.

Um C zu bestimmen, benutzen wir den Satz, daß die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines einzelnen von mehreren unabhängigen Ereignissen der Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten gleich ist. In unserem Falle fragen wir nach der Wahrscheinlichkeit, daß überhaupt eine (positive oder negative) Verdichtung, d. h. ein Zustand in den Grenzen $\xi = -\infty$ bis $\xi = +\infty$ vorkommt; diese ist selbstverständlich $=1$, und da sie der Summe, d. h. dem Integral der unendlich kleinen Werte dW sein soll, so erhalten wir die Beziehung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Ce^{-N\xi^2/2}\,d\xi = \sqrt{\frac{2\pi}{N}}\cdot C = 1, \quad \text{woraus} \quad C = \sqrt{\frac{N}{2\pi}} \quad \text{und} \quad dW = \sqrt{\frac{N}{2\pi}}\,e^{-N\xi^2/2}\,d\xi \;. \; (14)$$

Die Wiederkehrzeit.

Bei außerordentlich langer Beobachtungszeit wird auch das unwahrscheinlichste Ereignis wiederholt auftreten. Ist Z die durchschnittliche Zeitdauer für das Wiederauftreten, so nennt man Z die „Wiederkehrzeit", deren Kenntnis für die Bestimmung der Leistungsfähigkeit unserer Vorrichtung unerläßlich ist.

Nach einem Gedankengang v. Smoluchowskis[2]) wird ein Ereignis von großer Seltenheit, wenn einmal eingetreten, in der überwiegend großen Mehrzahl der Fälle wieder zu Zuständen größerer und nicht kleinerer Wahrscheinlichkeit übergehen. Die Art und Weise, wie dies geschieht, können wir alltäglich an den künstlich hervorgerufenen unwahrscheinlichen Zuständen beobachten. Zwei Behälter mit großem und kleinem Druck, die wir verbinden, gleichen den Druck durch Überströmung aus, und zwar in der überwältigend großen Mehrzahl der Fälle gemäß den „Naturgesetzen", die, aus der Beobachtung des makroskopischen Zustandes abgeleitet, bis jetzt als die „Gesetze" schlechthin gegolten haben. In unserem Fall wird also, falls der Kolben nicht rasch genug zurückweicht, im Zeitelement dz durch die Öffnung F gemäß den Strömungsformeln angenähert die Menge

$$dG = F\gamma\sqrt{2g\Delta p/\gamma}\cdot dz = F\sqrt{2gp\xi\gamma}\,dz \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (15)$$

nach V_0 zurückfließen. Nach Verlauf von dz ist der Zustand schon ein anderer, also ist dz die Dauer des Zustandes mit der Wahrscheinlichkeit dW. Wir erhalten mithin aus $dW = dz/Z$ die Wiederkehrzeit

$$Z = \frac{dz}{dW} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (16)$$

Während dieser Zeit können wir, falls sonst alles klappt, einmal die Arbeit ΔL gewinnen; mithin ist für einen Zylinder die durchschnittliche Leistung in Pferdestärken

$$E_{PS} = \frac{\Delta L}{75\,Z} = \frac{\Delta L}{75}\,\frac{dW}{dz} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (17)$$

Mit den Beziehungen $G = V/v = Vp/RT$, also $dG = Vdp/RT = (Vp/RT)\,d\xi$ erhält man aus (15) $dz = (Vp\,d\xi) : RTF\sqrt{2gp\gamma\xi}$, und mit (14) und (8)

$$E_{PS} = \frac{RTF\sqrt{Ngp\gamma}}{150\sqrt{\pi}}\,e^{-N\xi^2/2}\,\xi^{5/2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (18)$$

---

[1]) Mit diesem Gebiet vertraute Leser mögen den Aufsatz von Einstein: Theorie der Opaleszenz, Annal. d. Phys. 33, 1910, S. 1275 vergleichen.

[2]) Vorträge über kinetische Theorie der Materie. Teubner, 1914.

Diese Teilleistung entspricht dem jeweiligen Eintritt einer Verdichtung im Betrage ξ. Sofern wir eine reibungsfreie Ausführung voraussetzen, die dann freilich schon bei weniger als $^1/_{100000}$ at Überdruck richtig spielen müßte, wäre die Summe über alle möglichen Verdichtungen zu bilden.

Die Verdichtungsgröße ändert sich genau genommen mit dem Hinzutreten je eines Moleküls, d. h. in Sprüngen von $\delta p/p = \delta\xi = 1/N$. Man kann die entsprechende Summe von E nach dem Schema $\Sigma E = (\Sigma E \delta\xi) : \delta\xi = (\int E d\xi) : \delta\xi$ wieder als ein Integral darstellen. Es ist zweckmäßig, die Variable $x^2 = N\xi^2/2$ einzuführen. Wenn wir vorderhand annehmen, daß negative Verdichtungen durch Umkehrklinken und ähnliches ebenfalls zu Nutzarbeit verwertet werden könnten, so erhielte man

$$E_{gesamt} = \frac{2^{7/4}\sqrt{g\gamma p}}{150\sqrt{\pi}}\,\frac{FRT}{\sqrt[4]{N}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x^{5/2}\,dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

Eine ungefähre Abschätzung des Integrales zeigt, daß sein Wert jedenfalls kleiner ist als 1. Die Gesamtleistung würde hiernach durch den vor dem Integral stehenden Ausdruck dargestellt, dem man es sofort ansieht, daß sein Wert wegen der im Nenner stehenden Molekülzahl ein ungemein niedriger sein müsse. In der Tat würde man beispielsweise bei Atmosphärenzustand, wenn man will, 100 PS erzeugen können, doch wäre hierzu eine Anlage von mehr als 10000 Zylindern mit je 1 m³ Inhalt erforderlich. Allein diese Zahl bedeutet in Wahrheit eine **maßlose Überschätzung** des auch nur gedanklich Möglichen aus folgenden Gründen:

1. Kleinheit der mittleren Schwankungen. Einstein beweist a. a. O., daß die Schwankungsintensität, die einem beliebigen Parameter (hier $\Delta p/p = \xi$) entspricht, im Mittel einem Arbeitsaufwand von der Größe der mittleren kinetischen Energie eines einzigen einatomigen Moleküls gleichwertig ist. Diese beträgt in kcal

$$Q = \frac{A\mathfrak{R}T}{2\mathfrak{N}_k}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

wo $\mathfrak{N}_k$ die Zahl der Moleküle im kg-Mol $\cong 6\cdot 10^{26}$ bedeutet. Setzt man $Q = ApV\xi^2/2$, so ergibt sich mit $p = 10^4$ kg/cm²: $V = 1$ m³; $T = 300$ eine mittlere Verdichtung

$$\Delta p \cong 4\cdot 10^{-26}\,\text{at}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

also unermeßlich weniger als ein Hauch. So kleine Schwankungen mechanisch ausnützen zu wollen, ist ein Unding. Auch wenn man den Kolben durch eine biegsame elastische Platte ersetzt, wird man nur von einer bestimmten Grenze an Kraft übertragen können. Nehmen wir an, man wäre imstande, schon $^1/_{1000}$ at Über- oder Unterdruck auszunützen. Dann ist an Stelle des Integrales (19) zu setzen $2\int_{x_0}^{\infty}$ mit $x_0^2 = 10^{-6} N/2$. Vermehrt man unter dem Integralzeichen mit $\sqrt{x}$, so ist das neue Integral für $x_0 > 1$ größer als das wirkliche, und wird im wesentlichen durch $x_0^2 e^{-x_0^2}$ wiedergegeben. Nimmt man den Logarithmus, so ist $e^{-x_0^2}$ allein ausschlaggebend, und man erhält

$$\lg n\,E < -x_0^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

oder, wenn X die Zahl der für die Erzeugung von 1 PS erforderlichen Zylinder bedeutet,

$$\lg n\,X > x_0^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (23)$$

Mit V als dem Rauminhalt eines Zylinders ergibt sich die Zahl

$$N \cong (10^{26} V/4), \qquad \text{also} \qquad x_0^2 = (10^{20} V/8),$$

somit ist sicher

$$\lg n\,X > 10^{19}\cdot V \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (24)$$

Selbst wenn man den Rauminhalt eines Zylinders auf die winzige Größe von 1 Kubikmillimeter $= 10^{-9}$ m³ herabsetzt, erhält man

$$\lg n\,X > 10^{10}; \qquad X > e^{10^{10}} \text{ oder } > 10^{10^9}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (25)$$

eine Zahl, von der es schwer ist, sich überhaupt eine Vorstellung zu bilden.

Das völlig Sinnlose der Hoffnungen auf ein auf den Schwankungen beruhendes Perpetuum mobile II. Art ist schon hierdurch erwiesen.

2. Schwankungen der Klinken und sonstigen Übertragungsteile. Auch wenn alle Vollkommenheit der Mechanik der Maschine zugestanden wird, muß die wirkliche Leistung hinter der soeben berechneten aus dem Grunde noch mehr zurückbleiben, weil auch die Klinken, Wellen, kurz alle Übertragungsmittel Molekulargebilde sind, deren ungeordnete Schwankungen solche Intensitäten erlangen können, daß ein Eingriff gerade dann versagt, wenn auf den Kolben etwa eine bedeutende Verdichtung einwirkt. Es geht nicht an, mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung der Molekularereignisse beim Kolben halt zu machen; man muß bis zum Ort der schließlichen Kraftverwertung vordringen, an dem die Wahrscheinlichkeit großer Schwankungen um so mehr herabgesetzt wird, je mehr Zwischenglieder der Übertragung vorhanden sind. In dieser Hinsicht nimmt die **moderne Physik** folgenden **Standpunkt** ein.

Smoluchowski, ein hervorragender Vertreter der Molekulartheorie, wendet sich a. a. O. gegen den Glauben an die Möglichkeit des auf die Schwankungen gegründeten Perpetuum mobile II. Art überhaupt und führt an, daß nicht bloß mechanische, sondern auch elektrische und thermische (Temperatur-) Schwankungen und Stell- oder Steuervorrichtungen hierzu untauglich sind. Da wir oben nachgewiesen haben, daß unter ausgesprochen günstigen Annahmen eine weit über Billionen hinausgehende Zahl von Vorrichtungen der beschriebenen Art erforderlich wäre, um auch nur eine einzige Pferdestärke dauernd zu liefern, so verliert diese Frage für den Ingenieur jegliches praktisches Interesse. In grundsätzlicher Hinsicht darf immerhin erwähnt werden, daß die Formulierung von Smoluchowski uns zu starr zu sein scheint. Man könnte beispielsweise die beschriebene Vorrichtung mit einer Revolverdrehbank verbinden, die mit allem Zubehör, insbesondere den Messern ausgestattet ist, um, wenn in Bewegung gesetzt, selbsttätig, sagen wir auf je 100 Umdrehungen eine Unterlagscheibe abzudrehen. Die gewöhnlichen „Schwankungen" der Antriebvorrichtung werden, weil mikroskopisch klein, ohne Wirkung bleiben. Von den größeren wird eine große Anzahl dadurch zunichte gemacht, daß die „Klinken" zur Unzeit durch ihre eigene Schwankung die Kuppelung mit der Drehbank unterbrechen. Aber schließlich wird es, sehr selten, auch solche Schwankungen geben, wo die Drehbank sich mitdreht, und in ungeheuren Zeiträumen eine mit hundert Umdrehungen, wobei eine Unterlagscheibe tatsächlich abgedreht wird. Sollen die Schwankungen, alles in allem genommen, wirkungslos bleiben, so müßte das Scheibchen den Keim einer geheimen Krankheit oder eine geheime „Auflösungstension" mit auf den Weg bekommen, vermöge welcher es früher oder später zerfällt. Aber es ist nicht einzusehen, warum man dies zu glauben gezwungen wäre. Ebensowenig können wir uns der Meinung anschließen, daß durch die Schwankungen, denen die Moleküle des Schmiedeeisenstabes, aus dem die Unterlagscheiben hergestellt werden sollen, ebenfalls unterworfen sind, in der gleichen Zeit, die unsere Vorrichtung mit Drehbank bedarf, selbsttätig Unterlagscheiben abgestoßen werden könnten. In der Verbindung der Drehbank mit der Kolbenvorrichtung ist als neuer Faktor die Intelligenz menschlicher Wesen mit einer Zwecksetzung dazwischengetreten, die nicht mehr als der Maxwellsche Dämon ständigen Aufwand von Aufmerksamkeit, ja mechanischer Energie bedingt, sondern durch die besondere Art der kinematischen Verkettung der Maschinenteile, trotz ihrer Abwesenheit, weiterwirkt. Der Physiker lehnt es freilich ab, auf solche Betrachtungen einzugehen. So Smoluchowski mit den Worten (S. 120): „Ob also Lebewesen ... dauernd Arbeit auf Kosten der Wärme niederster Temperatur erzeugen könnten, erscheint zweifelhaft, wiewohl unsere Unkenntnis der Lebensvorgänge eine definitive Antwort ausschließt."

Schlußbetrachtung.

Der Ausspruch von Nernst[1]), daß der im klassischen Sinn genommene II. Wärmesatz für endliche Zeiten und Räume seine Geltung verloren habe, hat nicht verfehlt, in Kreisen optimistischer Erfinder den Eindruck zu erwecken, als sei die Epoche des Perpetuum mobile II. Art bereits hereingebrochen. Aus dem vorhergehenden erhellt, daß diese Deutung unzulässig ist und daß der Ingenieur in allen praktischen Aufgaben der Wärmeenergieumwandlung mit der Entropievermehrung, d. h. eben mit der klassischen Form des II. Hauptsatzes, als sozusagen fester Tatsache rechnen kann. Alles über den thermischen und thermodynamischen Wirkungsgrad Gesagte behält also seine Gültigkeit, und der Wärmekraftmaschinenbau würde vergeblich auf neue Offenbarungen hoffen, die ihm ungeahnte Möglichkeiten der Entwicklung in theoretischer Hinsicht eröffneten. Mehr als je kann ein Fortschritt nur durch zähe Ingenieurarbeit, d. h. schrittweise Verbesserung der Arbeitsprozesse und der konstruktiven Einkleidung der Maschine errungen werden. Parallel hiermit hat die Veredelung der Baustoffe zu gehen; insbesondere erhoffen wir von der Hüttenkunde dringend die baldige Erzeugung von Baustoffen, die bei hohen Temperaturen widerstandsfähig sind.

Der Brennstoffvorrat der Welt ist ein beschränkter und mahnt uns mit immer größerem Ernst, der noch bestehenden Verschwendung Einhalt zu tun.

Nach einer Vorkriegsstatistik[2]) wurden im Jahre 1913 die Weltvorräte an festen Brennstoffen auf rd. 7,5 Billionen Tonnen geschätzt. Der jährliche Verbrauch war in jenem Jahre 1250 Millionen Tonnen. Daraus ergibt sich die Erschöpfungsdauer **bei unverändertem Verbrauch** $7{,}5 \cdot 10^{12} : 1{,}25 \cdot 10^9 = 6000$ Jahre, was noch genügend tröstlich klingt. Ganz anders stellt sich die Sachlage dar, wenn wir annehmen, daß der Verbrauch, wie vor dem Kriege, um je 5 v.H. jährlich zunimmt. Dann berechnet sich[3]) die Erschöpfungsdauer nur noch zu 117, sage hundertundsiebzehn Jahren. Möchte doch diese Zahl den maßgebenden technischen und politischen Kreisen der Welt möglichst häufig vorgehalten werden. Wie

[1]) Theoretische Chemie, 1913, 7. Aufl., S. 210, letzter Absatz.

[2]) Engineering, 1916, 22. Sept., S. 291.

[3]) Sei $a = 1{,}25 \cdot 10^9$ der jährliche Verbrauch, $p = 0{,}05$ die Zunahme (in Teilen der Einheit), dann wird in n Jahren die Summe $S = a + a(1+p) + a(1+p)^2 + \ldots (1+p)^{n-1} = a[(1+p)^{n-1}]/p$ verbraucht, woraus sich mit $S = 7{,}5 \cdot 10^{12}$ wie oben $n = 117$ ergibt.

groß man auch die unbekannten Lager und die Entwicklung der Wasserkräfte einzuschätzen geneigt ist, so berechtigen die angeführten Zahlen zu der Behauptung, daß bei der bisherigen Bewirtschaftung Gefahr im Verzuge ist, oder dann, daß die Brennstoff-Verhältnisse der Menschheit in Bälde erhebliche Einschränkungen an Energieverbrauch, also an Wohlstands- und Kulturansprüchen aufzwingen werden.

Die Hoffnungen der einen (der Jugendlichen) wenden sich den Aussichten der Molekularphysik zu, deren staunenerregende Fortschritte in der Erkenntnis des Molekülbaues in der Tat leicht dazu verleiten können, die Herrschaft des Geistes über die Materie bis in ihre letzten, kleinsten Teile als schon begründet anzusehen. Das Programm wäre einfach: die künstliche Auslösung der gewaltigen Energien, die im winzigen Molekül durch das fabelhaft rasche Kreisen der Elektronen und die elektrischen Anziehungskräfte aufgespeichert sind. Hier liegt Neuland von unermeßlicher Ausdehnung vor. Soweit die Materie reicht, soweit birgt sie in sich noch unberührte Energie, die keines Sauerstoffs „zur Verbrennung" bedarf. Rutherford ist es bereits gelungen, sogar bis zum Kern des (Stickstoff-) Moleküls vorzudringen und ihn (unter Abspaltung von Helium) zu zertrümmern; nach einem neuesten Bericht[1]) würde aus dem Aluminiumkern Wasserstoff gewonnen worden sein, mit mehr kinetischer Energie als dem auslösenden α-Teilchen entspricht. Warum sollte die Wissenschaft der Zukunft die Konstitution des Atoms nicht ebenso meistern wie die Chemie von heute diejenige der Molekulargruppen, die sie nach Willkür löst oder bindet? Möge der begreifliche Optimismus der Physiker bald von dauerndem Erfolge gekrönt sein; die bittere in Aussicht stehende Not einer nicht fernen Zukunft wird die Pflege dieses Wissenschaftszweiges zu einer dringenden Pflicht der Allgemeinheit machen. Heute indessen dürfen wir nicht übersehen, daß in jenen Anfängen einer atomistischen „Energieauslösung", d. h. einer künstlich hervorgerufenen „Radioaktivität" kostbares Radium in ungeheuer viel größerer Menge verbraucht wird, als der gewonnenen Energie entspricht. Denn nach Angaben von Rutherford gelingt es nur einem α-Teilchen auf 10 Millionen einen einzigen Kern zu zertrümmern. Allem Anscheine nach sind aber die irdischen Vorkommen radiumhaltiger Stoffe äußerst selten.

Die anderen pochen auf die Tatsache, daß der II. Wärmesatz in seiner früheren starren, unerbittlichen Form überwunden ist, und fragen, von ähnlichem Optimismus beseelt, warum in Zukunft bei weiterer Lockerung der Fesseln das Perpetuum mobile II. Art nicht dennoch in irgendeiner, heute noch unvorstellbaren Form seine Auferstehung feiern könnte. Man glaubt in den neueren „Senderröhren" der drahtlosen Telegraphie den Anfang eines vom Menschen geschaffenen und beeinflußbaren Molekularmechanismus erblicken zu dürfen, dessen Entwicklung vielleicht einen Stellvertreter des „Maxwellschen Dämons" (der bekanntlich, — vor einer Scheidewand in einer Gasmasse sitzend, durch Öffnen einer molekularen Klappe nur die Moleküle mit hoher Geschwindigkeit durchläßt und so Wärme von tiefer zu hoher Temperatur hinleitet) abgeben könnte. Doch kommen in jenen Röhren nur Schwingungen von Elektronenströmen vor, vergleichbar mit dem „Pumpen" der Kreiselverdichter; immerhin ist es fesselnd, daß der Vorgang durch rein elektrische Fernkräfte aufrechterhalten wird.

Wer die großen Wandlungen der wissenschaftlichen Grundauffassungen, die sich innerhalb eines Menschenalters folgten, miterlebt hat, kann von der historischen Betrachtungsweise ausgehend, feststellen, daß die klassische Thermodynamik mit dem Satz von der unbedingten Vermehrung der Entropie als letzte Zukunft der Welt seinerzeit zunächst **voreilig** den **„Wärmetod"** statuiert hat. Mit dem Verschwinden aller Temperatur- und Druckunterschiede und infolge der überall vorhandenen Reibungen, aller sichtbaren kinetischen Energie, sollte die Welt zu einer bewegungslosen, eiskalten Masse werden (höchstens zur „Lauwärme" dürfte der Vorrat reichen), aus der auch jedes Leben verschwunden wäre. Dasselbe Gesetz nach rückwärts, in die fernste Vergangenheit verfolgt, würde umgekehrt auf immer kleinere Entropie, immer schroffere Temperaturunterschiede bis ins Unermeßliche hinaufführen. Ein offenkundiger, unaufklärbarer Widerspruch (da wir die Zeit auch nach der neuesten Relativitätstheorie nach beiden Richtungen als unendlich groß betrachten müssen), der jahrzehntelang stillschweigend geduldet wurde.

Der Ersatz der einseitigen Entropievermehrung durch das Schwanken zwischen mehr und weniger wahrscheinlichen Zuständen befreit uns vom finsteren Ausblick in den Wärmetod und eröffnet die Möglichkeit endloser, in Wellenlinien gehender Entwicklung. Nach Boltz-

[1]) Uns war unmittelbar vor dem Abschluß nur Engineering 1921, 8. April, zugänglich.

mann[1]) befindet sich das Weltall im Zustande des Wärmegleichgewichtes, so jedoch, daß „kleine" Bezirke (= Einzelwelten!) davon ebenso oft im Sinne ab- wie zunehmender Zustandswahrscheinlichkeit abweichen. Unser Planetensystem befindet sich in letzterem Falle. Aber auch hier tauchen Schwierigkeiten auf, wenn man die zulässigen Folgerungen bis zu Ende ausdenkt. In einer Welt mit abnehmender Wahrscheinlichkeit laufen die Zeit und mit ihr alle Ereignisse gewissermaßen zurück, die Wärme geht vom kalten Körper zum warmen über; die Gase strömen aus dem Behälter mit niederem Druck in den mit hohem Druck zurück usw. Wie soll man sich vollends eine „Welt" vorstellen, wo ein Teil der Zustandsänderungen das alte, ein anderer das neue Gesetz befolgt, was nach der Wahrscheinlichkeitstheorie als absonderlicher Wurf in jedem beliebigen Mischungsverhältnis vorkommen kann, ja vorkommen muß? Ohne auf dieses krasse Beispiel hinzudeuten, aber wohl unter dem Druck eines ähnlichen Gefühles bemerkt Planck, daß man den extremen Folgerungen der Boltzmannschen Theorie nicht beizupflichten brauche, und daß es hinreiche, wenn man den Grundsatz von der „molekularen Unordnung" als überall gültig anerkenne.

Also auch hier Einschränkungen, die noch vermehrt werden durch die neue „Quantentheorie", wie sie ungemein klar Planck in seinen „Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung" darstellt, auf die wir angelegentlich verweisen. Eine Hauptfolgerung der statistischen Mechanik, die gleichmäßige Verteilung der kinetischen Energie der Moleküle auf alle Freiheitsgrade, wird hierdurch für tiefe Temperaturen aufgehoben. Die Abnahme der spezifischen Wärmen gegen den absoluten Nullpunkt hin, oder allgemeiner der dritte Wärmesatz von Nernst stehen in Übereinstimmung mit der Quantentheorie und bestätigen den Widerspruch mit der klassischen statistischen Mechanik.

Inzwischen hat die neueste Atomlehre einschneidendste Änderungen an altbewährten Naturgesetzen vorgenommen, beispielsweise, indem sie die berühmten Maxwellschen Gleichungen für die Elektronenbewegung im Molekül kurzerhand ausschaltet. Auch diese in der Vergangenheit ihresgleichen suchenden Neuerungen lassen aber den II. Hauptsatz bestehen, denn auch die Quantentheorie bedingt nur gewisse Änderungen der Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen, ohne sie grundsätzlich aufzuheben. Und so muß rückblickend dem II. Wärmesatz neben dem Energiesatz in der Tat eine alle anderen Grundgesetze überragende Beständigkeit zugesprochen werden. Die „Wahrscheinlichkeit" seines weiteren Erhaltenbleibens ist eine ungemein hohe. Darum nochmals: Ablehnung aller „Erfindungen", die mit ihm im Widerspruch stehen. Der II. Wärmesatz sei auch fernerhin die oberste Richtlinie der schaffenden Ingenieurtätigkeit.

Es kommt ihm aber auch eine hohe philosophische Wichtigkeit zu, von der jeder denkende Mensch nicht anders als mit tiefstem Interesse Kenntnis nehmen kann.

Vor der in Boltzmann gipfelnden modernen Molekulartheorie war das Gesetz: die Wärme fließt (bei unmittelbarer Berührung) vom wärmeren Körper zum kälteren, eine induktive Notwendigkeit. Nun verlegen wir die Kausalität gewissermaßen aus dem Grobsinnlichen in den Mikrokosmos der Materie und eröffnen uns die Möglichkeit, das erwähnte Gesetz und sein diametrales Gegenteil, also die scheinbare Regellosigkeit, naturwissenschaftlich streng zu begreifen. Die äußersten Folgerungen der Boltzmannschen Theorie müssen zunächst wohl abgelehnt werden, vielleicht weil die „statistische" Betrachtung, die heute infolge der ungemein großen Zahl der wirkenden Elemente allein durchführbar ist, am Ende doch nur der Schein der wahren Kausalität ist. Auch H. Poincaré spricht[2]) von der Wahrscheinlichkeit als dem „vagen Instinkt", dem man eigentlich mißtrauen müßte, der aber unentbehrlich ist. Im Rahmen dieser Vorbehalte, d. h. der Bedingtheit unseres Intellektes muß man trotzdem in der modernen Molekularstatistik eine der größten Umwälzungen bewundern, die im Erkennen vor sich gingen. Die Kraft des Schlusses, daß nach tausend sich stets gleichbleibenden Beobachtungen ein Ereignis unter gleichen äußerlich wahrnehmbaren Umständen sich wiedereinstellen müsse, ist gebrochen; die Methode der „logischen Induktion" hat im Gebiete der unmittelbaren Anschauung keine Macht mehr.

Das Gesetz der Kausalität gilt starr nur noch im Gebiet der Atome, der tausendmal kleineren Elektronen, und wird sich später in deren unmeßbar kleine Unterabteilungen verflüchtigen. Was wir sehen, ist, mit Nietzsche zu reden, ein schillernder „Olymp des Scheins".

---

[1]) Vorlesungen über Gastheorie, II. Bd., S. 257.

[2]) La Science et l'Hypothèse, S. 6 u. 216f.

So gewaltig diese Feststellung wirkt, so liegt doch etwas tief Unbefriedigendes darin, daß die moderne Naturwissenschaft das Weltgeschehen im Zufallspiel des blinden Zusammenpralls von ebenso blinden, mehr oder weniger elastischen „Kugeln“, deren keine von der anderen etwas weiß, aufgehen läßt. Wird uns hier, wenn man diese Anschauung, wie viele Physiker tun zu dürfen glauben, auf das Geistige überträgt, nicht ein Freiheitstod ähnlich dem früheren Wärmetod angedroht?

Das Gegenteil ist der Fall, denn für diese Übertragung fehlt auch der Schein einer Berechtigung. All diese Umwälzungen der Erkenntnis sind nur Beweise für die unermeßliche Tiefe des Naturgeheimnisses; wir danken der Naturwissenschaft für die immer deutlichere Offenbarung derselben. Die Zerrissenheit des heutigen physikalischen Weltbildes ist ein sprechender Beweis dafür, daß das Physikalische vor dem Geistigen haltmachen muß. Wenn dort die Zersplitterung ins Atomistische eine Denknotwendigkeit zu werden scheint, so ist hier das Zusammenfassende, die Synthese des Bewußtseins, die Einheit und Selbstgewißheit der Persönlichkeit, eine Grundtatsache, deren „Erklärung“ aus voneinander unabhängigen molekularen Ereignissen zu versuchen auf immer eine bare Unbegreiflichkeit sein müßte. Wohl drängt uns die innere Wahrnehmung das Gefühl des kausal Bedingten auf; allein es kommt auf die Deutung an. Wenn ein Schaffensdrang unser Wesen unwiderstehlich treibt oder ein entschlossener Wille zum Widerstand gegen Rechtsmißbrauch uns materiellen Vorteil als wesenlos erscheinen läßt, so ist solches „Determiniert“-sein das höchste Menschenglück, und wir wissen, daß wir uns persönlich im Kampf der inneren geistigen Kräfte aus dem Zwang dunkler Naturtriebe zu dieser höheren Determiniertheit durchzuringen vermögen. Den zufälligen „Schwankungen“ der mechanischen Atomwelt steht im Geistigen eine (bewußte oder unbewußte) Zielsetzung und eine Entwicklungslinie, die über das Persönliche hinausgeht, gegenüber, deren Ausgang, da er aus dem neuen Wunder der Zusammenarbeit der Gemeinschaft in ferner Zukunft erstehen wird, zwar dem einzelnen Menschenatom nur in Umrissen vorschweben kann, aber jedenfalls nicht mit Hilfe der Mechanik der toten Materie gesucht, erklär oder gefunden werden kann. Und so können wir in einem anderen Sinne erklären: wir sind frei; wir sind nicht gezwungen, dem Drucke vorzeitiger Folgerungen aus vergänglichen Formen der Naturgesetze (die biologischen einbegriffen) zu weichen. Es ist uns erlaubt zu lauschen den noch in keine Formel gebannten Tönen und Gesetzen, die aus den tiefsten Gründen des Seelenlebens in Gestaltungen künstlerischer und ethischer Art leise oder feurig emporrauschen.

Zahlenangaben zur Entropietafel II für Gase

Mittlere spezifische Wärme und Entropie

t	H_2				O_2, N_2, CO				H_2O				CO_2				Feuergase	
	$\bar{\mathfrak{C}}_p$	$\mathfrak{Q}_p$	$\mathfrak{S}_p$	$\mathfrak{S}_v$	$\bar{\mathfrak{C}}_p$	$\mathfrak{Q}_p$	$\mathfrak{S}_p$	$\mathfrak{S}_v$	$\bar{\mathfrak{C}}_p$	$\mathfrak{Q}_p$	$\mathfrak{S}_p$	$\mathfrak{S}_v$	$\bar{\mathfrak{C}}_p$	$\mathfrak{Q}_p$	$\mathfrak{S}_p$	$\mathfrak{S}_v$	$\mathfrak{S}_p$	$\mathfrak{S}_v$
°C	0—t °C	0—t °C	0—t °C	0—t °C	0—t °C	0—t °C	0—t °C	0—t °C	0—t °C	0—t °C	0—t °C	0—t °C	0—t °C	0—t °C	0—t °C	0—t °C	0—t °C	0—t °C
0		0	0,000	0,000		0,00	0,000	0,000	7,99	0,00	0,000	0,000	8,79	0	0,000	0,000	0,000	0,000
200	6,96	1392	3,799	2,708	6,97	1394	3,804	2,713	8,09	1618	4,418	3,327	9,43	1886	5,129	4,038	3,934	2,844
400	6,99	2796	6,268	4,477	7,04	2816	6,299	4,508	8,24	3296	7,366	5,575	10,08	4032	8,889	7,098	6,545	4,755
600	7,04	4224	8,131	5,823	7,11	4266	8,188	5,880	8,41	5046	9,645	7,337	10,58	6348	11,907	9,599	8,536	6,229
800	7,12	5696	9,642	6,925	7,21	5768	9,727	7,010	8,61	6888	11,542	8,825	11,00	8800	14,430	11,713	10,167	7,450
1000	7,19	7190	10,923	7,867	7,30	7300	11,035	7,979	8,83	8830	13,194	10,138	11,33	11330	16,591	13,535	11,555	8,499
1200	7,27	8724	12,041	8,695	7,39	8868	12,179	8,833	9,07	10884	14,685	11,339	11,60	13920	18,479	15,133	12,773	9,427
1400	7,35	10290	13,035	9,436	7,48	10472	13,195	9,596	9,32	13048	16,062	12,463	11,82	16548	20,155	16,556	13,857	10,258
1600	7,42	11872	13,931	10,108	7,55	12080	14,111	10,288	9,61	15376	17,365	13,542	12,01	19216	21,660	17,837	14,838	11,015
1800	7,49	13482	14,749	10,725	7,63	13734	14,944	10,920	9,91	17838	18,620	14,596	12,16	21888	23,022	18,998	15,733	11,710
2000	7,56	15120	15,500	11,293	7,70	15400	15,708	11,501	10,27	20540	19,853	15,646	12,29	24580	24,266	20,059	16,559	12,352
2200	7,62	16764	16,196	11,821	7,76	17072	16,415	12,040	10,67	23474	21,088	16,713	12,41	27302	25,409	21,034	17,329	12,954
2400	7,68	18432	16,843	12,314	7,81	18744	17,072	12,543	11,13	26712	22,343	17,814	12,51	30024	26,466	21,937	18,050	13,521
2600	7,73	20098	17,448	12,776	7,87	20462	17,686	13,014	11,65	30290	23,641	18,969	12,59	32734	27,449	22,777	18,732	14,059
2800	7,78	21784	18,016	13,210	7,92	22176	18,263	13,457	12,27	34356	25,008	20,202	12,67	35476	28,369	23,563	19,381	14,574
3000	7,83	23490	18,550	13,619	7,96	23880	18,807	13,876	12,98	38940	26,454	21,523	12,74	38220	29,234	24,303	20,012	15,072

Zahlenangaben zur I-S-Tafel für hohe Drücke.

p_s at abs	t_s °C	T_s °C abs	s' Cal/°C kg	s'' Cal/°C kg	i' Cal/kg	i'' Cal/kg	v' m³/kg	v'' m³/kg	r Cal/kg	$\frac{dp}{dT}$ at/°C	$10^6 \cdot \frac{dv'}{dT}$ m³/kg °C
0,02	17,3	290,3	0,0616	2,0810	17,20	602,2	—	—	585,0	—	—
0,05	32,4	305,4	0,1119	2,0020	32,10	609,2	—	—	577,1	—	—
0,10	45,6	318,6	0,1541	1,9450	—	615,2	—	—	—	—	—
0,25	64,4	337,4	0,2118	1,8706	64,50	623,5	—	—	559,0	—	—
0,50	80,7	353,7	0,2590	1,8140	—	630,6	—	—	—	—	—
1,0	99,0	372,0	0,3095	1,7595	99,12	638,0	—	—	538,9	—	—
1,8	116,3	389,3	0,3547	1,7125	—	645,0	—	—	—	—	—
2,5	126,7	399,7	0,3815	1,6870	127,26	648,5	—	—	521,2	—	—
5,0	151,0	424,0	0,4425	1,6323	—	656,0	—	—	—	—	—
7,5	166,8	439,8	0,4806	1,5995	168,68	660,2	—	—	491,5	—	—
11	183,1	456,1	0,5184	1,5670	—	664,0	—	—	—	—	—
16	200,6	473,6	0,5574	1,5348	204,10	666,2	—	—	462,1	—	—
20	211,3	484,3	0,5822	1,5147	215,3	667,4	0,00118	0,1018	452,1	0,395	1,6
22,5	217,5	490,5	0,5955	1,5041	221,9	667,6	0,00119	0,0906	445,7	0,435	1,7
25	223,0	496	0,6080	1,4945	228,0	667,8	0,00120	0,08166	439,8	0,470	1,77
27,5	228,1	501,1	0,6188	1,4852	233,8	667,75	0,00121	0,0743	433,95	0,507	1,82
30	232,9	505,9	0,6290	1,4767	239,2	667,65	0,00122	0,0681	428,45	0,544	1,9
35	241,5	514,5	0,6471	1,4615	249,0	667,3	0,001235	0,0583	418,3	0,611	2,02
40	249,3	522,3	0,6635	1,4481	257,5	666,6	0,00125	0,0509	409,1	0,677	2,15
45	256,3	529,3	0,6787	1,4357	265,0	665,7	0,00127	0,04525	400,7	0,740	2,3
50	262,8	535,8	0,6925	1,4243	272,3	664,5	0,00128	0,0403	392,2	0,801	2,4
55	268,8	541,8	0,7046	1,4137	279,2	663,3	0,001295	0,0364	384,1	0,862	2,53
60	274,5	547,5	0,7161	1,4039	285,7	662,0	0,00131	0,0332	376,3	0,921	2,68
65	279,7	552,7	0,7272	1,3946	291,8	660,6	0,001325	0,0304	368,8	0,980	2,8
70	284,7	557,7	0,7375	1,3856	297,8	659,1	0,00134	0,0280	361,3	1,037	2,9
80	293,8	566,8	0,7568	1,3688	308,9	655,9	0,00137	0,02406	347,0	1,156	3,15
90	302,1	575,1	0,7746	1,3531	319,0	652,2	0,001395	0,02096	333,2	1,261	3,5
100	309,7	582,7	0,7915	1,3382	329,1	648,2	0,00142	0,0185	319,1	1,367	3,9
120	323,3	596,3	0,8235	1,3091	348,6	638,6	0,00148	0,0139	290,0	1,578	5,05
140	335,3	608,3	0,8546	1,2805	368,1	627,5	0,00155	0,0118	259,4	1,772	6,6
160	345,9	618,9	0,8862	1,2506	388,4	614,1	0,00163	0,00952	225,7	1,966	8,6
180	355,6	628,6	0,9110	1,2180	410,0	597,6	0,00173	0,00760	187,6	2,162	13,1
200	364,4	637,4	0,9583	1,1797	435,4	576,7	0,001885	0,00586	141,2	2,385	26,4
220	372,4	645,4	1,0214	1,1170	476,9	538,6	0,00230	0,00392	61,7	2,645	113,0
224	374,2	647,2	1,0692	1,0692	508,0	508,0	0,00300	0,00300	0		2600,0

Alphabetisches Namenverzeichnis.

Nachtrag

1. Entropietafel für hohe Drücke.

Die spezifischen Wärmen des Wasserdampfes sind inzwischen durch Knoblauch und Raisch[1]) bis zu Drücken von 30 at abs. bestimmt worden. Als Krönung seiner bewunderungswürdigen Arbeiten über die Eigenschaften des Wasserdampfes gab Knoblauch mit Raisch und Hausen zusammen „Tabellen und Diagramme für Wasserdampf" heraus,[2]) in welchen neue und bemerkenswert einfache Formeln für die spezifischen Wärmen und die Zustandsgrößen v, i, s in Abhängigkeit von p, T, aufgestellt werden. Diesem Werke, das kein Dampfturbineningenieur entbehren kann, ist auch eine I-S-Tafel beigegeben, die als die genaueste Tafel der Gegenwart anzusehen ist. Knoblauch bringt darin auch die über die Beobachtungsgrenzen, bis zu 60 at abs. und 450° C hinaus extrapolierten Zustandsgrößen zur Darstellung. Hierdurch wird die nach Eichelbergs Formeln berechnete I-S-Tafel der V. Aufl. dieses Buches überholt; es bleibt jedoch ein Bedürfnis nach einer Tafel für noch höhere Drücke bestehen, da bereits Anlagen für 70 at Ü. und eine, die bis zum kritischen Druck geht, in Ausführung begriffen sind.

Es wurde daher eine bis zum kritischen Zustand reichende Tafel auf folgenden Grundlagen entworfen: 1. Im $c_p T$-Schaubild wurde die „Grenzkurve" an die Eichelbergsche Linie anschmiegend, jedoch so angenommen, daß sie beim kritischen Zustand den Wert $c_p = \infty$ liefert. 2. Die Linien $\partial c_p / \partial p$, die sich aus Knoblauchs Beobachtungen ergeben, wurden über $p = 30$ at extrapoliert und daraus die c_p-Werte selbst durch graphische Integration gewonnen. So entstand die Linienschar Abb. 1 mit logarithmischem Ordinatenmaßstab; unterhalb 30 at sind die Knoblauchschen Werte von c_p zu nehmen. Für höhere Drücke ergeben sich Abweichungen gegen die Knoblauchsche Extrapolation, über deren Zulässigkeit selbstredend nur neue Versuche entscheiden können. 3. Im T-S-Schaubild wurde die linke Grenzkurve in Übereinstimmung mit den Werten von Schüle angenommen, die auch für die Tafel der V. Aufl. Gültigkeit hatte. Für die rechte Grenzkurve konnten die neuesten Beobachtungen von Blomquist[3]) über die Verdampfungswärme bis zu 100 at verwertet werden. Aus diesen wurden mit Hilfe der Clapeyronschen Beziehung die Rauminhalte für trocken gesättigten Zustand festgelegt. Für die Abhängigkeit von p, T, an der Grenzkurve wurden die Werte von Holborn, Henning u. Baumann (wie Mollier in „Hütte" 24. Aufl. S. 496) angenommen. 4. Aus den Werten von c_p ergeben sich graphisch i und s aus $\partial c_p / \partial p$ die Rauminhalte gemäß folgendem Vorgehen:

Aus der Grundgleichung $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial T^2}\right)_p = -\frac{\partial c_p}{\partial p} \frac{1}{AT} = -f(p, T)$ folgt durch Integration von T bis ∞

$$\frac{\partial v}{\partial T} = \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_{T=\infty} + \int_T^\infty f(pT)\, dT \quad \dots \quad (1)$$

Wie man nachher bestätigen kann, ist $(\partial v / \partial T)_{T=\infty} = B/p$; die zweite Integration, die der Deutlichkeit halber von T bis zu einer endlichen Temperatur T_e gehen soll, liefert

$$v = v_{T=T_e} - \int_T^{T_e} \frac{B\, dT}{p} - \int_T^{T_e} dT \int_T^\infty f(pT)\, dT \quad \dots \quad (2)$$

[1]) Z. d. Ver. Deutsch. Ing. 1922. S. 425.
[2]) Oldenbourg, München u. Berlin 1923.
[3]) Josse, Hochdruckdampf. Z. d. Ver. Deutsch. Ing. 1924. 26. Jan.

Das Doppelintegral zerlegen wir gemäß Formel

$$\int_T^{T_e} = \int_T^{\infty} + \int_{\infty}^{T_e} = \int_T^{\infty} - \int_{T_e}^{\infty},$$

und beachten, daß

$$\int_{T_e}^{\infty} = \int_{T_e}^{\infty} dT \int_T^{\infty} f(pT)\, dT = f_2(p)$$

bei feststehendem T_e nur vom Druck abhängt. Ebenso ist $v_{T=T_e} - BT_e/p$ eine Druckfunktion $= f_1(p)$. Wenn dann $f_1(p) + f_2(p) = \psi(p)$ gesetzt wird, erhält man

$$v = \frac{BT}{p} - \int^{\infty} dT \int^{\infty} f(pT)\, dT + \psi(p) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

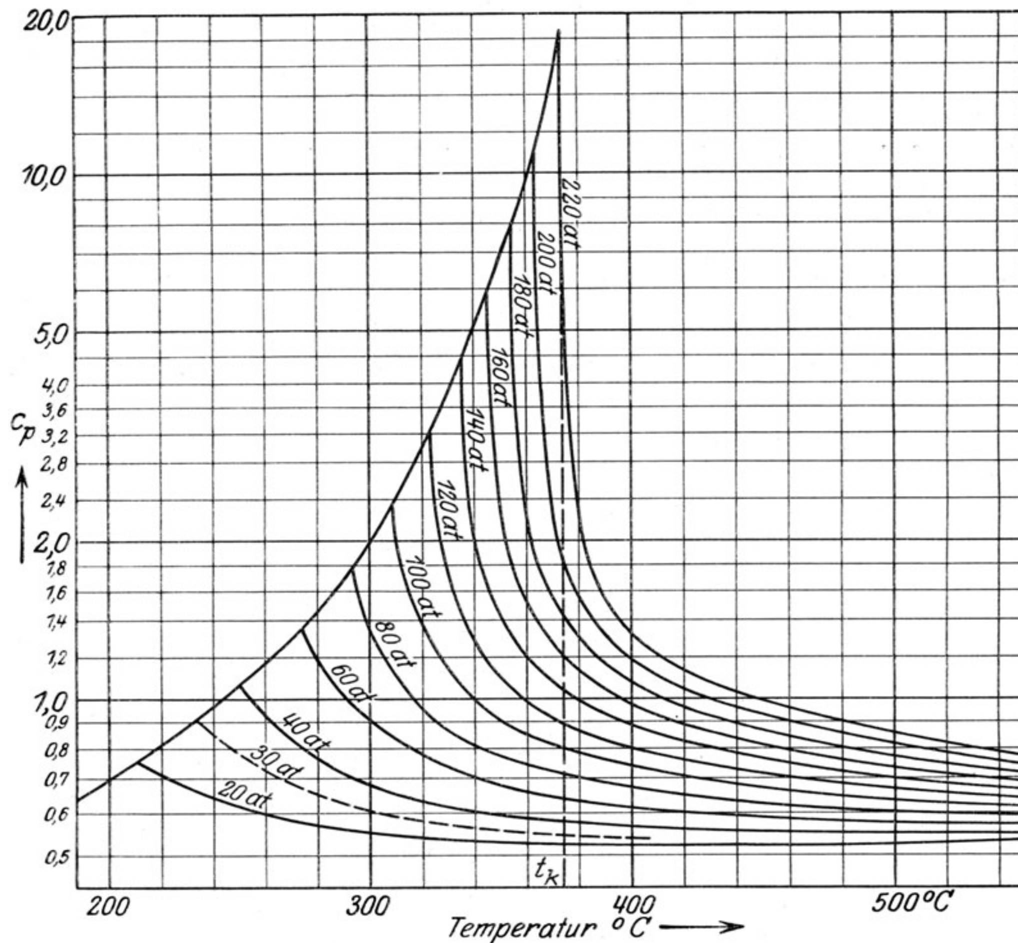


Abb. 1. Temperaturschaulinien der bis zum kritischen Zustand extrapolierten spezifischen Wärmen c_p.

Darin ist das erste Glied der „theoretische" Rauminhalt, das zweite stellt den Einfluß der spezifischen Wärme dar und das dritte ist die von Knoblauch eingeführte Berichtigung, die durch Vergleich des gerechneten v an der Sättigungsgrenze mit den durch Versuch bestimmten Werten festgelegt wird. Daß ψ nur von p abhängt, ist thermodynamisch begründet und muß zutreffen. wenn die richtigen spezifischen Wärmen bei der Berechnung von v verwendet wurden.

Man kann übrigens, um das Doppelintegral in Gl. (3) zwischen endlichen Grenzen zu bilden, in Gl. (2) das innere Integral als $\int_T^{\infty} f(pT)\, T = \int_T^{T_e} + \int_{T_e}^{\infty}$ schreiben, wodurch (3) die Form

$$v = \frac{BT}{p} - \int_T^{T_e} dT \int_T^{T_e} f(pT)\, dT + f_1(p) - f_3(p)(T_e - T) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

annimmt. Die im Unendlichen geltenden Werte von c_p haben hier nur auf $f_3(p)$ einen Einfluß.

Zur **Bestimmung der Rauminhalte aus Druck und Temperatur** dient die erweiterte Jakobsche $B'T$-Tafel (für die VI. Auflage auf die Rückseite der J-S-Tafel I, für den gesonderten Nachtrag als Sondertafel IIa gedruckt), die bis zum kritischen Zustand reicht. Der Bequemlichkeit halber ist für Drücke unter 20 at die eigentliche Jakobsche Tafel (Abb. 10 in Abschn. 9) beigefügt. Hat man zu p, T den Wert B' abgelesen, so folgt mit $B = 47{,}10$

$$v = \frac{(B - B')\,T}{p} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Den Wärmeinhalt auf der linken Grenzkurve erhält man aus der Beziehung $i = i'(1-x) + i''x$, indem man zu dem kleinsten x, das in der Tafel vorkommt, i abliest und auflöst

$$i' = \frac{i - x\,i''}{(1-x)}; \quad \text{damit ist } r = i'' - i' \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Die spezifischen Wärmen c', die den i'-Werten entsprechen, stimmen ungefähr mit den Annahmen von Schüle überein. Der Unterschied zweier i'-Werte auf der Grenzkurve ist jedoch weder die längs der Grenzkurve, noch die **im Kessel zugeführte Wärme.** Das Speisewasser wird vom Anfangsdruck p_a auf den Kesseldruck p_e verdichtet und möge dort bei einer Temperatur t_a den Wärmeinhalt i_a haben. Die Erwärmung bis zum Siedepunkt mit dem Wärmeinhalt i_e' erfolgt bei stets gleichem Druck p_e, daher ist für 1 kg die Wärmemenge

$$q_{\text{vorw}} = i_e' - i_a \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

zuzuführen. i_a kann aus dem Wärmeinhalt i_a' an der Grenzkurve, der der gleichen Anfangstemperatur t_a, aber **dem von p_a verschiedenen Druck** p_a^* entspricht, berechnet werden. Die Verdichtung des Wassers beträgt etwa 0,000044 Bruchteile des anfänglichen Rauminhaltes für je 1 at Mehrdruck. Man darf daher die Verdichtungsarbeit $\int p\,dv'$ vernachlässigen und erhält für eine isothermische **Ausdehnung** vom Anfangsdruck p_e auf p_a^* für die zuzuführende Wärme die Gleichung

$$q_i = u_a' - u_a \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

woraus $u_a = u_a' - q_i$ und $i_a = u_a + A p_e v_a' = u_a' + A p_e v_a' - q_i$ oder mit $i_a' = u_a' + A p_a^* v_a'$ schließlich die **Vorwärmungs-**(oder **„Siede“-**)**wärme** nach (3)

$$q_{\text{vorw}} = i_e' - i_a' - A\,(p_e - p_a^*)\,v_a' + q_i \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

folgt. Das Dreieck, welches im pv-Bild die (fast senkrechte) Isotherme, die Linie $p_e =$ konst und die Grenzkurve bis zu p_a^* zurück bilden, wird im T-S-Bild durch eine Wagerechte von der Länge Δs, die Linie p_e und die Grenzkurve abgebildet. Da die Inhalte einander gleich sind, so gilt, wie man sich mittels Handskizze klar macht, für einen unendlich kleinen Flächenzuwachs

$$\Delta s \cdot dT_a = A\,(p_e - p_a^*)\,dv_a' \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Wenn man $dv'/d\tau$ durch Differenzen (z. B. nach der „Hütte“) bildet, so folgt hieraus die isothermische Wärme

$$q_i = T_a\,\Delta s \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Bei tiefen Anfangstemperaturen wird q_i bedeutungslos [etwa $^1/_{10}$ des vorletzten Gliedes in Gl. (5)]. Stets **aber ist, wie ersichtlich, die im Kessel mitzuteilende Wärme kleiner als die Zunahme der Wärmeinhalte an der Grenzkurve.** Diejenige Wärme, die bei einer Zustandsänderung genau längs der Grenzkurve mitzuteilen wäre, ist $q_{\text{grenz}} = i_e' - i_a' - A\int_{p_a^*}^{p_e} v'\,dp$, hat jedoch keine praktische Bedeutung.

Die neue Tafel stimmt bis 20 at Druck mit der J-S-Tafel I überein. Bis 30 at weicht sie von der Knoblauchschen Tafel wenig ab. Darüber hinaus, besonders bei hohen Drücken, wird man von der Tafel **nicht mehr verlangen** als eine **Extrapolation** bieten kann, nämlich ein **System von wahrscheinlichen** in sich selbst **widerspruchsfreien Werten.**

2. Wellenreflexion an der Strahlengrenze.

Es sei AB in Abb. 2 die Grenzfläche zwischen dem oberhalb AB strömenden Strahl und der darunter liegenden ruhenden Umgebung; eine rein periodische Wellenbewegung soll aus dem bewegten in den ruhenden Raum dringen. In letzterem ist eine Reihe an aufeinanderfolgenden Wellen $W_1'\,W_2' \ldots$ durch Schraffur des „Berges“, d. h. der meistverdichteten Stelle angedeutet. Die Wellen haben gleichen Abstand $\lambda' =$ der Wellenlänge und die Wellenberge ziehen mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit V' senkrecht zu ihrer Richtung weiter. Ein mit der Geschwindigkeit U des Strahles mitbewegter Beobachter sieht im Strahle einen gleichartigen Wellenzug $W_1\,W_2 \ldots$ sich relativ zum Strahl mit der Geschwindigkeit V fortbewegen. Theorie und Beobachtung zeigen, daß im Strahl außerdem unter dem gleichen Winkel **reflektierte Wellen $W_1''\,W_2'' \ldots$ entstehen,** die an der Grenzfläche mit $W_1\,W_2 \ldots$ zusammen eine resultierende sinusförmige Spannungs- und Geschwindigkeitsverteilung hervorrufen. Diese „Spannungs-

welle" pflanzt sich **in der Grenzfläche** selbst mit der algebraischen **Summe aus der relativen Geschwindigkeit $V/\sin\vartheta$ und der Strömungsgeschwindigkeit U**, also hier mit

$$V_e = U - \frac{V}{\sin\vartheta} \quad (1)$$

fort. Ein stationärer Zustand kann nur bestehen, wenn an der Grenzfläche

a) die Pressungen
b) die normalen Geschwindigkeiten

im Strahl und in der Umgebung dauernd übereinstimmen. Also müssen insbesondere die absoluten Geschwindigkeiten, mit der sich die Wellenberge im Strahl und in der Umgebung längs der Grenzfläche fortbewegen, einander gleich sein, d. h. es ist

$$\frac{V'}{\sin\vartheta'} = U - \frac{V}{\sin\vartheta} \quad (1a)$$

Daraus folgt

$$\frac{\sin\vartheta'}{\sin\vartheta} = \frac{V'}{U\sin\vartheta - V} \quad (2)$$

Abb. 2. Wellenreflexion an der Strahlgrenze.

Wenn die in der Abbildung eingetragenen Richtungen als positiv gelten und $V' = V$ angenommen wird, so ist mithin $\sin\vartheta' > \sin\vartheta$, es findet **„Brechung" der Wellenrichtung** statt. Der größte Wert von $\sin\vartheta'$ ist $= 1$, der kleinste Wert von $V'/\sin\vartheta'$ ist V', es muß also

$$U - \frac{V}{\sin\vartheta} > V' \qquad \text{oder} \qquad U > V' + \frac{V}{\sin\vartheta} \quad (3)$$

sein. **Ist U kleiner als dieser Grenzwert,** so kann die Wellenbewegung in die ruhende Umgebung nicht eindringen, es **findet vollkommene Reflexion an der Strahlgrenze statt.** Es gibt noch immer eine eigentümliche sinusförmige Verdichtung, aber es wird keine Energie übertragen. Die zahlenmäßige Darstellung des Vorganges findet sich bei Rayleigh, Theorie des Schalles 1880, Bd. 2, S. 157 angedeutet und kann mit Hilfe der in Bd. 2, S. 101 enthaltenen Erörterungen weiter durchgeführt werden.

Ist $V/\sin\vartheta$ größer als U, so wird im Falle des Durchganges V' negativ z. B. $= - V''$ und Bedingung (3) geht in

$$\frac{V}{\sin\vartheta} - U > V'' \qquad \text{oder} \qquad U < \frac{V}{\sin\vartheta} - V'' \quad (4)$$

über. Wenn **U größer wird** als **der Grenzwert** (4), so findet wieder **vollständige Reflexion** statt. Diese könnte man populär so zu erklären versuchen, daß die Wellenbewegung wegen zu großer Strömungsgeschwindigkeit **„keine Zeit"** hat nach außen zu dringen; doch zeigt Fall (3), daß diese Betrachtung nicht stichhaltig ist.

Da in den Bedingungsgleichungen die Schwingungszahl nicht vorkommt, gelten dieselben auch für aus beliebigen harmonischen Teilen zusammengesetzte Wellenformen, also schließlich für jede beliebige elastische Störung.

2a. Auf Reflexion beruhende Prandtlsche Schaufelströmung.

Ein mit Überschallgeschwindigkeit auf die Hohlfläche der Schaufel AC, Abb. 3, auftreffender Dampfstrahl erfährt bei A infolge der Richtungsänderung eine Verdichtungsstörung, die sich unter dem Machschen Winkel ϑ gegen die Strahlachse stellt. Nach Prandtl[1]) wird sie an der freien Strahloberfläche bei B als Verdünnungswelle vollkommen reflektiert. Ist sie bei C angelangt, so wird, wenn das Wandelement die richtige Neigung hat, keine neue Welle entstehen, es reihen sich vielmehr die von $A_1\ A_2 \ldots$ bei $B_1\ B_2$ reflektierten Expansionskeile einfach aneinander, so zwar, daß bei DA' wieder der Anfangszustand herrscht. Die Zwischenschichten strömen von D nach B' geradlinig weiter; durch Anreihung einer neuen Schaufelkrümmung von A' aus, kann Wiederholung des Vorganges erzwungen werden.

Abb. 3. Schaufelströmung mit Reflexion.

[1]) Gemäß freundl. brieflicher Mitteilung.

Die Überlagerung der einzelnen Verdichtungen und Verdünnungen im Raume BCD führt zu der in Abb. 4 durch Schichtenlinien dargestellten Druckverteilung. Einige Drucklinien in Abb. 151 (B. S. 135) weisen dieselben Unstetigkeiten auf.

Eine mathematische Präzisierung dieser Vorgänge wäre dringend wünschbar, um uns allmählich zur Beherrschung der Strömung mit Überschallgeschwindigkeit zu führen. Daß die vollkommene Reflexion am unteren Strahlrand eintreten kann, lehren die in Abb. 3 eingetragenen Geschwindigkeitsdreiecke. Da die Verdichtungswelle AB im Raume steht, so ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in Richtung der Strömung $V^* = V \sin\vartheta$ identisch mit der Stromgeschwindigkeit U (aber entgegengesetzt). Daher ist $U < V/\sin\vartheta + V'$, oder die Bedingung (3) für das Übertreten der Schwingung ist nicht erfüllt; aber man kann an Hand der Rayleighschen Theorie nicht angeben, warum eine Verdichtung in vollem Maße spiegelbildlich zu einer gleich großen Verdünnung umgewandelt wird.

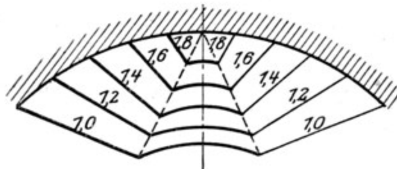
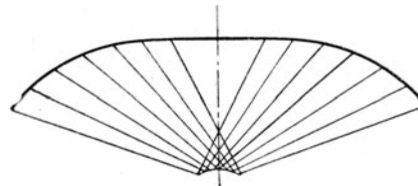


Abb. 4. Linien gleichen Druckes zu Schaufelabbildung 3.


Abb. 5. Zusammendrängen des Reflexionsgebietes.

Mit Zwischenschaltung einer geradlinigen Stromstrecke entsteht die in gleicher Weise entwickelte, in Abb. 5 dargestellte Strömung. Schließlich könnte man die Punkte B und D in einen zusammenfallen lassen und es entstünde ein Verdichtungs- und ein Verdünnungskeil wie in der Prandtlströmung „um die Ecke". Während jedoch nach Abb. 3 längs BD immer noch der Außendruck herrscht, der also auch beim Zusammenschrumpfen in einen Punkt bestehen müßte, sind bei der ursprünglichen Prandtlströmung in jenem Punkte alle Pressungen von der kleinsten bis zur größten unendlich nahe beieinander vorhanden, d. h. dort ist eine Stützung durch eine materielle Kante erforderlich, bei Abb. 5 jedoch nicht. Zum Schlusse erläutern wir

Prandtls Düse mit Parallelstrahl. Gemäß Abb. 6 wird die kegelig erweiterte **durch zwei parallele Ebenen begrenzte** Düse am Austritt mit einer solchen Rundung AE versehen, daß sich an die Zylinderflächen gleichen Druckes Z, Expansionskeile K anschließen, durch die den Stromlinien schließlich eine parallele Richtung erteilt wird. Zu diesem Zwecke greift man einen passenden Zwischendruck p_1 heraus und konstruiert in der Nebenabbildung die Gestalt der Meyerschen Expansionsbahn $A'E'$ von p_1 auf den Enddruck p_5 gemäß Abb. 954, in solcher Lage daß die Endtangente in E' zur Düsenachse parallel ist. Die Neigung der Anfangstangente in A' bestimmt dann den halben Divergenzwinkel $A\,O\,A_0$ der Düse; oder umgekehrt: der Winkel α bestimmt den Ausgangspunkt auf $A'E'$. Man zeichnet die den Zwischendrücken $p_2\,p_3\ldots$ entsprechenden Zylinderflächen $Z_1\,Z_2\ldots$ Die Parallele zur Tangente in B' bestimmt die Stromlinie $O\,B_2$ von der Kegelspitze bis zum Schnitt mit Z_2, wo sich die zu $O'B'$ parallele Linie gleichen Druckes $O_2\,B_2\,B$ anschließt. Keil ABO_2 ist ähnlich zu $A'B'O'$. In gleicher Weise erhält man die Drucklinie $C\,C_3$ zu p_3 und den zu $B'C'O'$ ähnlichen Keil $B\,C\,O_3$ usw. Diese Expansionskeile brauchen im Gegensatz zu O' keine gemeinsame Spitze zu besitzen.

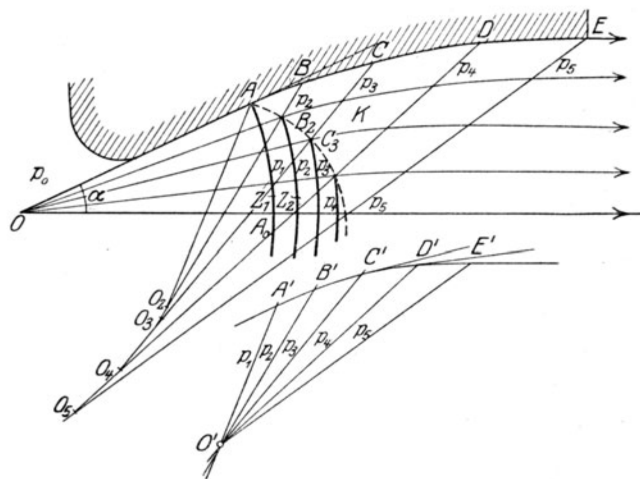


Abb. 6. Prandtls Düse mit parallelem Austritt.

3. Neuere englische Versuche über Leitschaufelverluste.

Die Institution of Mechanical Engineers ließ i. J. 1922—1923 groß angelegte Versuche mit Leitvorrichtungen für Gleich- und Überdruckturbinen ausführen. Es gelang, die Schwierigkeiten, die der Messung des auf eine vor die Mündung gehaltene Platte ausgeübten **Strahldruckes** anhafteten, zu beseitigen, indem man **die Platte mit einer Schichte von feinen Drahtsieben bedeckte,** wodurch der Strahl ohne Zersplitterung seitlich abströmte und indem man durch einen aus Blechplatten bestehenden Käfig **verhinderte**, daß zur Platte **senkrechte Geschwindigkeitskomponenten übrigblieben.** Die Abmessungen der verwendeten Düsen mit Parallelaustritt sind in nachfolgender Zahlentafel enthalten:

Leitvorrichtung	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
bestimmt für	Gleichdruck-T.				Überdruck-T.
Austrittswinkel	20°	20°	12°	12°	20°
Teilung . . . . . . mm	20,6	33,4	46,0	52,4	15,1
Stegdicke . . . . . . „	1,02	4,76	1,02	4,76	—
Lichte Kanalweite . . „	6,36	6,36	6,36	6,36	~ 5,26
Schaufellänge . . . . . „	50,8	50,8	50,8	50,8	50
Zahl der Kanäle	4	4	4	4	5
Schaufelbreite	50,8	50,8	50,8	50,8	25,4

Die Vorrichtungen *C* und *E* sind in den Abb. 7 und 8 veranschaulicht.

Das Hauptergebnis war die Ermittelung der **Geschwindigkeitsvorzahl** φ, als Verhältnis der tatsächlichen Geschwindigkeit zu der nach Callendars Tafeln berechneten theoretischen Geschwindigkeit. Die Ausdehnung erfolgte stets auf Atmosphärendruck, und zwar von so hoher Überhitzungstemperatur ausgehend, daß der **Dampf** um 10 bis 30° **überhitzt blieb,** wodurch alle Zweifel hinsichtlich der Unter-

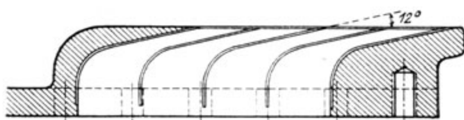


Abb. 7. Leitvorrichtung des Inst. of mech. Engineers.

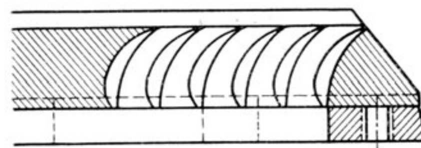


Abb. 8. Leitvorrichtung des Inst. of mech. Engineers.

kühlung beseitigt wurden. Die Zahlenwerte sind in Abhängigkeit von der theoretischen Geschwindigkeit in Abb. 9 und 9a dargestellt. Die **Gleichdrucklinien** *abcd* beziehen sich auf Düsen *A*, und zwar auf eine allmähliche Kürzung derselben, wie die Nebenabbildung andeutet. Bei Linie *a* war die Länge des parallel geführten Strahles das 3fache der Strahldicke, und nahm auf das 2-, — 1-, 0fache bei *d* ab. Abb. 9a bezieht sich auf die **Überdruckschaufeln.**

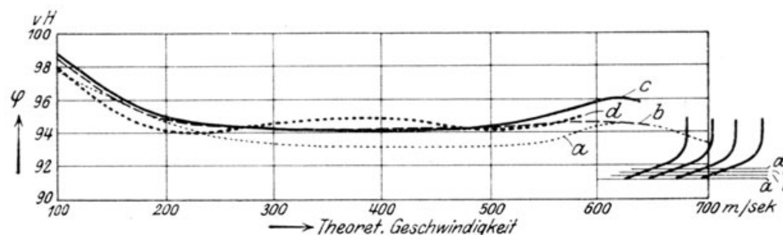


Abb. 9. Vorzahl φ für Gleichdruck-Leitschaufeln.

Das **Auffallende** dieser Ergebnisse ist **das Steigen von** φ bei **kleinen Geschwindigkeiten,** in Widerspruch sowohl mit der Theorie der Reibung wie auch mit den sorgfältigen Messungen von Bachmann und Ombeck (B. S. 92).

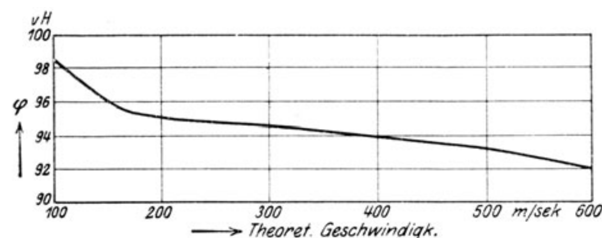


Abb. 9a. Vorzahl φ für Überdruck-Leitschaufeln.

Es wurde außerdem die **Strömungsrichtung des Dampfes** am Austritt mittels kleiner Fahnen aus dünnem Blech beobachtet. Wie Abb. 10 zeigt, ist bei 0,6 Druckverhältnis eine **Krümmung der Strahlachse** zu bemerken; unmittelbar an der Mündung stimmt die Strahlrichtung mit dem Düsenwinkel überein. Die Ablenkung gegen die Austrittsebene hin würde das Vorhandensein eines Überdruckes andeuten, dessen Entstehung noch unklar ist.



Abb. 10. Krümmung des austretenden Strahles.

4. Flugtheorie, Kaplan- und Dampfturbine.

Die eigentümliche Bauart der Kaplanturbine, die im wesentlichen aus einem in einem Wasserstrom arbeitenden Schraubenpropeller besteht, kann heute (nachträglich), wie bekannt, aus der Tragflügeltheorie abgeleitet werden. Der in Abb. 11 dargestellte aufgewickelte Schaufelschnitt zeigt das bekannte **außergewöhnlich große Verhältnis der Teilung t zur Radhöhe h**, so daß offenbar die Führung der Wasserfäden keine vollkommene sein kann und die in der Mitte des Stromes abfließenden Teilchen geringere Umfangskomponenten aufweisen, als die der Schaufel entlang fließenden. Der mittlere Abflußwinkel ist wohl größer als der Schaufelwinkel, allein durch die kleine Schaufelfläche wird der Reibungsverlust so herabgesetzt, daß die Turbine die bekannten vorzüglichen Wirkungsgrade aufweisen konnte. Die Übertragung dieser Erwägung auf die Dampfturbine ist nicht ohne weiteres statthaft, da bei der Kaplanturbine tunlichste Schnelläufigkeit, bei der Dampfturbine umgekehrt Herabsetzung der Drehzahl angestrebt wird. Theoretische Formeln für bei Dampfturbinen übliche Schaufelformen sind von König[1]) angegeben worden. Ist $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ und liegt der Eintritt senkrecht über dem Austritt (Gleichdruckschaufel), so erhält man mit der Hilfsgröße ν die aus dem Verhältnis h/t mittels Formel

$$\lg \nu = \pi \frac{h}{t}$$

bestimmt wird und mit $\nu' = 1/\nu$ den Winkel σ, den die Zuflußgeschwindigkeit mit der Normalen zur Radebene bildet, aus Formel

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{(\nu + \nu' - 2)}{\nu - \nu'} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$$

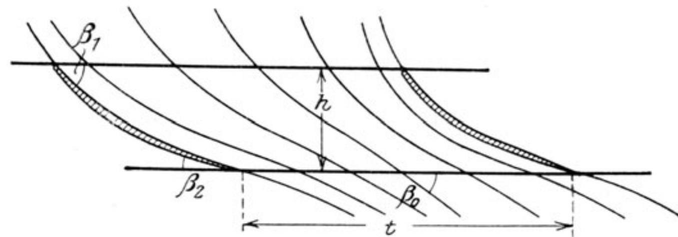


Abb. 11. Strömung in der Kaplan-Turbine.

oder angenähert $\sigma \sim \beta/2$. Es muß also die relative Zuflußgeschwindigkeit im Unendlichen mit einer Richtung, die einem Stoß auf den Schaufelrücken von $\beta/2$ entspricht, anrücken; um ebensoviel ist die Abflußgeschwindigkeit nach der anderen Seite im Unendlichen geneigt. Da jedoch in der Dampfturbine der Strahl nicht aus dem Unendlichen, sondern aus nächster Nähe aus dem Leitkanal ankommt, besitzt die Kenntnis jener starken Ablenkung nur theoretisches Interesse. Hingegen dürfte sich eine **Vergrößerung der Teilung allgemein empfehlen,** mit absichtlicher Verkleinerung des Schaufelwinkels β_2, um unter Herabsetzung der Reibungsverluste zu einer gewünschten **mittleren Ablenkung** zu gelangen. Das zulässige Maß kann selbstredend nur durch den Versuch ermittelt werden.

5. Dampfmengenmessung mittels scharfkantiger Mündungen.

Die scharfkantige Mündung oder der **„Stauflansch"** wird noch viel angewendet, da er an Ort und Stelle leicht herstellbar und vor allem durch Einschieben zwischen zwei Flansche an einem beliebigen Punkt der Leitung leicht einzubauen ist. Über die Strahleinschnürung liegen nach Bäckström[2]) die in Abb. 12 dargestellten Versuchsergebnisse vor. Darin bedeutet die Abszisse das Verhältnis der lichten Weite des Stauflansches zum Rohrdurchmesser vor dem Flansch; die Ordinate **die Einschnürung μ**, d. h. das Verhältnis des engsten Strahlquerschnittes zum Querschnitt f der Staubohrung. Messen wir die Drücke $p_1\, p_2$ unmittelbar vor und nach dem Stauflansch (durch Bohrungen in den Rohrflanschen), so kann der erstere angenähert auf die (ungestörte) Stelle des Rohrquerschnittes F_1, wo die Geschwindigkeit w_1 herrscht, der letztere auf den eingeschnürten Querschnitt μf mit der Geschwindigkeit w_2 bezogen werden. Die Zustandsänderung kann auf die kurze Meßstrecke als adiabatisch verlustfrei gelten, und man hat angenähert

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = -\int_1^2 v\, dp \cong \frac{v_1 + v_2}{2}(p_1 - p_2) \quad . (1)$$

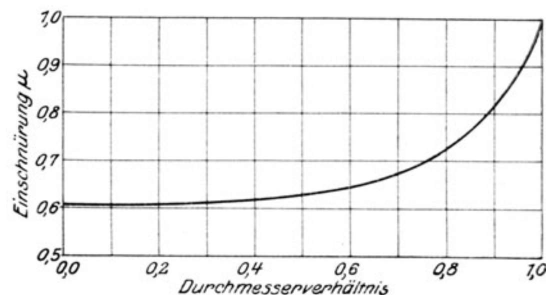


Abb. 12. Einschnürung bei scharfkantiger Mündung.

Die Durchflußgleichung liefert

$$\frac{w_1}{v_1} F_1 = \frac{w_2}{v_2} \mu f \quad \text{oder angenähert} \quad w_1 \cong \mu \frac{f}{F_1} w_2 \quad (2)$$

Dies oben eingesetzt, erlaubt w_2 und die **sekundliche Durchflußmenge** als $G = \mu f\, w_2/v_2$ zu berechnen. Setzt man den Dampf als überhitzt oder mindestens trocken gesättigt voraus, so darf **bei kleinen Druck-**

---

[1]) Potentialströmung durch Gitter, Z. f. angewandte Math. u. Mech. 1922, Bd. 2, S. 423.
[2]) Grundläggende Principer för Ångmattning medelst Strypflänsmetoden. Stockholm 1920.

unterschieden eine mittlere Temperatur T eingeführt und $v_1 = RT/p_1$; $v_2 = RT/p_2$ mit $R \simeq 47$ gesetzt werden, so daß sich die nur angenäherte, aber bequeme Formel

$$G = K f \varphi(p) \text{ mit } K = \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2\left(\frac{f}{F_1}\right)^2}} \text{ und } \varphi(p) = \sqrt{(p_1^2 - p_2^2)\frac{p_2}{p_1}\frac{g}{RT}} \quad \ldots\ldots (3)$$

ergibt.

6. Zur Berechnung der Überdruckturbinen.

Neuere raschlaufende Ausführungen mit $n = 3000$/min, insbesondere auch Schiffsturbinen mit Zahnradantrieb weisen höhere Werte des Verhältnisses u/c_1 auf. So kann man etwa wählen

bis 1000 PS	$\left(\frac{u}{c_1}\right)$	= 0,42 bis 0,48
„ 2000 „		= 0,55
„ 3000 „		= 0,60
über 6000 „		= 0,65 bis 0,7.

Demgemäß beträgt die Kennzahl X bei größeren Leistungen 2000 und darüber hinaus.

7. Untersuchung der kritischen Schwingungserscheinungen mit Hilfe des Geigerschen Vibrographen.

Der aus dem bekannten Torsiographen von Geiger entwickelte Vibrograph besteht aus einer um eine Achse federnd schwingenden Masse, deren Auslenkungen gegen den mit dem zu untersuchenden Körper fest verbundenen Rahmen durch ein Hebelwerk aufgezeichnet werden.

Bemerkenswerten Mitteilungen Geigers über die Behebung von Übelständen an einer Turbodynamo[1]) von 10000 KW Leistung bei 3000 Uml/min entnehmen wir folgendes:

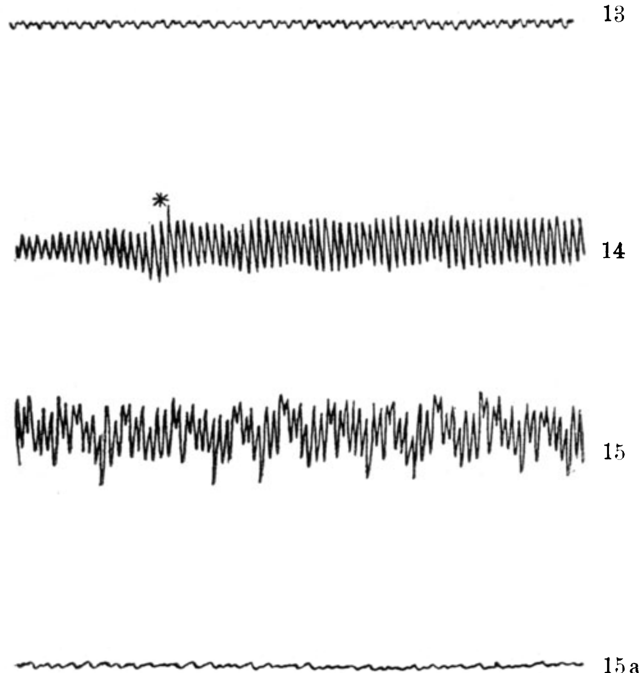


Abb. 13—15a. Fundamentschwingungen nach Geiger.

Die **Turbine war auf Eisenbetonbalken gelagert,** die ihrerseits durch **vertikale Pfeiler gestützt** wurden. Die **Erschütterungen des erregerseitigen Dynamolagers,** bei 2100 Uml/min den in Abb. 13 dargestellten Verlauf mit eigentümlicher Doppelfrequenz aufweisend, wachsen nach Abb. 14 und 15 bei 3040 bis 3200 Uml/min (in 10,7-facher Vergrößerung aufgenommen) auf besorgniserregende Größe. Dabei zeigte das betreffende Lager nicht bloß lotrechte, sondern auch **wagrechte axial gerichtete Erschütterungen auf.** Der Grund war das Mitfedern des Betonbalkens, der infolge exzentrischer Lage des Lagers auch in Torsionsschwingung geraten und so den Oberteil des Lagers wagrecht hin und her schwenken konnte. Die Eigentümlichkeit, daß der **Höchstwert** der Erschütterung **unregelmäßig zwischen 2800 bis 3200 Uml/min auftrat,** wurde durch die Erwärmung der Tragpfeiler vermöge der Abluft der Dynamo erklärt, wodurch sich die Pfeiler streckten und einen größeren Teil der Läuferlast auffingen als im kalten Zustand. Die Vergrößerung der mitschwingenden Masse mußte die Frequenz herabsetzen. Durch geeignete Verstärkung der Pfeiler und jenes Balkens wurden die Erschütterungen beseitigt, wie Abb. 15a (bei 3200 Uml/min) erkennen läßt.

[1]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1922, S. 437.

7a. Zusammenhang zwischen kritischer Drehzahl und Fundamentschwingung.

Es bedeutet in Abb. 16

O die Mittellage der auf und ab schwingenden gleichbelasteten und gleich stark gefederten Lager,
O' die augenblickliche Lage der Lager,
W „ „ „ des Wellendurchstoßpunktes mit dem Anker,
S „ „ „ „ Schwerpunktes des Ankers,
z' die Erhebung des Lagers,
ϱ die Wellendurchbiegung,
z die Höhe von W über O,
e die Exzentrizität,
$z_0 = z + e\cos\omega t$ die Höhe des Schwerpunktes,
$y_0 = y + e\sin\omega t$ der wagerechte Abstand des Schwerpunktes,
$\alpha' z'$ die elastische Gegenkraft der Fundamentbalken,
m' die auf O reduzierte Masse,
$\alpha\varrho$ die elastische Gegenkraft der Welle (in beiden Lagern zusammengenommen),
m die Ankermasse.

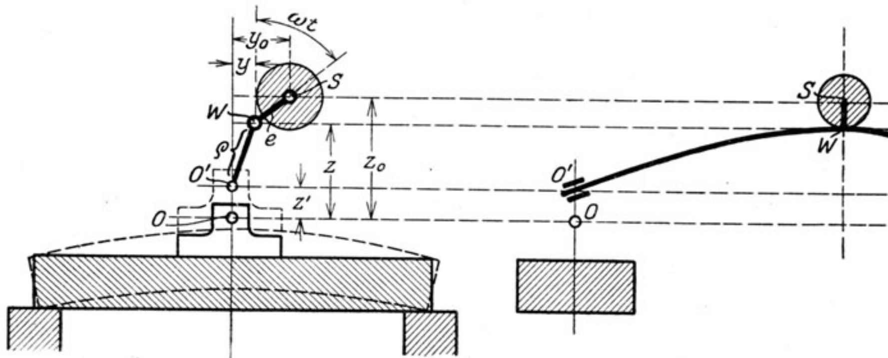


Abb. 16. Wellen- und Fundamentschwingung.

Die Winkelgeschwindigkeit ω darf man wegen des großen Trägheitsmomentes der umlaufenden Massen als unveränderlich ansehen. Nach Zerlegung der Kraft $\alpha\varrho$ in die Komponenten αy und $\alpha(z - z')$ lauten die Bewegungsgleichungen

$$m\ddot{y}_0 = -\alpha y \quad (1)$$

$$m\ddot{z}_0 = -\alpha(z - z') \quad (1\text{a})$$

$$m'\ddot{z}' = +\alpha(z - z') - \alpha' z' \quad (1\text{b})$$

oder mit Rücksicht auf die Abb. 1116

$$m\ddot{y} = -\alpha y + m e\omega^2 \sin\omega t \quad (2)$$

$$m\ddot{z} = -\alpha(z - z') + m e\omega^2 \cos\omega t \quad (2\text{a})$$

$$m' z' = +\alpha(z - z') - \alpha' z' \quad (2\text{b})$$

Die erste dieser Gleichungen stellt, sofern man das **Fundament** als in **wagrechter Richtung unverrückbar** ansieht, eine unabhängige erzwungene Schwingung dar, die zu gefährlichen Ausschlägen führt sobald ω den **normalen kritischen Wert** ω_k erreicht hat. Die beiden anderen Gleichungen stimmen mit den Gl. (3) in Abschn. 193b, wenn man x, x' mit z, z' und a mit $me\omega^2$ vertauscht, vollkommen überein. Auch diese Schwingung läßt sich mithin **durch das Bild des elastischen Doppelpendels anschaulich machen,** und es gelten alle in jenem Abschnitt gezogenen Folgerungen. Der Ansatz

$$z = A\cos\omega t; \qquad z' = A'\cos\omega t \quad (3)$$

führt, wie dort beschrieben wurde, zur Gleichung

$$\alpha^2 - \beta\beta' = 0 \quad (4)$$

als der **Bestimmungsgleichung der tatsächlichen kritischen Drehzahlen.** Bezeichnen wir mit ω_0 die Kreisfrequenz der Eigenschwingung für die Welle **bei festen Lagern,** und mit ω' für den frei schwingenden **Fundamentalbalken allein,** so ist bekanntlich

$$\omega_0^2 = \frac{\alpha}{m}; \qquad \omega'^2 = \frac{\alpha'}{m'} \quad (5)$$

Führt man dies und die Bezeichnungen

$$\lambda = \frac{m}{m'}; \qquad \varphi^2 = \frac{\omega'^2}{\omega_0^2} \quad (6)$$

in Gl. (4) ein, so entsteht

$$\omega_f^4 - [(1 + \lambda)\,\omega_0^2 + \omega'^2]\,\omega_f^2 + \omega_0^2\,\omega'^2 = 0 \quad (7)$$

aus der sich die **kritischen „Fundament"- und Wellengeschwindigkeiten**

$$\left.\begin{matrix}(\omega_{f_1}^2/\omega_0^2)\\(\omega_{f_2}^2/\omega_0^2)\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}\left[1+\lambda+\varphi^2\pm\sqrt{(1+\lambda+\varphi^2)^2-4\varphi^2}\right]\quad\quad(8)$$

ergeben. An Gl. (7) kann man abermals feststellen, daß „Resonanz", d. h. das Zusammentreffen von ω' mit der Betriebsgeschwindigkeit **keinen kritischen Zustand** hervorruft. Denkt man sich nämlich die Gleichheit $\omega'=\omega=\omega_f$ künstlich beständig hergestellt, so führt Gl. (7) auf den Wert $\omega_f=0$. Allein mit diesem Ergebnis darf man sich nicht zufrieden geben, denn es kommt technisch nicht auf das Grundsätzliche allein, sondern auf das Quantitative an. Man muß also unbedingt feststellen, **wie weit die Geschwindigkeiten** ω_{f_1}, ω_{f_2} **von** ω **entfernt sind,** wenn ω' zufällig **mit der Betriebsgeschwindigkeit** ω **zusammenfällt.**

Da zeigt sich nun die beachtenswerte Tatsache, daß gerade unter den **bei Dampfturbinenanlagen vorkommenden Verhältnissen** der Unterschied von ω_{f_1} und ω' ein verhältnismäßig so kleiner ist, daß es **kaum je ratsam wäre, bei Resonanz** ($\omega'=\omega$) zu fahren.

Beispiel. Für eine 10000-KW-Turbine mit 3000 Uml/min darf man als Gewicht des Ankers etwa 9000 kg, als Gewicht des Rahmens mit Magnetfeld $\sim$ 35000 kg annehmen. Der tragende Balken in Eisenbeton habe 1100 $\times$ 1100 mm Querschnitt, 4000 mm Stützweite mit freier Auflage. Um seine Schwingungszahl zu errechnen, darf man nach Abschn. 91, S. 374, Gl. (17) seine halbe Masse in der Mitte konzentriert und den Balken als gewichtslos ansehen. Mit $\gamma=2400$ kg/m² findet man rd. 11000 kg, die Hälfte $=5800$ kg wird mit dem halben Rahmengewicht $35000/2=17500$ zusammen vereinigt und führt mit $E=2\cdot10^5$ kg/cm² auf die Schwingungszahl

$$n_k'=\frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{48\,J\,E}{(M_0/2+M)\,L^3}}=\mathbf{2730}/\text{min}.$$

Nehmen wir an, die kritische Drehzahl des Ankers sei $n_0=\mathbf{2400}/\text{min}$, so wird

$$\varphi^2=(n'/n_0)^2=1{,}265.$$

Ferner ist das Verhältnis der halben Ankermasse m zur halben Rahmen- und Tragbalkenmasse

$$\lambda=4500:(17500+5800)=0{,}193.$$

Aus Gl. (8) ergeben sich als kritische Fundamentschwingungszahlen

$$n_{f_1}=2400\cdot1{,}31=\mathbf{3140};\quad n_{f_2}=2400\cdot0{,}85=\mathbf{2040}/\text{min}.$$

Das Verhältnis von $n_{f_1}:n_k'$ ist also nur 1,150. Wäre man mit n_k' in Resonanz, so würde die tatsächliche kritische Drehzahl um nur 15 v. H. höher liegen, was praktisch unzulässig wäre. Und mit $n_{f1}=3140$ **ist ein Betrieb bei 3000 Uml/min auch nicht zulässig,** es würde sich von vornherein eine **Verstärkung des Fundamentes empfehlen.**

Dämpfung der Wellen und Fundamentschwingung durch „Ausstrahlung" der Schwingungsenergie in das Erdreich. Prof. D. Thoma verweist (in „Maschinenbau" Nov. 1923) auf den intensiven Energietransport, den die Ausbreitung der Schwingung in den Boden, auf dem das Fundament aufgestellt ist, vermittelt. Man kann in der Tat rechnerisch nachweisen, daß die mit wachsender Entfernung selbstverständliche Abnahme der Schwingungsweite nicht groß genug ist, um den Energieinhalt der (theoretisch unendlich großen) Umgebung endlich zu machen. Daher wird auch bei vollkommener Elastizität des Bodens beständig Energie absorbiert, d. h. eine dämpfende Wirkung ausgeübt.

8. Unterschied zwischen Eigenschwingungs- und kritischer Drehzahl.

Infolge der Drehungsträgheit der Scheiben ist die Eigenschwingungszahl **kleiner** als die kritische Drehzahl. Nach dem Verfahren von Rayleigh sind in Gl. (8) S. 391 neben den Trägheitskräften $P_1, P_2, \ldots$ auch die Trägheitsmomente $M_1=\Theta_1\,\tau_1\,\omega_0^2$; $M_2=\Theta_2\,\tau_2\,\omega_0^2, \ldots$ zu berücksichtigen, deren Arbeit von der Mittellage aus gerechnet $=\Sigma M\tau'/2$ ist. Ferner kommt zur kinetischen Energie der Mittellage der Ausdruck $\Sigma\,\Theta\,\tau'^2\lambda_k^2/2$ hinzu, wenn λ_k die „kritische" d. h. die Eigenfrequenz bedeutet. Die Gleichsetzung von Φ_i und Φ_k liefert dann

$$\lambda_k^2=\frac{\Sigma\,m\,y\,y'+\Sigma\,\Theta\,\tau\,\tau'}{\Sigma\,m\,y'^2+\Sigma\,\Theta\,\tau'^2}\,\omega_0^2=\frac{1+\Sigma\,\Theta\,\tau\,\tau'/\Sigma\,m\,y\,y'}{1+\Sigma\,\Theta\,\tau'^2/\Sigma\,m\,y'^2}\cdot\frac{\Sigma\,m\,y\,y'}{\Sigma\,m\,y'^2}\,\omega_0^2\quad\quad(9)$$

Hätte man als Frequenz λ_k statt ω_0 gewählt, so wäre Biegungslinie e in Abb. 418 die (angenäherte) Schwingungslinie selbst gewesen, d. h. die Durchbiegungen unter der Wirkung der Trägheitskräfte $m_1\,y_1\,\lambda_k^2$: $m_2\,y_2\,\lambda_k^2; \ldots$ wären eben $y_1; y_2; \ldots$ selbst gewesen; oder es gelten die Verhältnisse

$$\frac{y_1'}{y_1}=\frac{\omega_0^2}{\lambda_k^2};\quad\frac{y_2'}{y_2}=\frac{\omega_0^2}{\lambda_k^2};\quad\ldots;\quad\frac{\tau_1'}{\tau_1}=\frac{\omega_0^2}{\lambda_k^2};\quad\frac{\tau_2'}{\tau_2}=\frac{\omega_0^2}{\lambda_k^2};\quad\ldots\quad(10)$$

Man kann daher im Nenner der Gl. (9) $\Sigma\,\Theta\,\tau'^2/\Sigma\,m\,y'^2$ durch $\Sigma\,\Theta\,\tau'\,\tau/\Sigma\,m\,y'\,y'$ ersetzen, wodurch im ersten Bruch Zähler und Nenner gleich werden, und λ_k^2 sich zu

$$\lambda_k^2 = \frac{\Sigma\,m\,y\,y'}{\Sigma\,m\,y'^2}\,\omega_0^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

vereinfacht. An diesem mit Gl. (11) S. 392 scheinbar identischen Ausdruck darf nicht übersehen werden, daß hier die $y_1', y_2', \ldots$ diejenigen Durchbiegungen bedeuten, die unter der **vereinten Wirkung von** $P_1, P_2 \ldots$ **und** $M_1, M_2, \ldots$ aus $y_1, y_2, \ldots$ entstanden sind. Indem man in Gl. (11) im Zähler und Nenner je ein y' wieder mit Hilfe von Gl. (10) durch y ersetzt, entsteht übrigens $\lambda_k^2 = [\Sigma\,m\,y^2\,\omega_0^2] : [\Sigma\,m\,y\,y']$, womit nebenbei die Identität der Ausdrücke in Gl. (17) S. 399 unmittelbar bewiesen ist. Vergleichen wir hiermit die kritische Winkelschnelle **bei gleichsinniger Präzession,** so wirken die Kreiselmomente in entgegengesetztem Sinn, wie in Abb. 419 S. 393, mithin ist ω_k gemäß Gl. (16) S. 394 mit Benutzung der negativen Vorzeichen zu rechnen. Die gleiche Umformung, wie oben, führt mit den hier geltenden Beziehungen $y_1'/y_1 = y_2'/y_2 = \ldots = \omega_0^2/\omega_k^2$; $\tau_1'/\tau_1 = \tau_2'/\tau_2 = \ldots = \omega_0^2/\omega_k^2$ auf die Gleichung $\omega_k^2 = \Sigma m y^2 \omega_0^2 : \Sigma m y y'$, die der Form, aber nicht der Bedeutung nach mit λ_k^2 übereinstimmt. Hier ist nämlich y' die Vorbiegung, die die Kräfte $m_1\,y_1\,\omega_0^2 \ldots$ und die gegenüber der Schwingung **entgegengesetzt gerichteten Fliehkraftmomente** $\mathfrak{M}_{k1}', \mathfrak{M}_{k2}' \ldots$ erzeugt haben; mithin sind die y' in ω_k^2 **kleiner** als in λ_k^2, demgemäß **kann** ω_k **von** λ_k **erheblich abweichen, d. h. höher liegen.** Dieser Umstand ist bei der Nachprüfung kritischer Drehzahlen durch **Schwingungserregung mittels eines Stoßes** wohl zu beachten.

Zulässige Lagerpressung. Die auf S. 407 aufgestellten Grenzgleichungen würden bei genügender Mindestölschicht sehr kleine Lauflängen, also hohe Flächenpressungen zulassen. Praktisch findet man nach wie vor p auf etwa 6 kg/cm² beschränkt, mit seltener Erhöhung auf etwa 10 kg/cm².

Die reichlichen radialen Spiele, die gemäß den Versuchsergebnissen S. 416 günstig wirkten, werden bei über 3000/min gehenden Drehzahlen herabgesetzt, insbesondere wird der Deckel mit mäßigem Spiel angepaßt, im Betrage von 2—4/1000. Den Grund für die sich sonst bei bestimmten Drehzahlen einstellende Unruhe dürfte ein bisher nicht untersuchter Schwingungszustand infolge der **Nachgiebigkeit des Ölpolsters** bilden. Den zwei Freiheitsgraden (lot- und wagerechte Auslenkung) entsprechend kann es **zwei „kritische Frequenzen"** der Erregung geben, deren ziffernmäßige Ermittelung ich mir vorbehalte.

Schaufelschwingung in Umfangsrichtung.

Die Fliehkraft eines in Umfangsrichtung um y ausgelenkten Massenteilchens schließt mit der unverbogenen Schaufelachse X den Winkel $\vartheta = y/R$ ein, kann also in die Komponenten $\delta H = m_1\,dx\,R\,\omega^2 \cos\vartheta$ und $\delta V = m_1\,dx\,R\,\omega^2 \sin\vartheta = m_1\,dx\,y\;\;\omega^2$ zerlegt werden. Bei der Rückkehr in die Mittellage leistet δH mit $\cos\vartheta = 1$ die durch Gl. (3) S. 947 ausgedrückte Arbeit Φ_z. Von δV her tritt die Arbeit

$$\Phi_z' = -\int \delta V \cdot y/2 = -\int m_1\,dx\,y^2\,\omega^2/2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

hinzu. Innere und kinetische Energie werden nach wie vor durch Gl (1) u. (5) S. 911 ausgedrückt. Wählt man als elastische Linie die Biegungsform eines eingespannten, im Endpunkt einer Querkraft ausgesetzten Balkens, so liefert die nach Abschn. 195 durchgeführte Rechnung die Formel

$$\lambda^2 = 12{,}7\,\frac{IE}{ML^3} + \left(1{,}59\,\frac{R}{L} - 1\right)\omega^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

Beim graphischen Verfahren verhalten sich die Komponenten V zu den Massenkräften $P = m\,y\,\lambda^2$ wie $\omega^2 : \lambda^2$, somit ist durch die Ermittelung von y_{be} auch die zusätzliche Biegung $y_{ve} = \beta\,y_o\,\omega^2$ gegeben und die Bedingung $\beta\,y_o\,\lambda^2 + \beta\,y_o\,\omega^2 - \gamma\,y_o\,\omega^2 = y_o$ führt statt zu Gl. (12) S. 149 auf

$$\lambda^2 = [1 + (\gamma - \beta)\,\omega^2] : \beta \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

Sinngemäß ist bei reiner Umfangsschwingung λ^2 in Gl. (17) S. 949 durch $\lambda^2 + \omega^2$ zu ersetzen.

9. Zur Theorie der Scheibenschwingung.

An dem in Abb. 17 dargestellten Scheibenteilchen mit der Masse

$$dm = r\,dr\,d\varphi\,h\,\mu$$

greifen die dort bezeichneten Kräfte an, während die Momente weggelassen wurden. Die Kräfte werden einerseits durch die Schwingung, anderseits durch die Fliehkraft bzw. durch ungleiche Erwärmung der Scheibe hervorgebracht. Ist w die augenblickliche Erhebung über der Mittellage, so ist $dm\,\ddot{w}$ = Summe der im Sinn von w wirkenden Kräfte. Diese sind von der Biegung her die Schubkräfte $V_r'\,r'\,d\varphi - V_r\,r\,d\varphi$; $V_t'\,dr - V_t\,dr$ und von den Dehnungsspannungen her: $(r'\,d\varphi\,h^*\,\sigma_r')\partial w'/\partial r - (r\,d\varphi\,h\,\sigma_r)\partial w/\partial r$ und $(\sigma_t'\,dr\,h)\,\partial w'/r'\,d\varphi - (\sigma_t\,dr\,h)\,\partial w/r\,d\varphi$. Indem man diese Differenzen durch Differentiale ausdrückt, entsteht

$$dm\,\ddot{w} = \frac{\partial\,V_r\,r\,d\varphi}{\partial r}\,dr + \frac{\partial\,V_t\,dr}{\partial\varphi}\,\partial\varphi + \frac{\partial}{\partial r}\left[(r\,d\varphi\,h\,\sigma_r)\frac{\partial w}{\partial r}\right]dr + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left[(\sigma_t\,dr\,h)\frac{\partial w}{r\,\partial\varphi}\right]d\varphi\;. \quad (1)$$

Wir begnügen uns damit, aus dieser Gleichung die zum Verfahren Abschn. 187 erforderliche Fliehkraftarbeit und die Knickerscheinungen herzuleiten. Zu diesem Zwecke bilden wir die **Gleichung der kinetischen Energie,** indem wir die während einer Verschiebung $dw = \dot{w} t$ von den treibenden Kräften in Gl. (1) geleistete Arbeit der Zunahme der Wucht gleich setzen. Wir vermehren also beide Seiten von Gl. (1) mit dw und integrieren über die Verschiebung von der äußersten Lage bis zur Mittellage und über die Masse der ganzen Scheibe. Auf der linken Seite entsteht

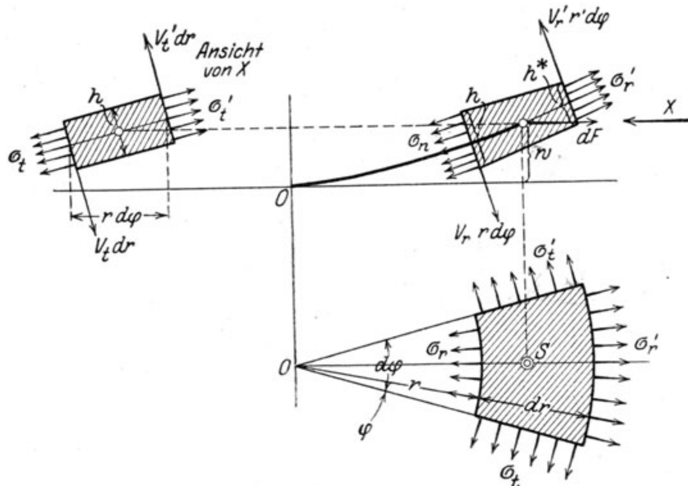


Abb. 17. Kräfte an einem Scheibenteilchen (Momente weggelassen).

$$\int\limits_{w_{max}}^{0} \int\limits_{0}^{M} dm\, \ddot{w}\, \dot{w}\, dt = \iint \frac{dm}{2}\, d\,(\dot{w}^2) \quad (2)$$

Auf der rechten Seite liefern die beiden ersten Glieder, wenn man $V_r\, V_t$ gemäß der Theorie der Plattenbiegung durch die Momente und diese durch die Ableitungen von w ausdrückt, **die potentielle Energie Φ_{t_0} in Übereinstimmung mit Gl. (7), Abschn. 187** auf die ganze Scheibe ausgedehnt. Auf die zum Nachweis hiervon erforderlichen umständlichen Rechnungen können wir jedoch an diesem Orte nicht eingehen.

In den beiden letzten Gliedern kann man durch Einführung von

$$w = z \cos \lambda t \quad \text{oder} \quad dw = -z \sin (\lambda t)\, d(\lambda t) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

das Zeitintegral

$$\int\limits_{\lambda t = 0}^{\lambda t = \pi/2} - \cos(\lambda t) \sin(\lambda t) d(\lambda t) = -\tfrac{1}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

abtrennen und den übrigbleibenden Rest durch partielle Integration wie folgt umformen:

$$\Phi_{\sigma_0} = -\frac{1}{2}\left\{\int\limits_{r_0}^{R}\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r}\left(\sigma_r h r \frac{\partial z}{\partial r}\right) z\, dr\, d\varphi + \int\limits_{r_0}^{R}\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\sigma_t h \frac{\partial z}{r\, \partial \varphi}\right) z\, dr\, d\varphi\right\} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left\{\int\limits_{0}^{2\pi}\left[\sigma_r h r \frac{\partial z}{\partial r} z\right]_{r_0}^{R} d\varphi - \int\limits_{r_0}^{R}\int\limits_{0}^{2\pi}\left(\sigma_r h\, r \frac{\partial z}{\partial r}\right)\frac{\partial z}{\partial r}\, dr\, d\varphi + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{r_0}^{R}\left[\sigma_t h \frac{\partial z}{r \partial \varphi} z\right]_{0}^{2\pi} dr - \int\limits_{r_0}^{R}\int\limits_{0}^{2\pi}\left(\sigma_t h \frac{\partial z}{r\, \partial \varphi}\right)\frac{dz}{\partial \varphi}\, dr\, d\varphi\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

In die Integrationen sind die **Schaufeln einzubegreifen,** indem man sie zu einer Scheibe von entsprechender Dicke zusammenfaßt, die mit ebensoviel radialen Schlitzen versehen ist, als es Schaufeln hat, so daß **nur radiale Spannungen vorkommen und $\sigma_t = 0$ ist.** Wir dürfen für Turbinenscheiben voraussetzen, daß innen an der Nabe, ebenso an der äußersten Schaufelspitze $\sigma_r = 0$ ist, also verschwindet der erste eckige Klammerausdruck. Auch der zweite verschwindet, da man nach Zurücklegung des vollen Umkreises $\varphi = 2\pi$ zu denselben Werten zurückkehrt, wie bei $\varphi = 0$. Man erhält mithin:

$$\Phi_{\sigma_0} = \frac{1}{2}\int\limits_{r_0}^{R}\int\limits_{0}^{2\pi}\left[\sigma_r\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \sigma_t\left(\frac{\partial z}{r\, \partial \varphi}\right)^2\right] r\, dr\, d\varphi\, h \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Für eine Schwingung mit k Knotendurchmessern ist (wenn $x = r/R$) mit

$$z = f(r) \sin k\varphi = y_0\, \psi(x) \sin k\varphi$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{R \partial x} = \frac{y_0}{R}\, \psi_1(x) \sin k\,\varphi; \qquad \frac{\partial z}{r\, \partial \varphi} = \frac{\partial z}{R\, x\, \partial\, \varphi} = \frac{k y_0}{R}\, \psi(x) \cos k\varphi \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

Man kann dann in (6) nach φ ausintegrieren:

$$\Phi_{\sigma_0} = \frac{\pi}{2}\, y_0^2 \int\limits_{x_0}^{1}\left[\sigma_r\, \psi_1^2 + \sigma_t\, k^2 \frac{\psi^2}{x^2}\right] x\, dx\, h \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

Man trennt nun die Spannungen in die von der Fliehkraft und von der ungleichen (aber zentrisch symmetrischen) Erwärmung stammenden Anteile

$$\sigma_r = \sigma_{r\omega} + \sigma_{r\vartheta}; \qquad \sigma_t = \sigma_{t\omega} + \sigma_{t\vartheta} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (9)$$

Die ersteren sind der Masse und ω^2 verhältnisgleich. Wir führen die in einem frei umlaufenden Ring vom Halbmesser R auftretende Spannung

$$\sigma_u = \mu\,\omega^2 R^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (10)$$

als Vergleichsmaßstab für die σ_ω ein, so daß man

$$\sigma_{r\omega} = s_{r\omega}\cdot\sigma_u; \qquad \sigma_{t\omega} = s_{t\omega}\cdot\sigma_u \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (11)$$

schreiben kann.

Der entsprechende erste Teil von Φ_σ nimmt dann die Form

$$\Phi_{z0} = \mu\,\omega^2 R^2 y_0^2 h_0' \int\limits_{x_0}^{1} \Psi_{z0}(x)\,dx \quad \ldots \ldots \ldots (12)$$

an mit

$$\Psi_{z0}(x) = \frac{\pi}{2}\left[s_{r\omega}\,\psi_1^2 + s_{t\omega}\left(\frac{k\,\psi}{x}\right)^2\right]\frac{h'}{h_0'}\,x \quad \ldots \ldots \ldots (13)$$

Die im zweiten Anteil von Φ_σ enthaltenen Wärmespannungen kann man dem **Überschuß der Temperatur am Kranz über die Temperatur der Nabe** verhältnisgleich, d. h.

$$\sigma_{r\vartheta} = t_0\, s_{r\vartheta}; \qquad \sigma_{t\vartheta} = t_0\, s_{t\vartheta} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (14)$$

setzen und erhält

$$\Phi_{\vartheta 0} = -\,t_0\, y_0^2\, T_0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (15)$$

mit

$$T_0 = -\frac{\pi}{2}\int\limits_{x_0}^{1}\left[s_{r\vartheta}\,\psi_1^2 + s_{t\vartheta}\left(\frac{k\,\psi}{x}\right)^2\right] x\,h\,dx \quad \ldots \ldots \ldots (15a)$$

Das Ergebnis der Integration von Gl. (1) ist im ganzen:

$$\Phi_{k0} = \Phi_{i0} + \Phi_{z0} + \Phi_{\vartheta 0} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (16)$$

worin

Φ_{k0} die kinetische Energie,

Φ_{i0} „ potentielle „

Φ_{z0} „ Fliehkraftarbeit,

$\Phi_{\vartheta 0}$ „ die Formänderungsarbeit der Wärmespannungen

auf die ganze Scheibe ausgedehnt bedeuten. Setzt man

$$\Phi_{k0} = \lambda^2 K_0 y_0^2; \quad \Phi_{i0} = B_0 y_0^2; \quad \Phi_{z0} = C_0\,\omega^2 y_0^2; \quad \Phi_{\vartheta 0} = -\,t_0 T_0 y_0^2, \quad \ldots (17)$$

so berechnet sich die Kreisfrequenz der Eigenschwingungszahl

$$\lambda^2 = (2\pi N_{sek})^2 = \frac{B_0 + C_0\,\omega^2 - t_0\,T_0}{K_0} \quad \ldots \ldots \ldots (18)$$

Ist $t_0 = 0$, so stimmt λ^2 mit der in Abschn. 187 gegebenen Formel überein. Durch die Hinzunahme der Wärmespannungen kommt in Gl. (18) der Einfluß ungleicher Erwärmung auf die Schwingungszahl zum Ausdruck. Bei positivem t_0, d. h. **heißem Kranz und kalter Nabe**, wobei T_0 eine positive Größe ist, wird also **die Schwingungszahl, wenn sich Knotendurchmesser ausbilden können, herabgesetzt.**

Bei einer Schwingung **ohne Knotendurchmesser** wird (auf die ganze Scheibe bezogen) einfach $k = 0$, also z. B.

$$\Psi_{z0} = \frac{\pi}{2}\, s_{r\omega}\,\psi_1^2\left(\frac{h'}{h_0'}\right)x \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (19)$$

Dann ist jedoch T_0 negativ; eine **Verlangsamung** der Schwingung findet daher statt, wenn auch t_0 negativ, d. h. **die Nabe heiß, der Kranz kalt ist.**

9a. Einknicken des Scheibenrandes oder Einbeulung der Scheibe.

Erhöht man den Temperaturunterschied t_0 zwischen Kranz und Nabe, so wird schließlich bei einem **„kritischem Werte“** t_{krit} die Schwingungszahl unendlich klein, die Schwingungsdauer unendlich groß, d. h. die Scheibe verharrt beliebig lang bei jeder Auslenkung, die mit einer bestimmten Biegungsform verträglich ist. Dies bedeutet Ausknicken des Scheibenrandes oder Ausbeulen der Scheibenmitte, je nachdem k endlich oder $=0$ ist. Der kritische Temperaturunterschied folgt aus der Nullsetzung von λ in Gl. (18) zu

$$t_{krit} = \frac{B_0 + C_0\,\omega^2}{T_0} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (20)$$

Arbeiten wir nach dem Verfahren von Abschn. 187, so entspricht jeder Annahme über die Gestalt der Biegungslinie ein Wert von t_{krit}. Man kann auf Grund der in Abschn. 187e bewiesenen Lehrsatzes dartun, daß der **kleinste Wert von t_{krit} die wahre Knicktemperatur ist, die der vorgeschriebenen Temperaturverteilung entspricht.**

Ein Ausknicken des Randes im Betrieb ist wegen der hohen Fliehkraftspannungen, die die Scheibe zu strecken bestrebt sind, unwahrscheinlich. Die kritische Temperatur zu berechnen ist dennoch angezeigt, weil man die Formel für λ wie folgt vereinfachen kann. Es bedeute in

$$\lambda_0^2 = \frac{B_0 + C_0\,\omega^2}{K_0} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (21)$$

λ_0 die Kreisfrequenz der gleichmäßig erwärmten Scheibe. Wir schreiben Gl. (18) mit Beachtung von (20) und (21)

$$\lambda^2 = \lambda_0^2\left[1 - \frac{T t_0}{\lambda_0^2 K_0}\right] = \lambda_0^2\left[1 - \frac{T t_0}{B_0 + C_0\,\omega^2}\right] = \lambda_0^2\left[1 - \frac{t_0}{t_{krit}}\right],$$

also ist mit $\lambda_0 = 2\,\pi\,N_{0\,sek}$

$$N_{sek} = N_{0\,sek}\sqrt{\frac{t_{krit} - t_0}{t_{krit}}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (22)$$

9b. Scheibenberechnung nach Grammel.

Mit den Bezeichnungen

$$\alpha = \frac{3+\nu}{8}\,\mu\,\omega^2; \qquad \beta = \frac{1+3\nu}{8}\,\mu\,\omega^2$$

kann man für eine Teilscheibe von unveränderlicher Dicke, gemäß Gl. 22 S. 319 die Spannungen als

$$\sigma_r = A - B/x^2 - \alpha\,x^2; \qquad \sigma_t = A + B/x^2 - \beta\,x^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

schreiben. Grammel führt die Veränderlichen

$$s = \sigma_r + \alpha\,x^2; \qquad t = \sigma_t + \beta\,x^2; \qquad v = 1/x^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

ein, wodurch

$$s = A - Bv; \qquad t = A + Bv \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

entsteht. Ist also wie beim Verfahren von Donath S. 338 die Spannung $\sigma_r'\,\sigma_t'$ für den Anfang einer Teilscheibe gegeben (bzw. für das erste Element angenommen), so sind nach Gl. (2) auch s, t, v bekannt. Am Ende der Teilscheibe ist v' gegeben; die Werte von s', t' findet man gemäß Gl. (3) indem man in einem Koordinatensystem mit v als Abszisse s und t aufträgt, auf der Ordinatenachse den Punkt $(s+t)/2 = A$ anmerkt und von diesem aus die Endpunkte von s und t projiziert, wodurch auf der zu v' gehörenden Ordinate die Werte $s'\,t'$ ausgeschnitten werden. Der Übergang zum Anfangszustand der nächsten Teilscheibe erfolgt wie bei Donath mittels Gl. (19) u. (20) S. 338, indem $\Delta\sigma_r = \Delta s$; $\Delta\sigma_t = \Delta t$, d. h. $s = s' + \Delta s$; $t = t' + \Delta t$ sind. Das Verfahren von Grammel bedarf keinerlei vorgezeichneter Kurvenscharen, kann mit dem Rechnungsgang von Mises verbunden werden, bildet also **einen bedeutenden Fortschritt** in der Theorie der Scheibenberechnung.

10. Gegendruckturbinen.

Die Erste Brünner Maschinenfabriks-Gesellschaft, Brünn, erzielte im Bau von Gegendruckturbinen einen namhaften Fortschritt durch Vermehrung der Stufenzahl und demgemäß Teilung der Turbine in zwei Gehäuse bei gleichzeitiger Anwendung hoher Überhitzung. An einer 2500 kW-Einheit der Zuckerraffinerie Nestomitz konnte Verfasser folgende Ergebnisse feststellen:

Versuch Nr.		I	IIa	IIb
Druck vor der Hauptabschließung	at abs.	14,17	14,37	13,37
Temperatur vor der Hauptabschließung	°C	(394)	(394)	(300)
Druck nach Regulierventil	at abs.	13,49	8,95	9,13
Temperatur nach Regulierventil	°C	393	390	294
Druck im Auspuff	at abs.	1,647	1,624	1,626
Temperatur im Auspuff	°C	172,0	206,8	139,5
Elektrische Leistung an der Kupplung	kW	2455	1050	999
Dampfverbrauch für die kW/st-Kupplung	kg/kW/st	8,635	10,97	12,86
Thermodyn. Wirkungsgrad bezogen a. Zust. vor. Hauptabsch. und Kupplung	v.H.	81,2	63,3	65,5
Thermodyn. Wirkungsgrad bezogen a. Zust. nach Regulierventil und Kupplung unberichtigt	v.H.	82,8	76,5	77,0
Desgl. berichtigt mit Rücksicht auf Stopfbüchsen-Strahlungsverlust und Wärmeaustausch mit den Eisenmassen der Turbine	v.H.	82,6	77,1	76,4

Durch diese Ergebnisse ist der bis anhin zwischen der Gegendruck-Kolbenmaschine und der Turbine vorhanden gewesene große Unterschied im Wirkungsgrad überbrückt und es eröffnet sich die Möglichkeit, die großen Mengen von Heiz-, Koch- u. a. Dampf der chemischen Industrie restlos zur Arbeitsleistung heranzuziehen, indem man den Überschuß über den Eigenbedarf, wie in Nestomitz bereits verwirklicht, an Überlandkraftwerke absetzt.

11. Der Dampfspeicher von Ruths.

In Betrieben mit stark wechselnder Dampfentnahme oder Betriebsdauer sinkt der mittlere Kesselwirkungsgrad weit unter den Höchstwert, der bei besten Verhältnissen und (nur nach Tagen zu erreichendem) vollem Beharrungszustand festgestellt werden kann.

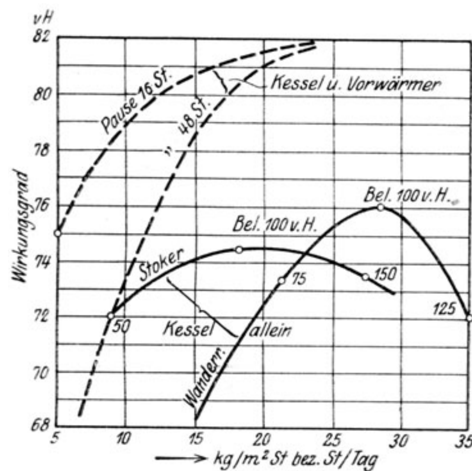


Abb. 18. Kesselwirkungsgrade bei wechselnder Inanspruchnahme und Heizdauer.

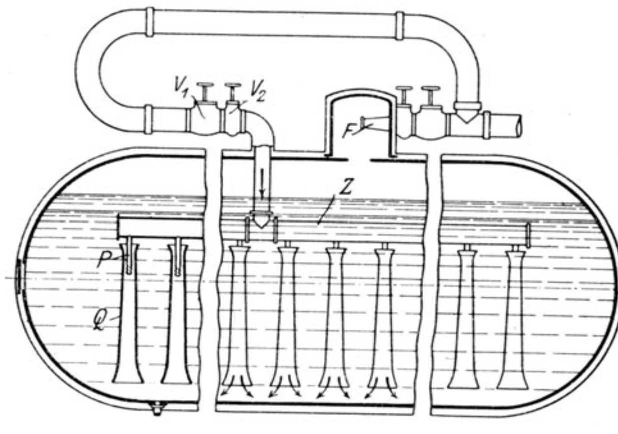


Abb. 19. Längenschnitt eines Speichers.

Abb. 18 stellt nach Guillaume[1]) in den voll gezogenen Linien den Wirkungsgrad des **Kessels allein** bei Wanderrost bzw. Unterschubfeuerung als Abhängige der Dampfentwicklung in kg/qm^{2}st dar. Die normale Inanspruchnahme der Kesselheizfläche ist bei dem mit 100 v. H. angeschriebenen Punkt gelegen. Die gestrichelten Linien zeigen den Wirkungsgrad des **Kessels einschließlich Vorwärmer** in Abhängigkeit von der täglichen Betriebsstundenzahl (als st/Tag von 5 bis 24 bezeichnet) und zwar für die erste Betriebszeit nach 16 bzw. 48 Stunden Betriebsunterbrechung. Der Grenzwert, dem sich der Wirkungsgrad nähert, ist 82 v. H.

Zur Abhilfe schlägt **Ruths** die Einschaltung eines **Dampfspeichers** an geeigneter Stelle der Anlage vor, der es ermöglicht, die Kessel dauernd mit der unveränderlichen mittleren Belastung zu betreiben, wobei Überschüsse der Dampferzeugung durch Kondensierung (unter Druckerhöhung) im Speicher aufgestapelt und bei eintretendem Mehrbedarf durch Verdampfung (bei sinkendem Druck) dem Betriebe wieder zugeführt werden.

Die Speicher werden als **Zylinder mit Kugelböden mit Durchmessern bis zu 5 m und Längen bis zu 80 m gebaut.** Nach Abb. 19 gelangt der Dampf durch ein Rückschlagventil V_1 zum Verteiler-

[1]) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1915, S. 264.

rohr Z mit Düsen P, die vermöge der Diffusoren Q den Dampf geräuschlos kondensieren und den Behälterinhalt intensiv durchmischen. Die **Entnahme findet durch eine Düse** F statt, die so bemessen ist, daß auch bei stärkster Druckabnahme in der Außenleitung keine größere Dampfmenge entweichen kann, als **ohne Überkochen** entwickelbar ist. Bei etwa 100 mm Dicke der Schutzumhüllung rechnet man mit einer **Wärmeabgabe $\alpha = 1$ kcal/qm °C st**, so daß die **Abkühlungsverluste vernachlässigbar** sind. Die Speicher werden in der Tat meist im Freien aufgestellt.

Wegen der stark verschiedenen Grenzdrücke, die je nach Umständen ein Verhältnis von bis zu 1 : 5 aufweisen und aus dem Gebiete mittlerer Drucke neuerdings in die Nähe von 20 at aufzurücken beginnen, ist die in Abschn. 141 gegebene vereinfachte **Berechnung der Speichergröße** durch ein genaueres Verfahren zu ersetzen.

Es bedeute für den Kondensierungsvorgang G das augenblickliche Gewicht des Wasserinhaltes mit der inneren Energie u'; dG das zum Kondensieren gelangende Dampfgewicht mit der (Überhitzungs-) Temperatur $T_{ü}$, dem Wärmeinhalt $i_{Tü}$, dem Rauminhalt $v_{Tü}$. Der Druck p leistet die Arbeit $Ap(v_{Tü} - v')$ und die Energiegleichung lautet

$$G u' + dG\, u_{Tü} + dG\, A p\, (v_{Tü} - v') = (G + dG)(u' + du') \quad \ldots \ldots \ldots (1)$$

oder, da

$$i_{Tü} = u_{Tü} + A p v_{Tü}$$

nach Weglassung der unendlichen kleinen höherer Ordnung

$$dG\,(i_{Tü} - i') = G\, du' \quad \ldots \ldots \ldots (2)$$

Diese Gleichung kann **graphisch integriert** werden, indem $i_{Tü} - i'$ durch die Betriebsumstände als Abhängige von u', d. h. von T gegeben sein wird, also

$$\int \frac{dG}{G} = \int \frac{du'}{(i_{Tü} - i')} \quad \ldots \ldots \ldots (3)$$

ermittelbar ist. Bei der Wiederverdampfung gilt, wie man leicht ableitet, wieder Gl. (2), mit der Änderung, daß man den Dampf als trocken gesättigt ansehen kann, also links i'' einzusetzen ist, und mit $i'' - i' = r$

$$r\, dG = G\, du' \qquad \text{oder} \qquad \int_a^e \frac{dG}{G} = \int_a^e \frac{du}{r} \quad \ldots \ldots \ldots (4)$$

entsteht. Da man $r = a - bt$; $du' = c\,dT$ mit konstantem c setzen kann, so ist die **Integration angenähert ausführbar** und liefert mit a und e als Zeichen für Anfang und Ende

$$\lg n \left(\frac{G_e}{G_a}\right) = \frac{c}{b} \lg n \left(\frac{r_a}{r_e}\right) \qquad \text{oder} \qquad \frac{G_e}{G_a} = \left(\frac{r_a}{r_e}\right)^{\frac{c}{b}} \quad \ldots \ldots \ldots (5)$$

Die **Überhitzungswärme** bewirkt, daß auf 1 kg kondensierten Dampf ein etwas größeres Gewicht wieder verdampft werden kann; das Verhältnis ist

$$\frac{d\,G_{verd}}{d\,G_{kond}} = \frac{i_{ü} - i'}{i'' - i'} \quad \ldots \ldots \ldots (6)$$

Beträgt die Drucksenkung dp at, so ist nach (4)

$$\frac{dG}{dp} = \frac{Gc}{r}\left(\frac{dt}{dp}\right) \quad \ldots \ldots \ldots (7)$$

Setzt man $G = 1000$ kg, so stellt dieser Ausdruck die „Speicherfähigkeit" für 1 cbm und 1 at Druckabfall dar. Zahlenwerte hierfür wie auch für $G_a - G_e$ auf je 1 cbm Anfangsinhalt gerechnet, bei größeren Drucksenkungen finden sich in Abb. 20[1]) dargestellt.

Zeitlicher Verlauf des Speicherzustandes. Wir betrachten den Fall, daß der Speicher sich in eine mit **Drosselregelung** versehene Turbine entladet. Seine Zustandsänderung ist durch folgende im allgemeinen graphisch gegebene Beziehungen bestimmt:

1. Die Schaulinie der augenblicklichen **Belastung** N in PS_e abhängig von der Zeit τ (in Stunden gerechnet)

$$N = f(\tau) \quad \ldots \ldots \ldots (8)$$

2. Der **Dampfverbrauch** für die effektive PS-st in kg

$$C = f_1(N) \quad \ldots \ldots \ldots (9)$$

3. Der **Druck** p_l von dem 1 Leitrad der Turbine

$$p_l = f_2(N) \quad \ldots \ldots \ldots (10)$$

[1]) Aus Th. Stein: „Der erste Ruths-Dampfspeicher in Deutschland". Stahl und Eisen 1922, Nr. 24.

4. Die durch die **Entladung** vom Anfangsdruck p_a bis zum Speicherdruck p_s frei werdende **Dampfmenge** D in kg, die sich aus Gl. (5) durch Einführung der Sättigungsdrücke an Stelle von r (graphisch) in der Form

$$D = G_a - G = G_a f_3(p_s) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (11)$$

darstellen läßt.

5. Die **Entladungsgleichung** für die Zeit $d\tau$, während der die Leistung N die Dampfmenge $NCd\tau$ verbraucht, so daß

$$dD = NCd\tau,$$

oder

$$D = \int_0^\tau NCd\tau = f_4(\tau) \quad \ldots \ldots (12)$$

sein muß. Die Gleichsetzung von (11) und (12) ermöglicht es, den Speicherdruck p_s als abhängige von G_a und τ, d. h. als

$$p_s = f_5(G_a, \tau) \quad \ldots \ldots \ldots (13)$$

graphisch zu ermitteln. Es muß nun für alle Zeiten der Speicherdruck größer sein als der Druck vor dem einen Leitrad der Turbine:

$$p_s > p_t \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (14)$$

Man wird also p_s gemäß Gl. (13) mit einem versuchsweisen G_a berechnen und dieses so lange abändern, bis Gl. (14) erfüllt ist. Statt dessen kann man auch, nach dem Vorgang von Bäckström, diejenige Größe von G_a suchen, die bei der Entladung auf den jeweiligen Turbinendruck p_t gerade das erforderliche Gewicht D liefert. Zu diesem Zweck wird man $p_s = p_t$ setzen und mit Hilfe von Gl. (10) und (8) durch die Zeit, als

$$p_t = f_6(\tau) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (15)$$

ausdrücken. Dann ist nach Gl. (11) $G_a = D/f_3(p_t) = D/f_7(\tau)$ und mit Gl. (12) schließlich

$$G_a = \frac{f_4(\tau)}{f_7(\tau)} \quad \ldots \ldots \ldots (16)$$

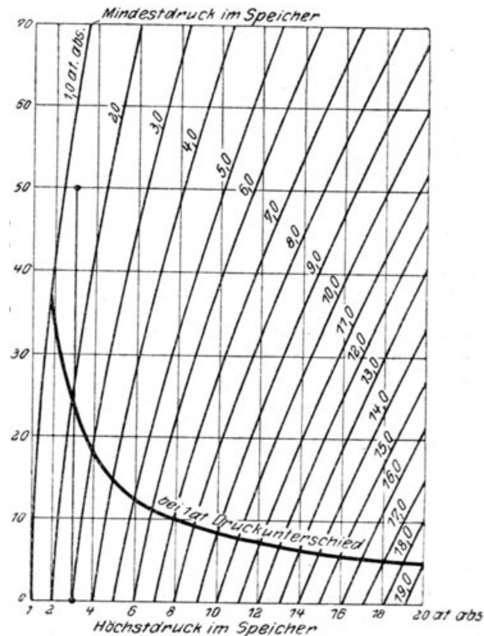


Abb. 20. Speicherungsfähigkeit in kg Dampf für 1 m³ Wasserinhalt.

als Zeitfunktion bekannt. Der Größtwert hiervon liefert die Ausführungsgröße des Speichers.

Der **thermodynamische Verlust** durch die Drosselung vom Drucke p_s auf p_t bestimmt sich, falls Δs die zugehörige Entropievermehrung bedeutet, zu

$$AZ = \int_0^D dD\, \Delta s T_0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (17)$$

wo T_0 die tiefste, also etwa die Kondensatortemperatur bedeutet.

Die Anordnung des Speichers hängt davon ab, ob die Anlage als

a) reines Kraftwerk,
b) Kraft- und Wärmewerk,
c) reines Wärmewerk

anzusehen ist. Mit Rücksicht auf die Energieverwertung allein ist in den beiden ersten Fällen das anzustrebende Ziel, tunlichst allen Gebrauchsdampf auf möglichst verlustlose Weise zur Arbeitsleistung heranzuziehen. Dies setzt eine gründliche Kenntnis und **messende Untersuchung** des Fabrikationsganges voraus, die eine Schaubilddarstellung der Vorgänge ermöglicht. So möge gemäß Abb. 20a Linie a die mittlere Kesselleistung in kg/st darstellen, von welcher ein Teil in einer Hochdruckabteilung unmittelbar aufgebraucht wird, so daß für den Niederdrucknetzbedarf die durch die Ordinaten der Linie b dargestellten Mengen verfügbar bleiben. Aus dem ermittelten Kraftbedarf ergibt sich nach Wahl des Entnahmedruckes der Dampfverbrauch der Hochdruckturbine z. B. gemäß Linie d, während Linie c den gesamten Niederdrucknetzbedarf darstellen möge. Man erkennt alsdann, daß im Anfange der N-Bedarf größer ist als die verfügbare Menge, so daß die lotrecht schraffierten Mengen durch Entladen des Speichers beschafft werden müssen. Vom Punkte B_1 an überschreitet auch der H-Turbinenbedarf die verfügbare Dampfmenge, das Fehlende wird dem Speicher entnommen und der N-Leitung zugeführt. Von C_2 an kann die N-Leitung nicht allen HT-Abdampf aufnehmen, also muß der wagerecht schraffierte Teil kondensiert werden, wobei der Verbrauch wegen höheren Wärmegefälles kleiner wird, als der punktiert angedeutete Verbrauch der HT allein gewesen wäre. Selbstverständlich wäre es Aufgabe des Betriebs-

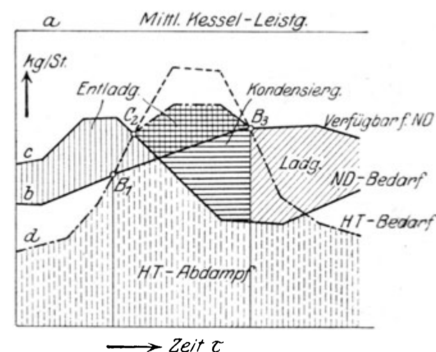


Abb. 20a. Schaubild der Speicherladung und Entladung.

leiters, sich vor allem nach Möglichkeiten umzusehen, diese **Kondensierung überhaupt zu vermeiden.** Von B_3 an genügt der verfügbare Dampf, um die Leistung in der *HT* zu erzeugen. Der Überschuß über den *ND*-Netzbedarf, schräg schraffiert, wird zum Aufladen des Speichers benutzt usw. Man sieht, daß die **Steuerung** der Turbine und des Speichers sich verwickelt gestalten, insbesondere wenn man auch noch die **Drosselverluste beim Auf- und Entladen des Speichers vermeiden will.** Die Turbinensteuerung müßte den Speicher dann beim Aufladen der Reihe nach **auf Stufen mit höherem Druck schalten,** oder man müßte die Hochdruckturbine, an die der Speicher etwa angeschlossen ist, mit **wachsendem Gegendruck** arbeiten lassen, aber unter Vermeidung von ungünstigen Verhältnissen im Niederdruck. Ausschlaggebend ist jedoch neben der Wirtschaftlichkeit auch die Betriebssicherheit und Einfachheit, die im allgemeinen **einfachere Lösungen** bevorzugen.

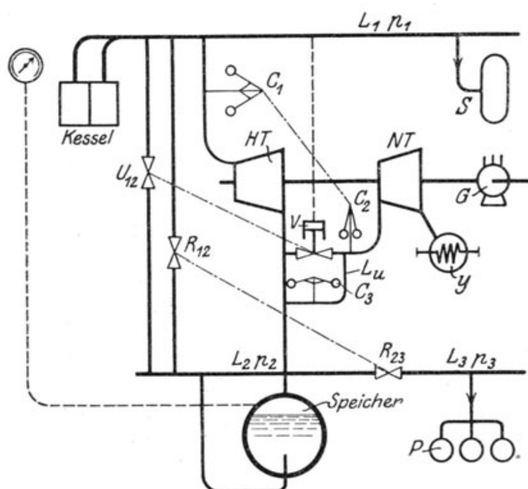


Abb. 21. Speicherschaltung für ein Kraft- und Wärmewerk.

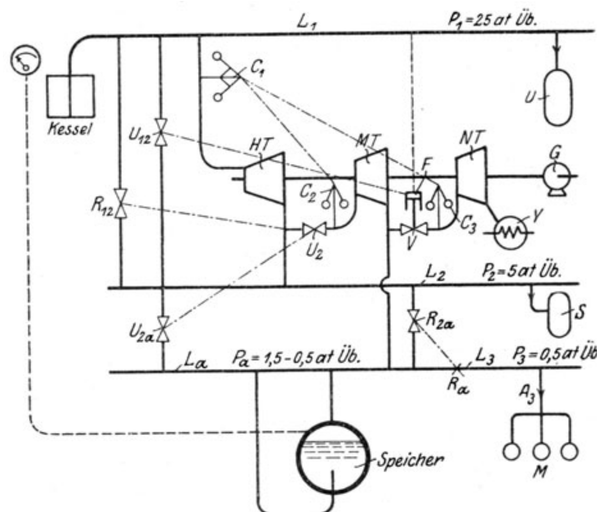


Abb. 22. Speicherschaltung bei drei Verbrauchsnetzen.

Als **Beispiel** hierfür führen wir in Abb. 21 nach den Hauptpatenten[1]) der Aktiebolaget Vaporakkumulator in Stockholm die Schaltung für ein **Kraft- und Wärmewerk** vor. Darin bedeuten

H und *N* die Hoch- und Niederdruckseite einer Entnahmeturbine.
G, *Y* Stromerzeuger und Kondensator.
S und *P* Dampfverbrauchstellen mit hohem und niederem Druck p_1, p_3.
V Das Überströmventil, welches unter dem Einfluß des Reglers C_2 und des Druckes p_1 steht, so zwar, daß bei steigendem Druck ein federbelasteter Kolben das Ventil mehr schließt.
R_{12}, R_{23} Druckminderungsventile, die auf gleichbleibenden Gegendruck p_2 bzw. p_3 eingestellt sind, d. h. bei abnehmendem Gegendruck öffnen.
U_{12} Gesteuertes Überströmventil, welches bei steigendem Kesseldruck p_1 öffnet.
L_u Umgehungsleitung, die mittels Reglers C_3 bei stärker gesunkener Drehzahl Dampf zum Niederdruck gelangen läßt.

Die Gegenwart der Niederdruck-Turbine bedeutet, daß der Kraftbedarf der Anlage zeitweise höher ist, als mit dem Verbrauchsdampf in einer reinen Gegendruckturbine gewonnen werden kann. Die **Wirkungsweise** nach einer Störung der Beharrungszustandes ist die folgende.

a) Abnahme der Verbrauches in *S*.

1. Der Kesseldruck p_1 wächst,
2. Ventil *V* schließt, die Drehzahl sinkt,
3. Regler C_1 öffnet,
4. es strömt mehr Dampf in die *HT*,
5. Gegendruck p_2 steigt,
6. der **Speicher wird geladen.**

Ist der Überschuß bedeutend, so wird *V* ganz schließen, U_{12} öffnen, es gelangt Kesseldampf unmittelbar zur Aufspeicherung. Sollte indessen der Kraftbedarf gleichzeitig wachsen, und sollte trotz voller Öffnung von C_1 die *H*-Turbine außerstande sein, die Leistung herzugeben, so öffnet C_3 die ursprünglich nicht vorgesehen gewesene Leitung L_u und versieht die *NT* mit Dampf.

b) Zunahme der Leistung.

1. Die Drehzahl sinkt,
2. C_1, C_2 öffnen,
3. p_1 sinkt,
4. *V* öffnet,
5. der **Speicher entladet sich** in die *NT*.

[1]) D.R.P. 351590 v. J. 1921 und 334189 v. J. 1919.

Um p_1 möglichst wenig zu ändern, sollte offenbar C_2 empfindlicher, d. h. astatischer als C_1 sein und zugleich V beeinflussen.

c) Zunahme des Dampfverbrauches in *P*.

1. p_3 sinkt,
2. R_{23} öffnet,
3. angenommen, der Speicher entlade sich, so sinkt auch p_2,
4. *NT* erhält weniger Dampf, die Drehzahl sinkt,
5. C_1, C_2 öffnen, p_1 sinkt, V öffnet,
6. *HT* erhält um so viel mehr Dampf als erforderlich, um den info'ge tieferen p_2 entstehenden Ausfall der Leistung zu decken.

Die umstehende Erläuterung wird die verwickeltere Anordnung Abb. 22 verständlich machen. Es sind **drei Entnahmestellen** mit den Drücken p_1 p_2 p_3 vorgesehen, der **Speicher wird an die Mitteldruckturbine** angeschlossen. Die Dampfturbine hat grundsätzlich die in Abb. 883 dargestellte Bauart, mit Ersatz der im Schema Abb. 882 angedeuteten einfachen Druckregelung durch entsprechende Organe. Die gestrichelten Linien bedeuten gegenseitige Abhängigkeit; z. B. soll bei sinkendem Kesseldruck zuerst U_{12} schließen, dann V öffnen usw.

Für **reine Kraftwerke** hat die **Allgemeine Elektrizitätsgesellschaft**, Berlin, eine besonders einfache Lösung zur Ausführung gebracht[1]).

In Eisen-Hüttenwerken, die man vorerst ins Auge fast, können Schwankungen des Dampfverbrauches, die sich bloß auf Minuten erstreken, durch den Wasserinhalt der Kessel ausgeglichen werden. Umgekehrt zeigt sich, daß der Ausgleich der Leistung über eine Tag- und Nachtschicht zu unförmlichen

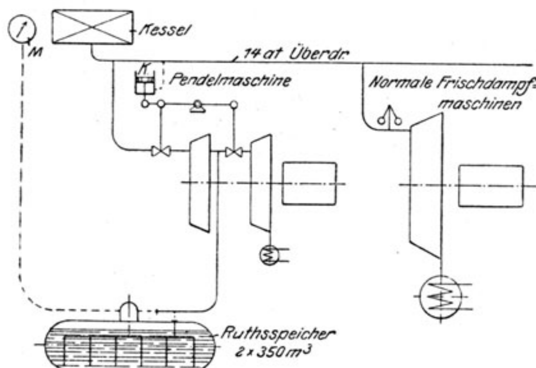


Abb. 23. Speicherschaltung der A.E.G. mit „Pendelturbine".

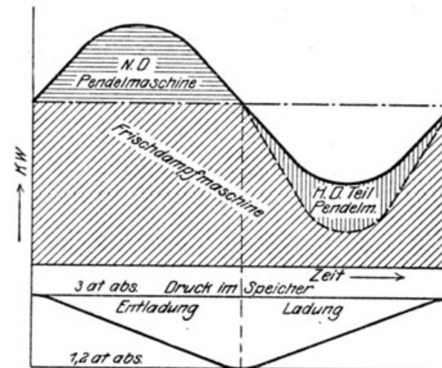


Abb. 24. Arbeitsverteilung bei der A.E.G.-Schaltung.

Speicherabmessungen führt. Daher wird vorgeschlagen, **nur die Stundenschwankungen auszugleichen,** damit die Heizer Zeit erhalten die Feuerung ohne Überstürzung dem neuen Beharrungszustand anzupassen. Ferner wird mit Recht als ungünstig hingestellt, da verhältnismäßig kleine Schwankungen des Kraftbedarfes auszugleichen sind, den gesamten Betriebsdampf dem Regelvorgang zu unterwerfen; vielmehr wird vorgeschlagen, eine **Zusatzmaschine** aufzustellen, **die allein mit dem Speicher verbunden wird** und während der Zeit des Dampfüberschusses vom Hochdruckteil aus den Speicher auflädt und ihn während des höchsten Arbeitsbedarfes durch den Niedertruckteil entlädt. Abb. 23 veranschaulicht die Schaltung einer solchen **„Pendelturbine"** mit gleichzeitiger Andeutung der **Steuerungsart.** Unter Beibehaltung der Koppelung von Einlaß- und Überströmventil, wie in Abb. 872 dargestellt, wird der Fliehkraftreglerangriffspunkt durch einen festen Drehpunkt ersetzt und der Druckregler, statt durch den Zwischendruck, durch den Kesseldruck betätigt. Wenn dann bei gleichbleibender Kesselheizung die Belastung des Werkes zunimmt, so wirkt die Steuerung wie folgt:

1. Drehzahl sinkt,
2. Hauptturbine öffnet mehr,
3. Kesseldruck sinkt,
4. Druckregler schließt an der *HT*, öffnet an der *NT*,
5. Pendelturbine verbraucht weniger Frischdampf, und der **Speicher wird entladen.**

Fände eine **„Überregulierung"** statt, so würde die Drehzahl wieder etwas steigen, die Hauptturbine würde etwas entlastet usw. bis zum neuen Beharrungszustand. Moderne Regler dürften bei genügenden Schwungmassen imstande sein den Übergang stetig, d. h. aperiodisch zu bewerkstelligen.

Die Arbeit verteilt sich auf die Haupt- und auf die Pendelturbine nach Abb. 24 (bei der man jedoch die Abszissenachse weit tiefer zu denken hat), so daß der Hauptturbine nicht eine unveränderliche **„Grundlast"** zufällt, sondern so, daß sie während der Entladezeit des Speichers nicht unerheblich entlastet werden muß.

---

[1]) Vgl. Stein a. a. O. und F Münzinger, Ruths-Wärmespeicher in Kraftwerken. Berlin 1922. Diesen Quellen sind Abb. 1123 und 1124 entnommen.

Gesteuerte Überström- und Druckminderungs-Ventile.

Die Sicherheit des Speicherbetriebes wird in hohem Maße gestützt durch die vorzügliche Durchbildung der Ruthsschen gesteuerten Ventile, wovon eines für **Druckminderung** in Abb. 25 gestellt ist.

Wenn der Druck hinter dem Ventil wächst, so wird durch die Manometer-Membranen *q* der gabelförmige Hebel *a* nach rechts ausgelenkt, die Durchflußöffnung *x* vergrößert, dem bei *i* gedrosselten Drucköle der Abfluß erleichtert, so daß Kolben *b* sich senkt, das Steueröl durch *n* entweichen kann und Ventil *g* durch Feder *o* mehr geschlossen wird.

Man kann das Minderungsventil **zugleich durch den Druck vor demselben beeinflussen,** so daß es zugleich zum gesteuerten Durchflußventil wird. Zu diesem Zwecke wird nach Abb. 26 der gleiche Hebel *a* wie in Abb. 25 durch den Druck p_1 vor dem Ventil mittels Membrane *A* beeinflußt; der Druck hinter dem Ventil wirkt bei einer Zunahme auf die Membran *B*, deren fest verbundener Stift mittels eines Bügels, nachdem ein Spiel zurückgelegt ist, Hebel *a* nach rechts ausschwingen und so daß Ventil wie bei Abb. 26 dem Sitze sich nähern läßt. Ist jedoch die Steigerung von p_1 größer als die von p_2, so wird hierbei nur Feder *G* komprimiert, Hebel *a* bleibt nach links ausgeschwenkt, das Ventil bleibt für die Überströmung geöffnet.

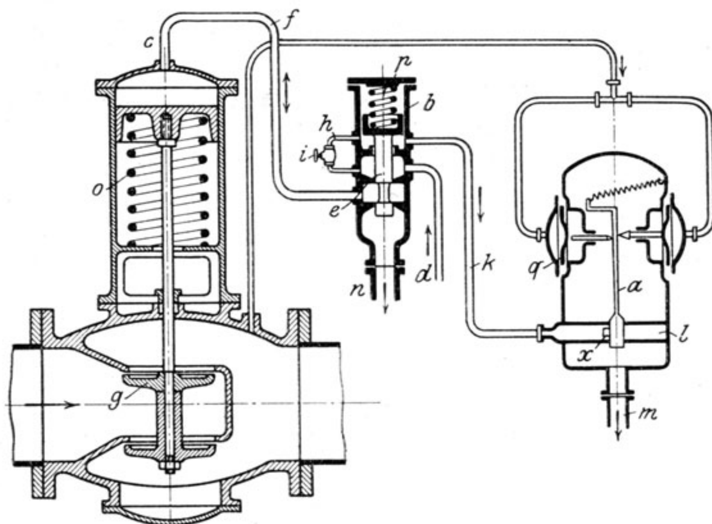


Abb. 25. Ruths'sches Druckminderungs-Ventil.

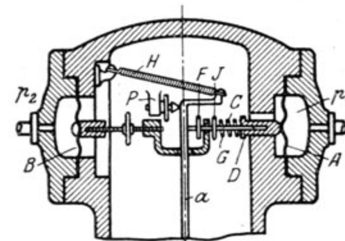


Abb. 26. Verbundminderungs-Ventil.

Die Ventile sind so empfindlich, daß der vorgeschriebene Druck **innerhalb ± 0,01 at unveränderlich bleibt.**

Wirtschaftlichkeit der Speicheranlage.

Über die Wirtschaftlichkeit kann nur nach sorgfältiger Untersuchung der Verhältnisse in jedem Einzelfall geurteilt werden. Münzinger gibt (a. a. O.) folgende Vergleichswerte für ein reines Kraftwerk mit einer mittleren Verbrauchskurve wie etwa bei den Berliner Elektrizitätswerken[1]) mit 4000 kW mittlerer, 8000 kW Spitzenleistung.

Fall	I	II	III
Kesselzahl von je 2000 kW-Leistung	4	3	2
Speichervermögen . . . . . kW/st	0	4350	25000
Kohlenverbrauch in . . . . v. H.	113,6	105,5	100

Für ein **Spitzenkraftwerk,** unter der Annahme, daß die auf 10000 kW erhöhte mittlere Leistung durch ein Fernwerk geliefert, und nur die darüber hinausragenden Spitzen durch ein Dampfkraftwerk gedeckt werden sollen, findet Münzinger die durch Abb. 26a dargestellten Verhältnisse. Da das Spitzenwerk von rd. 9 Uhr abends bis 7 Uhr früh stille steht, so war ein bedeutender Einfluß des Speichers zu erwarten. Die besten Verhältnisse ergaben sich bei der Aufstellung von 3 Kesseln zu 1600 kW-Leistung bei 10000 kW Spitzenbedarf. Die Ersparnis würde bei angemessener Abschreibung und Verzinsung des Anlagekapitals jährlich 10 v. H. Überschuß ergeben.

Weitere Anwendungsmöglichkeiten des Ruths-Speichers.

a) Augenblicks-Reserve in hydroelektrischen Werken, wie eine in Malmö ausgeführt. Dort vermögen die Speicher den Bedarf für $^3/_4$ Stunde zu decken, während welcher Zeit die Kessel aufgeheizt werden können. Die Strahlungsverluste werden durch Dampf aus einem mit Nachtstrom gespeisten Elektrokessel ersetzt.

---

[1]) Vgl. Guillaume, Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1915, S. 263, die Kurve für Oktober.

b) Speicherung der Gasenergie in Hüttenwerken. Etwaige Gasüberschüsse werden zur Dampferzeugung im Kessel verwendet, die mit Hilfe von Speichern in Dampfturbinen je nach Bedarf verwertet wird.

c) Höchstdruckwerke. Um die teueren Höchstdruckkessel möglichst auszunutzen, wird man ihnen nach Münzinger zweckmäßigerweise nur die Grundlast zuweisen, während die Spitzen durch eine mit Speicher versehene Mitteldruckanlage gedeckt werden sollen.

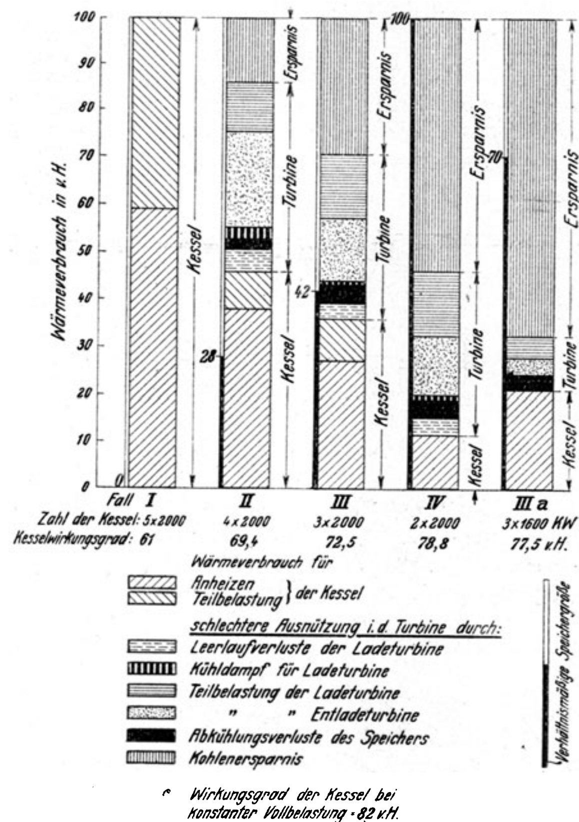


Abb. 26a. Verhältnisse eines Spitzenkraftwerkes.

12. Die Turbinenlokomotive von Ljungström.

Diese Lokomotive, die einen bemerkenswerten Schritt nach vorwärts zur Lösung einer wichtigen Aufgabe bildet, trägt eine im Tender untergebrachte Dampfturbine von 1800 PS Leistung bei 9500 Uml/min, die der Höchstgeschwindigkeit von 110 km/st entsprechen. Betreffs der Einzelheiten des Aufbaues verweisen wir auf die ausführliche Beschreibung im Engineering, Juli und August 1922, der nachfolgende Mitteilungen über die Dampfturbine entnommen sind.

Der Kesseldruck ist 21,0 at abs. Für die Turbine wird man im Betrieb etwa 18 at abs. ansetzen dürfen. Die Überhitzungstemperatur müßte (bei 80 qm Heizfläche des Überhitzers) 400° C erreichen, um bei 0,15 at abs. Luftleere rd. 220 kcal adiabatisches Gefälle zu ergeben, wie die Konstrukteure bei Vergleichsrechnungen voraussetzen. Bei 350° C Überhitzung ergibt sich unter gleichen Umständen ein Gefälle von 209 kcal. Während der Versuche im November 1921 sank das Vakuum nie unter

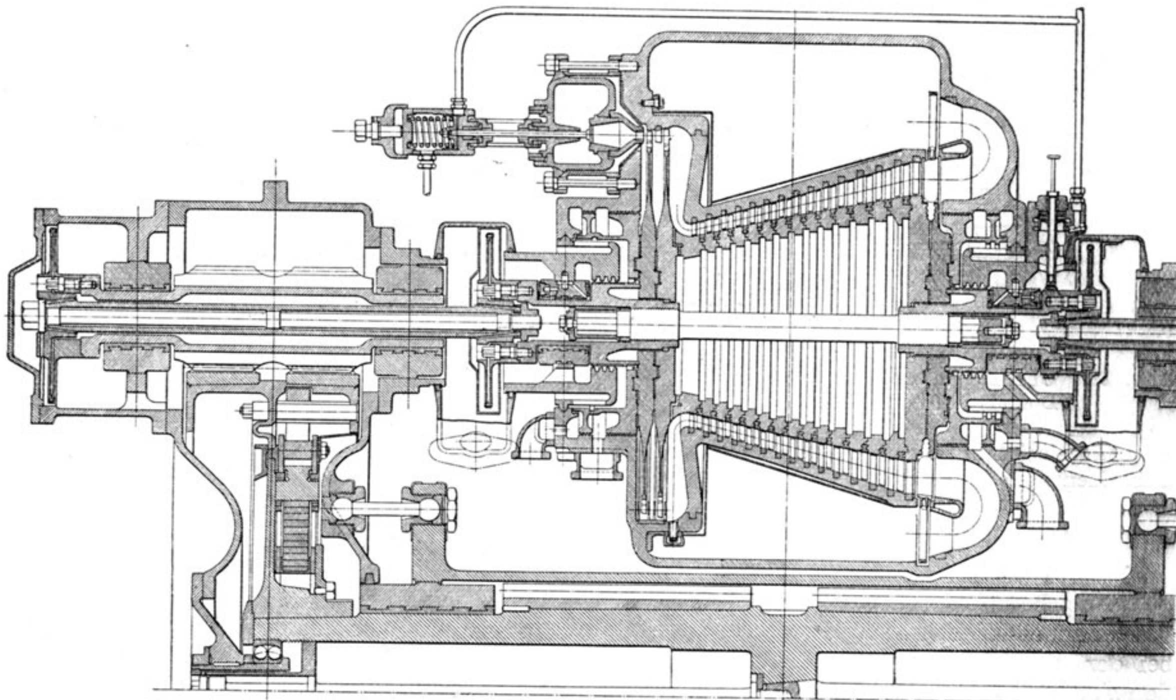


Abb. 27. Turbine der Ljungström-Lokomotive.

80 v. H. Der Heizstoffverbrauch im Betriebe war rd. die Hälfte desjenigen der normalen schwedischen Lokomotive.

Das **Speisewasser** wird in drei Stufen auf 90 bzw. 110, schließlich auf 146° C durch Dampf aus verschiedenen Stufen und Hilfsmaschinen vorgewärmt. Ein **Luftvorwärmer** soll die Gase mit 150° C entlassen und die Frischluft auf 150° C vorwärmen. Demgemäß wird folgende thermische Bilanz aufgestellt:

Brennstoffwärme	v. H.	100	Ventilatoren für den Kondenser	v. H.	3,3
Abgasverlust	„	18	Nutzarbeit	„	14,7
Abwärme im Kondensator	„	60,5	Im Kreislauf, durch Speisewasservorwärmung werden umgesetzt	„	14,1
Leitung und Strahlung	„	3,5	Dgl. durch Luftvorwärmung	„	7,0

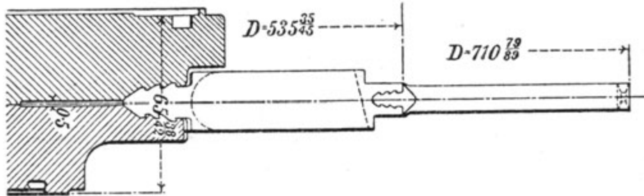


Abb. 28. Doppelschaufel der Ljungströmturbine.

Den Aufbau der Turbine zeigt Abb. 27. Am Eintritt befindet sich ein Doppelrad mit zwei Geschwindigkeitsstufen, an das sich eine **Überdrucktrommel** anschließt. Diese besteht aus so viel einzelnen, ineinandergepaßten Ringen, als es Stufen hat. Die geschmiedeten Ringe erlauben eine höhere Inanspruchnahme, die durch die hohen Umfangsgeschwindigkeiten (etwa 270 m/sek am Geschwindrad, 190 m/sek an der Schaufelwurzel des letzten Ringes und 340 m/sek an der Schaufelspitze des letzten Niederdruckrades) nahegelegt wird. Bemerkenswert ist die Umlenkung des Dampfes in der letzten Stufe durch die Doppelschaufel Abb. 28, damit das Abdampfrohr über die Turbine gestülpt werden könne, wodurch viel Raum gespart wird. Auf eine Unterschaufel entfallen der sich vergrößernden Teilung gemäß **zwei Oberschaufeln.**

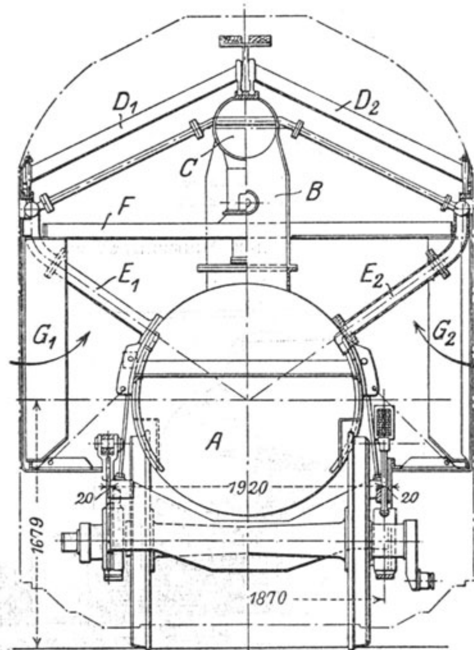


Abb. 29. Oberflächen-Luftkondensator der Ljungström-Lokomotive.

Der Läufer wird durch einen etwa 50 mm starken axialen Bolzen unter Spannung zusammengehalten; die Muttern bilden die Lagerhälse.

Die Kraft wird durch elastische Scheibenkupplungen und verlängerte elastische Wellen auf die Drillinge übertragen (wovon in der Abbildung rechts ein gleichbeschaffener hinzuzudenken ist). Vom großen Zahnrad ist der Kranz und seine elastische Verbindung mit der Welle sichtbar.

Der Oberflächen-Luftkondensator ist in beachtenswerter Weise durchgebildet (Abb. 29). Darin bedeutet A einen zylindrischen Behälter, der die ganze Länge des Tenders einnimmt und stets etwa zur Hälfte mit Kondenswasser gefüllt erhalten wird, um als **Ausgleichbehälter** zu wirken. Durch Steigrohre B gelangt der Dampf zum Verteiler C und in die eigentlichen **Kondensierrohre** $D_1 D_2$, die das Dach des Tenders bilden. Das Kondensat gelangt durch Abfallrohre $E_1 E_2$ zum Behälter A. In der Höhe F sind Ventilatoren mit senkrechter Achse aufgestellt, die die Außenluft bei $G_1 G_2$ ansaugen und zwischen den Kondenserrohren durchpressen. Diese letzteren werden aus gezogenen Kupferröhren zu **flachen Rechtecken von etwa 1,7 × 100 mm lichter Weite** bei 0,75 mm Wandstärke gepreßt und außen mit zahlreichen angestauchten Rippen versehen. Die gesamte Kühlfläche beträgt rd. 1000 qm. Auf 9500 kg Dampf in der Stunde rechnet man 120 cbm Luft in der Sekunde.

Einzelheiten über die eigenartige **Umsteuerung** mittels eines Wechselrades und über die Hilfsmaschinen findet man in der angeführten Quelle.

13. Ablösungserscheinungen in Kreiselverdichtern.

Aus baulichen Gründen wird neuerdings die Ausführung der Kompressorräder mit gleichbleibender lichter Weite, also zur Achse senkrechten Begrenzungsflächen bevorzugt, bei der die Strömungsgeschwindigkeit von innen nach außen abnehmen muß, wenn man den Austrittswinkel nicht stark verkleinern will, was andere Nachteile im Gefolge hat. Da der Laufkanal als Diffusor wirken soll, entsteht leicht eine Strahlablösung, und zwar schon

im normalen Betrieb, noch mehr bei kleiner Lieferung, wo der Strom mit zu kleinem, und ebenso bei Überlastung, wo der Strom mit zu großem Winkel in das Laufrad eintritt. Einem Bericht von Dr. Carrard[1]) über groß angelegte Versuche der Firma **Brown Boveri & Cie.** entnehmen wir folgende Einzelheiten[2]).

An einem Versuchsrad von 550 mm Durchmesser, 20 mm lichter Weite, 30° Eintrittswinkel, 15 Schaufeln wurde bei 4850 Uml/min mittels Staurohren die Stromgeschwindigkeit und Richtung in vielen Punkten des Kanals bestimmt. Bei 0,46, 0,70, 1,14 cbm/sek Luftlieferung ergaben sich die in Abb. 30, 31, 32 dargestellten Schichtenlinien gleicher Geschwindigkeit. Die zugehörigen Stromlinien

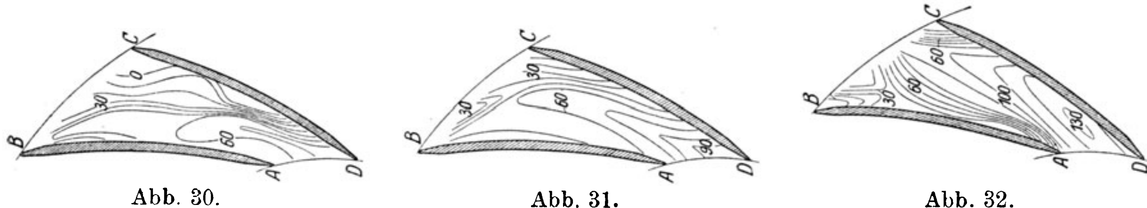


Abb. 30. Abb. 31. Abb. 32.

Schichtenlinien der Strömungsgeschwindigkeit.

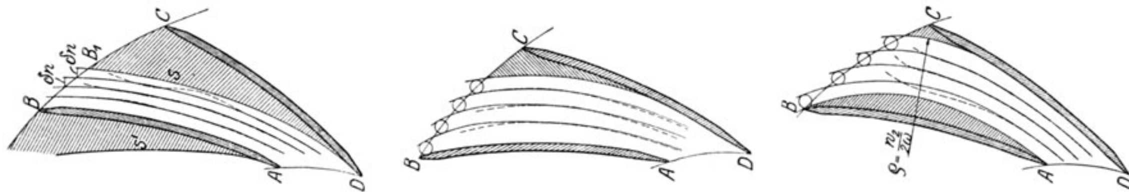


Abb. 30a. Abb. 31a. Abb. 32a.

Stromlinien und Ablösungskeile.

sind in der Abb. 30a, 31a, 32a punktiert eingezeichnet; die festen Linien sind das Ergebnis der von Carrard aufgestellten Theorie der Erscheinung, aus welcher hervorgeht, daß bei zu kleiner und bei zu großer Lieferung eine **Strahlablösung unmittelbar an der Eintrittskante einsetzt** und bis zum Außenrand fortdauert. Auch bei gänzlich stoßfreiem Eintritt löst sich der Strahl etwa in der Mitte der Schaufellänge los. Die schraffierten Gebiete sind Staufelder mit durch Reibung angefachter unregelmäßiger Wirbelbewegung.

Die Wirkung der Ablösung ist, daß sich der **„geführte" Strahl** in einen **„Freistrahl" verwandelt**, mit erheblich größerer relativer Austrittsgeschwindigkeit, als man „theoretisch" vermutet hätte. Hierdurch wird C_{2u} kleiner, die Verdichtung und die Leistungsaufnahme kleiner. Die Reibungsverluste nehmen nach Mitteilung der Firma nicht zu, der Wirkungsgrad erleidet also keine Einbuße. Die **Theorie der Ablösung** entwickelt Carrard in Anlehnung an die Flügelschen Grundformeln, insbesondere Gl. (25) in Abschn. 170. Man kann sich seine Ergebnisse in folgender Weise abgekürzt veranschaulichen. Die Geschwindigkeit in den Wirbelräumen ist klein, man darf also über den Bogen B_1C (Abb. 30a) die Pressung als unveränderlich ansehen; sie ist mithin bei C d. h. B gleich groß wie bei B_1, und so müssen, von Reibungen abgesehen, auch die Geschwindigkeiten in B und B_1 gleich groß sein. Dann aber kann deren Größe auch innerhalb BB_1 nicht stark veränderlich sein und man darf in Gl. (25) Abschn. 170 (indem man n vom Schaufelrücken ab positiv zählt, also das Vorzeichen von n umkehrt)

$$\frac{dw}{dn} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

setzen, woraus sich

$$\frac{w_2}{\varrho_2} - 2\omega = 0 \quad \text{oder} \quad \varrho_2 = \frac{w_2}{2\omega}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

d. h. **ein angenähert unveränderlicher Krümmungshalbmesser der Stromfäden längs der Austrittsfläche** ergibt. Findet die Ablösung unmittelbar an Kante D statt, wie in Abb. 30a, so kann, von Reibung abgesehen, w_2 der Eintrittsgeschwindigkeit gleichgesetzt werden und man kann den Ausströmteil mit Hilfe der Durchflußgleichung unter Einzeichnung von Stromlinien mit dem Halbmesser ϱ_2 entwerfen. Betreffend Einzelheiten verweisen wir auf die angeführte Quelle.

Bei Ablösung in Zwischenpunkten sollte etwas über deren **Abhängigkeit** von **der Divergenz** bekannt sein. Ein Versuch im Prüffeld der Eidgen. Techn. Hochschule mit einem geradlinigen **Kanal** von 20×40 mm an der engsten Stelle bei durchgehend 20 mm Höhe ergab Ablösung, wenn der Er-

[1]) La Technique moderne 1923, Bd. XV, S. 65f.

[2]) Ablösungserscheinungen verwandter Art wurden auch festgestellt von Oertli in seiner Dissertation „Untersuchung der Wasserströmung durch ein Zellenkreiselrad", Zürich 1923.

weiterungswinkel 14° überschritt. Die Wirbelzone reichte bei 270 mm Kanallänge etwa 60 bis 100 mm tief hinein, wenn der Winkel bis 19° stieg. Zwischen 30 bis 60 m/sek Geschwindigkeit erschien bei dem höheren Wert nur eine geringe Vertiefung der Wirbelzone, in welcher stets eine der Wand entlang einwärts gerichtete Strömung wahrnehmbar ist.

Der **Genauigkeitsgrad der Annäherung Gl. (2)** könnte am Beispiel des **voll gefüllten Kanales** nach dem in Abschn. 208 dargelegten Verfahren der **Überlagerung von Stromfunktionen** geprüft werden. Falls man annimmt, daß $\Psi_1 + \Psi_3$ gleichmäßige Geschwindigkeit am Austritt ergeben, bewirkt die Wirbelfunktion Ψ_2 ein starkes Streuen gegen die Mitte hin (siehe Handskizze, Abb. 33), während die Richtung an der Schaufelspitze nicht verändert wird. Der Krümmungshalbmesser wird also in Wahrheit eine vielleicht stärkere Verschiedenheit aufweisen, die indessen heute nicht mit Strenge angegeben werden kann, insbesondere nicht bei Strahlablösung.

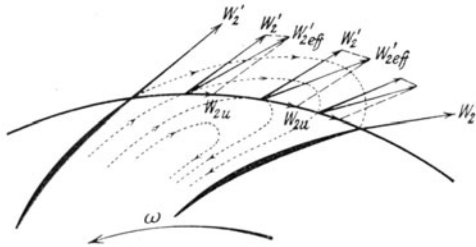


Abb. 33. Streuung der Austrittsgeschwindigkeit infolge der Wirbelfunktion ψ_2.

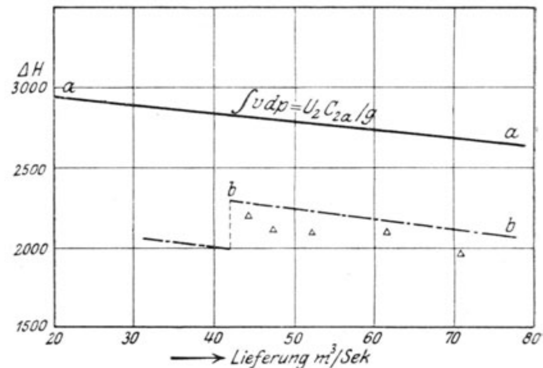


Abb. 34. Theoretische und tatsächliche Verdichtungsarbeit nach der Carrard'schen Theorie.

Die **Ergebnisse der Messungen** von Carrard an einem Rade von 1100 mm Außen-, 600 mm Innendurchm. bei 30° Eintritts-, 60° Antrittswinkel und 37 Schaufeln sind in Abb. 34 veranschaulicht. Die Ordinate ist die Verdichtungsarbeit $\int vdp$ **bis vor den Eintritt in den Diffusor;** Linie a stellt den theoretischen Wert bei voller Kanalfüllung, Linie b dasselbe mit Ablösung nach Carrards Theorie dar, die Dreiecke sind die Beobachtungswerte, die sich, wie ersichtlich, an die theoretische Linie gut anschmiegen.

14. Erwärmung einer durch periodische Spülung gekühlten Gasturbinenschaufel.

Die in Abschn. 205 unter c für eine fein ausgezogene Kante durchgeführte und nur für eine solche gültige Betrachtung läßt sich auf irgendeinen anderen Punkt der Schaufeloberfläche ausdehnen. Der außerordentlich **rasche Wechsel** von Erhitzung durch die Gastemperatur t_g und der Abkühlung durch die Spüllufttemperatur t_s, die während der Zeitdauern z_1 bzw. z_2 einwirken, verändert nämlich die Temperatur der Oberflächenschicht um einen sehr kleinen periodischen Betrag. Man darf also, um die Größe der übergehenden Wärme zu bestimmen, mit einem Mittelwert t_m der Oberfläche rechnen. Die in die Flächeneinheit während z_1 Sekunden eindringende Wärme ist $\alpha_1 (t_g - t_m) z_1$, die während des Spülvorganges abströmende $= \alpha_2 (t_m - t_s) z_2$; aus der Gleichsetzung der beiden folgt

$$t_m - t_s = \frac{\alpha_1 z_1 (t_g - t_s)}{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2} \quad \ldots \ldots \ldots (1)$$

oder

$$t_g - t_m = \frac{\alpha_2 z_2 (t_g - t_s)}{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2} \quad \ldots \ldots \ldots (2)$$

Gl. (2) ist, wie ersichtlich, mit Gl. (19d) in Abschn. 205c identisch, wenn man angenähert $t_s = t_m$ setzt. Aus Gl. (1) leiten wir noch die Beziehung

$$t_m - t_s = \frac{t_g - t_s}{1 + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\left(\frac{z_2}{z_1}\right)} \quad \ldots \ldots \ldots (3)$$

ab, die **besagt, daß bei in allen Punkten der Schaufel gleichem Verhältnis der Übergangszahlen** α **die mittlere Temperatur der ganzen Schaufel die gleiche ist.**

Im andern Fall wird t_m von Punkt zu Punkt veränderlich sein, und es entsteht in der Schaufel ein Wärmestrom, den man in wichtigen Fällen genauer zu untersuchen hätte. Man würde sich zu diesem Zwecke die Schaufel in der Richtung des Stromes als einen „Stab" mit dem Querschnitt F im Abstande l und mit der dem Element dl entsprechenden Oberfläche df_0 vorstellen. In jenes Element strömt, wenn die innere mittlere Temperatur t ist, die man während der Dauer $z_1 + z_2$ wieder als nur wenig veränderlich ansehen würde die Wärme $-\lambda F (\partial t/\partial l)(z_1 + z_2)$ ein, die Wärme $-\lambda F' (\partial t'/\partial l)(z_1 + z_2)$ aus.

und durch die Oberfläche die Wärme $[\alpha_1 z_1 (t_g - t) - \alpha_2 z_2 (t - t_s)]\, df_0$ hinzu. Im Beharrungszustande ist die algebraische Summe $= 0$, d. h.

$$\lambda \frac{\partial}{\partial l}\left(F \frac{\partial t}{\partial l}\right)(z_1 + z_2) + [\alpha_1 z_1 t_g + \alpha_2 z_2 t_s - (\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2)\, t]\, \frac{df_0}{dl} = 0\,, \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

deren (graphische) Integration bei veränderlichem α allerdings recht umständlich ist. Man kann jedoch leicht feststellen, daß, falls α_2/α_1 vom Ort unabhängig ist, der unveränderliche Wert t_m nach Gl. (3) eine Lösung der Gl. (4) ist.

15. Wärmeströmung in Scheiben und Welle dreidimensional behandelt.

Gegenüber den auf „Fadenströmung" beruhenden Entwicklungen des Abschnittes 198 bringt Eichelberg[1]) eine dreidimensionale Lösung der stationären Strömung in beliebigen Umdrehungskörpern. Es wird Achsensymmetrie, d. h. gleiches Verhalten in jeder Meridianebene vorausgesetzt, und die Eigenschaft der **Flächen gleicher Temperatur** und der **„Stromflächen"**, daß sie aufeinander **senkrecht stehen,** bewiesen. Daraus folgt für die Wärmemenge die durch den Kanal $u u'$, Abb. 34a, in der Zeiteinheit strömt mit $t - t' = \Delta t$

$$\Delta q = \lambda\,(2\pi r\,\Delta a)\,\frac{\Delta t}{\Delta b} = \text{konst.} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Zeichnet man nach Schätzung ein Netz von Linien $t =$ konst. und der dazu orthogonalen Trajektorien u ein, so muß nach (5), gleiche Unterschiede Δt vorausgesetzt, für jede Stromröhre

$$r\,\Delta a / \Delta b = \text{konst.}$$

sein, was eine erste Handhabe zur Berichtigung des Netzes ergibt. Ist ein gewisser Ausgleich erreicht, so summiert man die durch eine Temperaturfläche t_α hindurchgehenden Wärmemengen nach (5), indem man längs der abgewickelten Bogenlänge a die Werte $\lambda\, 2\pi r\, \Delta t / \Delta b$ aufträgt und graphisch die Integralkurve des betreffenden Streifens bildet. Die Endordinate hiervon ist die Gesamtwärme Q, die man in eine Anzahl gleicher Teile Δq teilt und auf die Abszisse a zurückprojiziert, so daß die Teilpunkte in das Netz übertragen werden können. Die Wiederholung mit Flächen t_β, t_γ ... liefert weitere Teilpunkte, deren Verbindung berichtigte Stromflächen, die gleiche Wärmemengen Δq abgrenzen, ergibt. An der **Oberfläche,** wo z. B. von Dampf mit der Temperatur t_d bei einer Übergangszahl α Wärme in den Körper mit der Wandtemperatur t_w strömt, muß mit der Bezeichnung der Abb. 34a die Beziehung

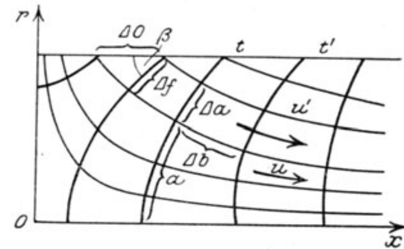


Abb. 34a. Wärmeströmung in Umdrehungskörpern.

$$\alpha\,(t_d - t_w)\,\Delta O = -\lambda \left(\frac{dt}{db}\right)_w \Delta f \quad \text{oder} \quad \left(\frac{dt}{db}\right)_w = -\frac{t_d - t_w}{(\lambda \cos\beta)/\alpha} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

erfüllt sein.

Übergang von einem Beharrungszustand zu einem andern.

Bezeichnen wir mit $x\ y\ z$ rechtwinklige Koordinaten, mit τ die Zeit, und es seien für die beiden Beharrungszustände

$$t_1 = F_1\,(x\,y\,z); \qquad t_2 = F_2\,(x\,y\,z) \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

die (etwa nach obigem Verfahren ermittelten) Temperaturfunktionen. Während des Überganges muß die Temperatur der allgemeinen Gleichung

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a^2 \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right) \text{ mit } a^2 = \frac{\lambda}{\gamma c} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

genügen. Setzt man

$$t = \vartheta + F_2\,(x\,y\,z) \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

so entsteht

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}\right) \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

weil F_2 die rechte Seite für sich $= 0$ macht. Die Temperatur ϑ muß zum Schluß (für $\tau = \infty$) zu Null werden. Wir betrachten den Sonderfall, daß die Umgebung plötzlich die zu t_2 gehörende **tiefere Temperatur** t_{d_2} annimmt, und daß infolge großer relativer Geschwindigkeit überall die Wandtemperatur $t_w = t_{d_2}$ sei. Dann ist während des Überganges an der Oberfläche überall

$$\vartheta = 0 \quad \ldots\ldots \quad (10\text{a})$$

[1]) Forschungsheft d. Ver. deutsch. Ing. Nr. 220 1923 mit wertvollen anderen Lösungen mannigfacher Art.

und die Aufgabe ist gleichbedeutend mit der, **den Abkühlungsverlauf** eines Körpers mit der anfänglichen Temperatur $\vartheta = t_1 - t_2$ auf Null zu ermitteln. Eine Sonderlösung ist jedenfalls durch den Ansatz

$$\vartheta = f e^{-\beta^2 \tau} \quad \ldots \quad (11)$$

gewinnbar, wenn man β^2 gemäß dem Ergebnis des Einsetzens in (10)

$$-\beta^2 f = a^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right) \quad \ldots \quad (12)$$

so bestimmt, daß diese Gleichung eine Lösung für f als Funktion von $x y z$ ermöglicht.

Beim **Übergang zur Beharrung mit der höheren Temperatur** t_1 lautet der Ansatz (9) $t = t_1 - \vartheta = t_1 - f e^{-\beta^2 \tau}$ und führt auf die gleiche Differentialgleichung (10) und Oberflächenbedingungen (10a) bzw. (14) wie im vorigen Fall. Die „Temperaturgrube" $-\vartheta$ wird in genau gleicher Weise „aufgefüllt" wie vorhin der „Temperaturberg" $+\vartheta$ abgetragen worden ist.

Berücksichtigung der Übergangszahl α. An der Oberfläche gilt für jeden Punkt Gl. 6, die man mit $(dt/db) \cos\beta = dt/dn$, unter n die nach außen gerichtete Normale verstanden, als

$$\frac{dt}{dn} = \frac{dt_2}{dn} + \frac{d\vartheta}{dn} = -\frac{t_{\vartheta_2} - t_2}{\lambda/\alpha} - \frac{\vartheta}{\lambda/\alpha} \quad \ldots \quad (13)$$

schreiben kann. Da in der Beharrung die ersten Glieder rechts und in der Mitte einander gleich sind, bleibt einfach

$$\frac{d\vartheta}{dn} = -\frac{\vartheta}{\lambda/\alpha} \quad \ldots \quad (14)$$

als Vorschrift übrig.

Ebene Strömung. Es hängt f in Gl. (12) nur von x, y ab und der **Vergleich mit der Schwingung einer Membrane** zeigt den zu befolgenden Lösungsweg. Bedeutet

w die Auslenkung eines Punktes,
m_1 die Masse der Flächeneinheit,
s die unveränderliche Spannung für die Längeneinheit eines Schnittes,

so ist bekanntlich

$$\frac{d^2 w}{d\tau^2} = c_1^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \text{ mit } c_1^2 = \frac{S}{m_1} \quad \ldots \quad (15)$$

die Schwingungsgleichung. Ist nun $\nu = 2\pi N_{\text{sek}}$ die Kreisfrequenz der Schwingung, so erhält man mit

$$w = \zeta \cos(\nu\tau) \quad \ldots \quad (15\text{a})$$

eine mit (12) übereinstimmende Beziehung, falls man

$$f = \zeta; \quad \beta^2 = \nu^2; \quad a^2 = c_1^2 \quad \ldots \quad (16)$$

setzt.

Die Schwingungsaufgabe ist mittels des **Verfahrens von Rayleigh** unschwer zu lösen. Genau so wie bei der Scheibenschwingung die Fliehkraftarbeit in diesem Nachtrag abgeleitet wurde, findet man für die Arbeit der Spannung S, d. h. die Abnahme der **elastischen Energie zwischen der äußersten** und der **Mittelstellung**

$$\Phi_i = \frac{1}{2} \iint S \left[\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy \quad \ldots \quad (17)$$

In Fällen, wo der Rand auch schwingt, ist die **Arbeit der Randspannung** zwischen den gleichen Lagen

$$\Phi_r = -\frac{1}{2} \int S \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} dy + \frac{\partial \zeta}{\partial y} dx\right) \quad \ldots \quad (18)$$

den Rand entlang integriert. Die **kinetische Energie** endlich ist in der Mittellage

$$\Phi_k = \tfrac{1}{2} \int dm\, (\dot{w})^2_{\max} = \tfrac{1}{2} \int m_1\, dx\, dy\, \nu^2 \zeta^2 = \nu^2 K \quad \ldots \quad (19)$$

Der Energiesatz fordert

$$\Phi_k = \Phi_i + \Phi_r \quad \ldots \quad (20)$$

Wenn beispielsweise der Rand als festgehalten angenommen wird, so ist mit $f = \zeta = 0$ auch $\Phi_r = 0$ und man erhält

$$\nu^2 = \frac{\Phi_i}{K} \quad \ldots \quad (21)$$

Wie bei der Scheibenschwingung sind mindestens drei Annahmen über die Biegungsfläche der Membrane durchzurechnen, um den Mindestwert von ν bestimmen zu können.

Räumliche Wärmeleitung.

Die Grundgleichung (12) kommt bekanntlich in der Theorie der allgemeinen Schwingung von gasförmigen Stoffen vor, die uns hier als „Gleichnis" dienen können und zwar wird man am anschaulichsten ϑ mit dem Gasdruck p identifizieren. Bei kleinen adiabatischen Änderungen gilt $\Delta p / p_0 = k \Delta \varepsilon / \varepsilon_0$ und die Bewegungsgleichungen lauten:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \Delta p}{\partial x}; \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \Delta p}{\partial y}; \quad \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \Delta p}{\partial z} \quad \ldots \quad (22)$$

Die Durchflußgleichung ist

$$\frac{\partial \Delta \varepsilon}{\partial t} + \varepsilon_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2 \Delta \varepsilon}{\partial t^2} + \varepsilon_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial t} + \ldots\right) = 0 \quad . \; . \; (23)$$

Ersetzt man hierin $\Delta \varepsilon$ durch Δp und benützt Gl. 22, so entsteht, wenn außerdem

$$c_0{}^2 = k g p_0 v_0 = \frac{k p_0}{\varepsilon_0} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (24)$$

die Schallgeschwindigkeit bedeutet

$$\frac{\partial^2 \Delta p}{\partial t^2} = c_0{}^2 \left(\frac{\partial^2 \Delta p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Delta p}{\partial z^2}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (25)$$

Der Ansatz

$$\Delta p = f(x, y, z) \cos \nu t \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (26)$$

liefert ein mit (12) übereinstimmendes Ergebnis, wenn man

$$\beta^2 = \nu^2; \quad a^2 = \frac{\lambda}{\gamma c} = c_0{}^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (27)$$

macht und eine **Gasmasse von genau gleicher Form voraussetzt, wie der wärmeleitende Körper.**

Um f und ν zu bestimmen, wird man im Sinne des Rayleighschen Verfahrens die kinetische Energie Φ_k der überdruckfreien Lage ($\nu t = \pi/2$) durch die Abnahme der inneren Energie $U - U_0$ zwischen den Lagen $\nu t = 0$ bis $\pi/2$ und die Oberflächendruckarbeit Φ_{ob} gemäß der **Energiegleichung** (in mkg)

$$U - U_0 = \Phi_{\text{ob}} + \Phi_k \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (28)$$

ausdrücken. Nach der **Wärmegleichung** muß jedoch, da wir keine Wärme zu- oder abführen, für 1 kg an beliebiger Stelle der Gasmasse $du + p dv = dq = 0$ sein. Also ist die **Abnahme der inneren Energie** $U - U_0 = -\int dG \cdot du = \int p d(v \delta G) = \int p d(\delta V) = \int (p_0 + \Delta p_x) d(\delta V) = p_0 \int d(\delta V) + \int \Delta p_x dv \delta G = p_0 d V_{\text{gesamt}} + \int \Delta p_x (v_0 d \Delta p_x) \delta G / k p_0 = p_0 d V_{\text{ges}} + (1/2) \int (\Delta p)^2{}_{\text{Ende}} \, v_0 \delta G / k p_0$. Anderseits ist **die Oberflächenarbeit** $\Phi_{\text{ob}} = \int p \, dO \, dn = p_0 \int dO \, dn + \int \Delta p_x \, dO \, dn = p_0 d V_{\text{gesamt}} + \int \Delta p_x \, dO \, w_n \, dt$, wenn w_n die **Geschwindigkeit normal** zur Oberfläche bedeutet. Diese findet man aus $\partial w / \partial t = -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \Delta p}{\partial n} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial f}{\partial n} \cos \nu t$ zu $w_n = -\frac{1}{\nu \varepsilon_0} \frac{\partial f}{\partial n} \sin \nu t$, also ist der zweite Teil in Φ_{ob} auch $= -\int \frac{f}{\nu \varepsilon_0} dO \frac{\partial f}{\partial n} \cos \nu t \sin \nu t \, dt$ oder nach der Zeit integriert (von $\nu t = 0$ bis $\pi/2$) $= -\frac{1}{2} \int \frac{f}{\nu^2 \varepsilon_0} \frac{\partial f}{\partial n} dO$. Endlich ist zu bilden der Ausdruck der **kinetischen Energie** $\Phi_k = \int \frac{dm}{2} (u^2 + v^2 + w^2)$ für den Zeitpunkt $\nu t = \pi/2$, wobei nach Gl. (22) $u_{(\pi/2)} = \frac{1}{\nu \varepsilon_0} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, ähnlich v, w. Die so gewonnenen Werte in Gl. (28) eingesetzt, ergeben mit $d V = \delta G v_0$ als Raumelement

$$\frac{1}{2} \int \frac{(\Delta p)^2}{k p_0} d V + \frac{1}{2 \nu^2} \int \frac{dO}{\varepsilon_0} \left(f \frac{\partial f}{\partial n}\right) = \frac{1}{2 \nu^2} \int \frac{dV}{\varepsilon_0} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (29)$$

als die **Bestimmungsgleichung für** ν^2. Der Klammerausdruck rechts wird bei Schichtenliniendarstellung von f einfacher als (grad f)^2 geschrieben und ermittelt. Sofern an der Oberfläche die Temperatur $\vartheta = 0$ ist, wird $f = 0$ und die Oberflächenarbeit entfällt. Im andern Fall muß Bedingung (14) erfüllt werden

$$\frac{\partial f}{\partial n} = -\frac{f}{(\lambda / \alpha)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (30)$$

Dies bedeutet eine Veränderlichkeit des Außendruckes, die künstlich herzustellen seine Schwierigkeit hätte, was aber die Schwingung der inneren Gasmasse nicht berührt, und nur auf diese kommt es hier an.

Der Wert von ν^2 muß wieder ein Minimum werden, also sind mindestens drei Annahmen über die Druckverteilung durchzurechnen. Zur vollständigen Lösung gehört theoretisch die Ermittlung der unendlichen Reihe von Oberschwingungen, deren Druckverteilung der „Orthogonalitätsbedingung“ genügen muß, d. h. wenn f_1 und f_2 die zu zwei verschiedenen Schwingungen gehörigen Funktionen in Gl. (26) sind, so muß

$$\int f_1 (x y z) \, f_2 (x y z) \, dx \, dy \, dz = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (31)$$

sein. Die vollständige Lösung wäre

$$\vartheta = a_1 f_1 (xyz) \, e^{-\beta_1{}^2 \tau} + a_2 f_2 (xyz) \, e^{-\beta_2{}^2 \tau} + \ldots \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (32)$$

die mannigfachen Oberflächenbedingungen angepaßt werden kann. Freilich ist die Bestimmung von Oberschwingungen auch graphisch eine umständliche Arbeit; doch dürfte schon eine Abschätzung der tiefsten Schwingungen wertvolle Aufschlüsse über die Wärmeströmung liefern, wie wir an folgendem Beispiel zeigen.

Abkühlung eines Stabes mit T-Querschnitt. Bei großer Länge des Stabes haben wir es mit zweidimensionaler Wärmeströmung zu tun, und wenn man am Rande überall $\vartheta = 0$ voraussetzt, so ist die **Form der Schwingung** mit Hilfe des Membranvergleiches leichter zu erraten. In der Tat zeigt die Anschauung nach Abb. 34b, daß durch eine Schwingung im schmalen Feld die Membrane über dem breiten Feld nur wenig in Mitleidenschaft gezogen wird. Man darf angenähert als erste Grundschwingung die Eigenschwingung der Membrane über dem schmalen Felde ansehen. Um aber die **Schwingungszahl** abzuschätzen, ist wieder der Vergleich mit der Gasschwingung bequemer. Ist l_1 klein gegen L_1, so entspricht die Breite der halben Wellenlänge, und die sekundliche Schwingungszahl $N_{1\,\mathrm{sek}}$ ist = Schallgeschwindigkeit: Wellenlänge, d. h. $= c_0 : (2\,l_1)$. Für die Wärmeströmung ist $c_0 = \sqrt{\lambda/\gamma c}$, also ist

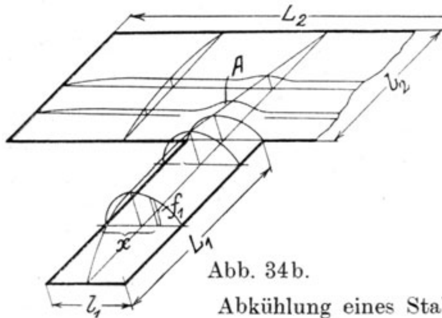


Abb. 34b.

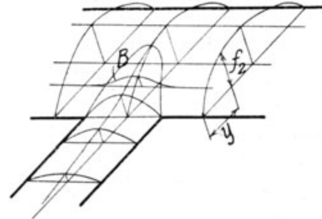


Abb. 34c.

Abkühlung eines Stabes mit T-Querschnitt.

$$N_{1\,\mathrm{sek}} = \frac{\sqrt{\lambda/\gamma c}}{2\,l_1} \quad \text{und} \quad \beta_1^2 = (2\pi N_1)^2 \qquad (33)$$

Die Schwingungsform ist ein einfacher Sinus

$$f_1 = \sin\left(\frac{\pi}{l_1} x\right).$$

In gleicher Weise ist für das breite Feld, gemäß Abb. 34c

$$N_{2\,\mathrm{sek}} = \frac{\sqrt{\lambda/\gamma c}}{2\,l_2} \quad \text{und} \quad \beta_2^2 = (2\pi N_2)^2 \quad \text{und} \quad f_2 = \sin\frac{\pi}{l_2} y \ldots$$

Für die nächsthöheren Schwingungen mit je 2 Knotenpunkten gilt $N_1' = 3\,N_1$; $f_1' = \sin\frac{3\pi}{l_1} x$, ähnlich $N_2' f_2$, so daß die Lösung die Form

$$\vartheta = a_1 \sin\frac{\pi x}{l_1} e^{-\beta_1^2 \tau} + a_2 \sin\frac{\pi y}{l_2} e^{-\beta_2^2 \tau} + a_1' \sin\frac{3\pi x}{l_1} e^{-\beta_1'^2 \tau} + a_2' \sin\frac{3\pi y}{l_2} e^{-\beta_2'^2 \tau} \quad \ldots (34)$$

annimmt, wobei die x enthaltenden Glieder lediglich im schmalen Feld, die mit y lediglich im breiten Feld eine Bedeutung haben. Da die Temperatur an den Schmalseiten in beiden Feldern gegen Null sinkt, was durch Gl. (34) nicht wiedergegeben wird, so gilt die Lösung nur für eine gewisse Entfernung von jenen Rändern, und müßte in deren Nachbarschaft graphisch ergänzt werden. Sind $l_1\, l_2$ nicht klein gegen $L_1\, L_2$, so sind, wie die Akustik lehrt, die Grundschwingungszahlen $N_1\, N_2$ aus den Formeln

$$N_1^2 = \frac{c_0^2}{4}\left(\frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{L_1^2}\right); \quad N_2^2 = \frac{c_0^2}{4}\left(\frac{1}{l_2^2} + \frac{1}{L_2^2}\right) \qquad (35)$$

zu berechnen. Eine Berichtigung für das Übergreifen der Schwingung in das Nachbarfeld, wäre durch schätzungsweise Annahme der Membranbiegung bei A bzw. B in obigen Abbildungen und Einbeziehung der daraus resultierenden potentiellen und kinetischen Energien in die allgemeinen Formeln wohl durchführbar.

16. Die Aussichten der Wärmekraftmaschine.

Die Gasturbine bietet erheblich größere Schwierigkeiten dar, als man nach den ersten Berichten über die mit großen Mitteln unternommenen Versuchsausführungen vermutet hätte. Immerhin wird zähe weitergearbeitet und es ist ein Fortschritt zu verzeichnen. So teilt mir Holzwarth mit, daß die Versuchsturbine und die 500 PS-Ölturbine sich in Betrieb befinden und daß beide einen effektiven (thermischen) Wirkungsgrad von 16 bis 18 v. H. erreicht haben. Die große 5000 kW-Turbine dürfte in absehbarer Zeit in Betrieb kommen. Auch die Stauber-Turbine wird weiter entwickelt und hat die ersten Probeläufe bestanden.

Im übrigen ist ein durchschlagender Erfolg der Gasturbine immer noch an Fortschritte der Hüttenkunde in der Erzeugung bei höherer Temperatur widerstandsfähiger

Stähle gebunden. Wenn Baustoffe hergestellt werden können, die bei 800 bis 1000° C genügende Festigkeit aufweisen, so wird die Gasturbine Wirkungsgrade, die dem Dieselmotor nahekommen, erreichen.

Hochdruck- und Hochüberhitzungs-Dampfanlagen mit hoher Speisewasservorwärmung.

Die maßgebenden Einflußgrößen der Wirtschaftlichkeit sind Druck, Temperatur und Speisewasservorwärmung. Indem man diese auf die höchste Spitze des Erreichbaren treibt, ergibt sich in Verbindung mit einer Zwischenüberhitzung und selbstverständlich höchster Luftleere eine Steigerung des Gesamtwirkungsgrades, welche die Ergebnisse der Gasturbine samt der Gasmaschine überflügelt, und seit dem bahnbrechenden Vorgehen von Schmidt führende Firmen veranlaßt hat, mit Entschiedenheit diesen vielversprechenden Weg einzuschlagen. Besonders durchgreifend wirkt die Vorwärmung durch Anzapfdampf bis zur Siedetemperatur, indem bei Vermehrung der Stufen der Wirkungsgrad sich dem bekannten **Carnotschen** Ausdruck nähert.

Die größte Schwierigkeit bereitet bekanntlich der **Dampfkessel** selbst. Nach dem kühnen Vorschlag von Blomquist, A. B. Atmos, Abb. 35, soll der hochgespannte Dampf in sich drehenden Röhren von rund 305 mm Durchmesser, 3000 mm Länge erzeugt werden, wodurch allseitig gleichmäßige Er-

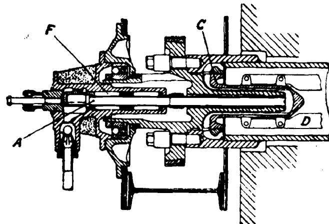
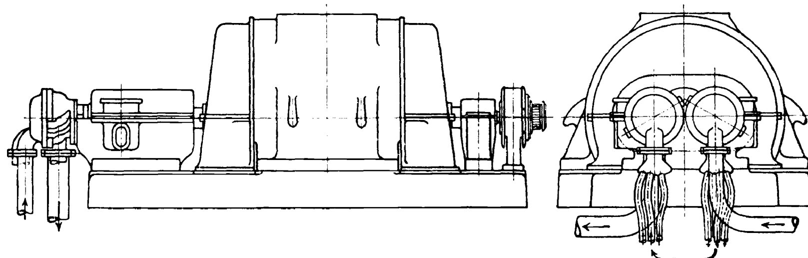


Abb. 35. Einströmende eines Atmoskesselrohres.


Abb. 36. Hochdruck-Vorschalt-Turbinen von B.B.C.

wärmung gewährleistet und in dem durch starke Fliehkraft gegen das Rohrinnere angepreßten Wassermantel die Dampfblasen mittels Konvektionsströmen rasch an die Oberfläche getrieben werden. Man rechnet auf 100000 k cal/m²-st Wärmeaufnahme, 1385 kg/cm² Zugspannung in der inneren Rohrfaser bei 10 mm Wandstärke und 100 at Unterdruck. Eine empfindliche Speisewasserregelung stellt die Dicke des Wassermantels auf 30—50 mm ein.

Seither haben auch Wasserröhrenkessel bauende Firmen die Lieferung von Hochdruckkesseln übernommen, wobei man dem Vernehmen nach den Gefahren des Rohrdurchbrennens unter anderem durch starken künstlichen Wasserumlauf zu begegnen sucht. Die in „Power“ [1]) näher beschriebenen Kessel der Weymouth-Station für 84 at Üb. haben die Bauart normaler Wasserröhrenkessel mit Röhren von 50 mm Außendurchmesser bei 4,5 m Länge. Der Sammler erhält bei 1220 mm Innendurchmesser 102 mm Wandstärke.

Von in Ausführung begriffenen Anlagen ist zunächst zu erwähnen die Weymouth-Station der Edison Electr. Illuminating Co., Boston, die von der **General Electric Co.** errichtet wird[2]) und vorläufig eine vom oben erwähnten Kessel mit 71 at Anfangsdruck gespeiste Turbine von 2000 kW Leistung nebst zwei mit 26,4 at Üb. arbeitende Turbinen zu je 30000 kW umfaßt. Nach dem Verlassen der Hochdruckturbine wird der Dampf abermals auf 370° C überhitzt und den Normalturbinen zugeführt.

In Europa ist die Firma **Brown, Boveri & Cie.** führend vorangegangen durch Übernahme einer Anlage von 60 at Üb., wobei sie in der **Konstruktion der Hochdruckturbine** folgende leitenden Grundsätze befolgt:

1. Der Hochdruckdampf wird in einkränzigen Rädern entspannt, da mehrkränzige schlechteren Wirkungsgrad ergeben. 2. Die Räder werden vollbeaufschlagt, erhalten entsprechend kleinen Durchmesser, müssen daher mittels Zahnradvorgelege an die Hauptturbine oder einfacher an den Stromerzeuger angeschlossen werden. Abb 36 zeigt die außerordentliche Kleinheit der zwei hintereinander geschalteten Hochdruckturbinen im Verhältnis zum Stromerzeuger. Abb. 37 veranschaulicht die gedrungene Bauart der zwei ersten Stufen einer 3000 kW H.-Turbine mit 8000 Uml/min. und Ausdehnung von 100 auf 40 atm. In zwei weiteren Stufen gleicher Größe gelangt man zu 16—20 at. Die Räder sind fliegend auf der Welle des zweifach gelagerten Ritzels angeordnet Die Gehäuse bestehen aus Elektro-Stahlguß; an den großen Wandstärken erkennt man die hohen Pressungen. Bemerkenswert ist die Kühlung der Welle durch bei *C* eingepreßtes Kondensat, welches als dünner Film zugleich gegen den an der *HD*-Stopfbüchse abgehenden Dampf abdichtet und rechts und links abgeschleudert wird. Man erwartet von der Wasserschicht eine zentrierende Wirkung (ähnlich wie von einem Zusatzlager), also eine Erhöhung der kritischen Dreh-

[1]) 10. Juli 1923.

[2]) Power a. a. O.

zahl. Die axialen Dampfdrücke werden auf ein Blocklager übertragen. Das Getrieberad wird ebenfalls fliegend auf die Dynamowelle aufgesetzt. Die Dampfleitungen bestehen, wie Abb. 36 lehrt, aus parallel geschalteten Bündeln von dünnen Röhren, die bei Wärmedehnungen elastisch nachgeben, so daß Gehäuseverspannung vermieden wird.

Man beabsichtigt, die **Regelventile vor dem Hochüberhitzer,** also in Gebiete tieferer Temperatur zu verlegen, wodurch bei Teilbelastungen auch der Druck im Überhitzer vermindert würde. Um Verschleppung der Regelung zu verhüten, sollen Abblaseventile, nach Umständen ebenfalls vor dem Überhitzer, angeordnet werden, die den **Dampfüberschuß** bei Entlastungen unter Umgehung der Hochdruckstufen **in das Abdampfrohr** (oder ins Freie) **leiten.** Die Anwendung von Drucköl macht diese Fernsteuerung zu einer einfachen Aufgabe.

Zweckmäßig ist die **„Vorschaltung" einer neuen Hochdruckanlage zu bestehenden Kraftwerken,** wobei eine entsprechende Zahl der alten Kessel außer Betrieb gesetzt werden kann. In solchen Fällen würde man **der HD.-Vorschaltturbine die Grundlast zuweisen,** so daß die teuren Hochdruckkessel mit gleichbleibender Beanspruchung wirtschaftlich arbeiten können. Der Ausgleich der Spitzen fiele dem Niederdrucknetz zu und könnte sich hierbei, wie oben bereits bemerkt wurde, die Verbindung mit einem Speicher als zweckmäßig erweisen.

Besonderes Augenmerk wird in allen Fällen der Speisewasservorwärmung gewidmet. So soll, um die Endtemperatur in die Nähe der Siedetemperatur zu bringen, zuletzt Anzapfdampf aus der zweiten Radkammer, dann aus dem Abdampfrohr der H.T. entnommen werden. Die erste Anwärmung erfolgt mit dem Abdampf der Hilfsturbine zum Antrieb der Speisepumpe.

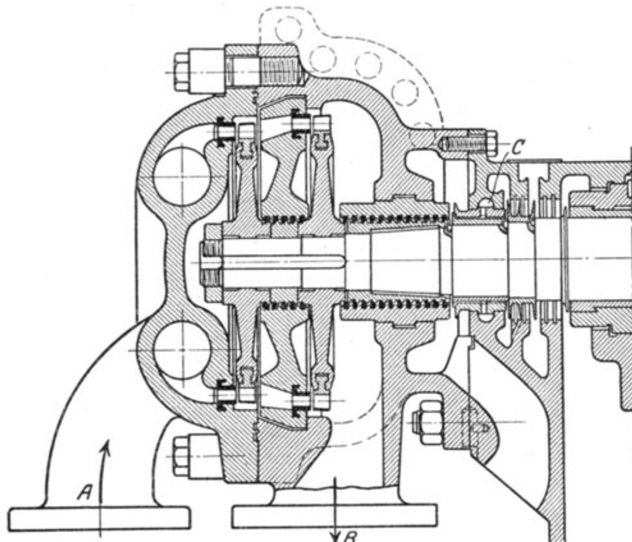


Abb. 37. Erste Stufen einer Vorschalt-Turbine von Brown, Boweri & Cie.

Die Wirtschaftlichkeit einer Anlage mit 100 at abs. Eintrittsdruck für rd. 9000 kW Leistung in einer 6stufigen Hochdruck- und 20000 kW Leistung in einer doppelgehäusigen Normalturbine mit 15 at abs. nach den Voranschlägen der Firma Brown, Boveri & Cie., wobei für die HD-Turbine $\eta_e = 0{,}75$, für die N-Turbine $\eta_e = 0{,}85$ an die Kupplung angesetzt werden, geht aus nebenstehender Zahlentafel (S. 31) hervor, die zugleich einen Vergleich mit dem Voranschlag für die Anlage der Weymouth-Station enthält. Die B.B.C.-Anlage arbeitet mit hochstufiger Speisewasservorwärmung durch Anzapfdampf und mit Luftvorwärmung durch Rauchgase; die amerikanische Anlage läßt letztere weg und verwendet neben Anzapfdampf die üblichen Rauchgasvorwärmer (Economiser).

Die Anschaffungskosten einer Hochdruckvorschaltturbine nebst Kessel in einem bestehenden Niederdruckwerk und die Kosten, die eine Erweiterung der ND-Anlage auf gleiche Leistungsfähigkeit bedingt, werden in einer Studie von Gleichmann[1]) als ungefähr gleich hoch eingeschätzt, so daß die Verbesserung des Brennstoffwirkungsgrades reinen Gewinn darstellt, der bei einer Leistung des ND-Werkes von 10000 kW, die durch die HD-Vorschaltturbine auf etwa 14400 kW erhöht würde ferner bei 0,4 Belastungsfaktor und 35 Goldmark Kohlepreis für die Tonne etwa 0,3 Goldpfennige für die kW/h ausmachen würde. Zu fast dem gleichen Ergebnis gelangt G. A. Orrok[2]), nämlich 0,4 Goldpfennig für die kW/h bei 25 Goldmark für die Tonne. Dieser bekannte Fachmann betrachtet 430° C Dampftemperatur bei 510° C Temperatur der Außenschicht der Überhitzerrohre als die Grenze des im praktischen Betrieb zulässigen und befürwortet den Ersatz der Flanschen durch Längsschweißung der Rohre. Die äußerste Grenze der Hochdrucksteigerung stellt die Ausführung der **Benson Eng. Co.,** London, dar, die nach dem ursprünglichen Verfahren das Speisewasser unter dem kritischen Druck bis zur kritischen Temperatur erwärmen, dann auf 150 at zu drosseln, bei diesem Druck auf 370° C zu überhitzen und in einer HD-Turbine auf 17,6 at abs. zu entspannen beabsichtigte. Da im kritischen Zustand Dampf und Wasser voneinander nicht verschieden sind, können sich keine den Wärmedurchgang behindernde Dampfblasen bilden, also wird die Betriebszuverlässigkeit des Dampferzeugers gehoben, bzw. die Heizfläche kann besser ausgenützt werden. Es entfällt auch der große Dampfsammler, dessen einwandfreie Herstellung derzeit große Schwierigkeiten bietet. Bei Drosselung auf einen Zwischendruck würde jedoch der Dampf eine große Nässe enthalten, deren vollkommene Verdampfung im Überhitzer fraglich ist, so daß neuerdings eine Überhitzung beim kritischen Druck bis so weit geplant wird, daß die nachherige Drosselung das Naßgebiet nicht mehr erreicht.

[1]) Siemens-Zeitschrift 1923, S. 249.

[2]) In der beachtenswerten Studie: The commercial economy of high pressure an high superheat Proc. of the Amer. soc. of mech. Eng. 1923.

Dampfverhältnisse und Wirkungsgrade von Hochdruckanlagen.

Ausführende Firma		B.B.C.	G.El.Co.
Druck vor Hochdruckturbine	at abs.	100	71
Temperatur vor Hochdruckturbine	°C	420	370
Gegendruck der Hochdruckturbine	at abs.	16,6	26,4
Abdampftemperatur der Hochdruckturbine	°C	205	264
Nutzbares Gefälle in Hochdruckturbine	kCal/kg	97,5	57
Leistung der Hochdruckturbine an den Klemmen	kW	9250	5900
Nachüberhitzung des Abdampfes auf	°C	350	370
Druck vor Normaldruckturbine	at abs.	15	26
Temperatur vor Normalturbine	°C	350	370
Gegendruck im Kondensator	at abs.	0,04	(0,033)
Kühlwassermenge für 1 kg Dampf	kg	100	—
Nutzbares Gefälle in Normaldruckturbine	kCal/kg	241	261
Leistung der Normaldruckturbine	kW	2·10000	32000
Vorwärmung des Speisewassers durch Anzapfdampf	°C	260	105
Verhältnis der Frischdampfmenge vor Hochdruckturbine zur Dampfmenge vor Niederdruckturbine und zur Abdampfmenge vor Kondensator		1:0,7583:0,6531	—

Ausführende Firma		B.B.C.	G.El.Co.
In der Kohle zugeführte Energie		100	100
Speisewasserwärme		39,4	13,57
Verluste in der Dampfkesselanlage			
Abgas- und Strahlungsverluste im Kessel, Überhitzer und Nachüberhitzer	v. H.	16,4	16,2
Hochdruckleitungsverluste	»	0,45	0,45
Warmwasserverluste	»	0,95	0,12
Niederdruckleitungsverluste	»	0,70	1,32 (zusammen mit folgender Zeile)
Hilfsvorrichtung der Dampferzeugung	»	1,30	
Kesselanlage insgesamt	v. H.	19,8	18,09
Speisewasserförderung	»	0,71	1,22 (zusammen mit folgender Zeile)
Kondensation und Hilfsantriebe	»	0,46	
Im Kühlwasser abgeführt	»	48,84	55,42
Kondensation insgesamt	v. H.	50,0	56,6
Stromerzeugerverluste	»	1,5	0,17 (?)
Nutzarbeit an den Klemmen des Generators der Vorschaltturbine	»	9,45	4,12
der Hauptturbine	»	20,41	20,98
Abzug für Hilfsantriebe	»	1,16	—
Gesamter Brennstoff-Wirkungs-Grad	v. H.	**28,7**	**25,1**

Zahlenangaben zur *I-S*-Tafel für hohe Drücke.

p_s at abs	t_s °C	T_s °C abs	s' Cal/°C kg	s'' Cal/°C kg	i' Cal/kg	i'' Cal/kg	v' m³/kg	v'' m³/kg	r Cal/kg	$\frac{dp}{dT}$ at/°C	$10^6 \cdot \frac{dv'}{dT}$ m³/kg °C
0,02	17,3	290,3	0,0616	2,0810	17,20	602,2	—	—	585,0	—	—
0,05	32,4	305,4	0,1119	2,0020	32,10	609,2	—	—	577,1	—	—
0,10	45,6	318,6	0,1541	1,9450	—	615,2	—	—	—	—	—
0,25	64,4	337,4	0,2118	1,8706	64,50	623,5	—	—	559,0	—	—
0,50	80,7	353,7	0,2590	1,8140	—	630,6	—	—	—	—	—
1,0	99,0	372,0	0,3095	1,7595	99,12	638,0	—	—	538,9	—	—
1,8	116,3	389,3	0,3547	1,7125	—	645,0	—	—	—	—	—
2,5	126,7	399,7	0,3815	1,6870	127,26	648,5	—	—	521,2	—	—
5,0	151,0	424,0	0,4425	1,6323	—	656,0	—	—	—	—	—
7,5	166,8	439,8	0,4806	1,5995	168,68	660,2	—	—	491,5	—	—
11	183,1	456,1	0,5184	1,5670	—	664,0	—	—	—	—	—
16	200,6	473,6	0,5574	1,5348	204,10	666,2	—	—	462,1	—	—
20	211,3	484,3	0,5822	1,5147	215,3	667,4	0,00118	0,1018	452,1	0,395	1,6
22,5	217,5	490,5	0,5955	1,5041	221,9	667,6	0,00119	0,0906	445,7	0,435	1,7
25	223,0	496	0,6080	1,4945	228,0	667,8	0,00120	0,08166	439,8	0,470	1,77
27,5	228,1	501,1	0,6188	1,4852	233,8	667,75	0,00121	0,0743	433,95	0,507	1,82
30	232,9	505,9	0,6290	1,4767	239,2	667,65	0,00122	0,0681	428,45	0,544	1,9
35	241,5	514,5	0,6471	1,4615	249,0	667,3	0,001235	0,0583	418,3	0,611	2,02
40	249,3	522,3	0,6635	1,4481	257,5	666,6	0,00125	0,0509	409,1	0,677	2,15
45	256,3	529,3	0,6787	1,4357	265,0	665,7	0,00127	0,04525	400,7	0,740	2,3
50	262,8	535,8	0,6925	1,4243	272,3	664,5	0,00128	0,0403	392,2	0,801	2,4
55	268,8	541,8	0,7046	1,4137	279,2	663,3	0,001295	0,0364	384,1	0,862	2,53
60	274,5	547,5	0,7161	1,4039	285,7	662,0	0,00131	0,0332	376,3	0,921	2,68
65	279,7	552,7	0,7272	1,3946	291,8	660,6	0,001325	0,0304	368,8	0,980	2,8
70	284,7	557,7	0,7375	1,3856	297,8	659,1	0,00134	0,0280	361,3	1,037	2,9
80	293,8	566,8	0,7568	1,3688	308,9	655,9	0,00137	0,02406	347,0	1,156	3,15
90	302,1	575,1	0,7746	1,3531	319,0	652,2	0,001395	0,02096	333,2	1,261	3,5
100	309,7	582,7	0,7915	1,3382	329,1	648,2	0,00142	0,0185	319,1	1,367	3,9
120	323,3	596,3	0,8235	1,3091	348,6	638,6	0,00148	0,0139	290,0	1,578	5,05
140	335,3	608,3	0,8546	1,2805	368,1	627,5	0,00155	0,0118	259,4	1,772	6,6
160	345,9	618,9	0,8862	1,2506	388,4	614,1	0,00163	0,00952	225,7	1,966	8,6
180	355,6	628,6	0,9110	1,2180	410,0	597,6	0,00173	0,00760	187,6	2,162	13,1
200	364,4	637,4	0,9583	1,1797	435,4	576,7	0,001885	0,00586	141,2	2,385	26,4
220	372,4	645,4	1,0214	1,1170	476,9	538,6	0,00230	0,00392	61,7	2,645	113,0
224	374,2	647,2	1,0692	1,0692	508,0	508,0	0,00300	0,00300	0		2600,0

Additional material from Dampf- und Gasturbinen,
ISBN 978-3-642-50544-7 (978-3-642-50544-7_OSFO9),
is available at http://extras.springer.com



Zu berichtigende Druckfehler.

Seite	Zeile	Formel	
92	—	—	in Abb. 82 lies $w = w_m$ statt $w = w_n$.
167	5u.6v. unten	—	lies für 1 kg Dampf statt eff. PS.
310	—	6	z' weglassen.
336	27 v. oben	—	mit $\sigma_{r_1} = 0$ statt mit gleichem σ_{r_1} wie vorhin.
337	—	15	lies im Nenner $1 - k_1$ statt $1 + k_1$.
337	—	16	lies im Nenner $1 - k_1$ statt $1 + k_1$.
339	—	25	lies im Nenner x^2 statt x_2.
339	—	26	lies $D' = D\left(\frac{x}{x'}\right)^2$ statt $D' = D\left(\frac{x'}{x}\right)^2$.
407	10 v. oben	—	einschieben Gleichheitszeichen nach $\mu \bar{p} u =$.
908	3 v. unten	—	lies Φ_z statt Φ_2.
909	1 v. unten	—	lies 271 statt 172.
997	—	—	in Abb. 1057a lies $\mathfrak{Q}'_{p3}$ statt $\mathfrak{Q}_{p3}$.
1043	9 v. unten	—	lies für den Rand statt der Rand.
1043	2 v. unten	—	lies Gitter statt Filter.
1046	7 v. oben		lies anzusehen statt anzusetzen.
1047	—	12	lies $\frac{F_{3r}\, c_{3r}}{v_3}$ statt $\frac{F_{3r}\, c_{3r}}{v_r}$.
1049	9 v. unten		lies dimensionslose statt dimensionale.
1052	—	—	Abb. 1094 und 1095 sind miteinander zu vertauschen.
1070	20 v. unten		lies $T_h = \mathfrak{H}_{p_2} T_2 / n' \mathfrak{C}_p'$.
1077	—	—	in Abb. 1098 lies Q_t statt Q_2.